***Семчишин Л. Розв'язування погано обумовлених систем лінійних алгебраїчних рівнянь у моделі леонтьєва / Л. Семчишин // Вісник ТДТУ. — 2009. — Том 14. — № 4. — С. 168-175. — (математичне моделювання.математика. фізика).***

*УДК 518.25*

**Л. Семчишин**

*Чортківський інститут підприємництва і бізнесу,*
*Тернопільський національний економічний університет*

# РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОГАНО ОБУМОВЛЕНИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ У МОДЕЛІ ЛЕОНТЬЄВА

***Резюме.*** *Запропоновано новий підхід до розв'язання погано обумовлених систем лінійних алгебраїчних рівнянь у моделі Леонтьєва. Підраховано арифметичні операції СЛАР при чисельній реалізації алгоритму на ЕОМ. Наведено спосіб обчислення числа обумовленості матриці. Проаналізовано обчислювальну стійкість запропонованого алгоритму розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь у моделі Леонтьєва. Охарактеризовано складність алгоритму та показано його ефективність з точки зору комп'ютерної алгебри.*

***Ключові слова:*** *погано обумовлені системи, число обумовленості матриці, обчислювальна стійкість алгоритму, модель Леонтьєва, складність алгоритму.*

**L. Semchyshyn**

# BADLY CONDITIONAL SYSTEM OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATION IN THE LEONTYEV'S MODEL SOLUTION

***The summary.*** *In the work new approach to the badly conditional systems of linear algebraic equation in the Leontyev's model solution is suggested. Arithmetical operation of the linear algebraic system equation calculation under the algorithm numerical realisation on the ECM is conducted. The calculation method of matrix conditioning is suggested. The calculating steadiness of the linear algebraic system equation solution algorithm in the Leontyev's model is analysed. The algorithm complexity and its effectiveness from the computer algebra point of view.*

***Key words****: badly conditional systems, number of matrix conditioning, the algorithm calculating steadiness, the Leontyev's model, the algorithm complexity.*

**Постановка проблеми.** Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) завжди є одним із актуальних задач обчислювальної математики. Особливо часто їх доводиться розв'язувати під час дослідження економічних процесів. Важливими є дослідження методів, пов'язаних із виникненням, аналізом та розв'язуванням погано обумовлених СЛАР [1], [2], [3]. Як відомо з теореми Кронекера-Капеллі [4], система лінійних рівнянь може мати єдиний розв'язок, нескінченну множину розв'язків або не мати розв'язку взагалі (система несумісна). В останньому випадку задача не позбавлена змісту, бо тоді шукають не розв'язок у звичайному сенсі, а такий набір значень невідомих, після підстановки яких у систему ліві частини "найменше" відхиляються від правих. Слово "найменше" можна інтерпретувати по-різному, різним його інтерпретаціям відповідають метод найменших квадратів, метод найменших модулів та ін [1].

При розв'язуванні СЛАР дуже часто трапляється, що малі похибки правих частин чи заданих коефіцієнтів призводять до великих похибок у розв'язках [5]. Похибки можуть виникати під час вимірювання, обчислення чи заокруглення елементів матриць систем або правих частин. Такі СЛАР називатимемо некоректно поставленими, або погано обумовленими. Така термінологія застосовується ще з часів

Ж.Адамара [1], який вважав вивчення некоректно поставлених задач недоцільним, тому що їх завжди можна після уточнення математичної моделі поставити коректно (розумно).

Нехай обчислювальна задача з початковими даними $A(\lambda)$ розв'язується з допомогою деякого точного алгоритму $g$. Результат $K$ розв'язання задачі запишемо у вигляді $K = g(A(\lambda))$.

При реалізації алгоритму $g$ на ЕОМ всі його операції будуть замінені машинними псевдооопераціями, а сам алгоритм – деяким машинним алгоритмом $K = g_t(A(\lambda))$, результат виконання якого запишемо $X_t(\lambda) = g_t(A(\lambda))$.

Різницю $\Delta = X(\lambda)_t - X(\lambda)$ називають похибкою обчислення на ПЕОМ. Такий метод врахування сумарної похибки заокруглення називають прямим аналізом похибок. Для багатьох числових методів похибки проміжних обчислень у сукупності рівносильні випадку, коли б ті ж методи (в нашому випадку алгоритм $g$) точно розв'язували б кожен свою задачу, попередньо змінивши вхідні дані (наприклад, на $A_t(\lambda)$): $X_t(\lambda) = g(A_t(\lambda))$.

Різницю $K = X_t(\lambda) - X(\lambda)$ називають еквівалентним збуренням, яке також характеризує похибку розв'язання задачі. Останню рівність запишемо у вигляді $X_t(\lambda) = g(A(\lambda) + K)$, $X_t(\lambda)$ можна розглядати як розв'язок тієї ж задачі зі збуреними на $K$ вхідними даними. Для отримання кількісної оцінки впливу похибок заокруглення використовують так званий зворотний аналіз похибок [5].

Для аналізу похибок заокруглення, що виникають на ПЕОМ, використовують методику Дж.Х. Уілкінсона [2].

На практиці часто наштовхуються на такі ситуації: погана обумовленість матриць нормативних коефіцієнтів, велика розмірність задачі, накопичення похибки під час обчислень при знаходженні розв'язків СЛАР у моделі Леонтьєва.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Багато відомих вітчизняних і закордонних вчених займалися проблемами розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Серед них В. Воєводін [6], Є. Тиртишніков [7], Д. Уоткинс [8] та ін. Однак деякі проблеми не мають однозначного розв'язання і потребують уточнення. У роботі М. Недашковського і О. Ковальчук [9] розглянуто комп'ютерні алгоритми для систем лінійних алгебраїчних рівнянь з $\lambda-$матрицями. Особливу увагу приділялено сучасним методам розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, зокрема висвітлено питання, що стосується міри коректності (обумовленості) матриці у працях таких учених як, М.Заборовець, Ф. Левченко, М. Охріменко [1], Г. Цегелик [3], С. Шахно [4], А.Тихонов, В. Арсенин [5], Van Dooren [10] та ін.

Дослідженням моделі Леонтьєва займалися В. Григорків [11], І. Ляшенко, М. Коробова, А. Столяр [12], Н. Чорней [13], I. Papadimitriou [14] та ін. У навчальному посібнику В. Григоркова [11] розглянуто питання моделювання економічних систем на макрорівні. Викладений матеріал стосується балансових моделей міжгалузевих зв'язків (моделі Леонтьєва). Проте у багатьох задачах виникає необхідність розв'язування погано обумовлених систем лінійних алгебраїчних рівнянь у моделі Леонтьєва.

**Метою роботи** є дослідження моделі Леонтьєва, побудова оптимального способу обчислення числа обумовленості матриці, аналіз обчислювальної стійкості алгоритмів розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь у моделі Леонтьєва. Теоретичну та методологічну основу дослідження складають методи оптимізації, економіко-математичне моделювання.

**Дослідження задачі та обґрунтування отриманих наукових результатів**. При розв'язуванні системи лінійних алгебраїчних рівнянь виникають похибки, пов'язані з неточністю початкових даних чи похибки заокруглення. Крім того, майже завжди виникають помилки при обчисленні вже у межах самої задачі (внаслідок неточного виконання арифметичних операцій). Помилки цього типу (так звані обчислювальні) в багатьох випадках у сукупності рівносильні точному розв’язку такої ж задачі, але зі зміненими вхідними даними.

Навіть за умови, що попередні вимірювання та обчислення проводили з високою точністю і для розв’язання задачі вибрано стійкий метод обчислень, помилки вхідних даних, хоча й малі, але все ж будуть. Ці похибки певною мірою впливають на розв'язок систем. Тому фактично замість узагальненого розв'язку системи Леонтьєва [11]

$$X(l) = A(l)X(l) + y(l),$$

де $A(\lambda)$ – матриця розміру $n \times m$, $X(\lambda)$ — невідомий вектор, $y(\lambda)$ — заданий вектор, ми отримуємо розв'язок якоїсь іншої системи зі збуреними елементами [1]

$$X(l) = \bar{A}(l)X(l) + \bar{y}(l).$$

З огляду на це виникає запитання, як похибки вхідної інформації впливають на якість розв'язку системи. Точної відповіді на це запитання немає, тому спробуємо хоча б оцінити вплив похибок вхідної інформації на розв'язок [9]. Запишемо систему

$$X(\lambda) = A(\lambda)X(\lambda) + y(\lambda), \tag{1}$$

або

$$y(\lambda) = \left(E - A(\lambda)\right)X(\lambda)$$

у вигляді $X(\lambda) = \dfrac{y(\lambda)}{E - A(\lambda)}$, де $E$ – одинична матриця і $E - A(\lambda) \neq 0$.

Вважаючи $A(\lambda)$ і $y(\lambda)$ змінними і продиференціювавши цю рівність, отримаємо $dX(\lambda) = (E - A(\lambda))^{-1} dy(\lambda) - y(\lambda)$. Розглянемо тепер теорему [1].

**Теорема.** Якщо $A$ – матриця порядку $n \times n$ і $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – власні значення цієї матриці, то

$$\max_{1 \le i \le n} |\lambda_i| \le \|A\|. \tag{2}$$

**Доведення.** Нехай $\lambda$ – будь-яке власне значення матриці $A$. Тоді існує нульовий вектор $X$ такий, що $Ax = \lambda x.$ Тому $\|Ax\| = \|\lambda x\|$, або $\|Ax\| = |\lambda| \cdot \|x\|$. Із визначення норми матриці випливає, що $\|Ax\| \le |A| \cdot \|x\|$. Звідси $|\lambda| \cdot \|x\| \le |A| \cdot \|x\|$, або $|\lambda| \le \|A\|$.

Отже, якщо $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – власні значення матриці $A$, то для них виконується співвідношення (2), що і треба було довести.

На основі даної теореми запишемо

$$\|dX(\lambda)\| = \left\|(E - A(\lambda))^{-1}\right\| \cdot \|dy(\lambda) - y(\lambda)\| \le \left\|(E - A(\lambda))^{-1}\right\| \cdot \|dy(\lambda) - y(\lambda)\| \le \left\|A(\lambda)^{-1}\right\| \cdot (\|dy(\lambda)\| - \|y(\lambda)\|).$$

Нехай $\delta_A = \frac{\|dA(\lambda)\|}{\|A(\lambda)\|}$, $\delta_y = \frac{\|dy(\lambda)\|}{\|y(\lambda)\|}$, $\delta_x = \frac{\|dx(\lambda)\|}{\|x(\lambda)\|}$ – відносні похибки вхідних даних і розв'язку. Тоді, поділивши нерівність $\|dX(\lambda)\| \le \left\|A(\lambda)^{-1}\right\| \cdot \left(\|dy(\lambda)\| - \|y(\lambda)\|\right)$ на $\|x\|$, матимемо $\frac{\|dX(\lambda)\|}{\|x(\lambda)\|} \le \left\|A(\lambda)^{-1}\right\| \cdot \left(\frac{\|dy(\lambda)\|}{\|x(\lambda)\|} - \frac{\|y(\lambda)\|}{\|x(\lambda)\|}\right)$.

Оскільки $\|y(\lambda)\| \le \|(E - A(\lambda)) \cdot x(\lambda)\|$, то $\|y(\lambda)\| \le \|(A(\lambda)) \cdot x(\lambda)\|$, або $\|x(\lambda)\| \ge \frac{\|y(\lambda)\|}{\|A(\lambda)\|}$. Тому $\delta_x \le \|A(\lambda)\| \cdot \left\|(A(\lambda))^{-1}\right\| \cdot (\delta_A + \delta_y)$, або $\delta_x \le cond\, A \cdot (\delta_A + \delta_y)$, де $cond\, A(\lambda) = \|A(\lambda)\| \cdot \left\|(A(\lambda))^{-1}\right\|$.

Величину $cond\, A(\lambda)$ називають *числом обумовленості* матриці $A$. Це число є мірою невизначеності розв'язку системи $X(\lambda) = A(\lambda)X(\lambda) + y(\lambda)$ при неточних вхідних даних. Оскільки $\left\|A(\lambda)(A(\lambda))^{-1}\right\| = 1$ і $\left\|A(\lambda)(A(\lambda))^{-1}\right\| \le \|A(\lambda)\| \cdot \left\|(A(\lambda))^{-1}\right\|$, то $cond\, A(\lambda) \ge 1$. Якщо $cond\, A(\lambda)$ близьке до одиниці, то можна вважати, що похибки вхідних даних переносяться у розв'язок без помітного збільшення. Системи з такою властивістю називають добре обумовленими. При великих значеннях числа обумовленості можливе різке збільшення похибки в розв'язку порівняно з рівнем похибок в $A(\lambda)$ і $y(\lambda)$. Системи з великим числом обумовленості називають погано обумовленими.

Систему (1) можна звести згідно з [9] до вигляду

$$\left.\begin{array}{l}
A_0X_0 - Y_0z_0 = 0 \\
A_0X_1 + A_1X_0 - (Y_0z_1 + Y_1z_0) = 0 \\
A_0X_2 + A_2X_0 + (Y_0z_2 + Y_1z_1 + Y_2z_0) = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sum_{j=0}^{l} A_jX_{p-s} - \sum_{j=0}^{l} Y_jz_{p-j} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{l-1}X_s + A_lX_{s-1} - (Y_{l-1}z_s + Y_lz_{s-1}) = 0 \\
A_lX_s - Y_lz_s = 0
\end{array}\right\} \qquad (3)$$

Тут $X_0, X_1, ..., X_s$ – вектори розмірності $n + m$, а $X_0, X_1, ..., X_s$ – скалярні величини. Тоді систему (1) можна записати як числову систему $(n+m)[(n+m+1)+1]$ рівнянь із $(n+m+1)[l(n+m)+1]$ невідомими.

Отриману систему (3) запишемо у матричному вигляді так:

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccccc}
A_0 & & & & & & & & & & & & & & & & -B_0 \\
A_1 & A_0 & & & & & & & & & & & & & & & -B_1 \\
A_2 & A_1 & A_0 & & & & & & & & & & & & & & -B_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & & & & & & & & \dots \\
A_l & A_{l-1} & A_{l-2} & \dots & A_0 & & & & & & & & & & & & -B_l \\
 & A_l & A_{l-1} & \dots & A_1 & A_0 & & & & & & & & & & & \\
 & & A_l & \dots & A_2 & A_1 & A_0 & & & & & & & & & & \\
 & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & & & & & \\
 & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & & & & \\
 & & & & & & A_1 & A_{l-1} & \dots & A_0 & & & & & & & \\
 & & & & & & & A_l & A_{l-1} & \dots & A_0 & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & A_l & A_{l-1} & \dots & A_0 & & & -B_0 & \\
 & & & & & & & & & & A_l & \dots & A_1 & A_0 & -B_0 & -B_1 & \\
 & & & & & & & & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 & & & & & & & & & & & & A_1 & A_{l-1} & -B_{l-1} & -B_l & \\
 & & & & & & & & & & & & & A_l & -B_l & &
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c}
X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_N \\ X_{N+1} \\ X_{N+2} \\ \dots \\ X_{Nl+N} \\ \dots \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ \dots \\ y_{Nl+N-1} \\ y_{Nl+N}
\end{array}\right) = 0,$$

де $A_{ij}$ – блоки розмірності $n \times n$.

Розглянемо схеми розв'язання отриманих систем. Схематично матриця числової системи має структуру заповнення [9]:

$$\begin{pmatrix}
\times & & & & & I & & & \\
\times & \times & & & & I & I & & \\
\times & \times & \times & & & I & I & I & \\
\times & \times & \times & \times & & I & I & I & I \\
 & \times & \times & \times & \times & & I & I & I & I \\
 & & \times & \times & \times & & & I & I & I \\
 & & & \times & \times & & & & I & I \\
 & & & & \times & & & & & I
\end{pmatrix}, \tag{4}$$

Перестановкою стовпців систему (3) можна перетворити таким чином, щоб її матриця набула заповнення

$$\begin{pmatrix}
\times & I & & & & & & & & \\
\times & I & \times & I & & & & & & \\
\times & I & \times & I & \times & I & & & & \\
\times & I & \times & I & \times & I & \times & I & & \\
 & & \times & I & \times & I & \times & I & \times & I \\
 & & & & \times & I & \times & I & \times & I \\
 & & & & & & \times & I & \times & I \\
 & & & & & & & & \times & I
\end{pmatrix}, \tag{5}$$

де через "$\times$" позначені квадратні клітки $A_l$, а через "$I$"– вектори правих частин $B$.

Для визначеності будемо вважати, що система (3) складається з $m(l+s+1)$ рівнянь і має $m(l+s+1)+k$ невідомих $(k \geq 1)$.

Нехай $rank\ A_0 = \min\{m,l\}$. Загальна стратегія розв'язання цієї системи залежить від її рангу. Спочатку розглянемо найбільш трудомісткий з обчислювальної точки зору варіант числової системи. Для цього припустимо, що всі основні мінори схематично нарисованої матриці не дорівнюють нулю. Тоді перші $m(l+s+1)$ невідомих можуть бути виражені через $k$ останніх розв'язків системи (5). При зроблених припущеннях про характер матриці (4) підматриця, утворена блоками "×", буде невиродженою.

Таким чином, схематично процес перетворення матриці системи може бути представлений у вигляді

$$\begin{pmatrix} \times & & & & I & & & \\ \times & \times & & & I & I & & \\ \times & \times & \times & & I & I & I & \\ \times & \times & \times & \times & I & I & I & I \\ & \times & \times & \times & \times & I & I & I & I \\ & & \times & \times & \times & & I & I & I \\ & & & \times & \times & & & I & I \\ & & & & \times & & & & I \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} O & & & & I & & & & \\ & O & & & I & I & & & \\ & & O & & I & I & I & & \\ & & & O & I & I & I & I & \\ & & & & O\ I & I & I & I & I \\ & & & & I & I & I & I & I \\ & & & & I & I & I & I & I \\ & & & & I & I & I & I & I \end{pmatrix}.$$

Для реалізації алгоритму на ЕОМ потрібно виконати з точністю до основного члена $Cm^4l^3$ арифметичних операцій, де $m$ і $l$ – кількість рядків та стовпців матриці.

Величина константи $C$ залежить від вибраного алгоритму зведення матриці до діагонального вигляду.

Введемо число обумовленості $\mu(A)$ для матриці вигляду (1)

$$\mu(A) = \max_{x \neq 0,\ \zeta \neq 0} \left[ \frac{\|Ax\|}{\|A\zeta\|} \cdot \frac{\|\zeta\|}{\|x\|} \right], \tag{6}$$

яку можна записати у вигляді

$$\mu(A) = \left[ \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \bigg/ \min_{\zeta \neq 0} \frac{\|A\zeta\|}{\|\zeta\|} \right] = \sqrt{\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}}, \tag{7}$$

де $\delta_{\max}$, $\delta_{\min}$ − максимальне та мінімальне власні значення матриці $A^*A$, $A^*$ – транспонована матриця до матриці $A$.

Дослідимо величину $\mu(A)$ в оцінці похибки при збуренні вихідних даних вектора $Y$ і матриці $A$. Розглянемо з $Y$ вектор $Y + \Delta Y$. Нехай $x,\ x + \Delta x$ – відповідно розв'язок моделі Леонтьєва $X = (E - A(t))^{-1} Y(t)$, а також $X + \Delta X = (E - A(t))^{-1} (Y(t) + \Delta Y(t))$. Тоді $\Delta X = (E - A(t))^{-1} \Delta Y(t)$. Згідно з визначенням $\mu(A)$ із (6) матимемо

$$\mu(A) = \max_{\zeta,\ \Delta\zeta} \left[ \frac{\left\|(E - A(t))^{-1} \zeta\right\|}{\left\|(E - A(t))^{-1} \Delta\zeta\right\|} \cdot \frac{\|\Delta\zeta\|}{\|\zeta\|} \right] \geq \left[ \frac{\left\|(E - A(t))^{-1} \cdot X\right\|}{(E - A(t))^{-1} \Delta X} \cdot \frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \right],$$

звідки

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \mu(A) \cdot \frac{\|\Delta Y\|}{\|Y\|}, \tag{8}$$

тобто $\mu(A)$ – найменша константа, для якої при всіх $\Delta X, X, \Delta Y, Y$ виконується нерівність (8). Отже, $\mu(A)$ виконує роль множника при зростанні відносної похибки розв'язку. Це означає, що внаслідок зміни вектора в правій частині системи зміни в розв'язку збільшуються в $\mu(A)$ разів. Інакше кажучи, нерівність (8) означає, що $\mu(A)$ обмежує зверху відношення відносної невизначеності вектора $X$ до відносної невизначеності вектора $Y$.

Важливо наголосити, що оцінка (8) точна. Це свідчить про те, що за відповідного підбору векторів $Y$, $\Delta Y$ можна досягти рівності. Оцінка (8) досяжна, значить, не можна дати точнішу оцінку, ніж (8), для довільних векторів $Y$, $\Delta Y$ незалежно від їхньої величини.

Аналогічний зміст числа обумовленості в загальній ситуації, коли збурюються вектор $Y$ і матриця $A$: $(X+\Delta X)=(E-(A(t)+\Delta A(t)))^{-1}(Y(t)+\Delta Y(t))$.
Виходячи з цього, наведемо завершальну оцінку [1]

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|}\le\frac{\dfrac{\|\Delta A(t)\|}{\|A(t)\|}+\dfrac{\|\Delta Y(t)\|}{\|Y(t)\|}}{1-\dfrac{\|\Delta A(t)\|}{\|A\|}\mu(A)}\cdot\mu(A), \tag{9}$$

отриману в припущенні невиродженості матриці $A$ та умови $\dfrac{\|\Delta A(t)\|}{\|A(t)\|}\mu(A)<1$.

Якщо $A$ – вироджена матриця, то отримаємо випадок $\mu(A)=\infty$, оскільки $\min\dfrac{\|A(t)\cdot\zeta\|}{\|\zeta\|}=0$ і оцінки (8) і (9) втрачають сенс. Якщо $A$ – невироджена матриця, то $\mu(A)=\|A(t)\|\cdot\left\|A^{-1}(t)\right\|$, де $A^{-1}(t)$– обернена до $A(t)$ матриця, тобто матриця, яка задовольняє відношення $A(t)A^{-1}(t)=A^{-1}(t)A(t)=E.$

Отже, з оцінок (8), (9) випливає, що число обумовленості матриці $A(t)$є характерним, від того, наскільки розв'язок системи $X=(E-A(t))^{-1}Y(t)$ стійкий до збурень компонент вектора правих частин $Y(t)$ та матриці коефіцієнтів $A(t)$.

**Аналіз обчислювальної стійкості алгоритмів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.** Погано обумовленою може бути не сама задача, а лише алгоритм, вибраний для її розв’язування. Якщо обчислений розв’язок суттєво відрізняється від точного внаслідок виконання числового алгоритму, то такий алгоритм називають нестійким.

При реалізації алгоритму на комп'ютері виникають похибки заокруглення даних, сумарний ефект яких необхідно враховувати при розв’язуванні задач (8), (9).

Розглянемо процес зведення щільно заповнених систем рівнянь з $\lambda$–матрицями до звичайних лінійних алгебраїчних систем із числовими елементами. В результаті запропонованих перетворень виникає система стрічкового вигляду несиметричної структури. Порядок $N$ системи дорівнює $n^2(l+1)$, а максимальна ширина $L$стрічки становить $nl$. Застосувавши обчислювальну схему другого методу відсічених систем [9] для розв'язку отриманої стрічкової системи $N$-го порядку ($N=(n+m+1)[l(n+m)+1]$), отримаємо рекурентні співвідношення

$$\begin{cases} b_{i,k} = \dfrac{a_{i,k} - \sum\limits_{j=1}^{L} a_{i,j} x_j^{(k-1)}}{a_{k,k} - \sum\limits_{j=1}^{L} a_{k,j} x_j^{(k-1)}} & \left(i = k+1, ..., N\right), \\ z_k = b_{k+1,k} & \left(k = 1, 2, ..., N-1\right), \\ z_s = b_{k+1,k} - \sum\limits_{i=s+1}^{L} b_{i,s} z_i & \left(s = k-1,\ k-2, ..., 1\right). \end{cases} \tag{10}$$

та

$$\begin{cases} b_{k,i} = \dfrac{a_{k,i} - \sum\limits_{j=1}^{L} a_{j,i} z_j^{(k-1)}}{a_{k,k} - \sum\limits_{j=1}^{L} a_{j,k} x_j^{(k-1)}} & \left(i = k+1, ..., N+1\right), \\ x_k = b_{k,k+1} & \left(k = 1, 2, ..., N\right), \\ x_s = b_{s,k+1} - \sum\limits_{i=s+1}^{L} b_{s,i} x_s & \left(s = k-1,\ k-2, ..., 1\right). \end{cases} \tag{11}$$

З точки зору обчислювальної стійкості дана схема практично не відрізняється від звичайного методу відсічених систем. Тому для еквівалентних збурень елементів чисельної матриці $A$, що відповідають реалізації алгоритму на комп'ютері, запишемо

$$\left\|\alpha_{i,j}\right\| \le 3{,}05 \cdot \left\|A\right\| \xi^{-l+1} \left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n+1}\right). \tag{12}$$

Таким чином, обчислювальний процес для даного випадку володіє виключно високою чисельною стійкістю.

**Висновки.** У статті розглянуто новий підхід до розв'язування погано обумовлених систем лінійних алгебраїчних рівнянь у моделі Леонтьєва. Підраховано кількість арифметичних операцій при чисельній реалізації алгоритму СЛАР на електронно-обчислювальні машині. Наведено спосіб обчислення числа обумовленості матриці. Проаналізовано обчислювальну стійкість алгоритмів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь у моделі Леонтьєва.

Запропонований алгоритм можна ефективно використовувати в системах комп'ютерної алгебри та для аналітично-числового розв'язування інженерних задач і прикладних задач механіки.

На основі запропонованого підходу в пакеті MatLab були проведені числові експерименти для погано обумовлених систем лінійних алгебраїчних рівнянь у моделі Леонтьєва. Вони підтверджують ефективність алгоритму.

**Література**

1. Заборовець М.О. Сучасні методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь / М.О.Заборовець, Ф.А. Левченко, М.Г Охріменко. – К.: КНЕУ, 2006. – 76 с.
2. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений / Дж.Х. Уилкинсон. – М.: Наука, 1970. – 564 с.
3. Цегелик Г.Г. Чисельні методи / Г.Г. Цегелик. – Л.: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 408 с.
4. Шахно С.М. Чисельні методи лінійної алгебри / С.М. Шахно. – Л.: Видавничий центр ЛНУ імені

І. Франка, 2007. – 245 с.

5. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1974. – 224 с.
6. Воеводин В.В. Линейная алгебра / В.В. Воеводин. – С.-Петербург.: Лань, 2008. – 416 с.
7. Тыртышников Е.Е. Матричный анализ и линейная алгебра / Е.Е. Тыртышников. – М.: Физматлит, 2007. – 480 с.
8. Уоткинс Д. Основы матричных вычислений / Д. Уоткинс. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2006. – 664 с.
9. Недашковський М.О. Обчислення з $\lambda$-матрицями / М.О. Недашковський, О.Я. Ковальчук. – К.: Наукова думка, 2007. – 294 с.
10. Van Dooren P.M. Numerical Analysis 2000: Linear Algebra - Linear Systems and Eigenvalues / P.M. Van Dooren. – Vol. 3., 2001. – P. 526.
11. Григорків В. С. Моделювання економіки. Ч. 2: Навч. посібник / В. С. Григорків. — Чернівці: Рута, 2006. — 100 с.
12. Ляшенко І.М., Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів / І.М. Ляшенко, М.В. Коробова, А.М. Столяр. – Т.: Навчальна книга “Богдан”, 2007. – 304 с.
13. Чорней Н.Б. Дослідження алгоритму послідовного аналізу варіантів для розв’язання міжгалузевої моделі Леонтьєва — Форда / Н.Б. Чорней // Вісник Київського університету. – 1999. – Сер. фіз.-мат. н., № 3. – С. 259–262.
14. Papadimitriou I. Decomposition d’une matrice de Leontief par l’analyse des correspondances / I. Papadimitriou // Cah. Anal. Damies, 1987. – 12, No 2. – P. 147–168.

Одержано 02.12.2009 р