Побудовано розв'язок осесиметричної температурної задачі для системи тіл циліндр-шар, який лежить на жорсткій основі з круговою виїмкою, у випадку ізотропних матеріалів. Тепловий контакт між тілами припускається неідеальний. Отримано формули для визначення температурних полів на бічних поверхнях циліндра і шару. Досліджено вплив контактної провідності на розподіл температурних полів у зоні контакту двох тіл

Ключові слова: осесиметрична температурна задача, ізотропні матеріали, неідеальний тепловий контакт, контактна провідність

Построено решение осесимметричной температурной задачи для системы тел цилиндр-слой, который лежит на жесткой основе с круговой выемкой, в случае изотропных материалов. Тепловой контакт между телами допускается неидеальный. Получены формулы для определения температурных полей на боковых поверхностях цилиндра и слоя. Исследовано влияние контактной проводимости на распределение температурных полей в зоне контакта двух тел

Ключевые слова: осесимметричная температурная задача, изотропные материалы, неидеальный тепловой контакт, контактная проводимость

УДК 539.3

ОСЕСИМЕТРИЧНА ТЕМПЕРАТУРНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ ТІЛ ЦИЛІНДР-ШАР

Б. С. Окрепкий
Кандидат фізико-математичних наук, доцент*
А. М. Алілуйко
Кандидат фізико-математичних наук, доцент*
E-mail: alil71@rambler.ru
*Кафедра економіко-математичних методів
Тернопільський національний економічний університет
вул. Львівська, 11, м. Тернопіль, Україна, 46004

1. Вступ

Визначення контактних деформацій і напружень, з урахуванням температурних полів, є важливою задачею для дослідження міцності деталей машин і елементів конструкцій у місцях їхньої взаємодії, при розрахунку конструкцій на пружній основі з метою раціонального використання матеріалу конструкції і несучої здатності основи. Тому визначення температурного поля для системи тіл циліндр-шар при неідеальному тепловому контакті є необхідним для знаходження напруженого стану контактуючих тіл.

2. Аналіз досліджень і публікацій

Аналіз основних теоретичних і експериментальних робіт по контактному теплообміну за останні 40 років проведено в роботі [1]. Вплив температурних факторів на характер контактної взаємодії тіл досліджується в багатьох працях [2 – 7]. Теплова контактна провідність між плоскими поверхнями розглядається в роботі [8]. В роботах [9, 10] розв'язана задача теплообміну між двома концентричними циліндрами, в роботі [11] – між циліндром та нескінченною областю. Зокрема осесиметричні температурні задачі для системи тіл циліндр-півпростір і циліндр-шар при неідеальному тепловому контакті для ізотропних і трансферсально-ізотропних матеріалів розв'язані в роботах [4 – 7]. Проте недостатньо вивченим є вплив умов неідеального теплового контакту на величину і характер температури в системі тіл циліндр-шар, який лежить на жорсткій основі з круговою виїмкою.

3. Мета і завдання дослідження

Побудувати розв'язок осесиметричної температурної задачі для системи тіл циліндр-шар, який лежить на жорсткій основі з круговою виїмкою, для ізотропних матеріалів, з урахуванням неідеального теплового контакту. Знайти формули для визначення температури в циліндрі і шарі, а також дослідити вплив контактної провідності на розподіл температурних полів у зоні контакту.

4. Розв'язуваня задачі теплопровідності

Нехай круговий циліндр радіуса R і довжиною L знаходиться в неідеальному тепловому контакті з шаром скінченної товщини H. На вільному торці циліндра задана постійна температура T_0, а бічна поверхня циліндра теплоізольована. На вільних поверхнях шару здійснюється теплообмін із зовнішнім середовищем по закону Ньютона. При зроблених припущеннях необхідно визначити температурні поля в циліндрі і шарі.

Введемо циліндричну систему координат r, θ, z, центр якої лежить на поверхні шару, а вісь OZ спрямована вздовж осі циліндра. Всі величини, які позначені верхнім індексом "1", відносяться до шару, без індексів – до циліндра.

Граничні умови мають вигляд:

$$T = T_0, \ \left(z = L;\ 0 \le r \le R\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \ \left(r = R;\ 0 \le z \le L\right), \tag{2}$$

$$\lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z} = \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}, \quad \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = h_0(T - T^1), \quad \left(z=0;\ 0 \le r \le R\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} + H_2^1 T^1 = 0 \quad \left(z=0; R \le r < \infty\right), \tag{4}$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} - H_3^1 T^1 = 0 \quad \left(z=-H; 0 \le r \le R_1\right), \tag{5}$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} - H_1^1 T = 0 \quad \left(z=-H; 0 \le r < \infty\right), \tag{6}$$

де λ_z, λ_z^1, H_1^1, H_2^1, H_3^1 – коефіцієнти теплопровідності і теплообміну; h_0 – контактна провідність.

Розв'яжемо крайову задачу для рівняння теплопровідності. Відомо [12], що в осесиметричному випадку температурне поле T для ізотропного тіла визначається із рівняння

$$\nabla^2 T = 0 . \tag{7}$$

За допомогою методу Фур'є загальний розв'язок рівняння (7) для циліндра матиме вигляд

$$T(r,z) = A_0 + B_0 z + D_0\left(r^2 - 2z^2\right) + \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(\beta_k r\right)\left(A_k \operatorname{sh}\beta_k z + \right.$$

$$\left. + B_k \operatorname{ch}\beta_k z\right) + \sum_{k=1}^{\infty} I_0\left(\gamma_k r\right)\left(C_k \sin\gamma_k z + D_k \cos\gamma_k z\right),$$

де A_k, B_k, C_k, D_k – довільні постійні; $J_0\left(\beta_k r\right)$ – функція Бесселя першого роду дійсного аргументу; $I_0\left(\gamma_k r\right)$ – функція Бесселя першого роду уявного аргументу; β_k, γ_k – власні значення, які визначаються із граничних умов.

Для знаходження температури в шарі введемо трансформанту Ганкеля функції $T^1(r,z)$ нульового порядку

$$\overline{T}^1(\xi,z) = \int_0^{\infty} r T^1(r,z) J_0(\xi r) dr ,$$

за допомогою якої, із рівняння (7) знаходимо вираз $T^1(\rho,\zeta)$ через дві довільні функції $\phi_1(\eta)$ і $\phi_2(\eta)$:

$$T^1(\rho,\zeta) = \int_0^{\infty} [\phi_1(\eta) e^{\eta\zeta} + \phi_2(\eta) e^{-\eta\zeta}] J_0(\eta\rho) d\eta ,$$

де $\rho = r/R$, $\zeta = z/R$.

Умова (2) задовольнятиметься, якщо покласти $D_0 = 0$, $D_k = 0$, $C_k = 0$ ($k = \overline{1,\infty}$); $\beta_k = \mu_k / R$, де μ_k – корені рівняння $J_1(\mu) = 0$.

Гранична умова (1), з урахуванням ортогональності функції Бесселя, приводить до деяких співвідношень між постійними A_k і B_k, в результаті чого, температурне поле в циліндрі виражається через одну нескінченну систему постійних $C_k^{(1)}$ за формулою

$$T(\rho,\zeta) = T_0\left\{1 + C_0^{(1)} \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z}(\zeta - 1) + \frac{\lambda_z}{\lambda_z^1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\mu_k(\zeta - l)}{\operatorname{ch}\mu_k l} C_k^{(1)} J_0(\mu_k \rho)\right\},$$

$$l = \frac{L}{R} \quad (\rho < 1). \tag{8}$$

Граничні умови (3)-(6) приводять до системи інтегральних рівнянь, які зв'язують функції $\phi_k(\eta)$ $(k = 1,2)$ з коефіцієнтами $C_k^{(1)}$ $(k = \overline{0,\infty})$:

$$\int_0^{\infty} \eta[\phi_1(\eta) - \phi_2(\eta)] J_0(\eta\rho) d\eta = $$
$$= C_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k J_0(\mu_k \rho) C_k^{(1)} \quad (\rho < 1), \tag{9}$$

$$\int_0^{\infty} [\phi_1(\eta) + \phi_2(\eta)] J_0(\eta\rho) d\eta =$$
$$= T_0\left\{1 - \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z}\left(1 + \frac{1}{h_0^1}\right) C_0^{(1)} - \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\mu_k \rho)\left(\operatorname{th}\mu_k l + \frac{\mu_k}{h_0^1}\right) C_k^{(1)}\right\} \quad (\rho < 1), \tag{10}$$

$$\int_0^{\infty} [(h_2^1 + \eta)\phi_1(\eta) + (h_2^1 - \eta)\phi_2(\eta)] J_0(\eta\rho) d\eta =$$
$$= 0 \quad (\rho > 1), \tag{11}$$

$$\int_0^{\infty} [(h_3^1 - \eta) e^{-\eta h}\phi_1(\eta) + (h_3^1 + \eta) e^{\eta h}\phi_2(\eta)] J_0(\eta\rho) d\eta = 0$$
$$(0 \le \rho < c), \tag{12}$$

$$\int_0^{\infty} [(h_1^1 - \eta) e^{-\eta h}\phi_1(\eta) + (h_1^1 + \eta) e^{\eta h}\phi_2(\eta)] J_0(\eta\rho) d\eta = 0$$
$$(\rho > c), \tag{13}$$

де $h = H/R$, $h_i^1 = H_i^1 R$ $(i = \overline{1,3})$, $h_0^1 = h_0 R / \lambda_z$, $c = R_1 / R$.

Рівняння (11) і (13) представимо у вигляді:

$$\int_0^{\infty} [(h_2^1 + \eta)\phi_1(\eta) + (h_2^1 - \eta)\phi_2(\eta)] J_0(\eta\rho) d\eta =$$
$$= Y_1(\rho) U(1 - \rho) \quad (0 \le \rho < \infty), \tag{14}$$

$$\int_0^{\infty} [(h_1^1 - \eta) e^{-\eta h}\phi_1(\eta) + (h_1^1 + \eta) e^{\eta h}\phi_2(\eta)] J_0(\eta\rho) d\eta =$$
$$= Y_2(\rho) U(c - \rho) \quad (0 \le \rho < \infty), \tag{15}$$

де $Y_1(\rho)$, $Y_2(\rho)$ – невідомі функції, $U(x)$ – функція Хевісайда:

$$U(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Припустивши, що підінтегральні функції в рівняннях (14), (15) задовольняють умовам застосування інтегрального перетворення Ганкеля [13], одержимо:

$$(h_2^1 + \eta)\phi_1(\eta) + (h_2^1 - \eta)\phi_2(\eta) = \eta \int_0^1 \rho Y_1(\rho) J_0(\eta\rho) d\rho,$$
$$(h_1^1 - \eta) e^{-\eta h}\phi_1(\eta) + (h_1^1 + \eta) e^{\eta h}\phi_2(\eta) = \eta \int_0^c \rho Y_2(\rho) J_0(\eta\rho) d\rho. \tag{16}$$

Функції $Y_1(\rho)$ і $Y_2(\rho)$ наближено представимо у вигляді поліномів по функціям Бесселя:

$$Y_1(\rho)\approx a_0^{(1)}+\sum_{k=1}^{N}a_k^{(1)}J_0(\mu_k\rho),\quad Y_2(\rho)\approx a_0^{(2)}+\sum_{k=1}^{N}a_k^{(2)}J_0\left(\frac{\mu_k}{c}\rho\right),\qquad(17)$$

де $a_k^{(1)}$, $a_k^{(2)}$ $(k=\overline{0,N})$ – невідомі, які необхідно визначити.

Підібравши N достатньо великим, представлення функцій $Y_1(\rho)$ і $Y_2(\rho)$ у вигляді поліномів можна зробити із як завгодно малою похибкою, якщо ці функції на відповідних інтервалах $0\le\rho\le1$ і $0\le\rho\le c$ задовольняють умови Діріхле. При цьому припускається існування і абсолютна збіжність інтегралів

$$\int_0^1\rho^{\frac{1}{2}}Y_1(\rho)d\rho,\quad \int_0^c\rho^{\frac{1}{2}}Y_2(\rho)d\rho.$$

Розв'язавши систему рівнянь (16), з урахуванням (17), знайдемо формули для визначення функцій $\phi_1(\eta)$ і $\phi_2(\eta)$:

$$\begin{aligned}\phi_1(\eta)&=\frac{1}{2Q(\eta)}\left[(\eta+h_1^1)e^{\eta h}X_1(\eta)+(\eta-h_2^1)X_2(\eta)\right],\\ \phi_2(\eta)&=\frac{1}{2Q(\eta)}\left[(\eta-h_1^1)e^{-\eta h}X_1(\eta)+(\eta+h_2^1)X_2(\eta)\right].\end{aligned}\qquad(18)$$

Тут $Q(\eta)=(\eta^2+h_1^1h_2^1)\mathrm{sh}\eta h+(h_1^1+h_2^1)\eta\,\mathrm{ch}\eta h$,

$$\begin{aligned}X_1(\eta)&=a_0^{(1)}J_1(\eta)+\eta^2J_1(\eta)\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k^{(1)}J_0(\mu_k)}{\eta^2-\mu_k^2},\\ X_2(\eta)&=a_0^{(2)}cJ_1(\eta c)+\eta^2J_1(\eta c)\sum_{k=1}^{N}J_0(\mu_k)\frac{a_k^{(2)}}{\eta^2-(\mu_3/c)^2}.\end{aligned}\qquad(19)$$

Підставивши значення функцій $\phi_1(\eta)$ і $\phi_2(\eta)$ (18) в рівняння (8), (9) і (12), з урахуванням (19) прийдемо до співвідношень, які зв'язують невідомі коефіцієнти $C_k^{(1)}(k=\overline{0,\infty})$ і $a_k^{(1)}$, $a_k^{(2)}$ $(k=\overline{0,N})$:

$$\sum_{k=0}^{N}\left[\alpha_k^{(1)}(\rho)a_k^{(1)}+\alpha_k^{(2)}(\rho)a_k^{(2)}\right]=f_1(\rho)\quad(\rho<1),\qquad(20)$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{N}\left[\beta_k^{(1)}(\rho)a_k^{(1)}+\beta_k^{(2)}(\rho)a_k^{(2)}\right]=\\ &=c_0^{(1)}+\sum_{k=1}^{N}\mu_kJ_0(\mu_k\rho)c_k^{(1)}\quad(\rho<1),\end{aligned}\qquad(21)$$

$$\sum_{k=0}^{N}\left[\gamma_k^{(1)}(\rho)a_k^{(1)}+\gamma_k^{(2)}(\rho)a_k^{(2)}\right]=0\quad(\rho<c).\qquad(22)$$

Обчисливши невласні інтеграли згідно [14], одержимо:

$$\alpha_0^{(1)}(\rho)=\int_0^\infty\frac{P_1(\eta)J_0(\eta\rho)J_1(\eta)}{Q(\eta)}d\eta=$$

$$=r_1+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{P_1^*(y_m)I_0(y_m\rho)K_1(y_m)}{Q'(iy_m)}\quad(\rho<1),$$

$$\alpha_k^{(1)}=J_0(\mu_k)\int_0^\infty\frac{\eta^2P_1(\eta)J_0(\eta\rho)}{Q(\eta)(\eta^2-\mu_k^2)}d\eta=$$

$$=J_0(\mu_k\rho)\left\{-\frac{\pi}{2}\frac{\mu_kP_1(\mu_k)}{Q(\mu_k)}J_0(\mu_k\rho)N_1(\mu_k)+\right.$$

$$\left.+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^2P_1^*(y_m)I_0(y_m\rho)K_1(y_m)}{Q'(iy_m)(y_m^2+\mu_k^2)}\right\}\quad(\rho<1),$$

$$\alpha_0^{(2)}(\rho)=c\int_0^\infty\frac{\eta J_0(\eta\rho)J_1(\eta c)}{Q(\eta)}d\eta=$$

$$=r_2c+2c\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_mI_0(y_m\rho)K_1(y_mc)}{Q'(iy_m)}\quad(\rho<c,\ \rho<1),$$

$$\alpha_0^{(2)}(\rho)=-2c\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_mI_1(y_mc)K_0(y_m\rho)}{Q'(iy_m)}\quad(c<\rho<1),$$

$$\alpha_k^{(2)}=cJ_0(\mu_k)\int_0^\infty\frac{\eta^3J_0(\eta\rho)J_1(\eta c)}{Q(\eta)\left[\eta^2-(\mu_k/c)^2\right]}d\eta=$$

$$=cJ_0(\mu_k)\left\{-\frac{\pi}{2c^2}\frac{\mu_k^2N_1(\mu_k)}{Q(\mu_k/c)}J_0\left(\frac{\mu_k\rho}{c}\right)+\right.$$

$$\left.+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^3I_0(y_m\rho)K_1(y_mc)}{Q'(iy_m)[y_m^2+(\mu_k/c)^2]}\right\}\quad(\rho<c,\ \rho<1),$$

$$\alpha_k^{(2)}(\rho)=-2cJ_0(\mu_k)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^3I_1(y_mc)K_0(y_m\rho)}{Q'(iy_m)[y_m^2+(\mu_k/c)^2]}\quad(c<\rho<1),$$

$$\beta_0^{(1)}(\rho)=\int_0^\infty\frac{R_1(\eta)J_0(\eta\rho)J_1(\eta)}{Q(\eta)}d\eta=$$

$$=h_1^1r_2+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{R_1^*(y_m)I_0(y_m\rho)K_1(y_m)}{Q'(iy_m)}\quad(\rho<1),$$

$$\beta_k^{(1)}(\rho)=J_0(\mu_k)\int_0^\infty\frac{\eta^2R_1(\eta)J_0(\eta\rho)J_1(\eta)}{Q(\eta)(\eta^2-\mu_k^2)}d\eta=$$

$$=J_0(\mu_k)\left\{-\frac{\pi}{2}\frac{\mu_kR_1(\mu_k)}{Q(\mu_k)}N_1(\mu_k)J_0(\mu_k\rho)+\right.$$

$$\left.+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^2R_1^*(y_m)I_0(y_m\rho)K_1(y_m)}{Q'(iy_m)(y_m^2+\mu_k^2)}\right\}\quad(\rho<1),$$

$$\beta_0^{(2)}(\rho)=-ch_2^1\int_0^\infty\frac{\eta J_0(\eta\rho)J_1(\eta c)}{Q(\eta)}d\eta=$$

$$=-ch_2^1r_2-2ch_2^1\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_mI_0(y_m\rho)K_1(y_mc)}{Q'(iy_m)}\quad(\rho<c,\ \rho<1),$$

$$\beta_0^{(2)}(\rho)=2ch_2^1\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_mI_1(y_mc)K_0(y_m\rho)}{Q'(iy_m)}\quad(c<\rho<1),$$

$$\beta_k^{(2)}(\rho)=$$

$$=-2ch_2^1J_0(\mu_k)\int_0^\infty\frac{\eta^3J_0(\eta\rho)J_1(\eta c)}{Q(\eta)[\eta^2-(\mu_k/c)^2]}d\eta=-2ch_2^1J_0(\mu_k)\times$$

$$\times\left\{-\frac{\pi}{2c^2}\frac{\mu_k^2N_1(\mu_k)}{Q(\mu_k/c)}J_0\left(\frac{\mu_k\rho}{c}\right)+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^3I_0(y_m\rho)K_1(y_mc)}{Q'(iy_m)[y_m^2+(\mu_k/c)^2]}\right\},$$

$$(\rho<c,\ \rho<1),$$

$$\beta_k^{(2)}(\rho)=2ch_2^1 J_0(\mu_k)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^3 I_1(y_m c)K_0(y_m\rho)}{Q'(iy_m)[y_m^2+(\mu_k/c)^2]}\quad (c<\rho<1),$$

$$\gamma_0^{(1)}(\rho)=(h_3^1-h_1^1)\int_0^{\infty}\frac{\eta J_0(\eta\rho)J_1(\eta)}{Q(\eta)}d\eta=$$

$$=2(h_3^1-h_1^1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^2 I_0(y_m\rho)K_1(y_m)}{Q'(iy_m)}+(h_3^1-h_1^1)r_2\quad (\rho<c,\ \rho<1),$$

$$\gamma_k^{(1)}(\rho)=(h_3^1-h_1^1)J_0(\mu_k)\int_0^{\infty}\frac{\eta^3 J_0(\eta\rho)J_1(\eta)}{Q(\eta)(\eta^2-\mu_k^2)}d\eta=$$

$$=(h_3^1-h_1^1)J_0(\mu_k)\left\{-\frac{\pi}{2}\frac{\mu_k^2 N_1(\mu_k)}{Q(\mu_k)}J_0(\mu_k\rho)+\right.$$

$$\left.+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^3 I_0(y_m\rho)K_1(y_m)}{Q'(iy_m)[y_m^2+(\mu_k/c)^2]}\right\}(\rho<c,\ \rho<1),$$

$$\gamma_0^{(1)}(\rho)=-2(h_3^1-h_1^1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m I_1(y_m)K_0(y_m\rho)}{Q'(iy_m)}\quad (1<\rho<c),$$

$$\gamma_k^{(1)}(\rho)=-2(h_3^1-h_1^1)J_0(\mu_k)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^3 I_1(y_m)K_0(y_m\rho)}{Q'(iy_m)(y_m^2+\mu_k^2)}\quad (1<\rho<c),$$

$$\gamma_0^{(2)}(\rho)=c\int_0^{\infty}\frac{R_2(\eta)J_0(\eta\rho)J_1(\eta c)}{Q(\eta)}d\eta=$$

$$=c(h_2^1+h_3^1)+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{R_2^*(y_m)I_0(y_m\rho)K_1(y_m)}{Q'(iy_m)}\quad (\rho<c),$$

$$\gamma_k^{(2)}(\rho)=cJ_0(\mu_k)\int_0^{\infty}\frac{\eta^2 R_2(\eta)J_0(\eta\rho)J_1(\eta c)}{Q(\eta)[\eta^2-(\mu_k/c)^2]}d\eta=$$

$$=\left\{cJ_0(\mu_k)-\frac{\pi}{2c}\frac{\mu_k R_2(\mu_k)}{Q(\mu_k)}N_1(\mu_k)J_0\left(\frac{\mu_k\rho}{c}\right)+\right.$$

$$\left.+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^2 R_2^*(y_m)I_0(y_m\rho)K_1(y_m c)}{Q'(iy_m)[y_m^2+(\mu_k/c)^2]}\right\}(\rho<c),$$

$$P_1(\eta)=\eta ch\eta h+h_1^1 sh\eta h,\quad R_1(\eta)=\eta\left(\eta sh\eta h+h_1^1 ch\eta h\right),$$

$$R_2(\eta)=\eta^2 sh\eta h+(h_2^1+h_3^1)\eta ch\eta h,$$

$$R_1^*(y_m)=y_m\cos y_m h+h_1^1\sin y_m h,$$

$$R_1^*(y_m)=-y_m^2\sin y_m h+h_1^1\cos y_m h,$$

$$R_2^*(y_m)=-y_m^2\sin y_m h-(h_2^1+h_3^1)y_m\sin y_m h,$$

$$Q'(iy_m)=\left[(h_1^1h_2^1-y_m^2)h+h_1^1+h_2^1\right]\cos y_m h-$$

$$-2\left[2+(h_1^1+h_2^1)h\right]y_m\sin y_m h,$$

y_m $(m=\overline{1,\infty})$ – корені рівняння $Q(iy_m)=0$.

Помноживши рівняння (20), (21) на ρ, $\rho J_0(\mu_k\rho)$ і проінтегрувавши в межах від 0 до 1, враховуючи при цьому властивості ортогональності функції Бесселя, одержимо співвідношення, які зв'язують невідомі $a_n^{(1)}$, $a_n^{(2)}$ $(n=\overline{0,N})$ і невідомі $C_k^{(1)}(k=\overline{0,\infty})$:

$$\sum_{k=0}^{N}\left[\alpha_{k,0}^{(1)}a_k^{(1)}+\alpha_{k,0}^{(2)}a_k^{(2)}\right]+\frac{1}{2}\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z}\left(l+\frac{1}{h_0^1}\right)c_0^{(1)}=\frac{1}{2}T_0,$$

$$\sum_{k=0}^{N}\left[\alpha_{k,n}^{(1)}a_k^{(1)}+\alpha_{k,n}^{(2)}a_k^{(2)}\right]+T_0\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z}\left(\mu_n l+\frac{\mu_n}{h_0^1}\right)\frac{J_0^2(\mu_n)}{2}c_n^{(1)}=0,\quad(23)$$

$$\sum_{k=0}^{N}\left[\beta_{k,0}^{(1)}a_k^{(1)}+\beta_{k,0}^{(2)}a_k^{(2)}\right]=\frac{1}{2}c_0^{(1)},$$

$$\sum_{k=0}^{N}\left[\beta_{k,n}^{(1)}a_k^{(1)}+\beta_{k,n}^{(2)}a_k^{(2)}\right]=\frac{\mu_n J_0^2(\mu_n)}{2}c_n^{(1)},$$

де $\alpha_{0,0}^{(1)}=\frac{1}{2}r_1+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{P_1^*(y_m)I_1(y_m)K_1(y_m)}{y_m Q'(iy_m)},$

$$\alpha_{k,0}^{(1)}=2J_0(\mu_k)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m P_1^*(y_m)I_1(y_m)K_1(y_m)}{Q'(iy_m)(y_m^2+\mu_k^2)},$$

$$\alpha_{0,0}^{(2)}=\frac{1}{2}cr_2+2c\sum_{m=1}^{\infty}\frac{I_1(y_m)K_1(y_m c)}{Q'(iy_m)},$$

$$\alpha_{0,0}^{(2)}=\frac{1}{2}cr_2+2c\sum_{m=1}^{\infty}\frac{I_1(y_m c)K_1(y_m)}{Q'(iy_m)}\quad (c<1),$$

$$\alpha_{k,0}^{(2)}=cJ_0(\mu_k)\left\{-\frac{\pi}{2c}\frac{\mu_k N_1(\mu_k)}{Q(\mu_k/c)}J_1\left(\frac{\mu_k}{c}\right)+\right.$$

$$\left.+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^2 I_1(y_m)K_1(y_m c)}{Q'(iy_m)[y_m^2+(\mu_k/c)^2]}\right\}(c>1),$$

$$\alpha_{k,0}^{(2)}=2cJ_0(\mu_k)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^2 I_1(y_m c)K_1(y_m)}{Q'(iy_m)[y_m^2+(\mu_k/c)^2]}\quad (c<1),$$

$$\beta_{0,0}^{(1)}=\frac{1}{2}h_1^1 r_2+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{R_1^*(y_m)I_1(y_m)K_1(y_m)}{y_m Q'(iy_m)},$$

$$\beta_{k,0}^{(1)}=2J_0(\mu_k)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m R_1^*(y_m)I_1(y_m)K_1(y_m)}{Q'(iy_m)(y_m^2+\mu_k^2)},$$

$$\beta_{0,0}^{(2)}=-\frac{1}{2}ch_2^1 r_2-2ch_2^1\sum_{m=1}^{\infty}\frac{I_1(y_m)K_1(y_m c)}{Q'(iy_m)}\quad (c>1),$$

$$\beta_{0,0}^{(2)}=2ch_2^1\sum_{m=1}^{\infty}\frac{I_1(y_m c)K_1(y_m)}{Q'(iy_m)}\quad (c<1),$$

$$\beta_{k,0}^{(2)} = -2ch_2^1 J_0(\mu_k)\left\{-\frac{\pi}{2c}\frac{\mu_k N_1(\mu_k)}{Q(\mu_k/c)}J_1\left(\frac{\mu_k}{c}\right)+\right.$$

$$\left.+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^2 I_1(y_m)K_1(y_m c)}{Q'(iy_m)[y_m^2+(\mu_k/c)^2]}\right\}(c>1),$$

$$\beta_{k,0}^{(2)} = 2ch_2^1 J_0(\mu_k)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^2 I_1(y_m c)K_1(y_m)}{Q'(iy_m)[y_m^2+(\mu_k/c)^2]}\Bigg\}\ (c<1),$$

$$\alpha_{0,n}^{(1)} = 2J_0(\mu_n)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m P_1^*(y_m)I_1(y_m)K_1(y_m)}{Q'(iy_m)(y_m^2+\mu_k^2)},$$

$$\alpha_{k,n}^{(1)} = \begin{cases}\alpha_{k,n}, & k\neq n,\\ \alpha_{k,n}-\dfrac{\pi}{4}\dfrac{\mu_n P_1(\mu_n)N_1(\mu_n)}{Q(\mu_n)}J_0^2(\mu_n), & k=n,\end{cases}$$

$$\alpha_{k,n} = 2J_0(\mu_k)J_0(\mu_n)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^3 P_1^*(y_m)I_1(y_m)K_1(y_m)}{Q'(iy_m)(y_m^2+\mu_k^2)(y_m^2+\mu_n^2)},$$

$$\alpha_{0,n}^{(2)} = 2cJ_0(\mu_n)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^2 I_1(y_m)K_1(y_m c)}{Q'(iy_m)(y_m^2+\mu_n^2)}\ (c>1),$$

$$\alpha_{n,n}^{(2)} = -2cJ_0(\mu_n)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^2 I_1(y_m)K_1(y_m c)}{Q'(iy_m)(y_m^2+\mu_n^2)}\ (c<1),$$

$$\alpha_{k,n}^{(2)} = cJ_0(\mu_k)J_0(\mu_n)\left\{-\frac{\pi}{2c^3}\frac{\mu_k^3 N_1(\mu_k)}{Q(\mu_k/c)[\mu_n^2-(\mu_k/c)^2]}J_1\left(\frac{\mu_k}{c}\right)+\right.$$

$$\left.+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^4 I_1(y_m)K_1(y_m c)}{Q'(iy_m)[y_m^2+(\mu_k/c)^2](y_m^2+\mu_n^2)}\right\}\ (c>1),$$

$$\alpha_{k,n}^{(2)} = -2cJ_0(\mu_k)J_0(\mu_n)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^2 I_1(y_m c)K_1(y_m)}{Q'(iy_m)[y_m^2+(\mu_k/c)^2](y_m^2+\mu_n^2)},$$

$(c<1)$.

Використавши $c_0^{(1)}$, $c_n^{(1)}$ із (23) одержимо:

$$\sum_{k=0}^{N}\left\{\left[\alpha_{k,0}^{(1)}+\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z}\left(1+\frac{1}{h_0^1}\right)\beta_{k,0}^{(1)}\right]a_k^{(1)}+\right.$$

$$\left.+\left[\alpha_{k,0}^{(2)}+\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z}\left(1+\frac{1}{h_0^1}\right)\beta_{k,0}^{(2)}\right]\right\}a_k^{(2)}=\frac{1}{2}T_0,$$

$$\sum_{k=0}^{N}\left\{\left[\alpha_{k,n}^{(1)}+\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z}\left(\text{th}\mu_n l+\frac{\mu_n}{h_0^1}\right)\frac{1}{\mu_n}\right]a_k^{(1)}+\right.$$

$$\left.+\left[\alpha_{k,n}^{(2)}+\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z}\left(\text{th}\mu_n l+\frac{\mu_n}{h_0^1}\right)\frac{1}{\mu_n}\right]a_k^{(2)}\right\}=0. \quad (24)$$

Помноживши обидві частини рівняння (22) на ρ, $J_0\left(\frac{\mu_n}{c}\rho\right)$, проінтегрувавши по ρ в межах від 0 до 1, одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $a_k^{(1)}$, $a_k^{(2)}$ $(k=\overline{0,N})$:

$$\sum_{k=0}^{N}\left[\gamma_{k,n}^{(1)}a_k^{(1)}+\gamma_{k,n}^{(2)}a_k^{(2)}\right]=0\ (n=\overline{0,N}), \quad (25)$$

де

$$\gamma_{0,0}^{(1)} = 2(h_3^1-h_1^1)c\sum_{m=1}^{\infty}\frac{I_1(cy_m)K_1(y_m)}{Q'(iy_m)}+\frac{1}{2}r_2(h_3^1-h_1^1)\ (c<1),$$

$$\gamma_{0,0}^{(1)} = -2(h_3^1-h_1^1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{I_1(y_m)K_1(y_m c)}{Q'(iy_m)}\ (c>1),$$

$$\gamma_{k,0}^{(1)} = (h_3^1-h_1^1)J_0(\mu_k)\left\{-\frac{\pi}{2}\frac{\mu_k N_1(\mu_k)}{Q(\mu_k)}J_1(\mu_k c)+\right.$$

$$\left.+2c\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^2 I_1(y_m c)K_1(y_m)}{Q'(iy_m)[y_m^2+(\mu_k/c)^2]}\right\}(c<1),$$

$$\gamma_{k,0}^{(1)} = -2(h_3^1-h_1^1)cJ_0(\mu_k)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^2 I_1(y_m)K_1(y_m c)}{Q'(iy_m)(y_m^2+\mu_k^2)}\ (c>1),$$

$$\gamma_{0,0}^{(2)} = \frac{1}{2}c(h_2^1+h_3^1)+2c\sum_{m=1}^{\infty}\frac{R_2^*(y_m)I_1(y_m c)K_1(y_m c)}{y_m Q'(iy_m)},$$

$$\gamma_{k,0}^{(2)} = 2c^2 J_0(\mu_k)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m R_2^*(y_m)I_1(y_m c)K_1(y_m c)}{Q'(iy_m)[y_m^2+(\mu_k/c)^2]},$$

$$\gamma_{0,n}^{(1)} = 2(h_3^1-h_1^1)cJ_0(\mu_n)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^2 I_1(y_m c)K_0(y_m)}{Q'(iy_m)[y_m^2+(\mu_k/c)^2]}\ (c<1),$$

$$\gamma_{0,n}^{(1)} = -2(h_3^1-h_1^1)cJ_0(\mu_n)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m I_1(y_m)K_0(y_m c)}{Q'(iy_m)[y_m^2+(\mu_n/c)^2]}\ (c>1),$$

$$\gamma_{k,n}^{(1)} = (h_3^1-h_1^1)J_0(\mu_k)J_0(\mu_n)\left\{\frac{\pi}{2}\frac{\mu_k^2 N_1(\mu_k)}{Q(\mu_k)}\frac{\mu_n J_1(\mu_n/c)}{c^2[\mu_k^2-(\mu_n/c)^2]}+\right.$$

$$\left.+2c\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^4 I_1(y_m c)K_1(y_m)}{Q'(iy_m)[y_m^2+(\mu_n/c)^2][y_m^2+(\mu_k/c)^2]}\right\}\ (c<1),$$

$$\gamma_{k,n}^{(1)} = -2c(h_3^1-h_1^1)J_0(\mu_k)J_0(\mu_n)c\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^4 I_1(y_m)K_1(y_m c)}{Q'(iy_n)\left[y_m^2+(\mu_n/c)^2\right][y_m^2+(\mu_k/c)^2]}\ (c>1),$$

$$\gamma_{k,n}^{(2)} = cJ_0(\mu_k)\left\{-\frac{\pi c}{4}\frac{\mu_n R_2(\mu_n)N_1(\mu_n)}{Q(\mu_n)}J_0^2(\mu_n)+\right.$$

$$\left.+2J_0(\mu_n)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^2 R_2^*(y_m)I_1(y_m c)K_1(y_m c)}{Q'(iy_m)[y_m^2+(\mu_k/c)^2]\left[y_m^2+(\mu_n/c)^2\right]}\right\}.$$

Розв'язавши систему лінійних алгебраїчних рівнянь (24), (25), знайдемо $a_n^{(1)}$, $a_n^{(2)}$ $(n=\overline{0,N})$, які необхідні для знаходження температурного поля в циліндрі і в шарі.

Формула для обчислення температури в циліндрі:

$$T(\rho,\zeta)=T_0\left\{1+2\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z}(\zeta-l)\sum_{k=0}^{N}\left[\beta_{k,0}^{(1)}a_k^{(1)}+\beta_{k,0}^{(2)}a_k^{(2)}\right]+\right.$$

$$\left.+2\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}\sum_{m=1}^{N}J_0(\mu_m\rho)\frac{\operatorname{sh}\mu_m(\zeta-l)}{\operatorname{ch}\mu_m l\mu_m J_0^2(\mu_m)}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\beta_{k,m}^{(1)}a_k^{(1)}+\beta_{k,m}^{(2)}a_k^{(2)}\right]\right\},$$
$(\rho<1)$.

Формула для обчислення температури в шарі:

$$T^1(\rho,\zeta)=T_0\left\{\Delta_{0,1}^{(i)}(\rho,\zeta)a_0^{(1)}+\sum_{k=1}^{N}a_k^{(1)}\Delta_{k,1}^{(i)}(\rho,\zeta)+\right.$$

$$\left.+\Delta_{0,2}^{(j)}(\rho,\zeta)a_0^{(2)}+\sum_{k=1}^{N}a_k^{(2)}\Delta_{k,2}^{(j)}(\rho,\zeta)\right\}\ (i=1,2;\ j=3,4),\qquad(26)$$

де $\Delta_{0,1}^{(1)}(\rho,\zeta)=\int_0^\infty\frac{G_1(\eta,\zeta)J_0(\eta\rho)J_1(\eta)}{Q(\eta)}d\eta=$

$$=\frac{1+h_1^1(h+\zeta)}{h_1^1h_2^1h+h_1^1+h_2^1}+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{G_1^*(y_m,\zeta)I_0(y_m\rho)K_1(y_m)}{Q'(iy_m)}\quad(\rho<1),$$

$$\Delta_{0,1}^{(2)}(\rho,\zeta)=-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{G_1^*(y_m,\zeta)I_0(y_m)K_1(y_m\rho)}{Q'(iy_m)}\quad(\rho>1),$$

$$\Delta_{k,1}^{(1)}(\rho,\zeta)=J_0(\mu_k)\int_0^\infty\frac{\eta^2G_1(\eta,\zeta)J_0(\eta\rho)J_1(\eta)}{Q(\eta)(\eta^2-\mu_k^2)}d\eta=J_0(\mu_k)\times$$

$$\times\left\{-\frac{\pi}{2}\frac{\mu_kG_1(\mu_k,\zeta)}{Q(\mu_k)}N_1(\mu_k)J_0(\mu_k\rho)+\right.$$

$$\left.+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^2G_1^*(y_m,\zeta)I_0(y_m\rho)K_1(y_m)}{Q'(iy_m)(y_m^2+\mu_k^2)}\right\}(\rho<1),$$

$$\Delta_{k,1}^{(2)}(\rho,\zeta)=-2J_0(\mu_k)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^2G_1(y_m,\zeta)I_0(y_m)K_1(y_m\rho)}{Q'(iy_m)(y_m^2+\mu_k^2)}\quad(\rho>1),$$

$$\Delta_{0,2}^{(3)}(\rho,\zeta)=c\int_0^\infty\frac{G_2(\eta,\zeta)J_0(\eta\rho)J_1(\eta c)}{Q(\eta)}d\eta=$$

$$=c\left\{\frac{1-h_2^1\zeta}{h_1^1h_2^1h+h_1^1+h_2^1}+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{G_2^*(y_m,\zeta)I_0(y_m\rho)K_1(y_mc)}{Q'(iy_m)}\right\},$$
$(\rho<c)$,

$$\Delta_{0,2}^{(4)}(\rho,\zeta)=2c\sum_{m=1}^{\infty}\frac{G_2^*(\mu_m,\zeta)I_0(y_m\rho)K_1(y_mc)}{Q'(iy_m)}\quad(\rho>c),$$

$$\Delta_{k,2}^{(3)}(\rho,\zeta)=cJ_0(\mu_k)\left\{\frac{-\pi}{2c^2}\frac{\mu_k^2N_1(\mu_k)}{Q(\mu_k/c)}G_2\left(\frac{\mu_k}{c},\zeta\right)J_0\left(\frac{\mu_k\rho}{c}\right)+\right.$$

$$\left.+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^3I_0(y_m\rho)G_2^*(y_m,\zeta)K_1(y_mc)}{Q'(iy_m)[y_m^2+(\mu_k/c)^2]}\right\}\quad(\rho<c),$$

$$\Delta_{k,2}^{(4)}(\rho,\zeta)=-2cJ_0(\mu_k)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^3G_2^*(\mu_m,\zeta)I_1(y_mc)K_0(y_m\rho)}{Q'(iy_m)[y_m^2+(\mu_k/c)^2]},$$

$(\rho>c)$

$$G_1(\eta,\zeta)=\eta\operatorname{ch}\eta(h+\zeta)+h_1^1\operatorname{sh}\eta(h+\zeta),$$

$$G_2(\eta,\zeta)=\eta\operatorname{ch}\eta\zeta-h_2^1\operatorname{sh}\eta\zeta,$$

$$G_1^*(y_m,\zeta)=y_m\cos y_m(h+\zeta)+h_1^1\sin y_m(h+\zeta),$$

$$G_2^*(y_m,\zeta)=y_m\cos y_m\zeta-h_2^1\sin y_m\zeta.$$

Якщо контактна провідність $h_0^1=\frac{h_0R}{\lambda_z}\to\infty$, то одержимо розв'язок задачі у випадку ідеального теплового контакту.

Розглянуто числовий приклад для знаходження температури в шарі згідно формули (26) при l = 1, h = 1,5, c = 1,3, $\lambda_z^1/\lambda_z=0{,}1$, $h_1^1=0{,}01$, $h_2^1=h_3^1=10$ (рис. 1).

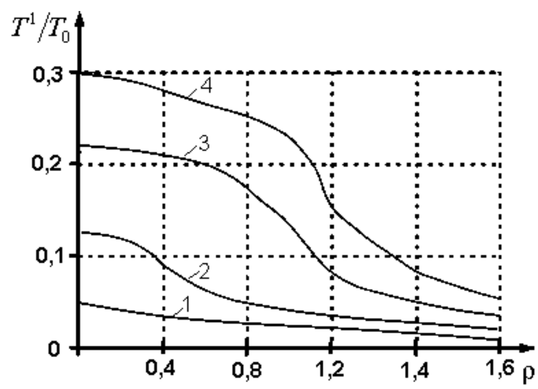

Рис. 1. Зміна розподілу температури T^1/T_0 в шарі у зоні контакту уздовж безрозмірної координати ρ при різних значеннях контактної провідності: крива 1 − $h_0^1=0{,}1$; 2 − $h_0^2=1$; 3 − $h_0^1=5$; 4 − $h_0^1=\infty$

Для підвищення точності розрахунків (3 – 5 %) в системі лінійних алгебраїчних рівнянь (24), (25) вибрано $N=19$. З графіків видно, що розподіл температури в зоні контакту системи тіл залежить від значення контактної провідності.

5. Висновки

Осесиметрична температурна задача для системи тіл циліндр-шар, який лежить на жорсткій основі з круговою виїмкою, для ізотропних матеріалів, з урахуванням неідеального теплового контакту зведена до крайової задачі. Застосовуючи інтегральне перетворення Ганкеля та методу Фур'є, її розв'язування зведено до визначення деяких постійних із системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Отримано формули для знаходимо температурні поля в будь-якій точці циліндра і шару. Досліджено вплив контактної провідності на розподіл температурних полів у зоні контакту. Встановлено, що контактна провідність h_0^1 значно впливає на розподіл температури в зоні контакту системи тіл.

Література

1. Mesnyankin, S. Yu. Solid-solid thermal contact problems: current understanding [Text] / S. Yu. Mesnyankin, A. G. Vikulov, D. G. Vikulov // Physics-Uspekhi. – 2009. – Vol. 52 (9). – P. 891-914.
2. Грилицкий, Д. В. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости [Текст] / Д. Грилицкий, Я. Кизыма. – Львов : Вища школа : Изд-во при Львов. ун-те, 1981. – 136 с.
3. Madhusudana, C. V. Thermal contact conductance [Text] / C. V. Madhusudana. – New York : Springer-Verlag, 1996. – 168 p.
4. Окрепкий, Б. С. Осесиметрична температурна задача для системи тіл циліндр-півпростір при неідеальному тепловому контакті [Текст] / Б. С. Окрепкий, М. Я. Шелестовська // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2005. – № 3. – С. 23-27.
5. Окрепкий, Б. С. Осесиметрична температурна задача для системи тіл циліндр-півпростір при неідеальному тепловому контакті з врахуванням анізотропії матеріалів [Текст] / Б. С. Окрепкий, Ф. М. Мигович // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2009. – № 4. – С. 188-192.
6. Окрепкий, Б. С. Осесиметрична температурна задача для системи тіл циліндр-шар при неідеальному тепловому контакті [Текст] / Б. С. Окрепкий, М. Я. Шелестовська // Вісник Тернопільського національного технічного – університету. – 2010. – Т. 15 (3). – С. 171-176.
7. Mandrik, P. A. Solution of a heat-conduction problem for a finite cylinder and semispace under mixed local boundary conditions in the plane of their contact [Text] / P. A. Mandrik // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2001. – Vol. 74 (5). – P. 1262-1271.
8. Mikic, B. B. Thermal contact conductance; theoretical considerations international [Text] / B. B. Mikic // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1974. – Vol. 17 (2). – P. 205-214.
9. Ayers, G. H. Thermal Contact Conductance of Composite Cylinders [Text] / G. H. Ayers, L. S. Fletcher, C. V. Madhusudana // Journal of Thermophysics and Heat Transfer. – 1997. – Vol. 11 (1). – P. 72-81.
10. Madhusudana, C. V. Thermal conductance of cylindrical joints [Text] / C. V. Madhusudana // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1999. – Vol. 42 (7). – P. 1273-1287.
11. Beck, J. V. Steady-state temperature distribution for infinite region outside a partially heated cylinder [Text] / J. V. Beck, D. Yen, B. Johnson // Chem. Eng. Commun. – 1984. – Vol. 26 (4-6). – P. 355-367.
12. Коваленко, А. Д. Основы термоупругости [Текст] / А. Д. Коваленко. – К. : Наукова думка, 1970. – 304 с.
13. Sneddon, I. N. Fourier Transforms [Text] / I. N. Sneddon. – New York : McGraw-Hill, 1951. – 542 p.
14. Мигович, Ф. М. Обчислення групи невласних інтегралів, які містять функції Бесселя I-го роду [Текст] / Федір Мигович, Богдан Окрепкий // Зб. наук. праць академії наук України. – 1995. – № 8. – С. 133-137.