МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Тернопільська академія народного господарства

На правах рукопису

СМАЛЮК
Галина Федорівна

УДК 519.866

Моделювання прийняття ризикових рішень з формування інвестиційного портфеля

Спеціальність: 08.03.02. – Економіко-математичне моделювання

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата економічних наук

Науковий керівник:
доктор економічних наук,
професор
ОЛЕКСЮК Олександр Степанович

ТЕРНОПІЛЬ – 2002

ЗМІСТ

ВСТУП

Здійснення економічних реформ в Україні, їх спрямування на розвиток ринкової системи, періодичні світові фінансові кризи вимагають створення нового виробничого та фінансового механізму, і, зокрема, радикальних змін в управлінні фінансами суб'єктів господарювання. Актуальними стають фінансові операції, пов'язані з інвестиціями.

Одним з важливих методів обґрунтування інвестиційної діяльності суб'єктів господарювання, які здійснюють фінансові операції і вкладають свої капітали у придбання цінних паперів різних видів, є теорія вибору портфеля, яка дає змогу визначити як окремі інвестори розпоряджаються своїми фінансовими ресурсами, яке співвідношення акцій різних видів, облігацій, готівкових засобів і заощаджень та інших активів вони хотіли б мати у своєму портфелі. При цьому значення і роль науково-методичного інструментарію підготовки і прийняття фінансових рішень підвищуються із зростанням обсягу фінансових операцій.

Теоретичний і практичний інтерес до процедур прийняття інвестиційних рішень як до перспективного напрямку використання економіко-математичних методів і моделей, так і до інструментарію управління портфельними інвестиціями в умовах становлення ринкової економіки в Україні зростає. Ця проблематика досліджувалась у багатьох роботах вітчизняних та зарубіжних науковців [1-3; 5-8; 11-16; 18-22; 25; 29; 34; 36; 39; 40; 42-49; 51; 52; 54; 59; 67; 71-78; 81-87; 89-92; 94-102; 108-112; 114-120; 124; 127-130; 132-138; 140-142; 145-148; 1152; 173; 176-181; 183-185; 188-224; 226-230], які заклали наукові основи для подальших досліджень у даному напрямку.

Актуальним у процесі формування інвестиційного портфеля є дослідження фактору ризику. Ризик в інвестиційній діяльності – це об'єктивний фактор, який зумовлений дією стохастичних причин і чинників, зокрема конфліктністю ситуації прийняття рішень, невизначеністю цілей і наслідків дій, відсутністю повної і об'єктивної інформації щодо процесів, що відбуваються тепер чи виявлять себе в майбутньому [130, с. 5]. Завдання особи, що приймає рішення (ОПР), полягає в тому, щоб заздалегідь врахувати властивий рішенням з формування інвестиційного портфеля ризик і звести його до мінімуму за допомогою побудови економіко-математичних моделей.

Незважаючи на значну кількість публікацій [4; 9; 27; 30-33; 35; 37; 38; 41; 53; 58; 67; 80; 88; 93; 97-99; 104; 111-114; 117-122; 126; 128; 144; 147-149; 158; 167; 186; 187; 209-215; 220; 222-224; 227; 228], загалом проблема моделювання прийняття ризикованих рішень у процесі формування інвестиційного портфеля потребує подальшого дослідження, зокрема під кутом зору побудови економіко-математичних моделей управління інвестиціями суб'єктів господарювання. Аналіз літературних джерел показав, що прийняття рішень з формування інвестиційного портфеля ускладнюється різними факторами: вид інвестицій; вартість цінних паперів; множина доступних цінних паперів; обмеженість фінансових ресурсів, доступних для інвестування; ризик, пов'язаний з прийняттям інвестиційного рішення тощо. А це поставило перед науковцями важливе й актуальне завдання теоретичної розробки і практичної реалізації концепції прийняття рішень з формування інвестиційного портфеля.

Отже, актуальною є побудова і розробка економіко-математичних методів і моделей, пов'язаних з управлінням фінансовими інвестиціями суб'єктів господарювання.

Актуальність теми дослідження зумовлена необхідністю наукового обґрунтування концепції формування інвестиційного портфеля, розробки та впровадження економіко-математичних методів і моделей прийняття ризикових інвестиційних рішень суб'єктів господарювання.

Ринок цінних паперів – найбільш значна і мобільна частина фінансового ринку в розвинених країнах. У нашій країні цей ринок перебуває на стадії становлення, але деякі його сектори досягли значного розвитку – державні цінні папери і ринок акцій та облігацій. Особливість цінних паперів полягає в тому, що, з одного боку, це засоби залучення фінансового капіталу у виробничу сферу та сферу послуг, а з іншого – активи, володіння і управління якими приносить певний дохід. На сучасному етапі становлення ринкової системи в Україні та з виникненням і розвитком ринку цінних паперів постають проблеми оптимального розміщення капіталів, необхідності формування інвестиційного портфеля в умовах ризику і здійснення оцінки цінних паперів, що відповідають стану нашої економіки.

Різні аспекти досліджуваної проблеми висвітлили у працях вітчизняні та зарубіжні вчені: Г. Дж. Александер, І. Бланк, О. Буклемішев, В. Вітлінський, О. Воронцовський, А. Гальчинський, В. Геєць, А. Гойко, Б. Губський, М. Дженсен, О. Карагодова, Ю. Касімов, В. Ковальов, А. Кукуш, Дж. Лінтнер, Ю. Лукашин, М. Малютіна, Г. Марковіц, Г. Маслюк, О. Мертенс, А. Михайлов, М. Міллер, Дж. Моссін, С. Наконечний, О. Олексюк, А. Пересада, С. Ріппа, П. Рогожина, Р. Ролл, С. Росс, М. Скрипниченко, Дж. Тобін, І. Фішер, Д. Черваньов, У. Шарп, В. Шевчук, О. Ястремський та ін.

Водночас у науковій літературі недостатньою мірою висвітлені інтегровані дослідження з проблематики управління фінансовими інвестиціями суб’єктів господарювання. Відсутність цілісної концепції і системного підходу до вирішення проблем управління фінансовими інвестиціями суб’єктів господарювання в умовах ризику стала суттєвою причиною низької результативності управлінських рішень і дій щодо виробничо-господарської та фінансової діяльності суб’єктів ринку, що формується. Тому потребує подальшого дослідження питання розробки економіко-математичних моделей з формування інвестиційного портфеля в умовах становлення ринкової системи в Україні.

Отже, з огляду на нову економічну ситуацію в Україні актуальною постає проблема розробки економіко-математичних методів та моделей прийняття ризикових рішень з формування інвестиційного портфеля, що й визначило мету та основні завдання дослідження.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана відповідно до плану науково-дослідних робіт кафедри інтелектуальної власності і систем прийняття рішень Тернопільської академії народного господарства (ТАНГ) і належить до держбюджетної теми “Методологічні основи моделювання управління в предметних галузях: фінанси, інтелектуальна власність, право в концепції комп’ютерних систем прийняття рішень“ (№ ДР 0101U000256, шифр ІВСПР – 01 – 99 “К”). Особисто автор розробила моделі максимізації сподіваної дохідності інвестиційного портфеля при заданому рівні ризику та моделі мінімізації ризику при заданому рівні сподіваної дохідності з урахуванням обмежень на взаємозв’язки між дохідностями активів портфеля.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційного дослідження є розробка економіко-математичних моделей прийняття ризикових рішень з формування інвестиційного портфеля суб’єктів господарювання в умовах становлення ринкової системи в Україні.

Для реалізації мети роботи необхідним є визначення і розв’язання таких проблемних задач:

- проведення аналізу методів і підходів й обґрунтування необхідності розробки економіко-математичних моделей прийняття ризикових рішень з формування інвестиційного портфеля суб’єктів господарювання;
- побудову моделей оцінки сподіваної дохідності та ризику портфеля, що містить безризикові та ризикові активи;
- побудову моделей оцінки сподіваної дохідності й ризику портфеля, всі активи якого ризикові;
- розробку моделей оцінки ризику портфеля цінних паперів з різними термінами дохідності.

Об’єктом дослідження є процес управління фінансовими інвестиціями суб’єктів господарювання в умовах становлення ринкової системи в Україні.

Предметом дослідження є методи і моделі прийняття ризикових фінансових рішень з формування інвестиційного портфеля суб’єктів господарювання.

Методи дослідження. Теоретичною основою дослідження є загальнонауковий діалектичний, аналітичний, індуктивний та дедуктивний методи, а також системний підхід і праці провідних вчених з формування інвестиційного портфеля, економіко-математичного моделювання й теорії прийняття рішень. У процесі дослідження використано методи: оптимізації; математичного аналізу, зокрема диференціального й інтегрального числення; методи розв’язування систем алгебраїчних рівнянь; теорії ймовірностей та математичної статистики; аналіз рішень; аналіз ризику.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в узагальненні та подальшому розвитку теорії і практики вирішення наукової проблеми з розробки економіко-математичних моделей для формування інвестиційного портфеля суб’єктів господарювання. До основних результатів, що становлять наукову новизну, належать моделі, які:

дістали подальший розвиток:

– модель оптимізації дохідності інвестиційного портфеля, один з активів якого не супроводжується ризиком, а інші активи незалежні між собою;
– модель максимізації дохідності інвестиційного портфеля, фіксований ризик якого визначається згідно з моделлю Шарпа і один з активів якого безризиковий;
– модель максимізації дохідності інвестиційного портфеля, що складається з двох взаємозалежних і одного незалежного активу;
– модель оптимізації дохідності портфеля цінних паперів з фіксованим ризиком, що визначається згідно з моделлю Шарпа;

вперше запропоновані:

– модель формування інвестиційного портфеля на основі мінімізації його коефіцієнта варіації;

– модель портфеля цінних паперів з різними термінами дохідності та випадковою ставкою дисконту;
– модель інвестиційного портфеля з різнотерміновими активами, що можуть приносити випадкові номінальні доходи.

Практичне значення одержаних результатів. Практична цінність дисертації полягає в тому, що: розроблено моделі максимізації сподіваної дохідності при заданому рівні ризику та моделі мінімізації ризику при заданому рівні сподіваної дохідності інвестиційного портфеля з урахуванням обмежень на взаємозв’язки між дохідностями активів портфеля, які доведені до практичної реалізації і дають змогу суб’єктам господарювання приймати ризикові рішення з формування інвестиційного портфеля в умовах становлення ринкової системи в Україні.

Результати дисертаційного дослідження використані у розробці бізнес-планів та інвестиційних проектів розвитку відкритих акціонерних товариств “Деметра” (м. Луцьк), у складі якого функціонують чотири заводи АПК (довідка № 4 від 22.01.2002 р.) та “Опілля” (м. Тернопіль) (довідка № 17-А від 27.02.2002 р.); при виконанні держбюджетної теми “Методологічні основи моделювання управління в предметних галузях: фінанси, інтелектуальна власність, право в концепції комп’ютерних систем прийняття рішень“ (довідка № 124-06/69 від 28.01.2002 р.); у розробці навчальних робочих програм з дисциплін: “Інформаційні системи у фінансово-кредитних установах”, “Управління підприємницьким ризиком”, “Економічний ризик і методи його вимірювання”, а також у розробці навчальних методик для підготовки студентів та слухачів курсів підвищення кваліфікації з даної проблематики в ТАНГу (довідка № 124-06/70 від 28.01.2002 р.);

При виконанні вказаних робіт дисертант брала безпосередню участь у формуванні теоретико-методологічних і методичних підходів з фінансового менеджменту, розробці математичного й програмного забезпечення та проведенні аналітичних і прогнозних розрахунків, експертних оцінок, що стосуються прийняття інвестиційних рішень суб’єктами господарювання.

Особистий внесок здобувача. Дисертація є самостійною завершеною роботою. Особисто автору належить комплексне дослідження теоретичних засад використання економіко-математичного моделювання в процесі формування інвестиційного портфеля суб’єктів господарювання. Наукові положення, розробки економіко-математичних моделей, висновки і рекомендації отримано самостійно. У дисертації автору належать ідея, методика, економіко-математичні моделі, методичні підходи до прийняття ризикових рішень з формування інвестиційного портфеля суб’єктів господарювання.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень доповідалися, обговорювалися і отримали позитивну оцінку на міжнародних, республіканських конференціях, конференціях та наукових семінарах викладачів Тернопільської академії народного господарства, Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, і, зокрема на: міжнародній науково-практичній конференції “Методологія економіко-статистичного дослідження в умовах ринку” (Тернопіль, ТАНГ, 1997 р.); другій міжнародній науковій конференції “Проблеми економічної інтеграції України в Європейський Союз: мікроекономічний аспект” (Ялта-Форос, 1997 р.); шостій міжнародній науковій конференції “Проблеми економічної інтеграції України у Європейський Союз: інвестиційні аспекти” (Ялта-Форос, 1999 р.); сьомій міжнародній науковій конференції “Проблеми економічної інтеграції України в Європейський Союз: європейські студії” (Ялта-Форос, 2000 р.); міжнародній науково-практичній конференції “Ризикологія в економіці та підприємництві” (м. Київ, 2001 р.).

Публікації. За результатами дослідження опубліковано 8 наукових праць, загальним обсягом 7,5 у.д.а., з них 1 брошура, 5 наукових статей у фахових виданнях, 2 – у наукових журналах за матеріалами науково-практичних конференцій.

РОЗДІЛ 1

СУЧАСНИЙ СТАН ТА РОЗВИТОК МОДЕЛЮВАННЯ ПРИЙНЯТТЯ РИЗИКОВИХ РІШЕНЬ У ПРОЦЕСІ ФОРМУВАННЯ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПОРТФЕЛЯ

1.1. Принципи й етапи формування та реалізації інвестиційного портфеля

Проблема формування інвестиційного портфеля актуальна не тільки для інвестиційних інститутів, тобто організацій, які професійно займаються акумулюванням фінансових ресурсів і використанням їх на ринку капіталів, а й для широкого спектра юридичних та фізичних осіб.

Арсенал методів формування інвестиційного портфеля, як зазначалось вище, досить широкий; найбільшим авторитетом нині користується теорія інвестиційного портфеля Г. Марковіца і У. Шарпа. Основні принципи, викладені у цій теорії наступні [85, с. 246].

По-перше, успіх інвестицій в основному залежить від правильного розподілу засобів за типами активів. Проведені західними спеціалістами експерименти показали, що прибуток визначається:

- на 94% вибором типу інвестиційних інструментів, які використовуються (акції великих компаній, короткотермінові казначейські векселі, довготермінові облігації тощо);
- на 4% вибором конкретних цінних паперів заданого типу;
- на 2% оцінкою моменту закупки цінних паперів.

Даний феномен пояснюється тим, що папери одного типу сильно корелюють, тобто, якщо яка-небудь галузь відчуває спад, то втрати інвестора не дуже залежать від того, переважають у його портфелі папери тієї чи іншої компанії.

По-друге, ризик інвестицій у певний тип цінних паперів визначає ймовірність відхилення прибутку від сподіваного значення. Прогнозоване значення прибутку можна визначити на основі обробки статистичних даних про динаміку прибутку від інвестицій у ці папери у минулому, а ризик – як середньоквадратичне відхилення від сподіваного прибутку.

По-третє, загальна дохідність і ризик інвестиційного портфеля можуть змінюватися шляхом варіювання його структурою. Існують різні програми, які дають змогу конструювати бажану пропорцію активів різних типів, наприклад, мінімізувати ризик при заданому рівні сподіваного прибутку або максимізувати прибуток при заданому рівні ризику тощо.

По-четверте, всі оцінки, які використовуються при формуванні інвестиційного портфеля мають ймовірнісний характер. Формування портфеля відповідно до вимог класичної теорії можливе лише за наявності низки факторів: сформованого ринку цінних паперів, певного періоду його функціонування, статистики ринку тощо.

Як відомо, інвестиції підприємства складаються із двох частин: реальних інвестицій і портфеля фінансових інвестицій, співвідношення між якими пов’язане з функціональною орієнтацією суб’єкта господарювання [85]. У подальшому у нашому досліджені розглядатимемо портфель фінансових інвестицій.

Як зазначено у роботі [183, с.10], інвестиційний процес полягає у прийнятті інвестором рішення щодо цінних паперів, в які здійснюються інвестиції, обсягів і термінів інвестування. Ця процедура включає такі етапи, які становлять основу інвестиційного процесу:

- вибір інвестиційної політики;
- аналіз ринку цінних паперів;
- формування портфеля цінних паперів;
- перегляд портфеля цінних паперів;
- оцінка ефективності портфеля цінних паперів.

У роботі [85, с. 246-247] запропоновані наступні етапи формування інвестиційного портфеля:

– формування цілей його створення і визначення їх пріоритетності, а саме, регулярне отримання дивідендів або зростання вартості активів, завдання рівнів ризику, мінімального прибутку, відхилення від сподіваного прибутку тощо;
– вибір фінансової компанії (це може бути вітчизняна або закордонна фірма; при прийнятті рішення можна використовувати низку критеріїв: репутація фірми, її доступність, види пропонованих фірмою портфелів, їх дохідність, види інвестиційних інструментів, що використовуються тощо);
– вибір банку, який буде вести інвестиційний рахунок.

Проведений аналіз літературних джерел [14; 20; 24; 34; 43; 52; 54; 57; 62; 67; 71-73; 77; 82; 85; 101; 104; 110; 121; 135; 137; 139; 143; 150; 153-160; 162; 164; 166; 168; 172; 178; 180; 182; 222-225] показує, що процедура дослідження інвестиційної стратегії підприємства (фірми, компанії) і формування оптимального інвестиційного портфеля є ітеративним процесом і, тому пропонуємо включати до неї такі послідовно виконувані етапи.

Інвестиційна політика. Дослідження інвестиційного середовища і ситуацій, їх оцінка та прогнозування кон'юнктури інвестиційного ринку. Вибір інвестиційної політики включає визначення мети інвестора і обсягу інвестованих засобів. Оскільки для раціональних інвестиційних стратегій існує прямий зв'язок між ризиком і дохідністю, не потрібно вибирати мету – максимальний дохід. Прагнення отримати великі прибутки може з певною ймовірністю привести до великих втрат. Цілі інвестування повинні формулюватись із урахуванням як дохідності, так і ризику.

Даний етап інвестиційного процесу включає вибір потенційних видів фінансових активів для включення в інвестиційний портфель. Вибір повинен враховувати поряд з іншими міркуваннями цілі інвестування, обсяг інвестованих засобів і статус інвестора як платника податків.

Інвестиційна ситуація – це становище в країні з точки зору як внутрішнього, так і зовнішнього інвестора, які вкладають в економіку свої капітали. Вона складається з відповідних елементів (факторів) ризику, які об'єднуються в такі групи [184, с.273]:

- соціально-політична ситуація в країні та її перспективи;
- внутрішньоекономічна ситуація та перспективи її розвитку;
- зовнішньоекономічна діяльність та її перспективи в країні.

Аналіз ринку цінних паперів. Аналіз ринку цінних паперів включає вивчення окремих видів цінних паперів. Однією з цілей такого дослідження є визначення тих цінних паперів, які здаються невірно оціненими на даний час. Існують різні підходи до аналізу цінних паперів. Але більша частина цих підходів належить до двох основних напрямів. Перший напрям називають технічним аналізом, а другий – фундаментальним аналізом [183, с. 807-821].

Технічний аналіз включає вивчення кон'юнктури курсів ринку акцій для того, щоб спрогнозувати динаміку курсів акцій конкретного об'єкта. Спочатку проводиться дослідження курсів за попередній період з метою виявлення тенденцій, що повторюються чи циклів у динаміці курсів. Потім аналізуються курси акцій за останній період часу для того, щоб виявити поточні тенденції, аналогічні виявленим раніше. Це співставлення існуючих тенденцій з попередніми здійснюється, виходячи з припущення, що цінові тренди періодично повторюються. Таким чином, виявляючи поточні тенденції, аналітик сподівається дати досить точний прогноз майбутньої динаміки курсів акцій, що розглядаються.

Фундаментальний аналіз виходить з того, що внутрішня вартість будь-якого фінансового активу дорівнює зведеній вартості всіх готівкових грошових потоків, які власник активу розраховує отримати в майбутньому. Відповідно до цього ОПР необхідно визначити час надходження і величину цих готівкових грошових потоків, а потім розрахувати їх зведену вартість, використовуючи відповідну ставку дисконтування. ОПР повинна не тільки оцінити ставку дисконтування, а й спрогнозувати величину дивідендів, яка буде виплачена в майбутньому за даною акцією. Останнє еквівалентне обчисленню показника прибутку підприємства з розрахунку на одну акцію і коефіцієнта виплати дивідендів. Більше того, необхідно дати оцінку ставки дисконтування. Після того, як внутрішня вартість акцій даного об'єкта визначена, її порівнюють з поточним ринковим курсом акцій з метою з’ясування, чи правильно оцінена акція на ринку.

Розробка інвестиційної стратегії. Розробка стратегії інвестування і прийняття рішень щодо вибору політики інвестування належить до генерування цілей інвестиційної політики підприємства із врахуванням наявних фінансових ресурсів, кон’юнктури і умов інвестиційного ринку; визначення пріоритетних цілей; прийняття інвестиційної стратегії.

Вибір цілей і визначення переваг особи, що приймає рішення, або ієрархічної структури множини цілей цілком залежить від конкретних умов і засобів інвестування. Проте можна визначити деякі загальні цілі інвестиційної діяльності підприємства. Головною метою інвестиційної стратегії формування інвестиційного портфеля є забезпечення реалізації інвестиційної політики підприємства шляхом відбору найбільш ефективних і безпечних інвестиційних варіантів і фінансових інструментів.

Вибір структури загального інвестиційного портфеля. Інвестиційний портфель є цілеспрямовано сформованою множиною об’єктів фінансового інвестування, призначеною для здійснення інвестиційної діяльності відповідно до прийнятої інвестиційної стратегії підприємства.

Із врахуванням характеристик інвестиційного портфеля на етапі вибору його структури проводиться визначення та оптимізація напрямків і пропорцій інвестиційного портфеля з урахуванням обсягу і структури інвестиційних ресурсів, необхідного рівня диверсифікації інвестиційної діяльності. При цьому важливо дотримуватися загальних положень і принципів, які відображають нагромаджений багаторічний світовий досвід інвестиційної діяльності суб’єктів господарювання.

До таких принципів можна віднести: принцип забезпечення реалізації інвестиційної стратегії, який вимагає тісної кореляції між цілями інвестиційної стратегії і цілями формування інвестиційного портфеля;

принцип забезпечення відповідності портфеля інвестиційним ресурсам. Цей принцип вимагає узгодженості загальної капіталомісткості інвестиційного портфеля з обсягом інвестиційних ресурсів; принцип оптимізації співвідношення дохідності і ризику інвестицій, який вимагає узгодженості пропорцій між рівнями цих показників, виходячи із конкретних цілей і умов формування інвестиційного портфеля; принцип оптимізації співвідношення дохідності і ліквідності повинен забезпечити фінансову стійкість і поточну платоспроможність суб'єктів господарювання; принцип забезпечення керованості інвестиційним портфелем визначає обмеженість вибраних інвестиційних проектів можливостями їхньої реалізації в межах заданого кадрового потенціалу інвестора, можливостей систематично простежувати курси фінансових інвестицій і оперативно здійснювати необхідне реінвестування коштів.

Формування початкового інвестиційного портфеля. Генерування варіантів інвестиційних вкладень з метою можливої їх реалізації, пошук потенційних інвестиційних можливостей – це відправна точка інвестиційного процесу. Кожна інвестиційна можливість повинна бути ідентифікованою і ретельно опрацьованою. Остаточний успіх інвестування, а відповідно, і добробут інвестора в цілому залежить не так від його спроможності знаходити вигідні інвестиційні можливості, як від уміння створювати їх.

Прийняття ризикових рішень з остаточного формування інвестиційного портфеля. Забезпечення мінімізації інвестиційних ризиків – одна з головних проблем у процесі формування інвестиційного портфеля. Сучасне ринкове середовище неможливе без ризику. За певних умов ризики можуть зумовити втрату не лише прибутку, а й інвестованого капіталу. Ці обставини зумовлюють необхідність пошуку шляхів та способів зниження ризику при реалізації інвестиційного портфеля.

Фактори ризику мають свою питому вагу. Тому стає важливим кількісне вимірювання як окремих груп факторів ризику, так і інвестиційної ситуації в цілому. Фактори ризику визначають ситуацію в найважливіших, як для внутрішнього так і для іноземного інвестора, сферах життєдіяльності країни з проблематики формування інвестиційного портфеля.

Для оцінки інвестиційного портфеля з точки зору його сподіваної дохідності та ризику доцільно використовувати економіко-математичні методи та моделі.

Остаточне формування інвестиційного портфеля полягає в підсумковому аналізі та відборі активів із врахуванням оптимізації вибраних критеріїв і дотримання ресурсних обмежень та вимог щодо забезпечення необхідної диверсифікації інвестиційної діяльності. Формування портфеля цінних паперів включає визначення конкретних активів для вкладення засобів, а також пропорцій розподілу інвестованого капіталу між активами. При цьому інвестор стикається з проблемами селективності, вибору часу операцій і диверсифікації. Селективність відноситься до аналізу цінних паперів і пов'язана з прогнозуванням динаміки цін певних видів цінних паперів. Вибір часу операцій включає прогнозування зміни рівня цін на акції порівняно з цінами для фондових інструментів з фіксованим доходом, такими як корпоративні облігації. Диверсифікація полягає в формуванні інвестиційного портфеля таким чином, щоб при певних обмеженнях мінімізувати ризик.

Моніторинг інвестиційного портфеля полягає в систематичному аналізі та контролі за реалізацією інвестиційного портфеля, порівняння поточних і прогнозних показників ефективності, внесення необхідних змін і коректив в інвестиційні групи активів чи окремі активи.

Моніторинг портфеля пов'язаний з періодичним повторенням попередніх етапів. Тобто через деякий час цілі інвестування можуть змінитися, в результаті чого поточний портфель перестане бути оптимальним. Можливо, що інвестору доведеться сформувати новий портфель, реалізувавши частину наявних цінних паперів і придбавши деякі нові. Ще однією причиною для перегляду портфеля є зміна курсу цінних паперів з плином часу. У зв'язку з цим деякі папери, спочатку непривабливі для інвестора, можуть стати вигідним об'єктом вкладення, і навпаки. Рішення про перегляд інвестиційного портфеля залежить окрім інших факторів і від розміру трансакційних витрат і сподіваного зростання дохідності переглянутого портфеля. Оцінка ефективності портфеля включає періодичну оцінку як отриманої дохідності, так і показників ризику, з яким стикається ОПР. При цьому необхідно використати прийнятні показники дохідності і ризику, а також відповідні значення для порівняння.

У таблиці 1.1 представлено сутність основних етапів формування і реалізації інвестиційного портфеля і рекомендовані методи та засоби підтримки відповідних інвестиційних рішень у концепції побудови економіко-математичних моделей підтримки прийняття ризикованих рішень з формування інвестиційного портфеля.

Таблиця 1.1

Етапи формування і реалізації інвестиційного портфеля

№	Назва етапу	Зміст виконання досліджень та робіт	Методи підтримки прийняття рішень
1.	Вибір інвестиційної політики. Дослідження інвестиційного середовища і прогнозування кон'юнктури інвестиційного ринку	Збір та аналіз інформації про інвестиційне середовище, прогноз можливих змін кон'юнктури інвестиційного ринку	Методи експертної оцінки, методи перспективного прогнозування, імітаційне моделювання
2.	Аналіз ринку цінних паперів	Генерування цілей инвестиційної політики підприємства з урахуванням наявних ресурсів, кон'юнктури і умов інвестиційного ринку.	Евристичні процедури, вивчення прикладів, метод історичних аналогій, порівняльний аналіз, розробка і дослідження дерева цілей
3.	Розробка інвестиційної стратегії	Визначення пріоритетних цілей; прийняття інвестиційної стратегії	Порівняльний аналіз, симульоване опитування думок, розробка і дослідження дерева цілей
4.	Вибір структури інвестиційного портфеля	Визначення і оптимізація напрямків і пропорцій інвестиційного портфеля з основних його видів з урахуванням обсягу і структури інвестиційних ресурсів, необхідного	Евристичні методи і прийоми, ситуаційне моделювання, ділові ігри, імітаційне моделювання, аналіз рішень, аналіз ризику

		рівня диверсифікації інвестиційної діяльності	
5.	Формування початкового інвестиційного портфеля	Генерування варіантів інвестиційних вкладень з метою можливої їх реалізації, пошук потенційних інвестиційних можливостей	Методи багатокритеріальної оптимізації, методи математичного програмування, аналіз рішень
6.	Прийняття ризикових рішень з остаточного формування інвестиційного портфеля	Оцінка інвестиційного портфеля з точки зору його сподіваної дохідності та сподіваного ризику. Заключний аналіз і відбір інвестиційного портфеля з урахуванням оптимізації вибраних критеріїв і дотримання ресурсних обмежень та вимог щодо забезпечення необхідної диверсифікації (страхування) інвестиційної діяльності	Методи математичного програмування, диференціального числення функцій багатьох змінних, методи багатокритеріальної оптимізації, імітаційне моделювання, аналіз рішень, методи і засоби підтримки прийняття інвестиційних рішень.
7.	Моніторинг інвестиційного портфеля	Систематичний аналіз за реалізацією інвестиційного портфеля, співставлення поточних і прогнозних показників ефективності, внесення необхідних змін і коректив в інвестиційні групи активів, створення комплексного інтегрованого математичного забезпечення всього діапазону інвестиційної діяльності	Імітаційне моделювання, адаптивне прогнозування, байєсівське оновлення, методи індикативного планування, техніко-економічний аналіз, методи і засоби підтримки прийняття інвестиційних рішень.

Виходячи з вищевикладеного необхідно відмітити, що концепція моделювання формування та реалізації інвестиційного портфеля висвітлюється в роботах [183; 150; 210-215; 222-224; 227; 228], до якої ми приєднуємося і беремо за основу у даній дисертаційній роботі. Оскільки окрема проблематика цієї концепції, зокрема формування інвестиційного портфеля в умовах невизначеності та ризику, вимагають проведення досить широкого спектра досліджень, тому в наступних розділах дисертаційної роботи розглянемо актуальну тематику моделювання прийняття ризикованих рішень з формування інвестиційного портфеля.

1.2. Аналіз методів і засобів формування інвестиційного портфеля в умовах ризику

Загальні засади і ситуації прийняття рішень з формування інвестиційного портфеля. В умовах формування фінансового ринку в Україні і у зв’язку з переходом до ринкових відносин відкриваються нові можливості використання фінансових ресурсів юридичних та фізичних осіб: купівля цінних паперів, розробка та реалізація інвестиційних проектів та інше, що зумовило підвищення ролі управління фінансами суб’єктів господарювання. Конкурентоспроможність юридичним та фізичним особам може забезпечити лише ефективне управління фінансовими ресурсами, для організації якого суттєве значення мають методологічна база та інструментарій інвестиційного менеджменту.

Актуальними стають фінансові операції, пов’язані з інвестиціями. У більшості літературних джерел [3; 5; 13; 14; 19; 43; 52; 85; 112; 130; 134-136; 168; 183; 184] принциповою класифікаційною ознакою вважають виділення фінансових і реальних інвестицій. Актуальним також є виділення із загального обсягу інновацій та інтелектуальних інвестицій. Автори щойно вказаних робіт проводять чітке розмежування між реальними і фінансовими інвестиціями. До фінансових інвестицій належать: вкладення засобів до різних фінансових інструментів, зокрема в фондові цінні папери; спеціальні цільові банківські вклади; депозити; паї тощо. Реальні інвестиції характеризують вкладення капіталу в основні чи оборотні виробничі фонди: в матеріальні активи (будівлі, споруди, обладнання та інші товарно-матеріальні цінності) або в нематеріальні активи (патенти, ліцензії, “ноу-хау”, технічну, науково-практичну, технологічну та іншу документацію). У сучасній економіці більша частина інвестицій подана фінансовими інвестиціями. Але разом з цим дані типи інвестицій є взаємодоповнюючими, оскільки високий розвиток сфери фінансового інвестування значно сприяє зростанню реальних інвестицій. Якщо мова йде про вкладання капіталу у різні види цінних паперів, то говорять про інвестиційний портфель або портфельні інвестиції. Нині під портфельними інвестиціями будемо розуміти вклади в будь-які цінні папери, у тому числі і вклади з гарантованим доходом.

Проведемо дослідження еволюції розвитку теорії інвестиційного портфеля. Інвестиційна теорія зародилася у 20-30 р. р. XX ст. і була представлена в основному науковими роботами Ірвіна Фішера (Ficher) з теорії відсоткової ставки [200] та Вільямса (Williams) [230], який запропонував теоретичну оцінку капітальним активам. Ще у 1921 р. Найт (Knight) [206] зробив тільки якісний аналіз факторів невизначеності та ризику у процесі прийняття фінансових рішень.

Засновником сучасної теорії інвестицій став видатний американський вчений Гаррі Марковіц (Harry Markowitz), який застосував кількісні, теоретико-ймовірнісні методи у дослідженні впливу ризику на прийняття інвестиційних рішень. У 1952 р. вийшла у світ його стаття “Вибір портфеля” [210], де вперше було запропоновано математичну модель формування оптимального інвестиційного портфеля цінних паперів і методи побудови таких портфелей за відповідних умов. Постійно вдосконалюючи та розвиваючи свою модель, Г. Марковіц у 1959 р. видав монографію [211], присвячену цьому питанню, а в 1990 р. книгу [213], як підсумок роботи з теорії вибору інвестиційного портфеля.

Основною заслугою роботи Г. Марковіца є те, що задача вибору оптимальної інвестиційної стратегії отримала можливість бути перекладеною на чітку математичну мову.

У загальному випадку модель Марковіца – це задача квадратичної оптимізації за лінійних обмежень. Складність застосування згаданої моделі на практиці полягає у підготовці великої кількості вхідних параметрів, таких як: очікувана дохідність, стандартне відхилення і коефіцієнт коваріації фінансових активів.

У 1963 р. Уільям Шарп (William Sharpe) [224] спростив метод вибору оптимального портфеля, звівши задачу квадратичної оптимізації до лінійної на основі запропонованої ним однофакторної моделі ринку капіталів. Це дало можливість методи портфельної оптимізації застосувати на практиці. А поява у 70-х р.р. XX ст. перших пакетів програм автоматизувало вирішення задач управління портфелем цінних паперів. Наприкінці 50-х і на початку 60-х р. р. XX ст. Джеймс Тобін (J. Tobin) опублікував свої наукові роботи з аналогічних тем [227; 228]. Проте його підходи дещо відрізнялися від підходів Г. Марковіца. Г. Марковіц акцентував увагу на поведінці окремого інвестора, який формує оптимальний портфель на основі особистої оцінки ризику і дохідності обраних активів. Та ще й модель Г. Марковіца стосувалася портфеля ризикових активів, а Дж. Тобін запропонував включити у портфель безризикові активи. Якщо підхід Марковіца мікроекономічний, то підхід Тобіна – макроекономічним, тому, що основним об’єктом його дослідження є розподіл сукупного капіталу в готівковій (грошовій) і неготівковій (у вигляді цінних паперів) формах.

Подальший розвиток сучасна портфельна теорія інвестицій отримала у середині 60-х р.р. XX ст. з виходом у світ наукових робіт Шарпа (1964) [223], Лінтнера (Lintner, 1965) [209] і Моссіна (Mossina, 1966) [215]. Цей етап пов’язаний з моделлю оцінки капітальних активів, або CAPM (Capital Asset Price Model).

Увесь наступний період до 1976 р. фінансова теорія розвивалася під домінуючим впливом CAPM. Але вже у 1977 р. CAPM жорстоко розкритикував у своїх роботах Річард Ролл (Richard Roll) [219]. Він навіть висловив думку, що CAPM потрібно взагалі відкинути, тому що вона не припускає емпіричної перевірки. Гарячі суперечки викликає CAPM і сьогодні. У 1976 р. Стів Росс (Steve Ross) [220] розробив арбітражну теорію оцінки капітальних активів і запропонував арбітражну модель, або APM (Arbitrage Pricing Model). Ця модель побудована на основі принципу відсутності арбітражних можливостей, тобто неможливо отримати дохід, якщо інвестиції дорівнюють нулю. Ролл і Росс, які являються прихильниками арбітражної оцінки капітальних активів, запевняють, що згадана модель допускає, принаймні, емпіричну перевірку. Але, незважаючи на згадану раніше критику, найавторитетнішою і важливою інвестиційною теорією залишається теорія CAPM. Про її значимість для сучасної економіки і фінансів свідчить той факт, що у 1981 р. Дж. Тобін отримав Нобелівську премію, а в 1990 р. цю премію присудили Г. Марковіцу і У. Шарпу саме за розвиток сучасної портфельної теорії.

70-і роки XX ст. ознаменували собою початок подальшого розвитку сучасної теорії інвестицій. Основною причиною цього стало стрімке розширення і поглиблення математичних засобів фінансового аналізу. Серед важливих робіт дослідників можна назвати [122; 125; 150; 155; 175; 177; 184; 197].

Усе вищесказане щодо портфельної теорії стосується лише країн Заходу, зокрема США. Але ця теорія викликала великий інтерес і на пострадянському просторі, у тому числі в нашій країні. У моделях [15; 21; 23; 31; 32; 34; 35; 42; 46; 47; 54; 62; 64–66; 77; 80; 101–104; 118; 129] запропоновані нові підходи, що є фактичним внеском вітчизняної науки у розвиток сучасної портфельної теорії.

Російський вчений Ю. П. Лукашин [104] запропонував відразу кілька альтернативних мір ризику портфеля цінних паперів. А. Михайлов присвятив свою роботу [118] ефективності інвестиційних рішень. Методам та результатам досліджень ефективності російського фондового ринку присвятили свою роботу О. В. Буклемішев та М. С. Малютіна [22].

Серед наукових робіт українських вчених на особливу увагу заслуговують такі [31-37; 39; 46; 51; 94; 96; 102; 186; 187]. Визначення безпосередньо коштів, потрібних на купівлю різних видів активів, а не оптимальні частки від загальної суми вкладень коштів в активи інвестиційного портфеля вперше запропонували О. О. Карагодова та

Г. Ф. Маслюк [77]. Ця модель, на нашу думку, є вдосконаленням моделі Г. Марковіца тому, що вона має більш прикладний характер.

Л. Жураховська та С. Жураховський у своїй статті [67] використали ігровий підхід для формування оптимального портфеля державних цінних паперів. Основна цінність такого підходу полягає у тому, що він дає змогу побудувати хеджований портфель, дохідність якого суттєво не змінюється при відхиленні фактичної динаміки ставки від прогнозованої.

Велику увагу привертають до себе статті С. Н. Литвиненко та В. І. Піддубного [101]. Вони зробили порівняльний аналіз практичного застосування моделей У. Шарпа і Г. Марковіца в Україні за наявності коротких продаж.

На основі проведеного дослідження вчені дійшли до висновку, що якщо використання коваріації емітентів щодо ринкового індексу (в моделі Шарпа) дає змогу отримати оптимальний розв'язок і застосувати його на практиці, то коваріації емітентів щодо один одного (в моделі Марковіца) призводить до різких непередбачуваних змін на нерозвиненому українському фондовому ринку.

Важливий внесок у розвиток альтернативних підходів до оцінки дохідності та ризику зробив В. В. Вітлінський [31]. Серед робіт вітчизняних вчених з цієї проблематики слід відзначити ще такі [36; 81].

Пріоритетним завданням інвестиційного менеджменту є не максимізація доходу чи прибутку підприємства, фірми, компанії, а забезпечення високих темпів їх економічного розвитку за умови достатньої фінансової стійкості під час цього розвитку. До основних функцій прийняття інвестиційних рішень відносяться [14, с. 17]:

- дослідження зовнішнього інвестиційного середовища і прогнозування кон'юнктури інвестиційного ринку;
- розробка стратегічних напрямків інвестиційної політики підприємства (об'єкта управління);
- розробка стратегії формування інвестиційних ресурсів об'єкта управління;

- пошук і оцінка інвестиційної привабливості окремих реальних проектів, які характеризуються поточним попитом на інвестиційному ринку, і відбір найефективніших серед них;
- оцінка інвестиційних якостей окремих фінансових інструментів (акцій та інших цінних паперів) і відбір найефективніших серед них;
- формування інвестиційного портфеля і його оцінка за допомогою критеріїв дохідності, ризику та ліквідності;
- поточне планування і оперативне управління реалізацією окремих інвестиційних програм і проектів;
- організація моніторингу (відстеження динаміки розвитку процесу і зіставлення з прогнозом) реалізації окремих інвестиційних програм і проектів;
- підготовка рішень щодо своєчасного виходу із неефективних інвестиційних проектів (продажу окремих фінансових засобів) і реінвестування капіталу.

У контексті інвестиційного менеджменту проблеми прийняття рішень і поведінка особи, яка приймає ці рішення, останнім часом заслуговують дедалі більшої уваги [5; 7; 23; 26; 55; 56; 61; 66; 68; 69; 79; 103; 105-107; 123; 126; 161; 163; 165; 169-171; 174; 225]. Це зумовлено зростаючим динамізмом навколишнього інформаційного середовища, різким темпом науково-технічного прогресу, збільшенням взаємопов’язаності фінансових ресурсів. ОПР, приймаючи фінансові рішення, має справу зі складним вибором та необхідністю генерування і розгляду множини альтернативних варіантів дій. Для оцінки варіантів використовують знання фахівців, складні фінансово-аналітичні розрахунки, наукові дослідження фінансової системи й засоби сучасних інформаційних технологій. Питання підтримки фінансових рішень на всіх стадіях інвестиційного процесу стають дедалі актуальнішими у процесі формування інвестиційного портфеля. Фактично проблема полягає в моделюванні й автоматизації на цій основі творчої частини праці осіб, які приймають інвестиційні рішення, в реальних умовах їх діяльності.

Прийняття рішень належить до найвідповідальніших елементів формування інвестиційного портфеля і охоплює: оцінку стану процесу для визначення умов, які потрібно знати для прийняття рішень; пошук, розробка і аналіз можливих варіантів дій; вибір одного якогось напрямку дій із можливих альтернатив таким чином, щоб була досягнута певна визначена, бажана для ОПР, мета. Ефективність інвестиційних рішень залежить: від рівня підготовки ОПР, що визначає якість прийняття рішень; особи, яка реалізує рішення, від цього залежить якість реалізації рішення; ефективності функціонування інформаційної системи, яка визначає якість інформаційних зв'язків з ОПР, а також навколишнім середовищем.

Ефективне формування та стратегія управління інвестиційним портфелем є однією з основних проблем у сучасній теорії інвестицій. Інвестиційний портфель або портфель цінних паперів – це цілеспрямовані вкладення в цінні папери з метою управління ними як єдиним цілим. Згідно Закону України "Про цінні папери і фондову біржу", до цінних паперів, які виступають об'єктами портфельного інвестування належать [70]: акції; облігації внутрішніх та зовнішніх державних позик; облігації місцевих позик; облігації підприємств; казначейські зобов'язання держави; ощадні сертифікати; інвестиційні сертифікати; векселі; приватизаційні папери. Рішення з формування інвестиційного портфеля належать до класу рішень організаційного управління і мають у своїй основі чимало загальних характеристик. Проблеми прийняття інвестиційних рішень є унікальними й нестандартними, але вони в своїй ситуаційній основі мають загальні риси [116; 216]: неповторність ситуації вибору; складний для оцінки характер альтернатив, які розглядають; недостатня визначеність наслідків дій (невизначеність післядій); наявність сукупності різнорідних чинників, які необхідно враховувати при прийнятті рішень; наявність особи або групи осіб, які несуть відповідальність за прийняття рішень.

Основною метою формування інвестиційного портфеля є забезпечення реалізації основних напрямів політики фінансового інвестування підприємства шляхом підбору найдохідніших і найбезпечніших фінансових інструментів. З врахуванням сформованої головної мети будується система конкретних локальних цілей формування інвестиційного портфеля, основними з яких є [13, с. 107]:

- забезпечення високого рівня формування інвестиційного доходу у поточному періоді;
- забезпечення високих темпів приросту інвестованого капіталу у майбутній довгостроковій перспективі;
- забезпечення мінімізації рівня інвестиційних ризиків, пов’язаних з фінансовим інвестуванням;
- забезпечення необхідної ліквідності інвестиційного портфеля;
- забезпечення максимального ефекту “податкового щита” у процесі фінансового інвестування.

У даному дослідженні розглянемо проблематику прийняття рішень з формування портфеля фінансових інвестицій, вибору критерію (показника) для оцінки ефективності окремих інвестиційних портфелів, побудови економіко-математичних моделей для обчислення цих оцінок та відбору альтернативних варіантів для включення в план інвестиційної діяльності із врахуванням фінансових та технологічних обмежень, яка належить до однієї із найбільш складних проблем прийняття інвестиційних рішень (інвестиційного менеджменту) [1-8; 12-16; 20; 21; 27; 28; 30; 31-37; 46; 51; 58; 72; 78; 80; 84; 88; 99; 104; 121; 128; 166; 183; 186; 210-215; 222-224; 227; 228]. Незважаючи на значну кількість опублікованих монографій і окремих статей, в цілому проблема формування інвестиційного портфеля потребує подальшого дослідження, зокрема під кутом зору створення методичної бази управління інвестиціями суб’єктів господарювання в концепції моделювання прийняття рішень з формування оптимального інвестиційного портфеля в умовах ризику. Підготовку та прийняття інвестиційних рішень можна підтримати шляхом побудови їх моделей. Модель є логічним або математичним описом компонентів і функцій, що відображають істотні властивості модельованого об'єкту чи процесу.

У випадку портфельних інвестицій основним завданням інвестора є формування і управління оптимальним інвестиційним портфелем, що здійснюється, як правило, за допомогою операцій купівлі та продажу цінних паперів на фондовому ринку. При обґрунтуванні інвестиційних рішень, пов'язаних з придбанням цінних паперів доводиться вводити припущення, що інвестор не може однозначно визначити майбутні результати інвестиційної діяльності, але може встановити певний набір їх сподіваних чи можливих значень. Формально таке знаходження вказаних значень зводиться до виділення майбутніх станів економіки (state of economy), кожен з яких породжений сукупністю умов і факторів, які зумовлюють відповідний сподіваний результат.

У процесі обґрунтування інвестиційних рішень і аналізі інвестиційної і фінансової діяльності інвесторів використовують два принципово різні підходи, пов'язані з формуванням оцінки наслідків рішень, що приймаються:

- якщо при обґрунтуванні інвестиційного рішення припускається, що всі наслідки діяльності інвестора, і перш за все його сподівані доходи і витрати, можна визначити однозначно, то йдеться про інвестиційні рішення в умовах визначеності;
- якщо припускається неможливість однозначної оцінки майбутніх доходів та інших наслідків їх реалізації, то мають на увазі інвестиційні рішення в умовах невизначеності і ризику. Необхідність виділення такої групи рішень визначається тим, що існує досить велика множина інвестиційних проектів, доходи та інші характеристики яких значною мірою залежать від майбутніх умов і факторів, які є зовнішніми для будь-якого інвестора.

Вкладаючи засоби у цінні папери, кожен інвестор прагне до максимальної дохідності портфеля, однак дохід завжди прямопропорційний до ризику, який прийнятний інвестору. Тому мета будь-якого інвестора – знайти найприйнятнішу комбінацію цих двох факторів. При формуванні інвестиційного портфеля кожен інвестор повинен використовувати способи мінімізації ризику з придбання цінних паперів.

Ризик і невизначеність – постійні супутники небезпеки прийняття несприятливого рішення [130]. Характерною ознакою для більшості фінансових рішень є наявність значних невизначеностей. Інвестування за своєю природою вимагають розгляду подій у майбутньому, а майбутньому завжди властива невизначеність. Один із найважливіших аспектів процесу обґрунтування і прийняття рішень полягає в тому, що він повинен дати чітке розуміння місця й ролі невизначеності під час прийняття рішення. Завдання того, хто приймає рішення, і того, хто виконує аналіз у його інтересах, полягає в тому, щоб заздалегідь врахувати властиву стратегічним рішенням невизначеність і звести її до аналізу кількісними методами.

Існує і використовується такий підхід до класифікації ризиків [184, с.274-275]:

- політичні ризики (включаючи й деякі соціальні);
- фінансові ризики, що визначають в основному платоспроможність країни з точки зору надання їй (юридичним особам) позичкового капіталу;
- ризики операцій (ризики зовнішньоторговельної діяльності та виробничий ризик).

У загальному випадку задача прийняття ризикових інвестиційних рішень полягає у виборі на основі заданої початкової інформації тих ризикових проектів, придбання яких для даного інвестора оптимальне. Для її розв’язання необхідно уточнити, за допомогою яких характеристик описують кожну інвестиційну альтернативу, а також які показники можуть бути використані як критерій оптимального ризикового інвестиційного рішення.

Основна особливість прийняття інвестиційних рішень в умовах ризику полягає у тому, що у такій ситуації інвестор повинен порівнювати не однозначно визначені грошові потоки, а сподівані сприятливі чи не сприятливі результати і шанси їх реалізації при здійснені кожного з них. Під результатами зазвичай розуміють отриманий дохід.

Обґрунтуванням інвестиційної діяльності підприємства, фірми та індивідуальних інвесторів, які здійснюють ризикові операції і вкладають свій капітал у придбання цінних паперів різних видів є теорія вибору портфеля, яка дає змогу визначити, як окремі інвестори розпоряджаються своїми ліквідними засобами, які відношення акцій різних видів, облігацій, готівкових засобів і заощаджень у різній валюті та інших активів вони хотіли б мати у своєму портфелі.

Сучасна теорія вибору портфеля включає в себе методи обґрунтування оптимального портфеля інвестора, який містить ризикові і безризикові активи. Вона є однією з основних концепцій планування інвестиційної діяльності в умовах ризику і відіграє важливу роль у розробці теорії ринку капіталу [43]. Завдання, яке вирішує інвестор, який здійснює ризикові операції на ринку цінних паперів загалом полягає у наступному. Інвестор володіє певним капіталом, який він збирається розподіляти між різними ризиковими і безризиковими вкладами. У початковий період відома ціна придбаних ризикових цінних паперів.

Розглянемо два основних підходи до формування і оцінки інвестиційного портфеля. Перший – класична постановка задачі або портфель Марковіца, який містить тільки ризикові активи, і, другий – портфель, який включає в себе як ризикові, так і безризикові вклади.

Виділяють такі вихідні положення (припущення) класичної теорії вибору портфеля [43, с. 403]:

- усі інвестиційні рішення приймаються тільки на один період;
- розглядаються тільки ризикові папери;
- для кожного цінного паперу можна прогнозувати сподівану дохідність, стандартне відхилення, а також коваріацію дохідності будь-якої пари цих паперів;

– стандартне відхилення кожного цінного паперу повністю характеризує ризик від його придбання, тобто припускається нормальний розподіл дохідності;
– залучення інвестиції в певні ризикові активи або портфель цінних паперів визначають на основі сподіваної дохідності і ризику у формі стандартного відхилення;
– податки і видатки трансакцій не враховуються.

Завдання інвестора полягає у тому, щоб при встановлених цінах на акції, відомих економічних станах економіки і суб'єктивних ймовірностях їх настання, а також при заданих розподілах майбутніх дохідностей цінних паперів, які залежать від цих станів, знайти найпріоритетнішу для себе структуру портфеля.

Основною перевагою класичної теорії вибору портфеля є те, що диверсифікація інвестицій і збільшення кількості видів цінних паперів у портфелі дають змогу забезпечити йому ризик, менший за ризик найменш ризикового цінного паперу, що входить до цього портфеля.

Розв'язуючи проблему вибору портфеля припускається, що інвестор прагне розв'язати дві проблеми: максимізувати сподівану дохідність при фіксованому рівні ризику і мінімізувати ризик при заданому рівні сподіваної дохідності. Метод, який найчастіше застосовують для вибору найбажанішого інвестиційного портфеля використовує так звані криві байдужості (indifference curves) [183, с. 171-174]. Ці криві відображають ставлення інвестора до ризику і дохідності і, таким чином, можуть бути представлені як двомірний графік, де за горизонтальною віссю відкладається ризик, мірою якого є стандартне відхилення, а за вертикаллю – винагорода, мірою якої є сподівана дохідність. Крива байдужості представляє собою різні комбінації ризику і дохідності, які інвестор вважає рівноцінними. Припускається, що інвестори розглядають будь-який портфель, який лежить на кривій байдужості вище і лівіше, як цінніший, ніж портфель, який лежить на кривій байдужості, що проходить нижче і правіше.

Як головні показники ефективності портфеля було взято два показника: дохідність портфеля та дисперсія дохідності портфеля, які залежать від сподіваної дохідності та дисперсії кожного з активів портфеля.

Проблема вибору оптимального портфеля, з якою стикається кожен інвестор, вимагає оцінки всіх можливих альтернативних портфелів з точки зору їх сподіваних дохідностей, стандартних відхилень, коваріації і кореляції. Сподівана дохідність служить мірою потенційної винагороди, пов’язаної з портфелем. Сподівана дохідність портфеля є середньозваженою сподіваних дохідностей цінних паперів, які входять у портфель. Стандартне відхилення розглядається як міра ризику портфеля і є оцінкою ймовірного відхилення фактичної дохідності від сподіваної. Стандартне відхилення портфеля залежить від стандартних відхилень і пропорцій цінних паперів, які входять у портфель, і, крім того, від коваріацій їх один з одним. Коваріація і кореляція вимірюють міру узгодженості змін значень двох випадкових величин. Зокрема, коваріація розглядається як міра того наскільки дохідності двох цінних паперів залежать одна від одної. Кореляція є статистичною мірою близькою до коваріації. Насправді коваріація двох випадкових змінних дорівнює кореляції між ними, помноженій на добуток їх стандартних відхилень. Коефіцієнт кореляції нормує коваріацію для полегшення порівняння з іншими випадковими змінними.

Очевидно, що ефективних портфелів може бути побудовано багато, тому вводять поняття оптимального портфеля. Модель підтримки прийняття рішень інвестора, згідно якої альтернативи інвестування оцінюються за двома головними параметрами – сподіваною дохідністю і ризиком, що вимірюється як величина стандартного відхилення дохідності, дозволяє сформулювати єдине правило вибору портфеля для всіх без винятку інвесторів: незалежно від індивідуальних вподобань, всі інвестори прагнуть сформувати ефективний портфель – такий, який забезпечує мінімальну міру ризику для обраного рівня доходу, чи максимальний сподіваний дохід при заданому рівні ризику. Цей підхід і сама задача визначення ефективного інвестиційного портфеля носить назву моделі Марковіца. Основна ідея визначення оптимального портфеля в межах теорії Марковіца може бути описана таким чином. Інвестор будує для себе набір кривих байдужості, тобто кривих, які відображають різні комбінації дохідності і ризику. Вважається, що чим вище розміщена крива, тим вищий і рівень задоволення, якого досягає інвестор.

Усі комбінації, які знаходяться на деякій кривій байдужості, однаково прийнятні для інвестора, тобто він байдужий до вибору конкретної комбінації з набору. Далі будується набір ефективних портфелів (а саме, якщо інвестор має на вибір два портфеля з однаковим ризиком, але з різною дохідністю, то портфель, який має більшу дохідність і буде ефективним). Оптимальним для інвестора буде портфель, який характеризує точка перетину множини ефективних портфелів і однією з кривих байдужості. В альтернативу підходу мінімізації ризику при фіксованій дохідності існує зворотний підхід: максимізувати дохідність при фіксуванні рівня ризику, тобто до задачі у класичній постановці (Марковіца) існує і обернена.

Одночасно оптимізувати дохідність і ризик неможливо, але доцільно оптимізувати їх співвідношення [123,с.70].

За таким критерієм оптимальним вважається портфель, в якому на одиницю ризику припадає найбільше одиниць дохідності. Такий підхід безумовно визначає спосіб вибору одного (оптимального) портфеля з множини ефективних. Однак такий портфель буде дійсно оптимальним лише для тих інвесторів, які з таким визначенням оптимальності погоджуються.

В альтернативу максимізації величини дохідності на одиницю ризику також максимізують величину премії за ризик на одиницю ризику. Премією за ризик тут вважається перевищення дохідності активу (портфеля) над величиною безризикової ставки. На перший погляд відмінність критерія незначна. Однак в результаті застосування критерію буде отримано портфель, який розташований у точці дотику променя, що бере початок з безризикової ставки, до ефективної множини. Цей портфель є оптимальним для будь-якого інвестора, незважаючи на його схильність до ризику. А структура цього портфеля повністю відповідатиме структурі ризикових активів в портфелі, побудованому за моделлю Тобіна.

Очевидно, що також можна мінімізувати обернене співвідношення ризик-премія за ризик.

Модель Тобіна та оптимізація співвідношення надлишкова дохідність-ризик, дозволяють отримати оптимальний для будь-якого несхильного до ризику інвестора портфель ризикових активів за припущення про рівність безризикової ставки інвестування і ставки позичання. Не брати до уваги індивідуальну схильність до ризику, будувати універсальний портфель дуже зручно. Однак висунуте припущення не відповідає дійсності. Насправді не існує інвестиційного портфеля, оптимального для всіх інвесторів. Зважаючи, що при всій теоретичній цінності підходу Тобіна підхід Марковіца є кращим, так як інвестор має змогу висловити свою схильність до ризику чи в мінімальному рівні ризику чи в максимальному рівні дохідності. Тому основним напрямом дослідження є побудова обґрунтовано кращих оцінок дохідності і ризику як для задачі Марковіца, так і для інших підходів побудови моделей.

Однією з головних труднощів, пов’язаних з цією теорією, є потреба у великому обсязі інформації. Інвестор повинен прогнозувати не тільки дохід і дисперсію кожного цінного паперу, а й коваріацію доходу від цінного паперу з доходом від кожної акції на фондовому ринку, а це є слабо реалізоване і економічно недоцільне завдання для більшості інвесторів. Наприклад, якщо інвестор розглядає сто цінних паперів, то він повинен оцінити сто сподіваних доходів разом з коваріацією кожної пари цінних паперів. Він повинен зробити близько 5000 окремих оцінок [183].

Як уже зазначалося суттєве спрощення моделі Г. Марковіца запропоноване в роботах У. Шарпа [183; 223; 224], однофакторна модель (single-factor model). Завдяки ідеї систематичного ризику ринкового портфеля в цій роботі вдалося зменшити кількість параметрів до лінійної залежності від кількості активів. Подальший розвиток цей розділ теорії фінансів отримав у роботах [217; 221; 222; 226]. У. Шарпом, Дж. Линтнером і Дж. Моссіном була розроблена модель оцінки дохідності фінансових активів – Capital Asset Pricing Model (CAPM) [183; 209; 215], яка пов'язувала систематичний ризик і дохідність портфеля. Дана модель суттєво спростила задачу вибору ефективного портфеля цінних паперів, яку розглядав Марковіц. Велика заслуга ще у тому, що його модель стало легше використовувати на практиці, тому, що кількість статистичних параметрів, які потрібно оцінити зменшилось до $2n + 1$ (де n – кількість фінансових активів) порівняно з моделлю Марковіца, яка залежить від $(n^2 + n)/2$ параметрів. Ця модель і на даний час залишається одним із самих вагомих наукових досягнень в теорії фінансів. Модель CAPM супроводжується низкою передумов, які в акцентованому вигляді сформував М. Дженсен і опублікував у 1972 р. Розглянемо ці передумови [85, с.249-250; 193, с.76]:

- основною метою кожного інвестора є максимізація можливого приросту свого багатства на кінець періоду, що планується, шляхом оцінки сподіваних дохідностей і середніх квадратичних відхилень альтернативних інвестиційних портфелів;
- усі інвестори можуть брати і давати позики необмеженого розміру за деякою безризиковою відсотковою ставкою; при цьому не існує обмежень на "короткі" продажі будь-яких активів;
- усі інвестори однаково оцінюють величину сподіваних значень дохідності, дисперсії і коваріації всіх активів; це означає, що інвестори знаходяться у однакових умовах відносно прогнозованих показників;
- усі активи абсолютно подільні й ліквідні (тобто, завжди можуть бути продані на ринку за існуючою ціною);
- не існує трансакційних витрат;
- не беруть до уваги податки;

– усі інвестори приймають ціну як екзогенно задану величину (тобто, вони припускають, що їх діяльність з покупки і продажу цінних паперів не впливає на рівень цін на ринку цінних паперів.

Очевидно, що багато із сформульованих передумов мають виключно теоретичний характер і не можуть бути виконані на практиці, наприклад, податки і трансакційні витрати існують, інвестори перебувають у нерівних умовах, в тому числі і відносно доступності інформації тощо. Тому модель САРМ не є ідеальною і неодноразово підлягала як критиці, так і емпіричній перевірці. Особливо інтенсивно дослідження у цьому напрямку велись наприкінці 60-х років минулого століття, а їх результати знайшли відображення у сотнях статей. Існують різні точки зору з приводу моделі, тому наведемо деякі найтиповіші уявлення про сучасний стан цієї теорії з огляду, зробленого Ю. Брігхемом і Л. Гапенскі [85, с. 255-356; 193, с. 95-96].

1. Концепція САРМ, в основі якої лежить пріоритет ринкового ризику перед загальним, є досить корисною і має фундаментальне значення у концептуальному плані. Модель логічно відображає поведінку інвестора, який прагне максимізувати свій дохід при заданому рівні ризику і доступності даних.

2. Теоретично САРМ дає однозначне і добре інтерпретоване уявлення про взаємозв’язки між ризиком і необхідною дохідністю, однак вона припускає, що для побудови зв’язку повинні використовуватися апріорні сподівані значення змінних, тоді як у розпорядженні аналітика є лише апостеріорні фактичні значення. Тому оцінки дохідності, знайдені за допомогою моделі, потенційно містять помилки.

3. Деякі дослідження, присвячені емпіричній перевірці моделі вказали на значні відхилення між фактичними і розрахунковими даними, що дало змогу вченим серйозно критикувати цю теорію. До них належать Ю. Фама і К. Френч, які вивчали залежність між β-коефіцієнтами і дохідністю кількох тисяч акцій за даними за 50 років [85; 185; 198]. На думку Брігхема і Гапенскі, модель САРМ описує взаємозв’язки між сподіваними значеннями

змінних, тому будь-які висновки, які базуються на емпіричній перевірці статистичних даних навряд чи правомірні і не можуть спростувати теорію.

У науковій літературі відомі три основні альтернативні підходи до моделі CAPM: теорія арбітражного ціноутворення, теорія ціноутворення опціонів і теорія преференцій станів в умовах невизначеності.

Останнім часом деякі дослідники [183, с.287] прийшли до висновку, що CAPM не є правильною, базуючись при цьому на результатах тестів, які показали, що залежність між коефіцієнтом β (β – це міра чутливості активу до впливу розглядуваного фактора) і середньою дохідністю акцій відсутня. Результати тестування CAPM були поставлені під сумнів у роботах [192; 202]. У даних дослідженнях встановлено, що середні дохідності і коефіцієнти β мають позитивний лінійний зв'язок у випадку, якщо ринковий портфель включає людський капітал і коефіцієнти β можуть змінюватися в процесі бізнес-циклу.

У роботі [219] стверджується, що CAPM практично не можливо перевірити, оскільки:

- єдиною гіпотезою, яку можна перевірити, є та, що “дійсний” ринковий портфель належить ефективній множині (в цьому випадку очікувані дохідності цінних паперів і їх коефіцієнти β пов'язані додатною лінійною залежністю);
- “дійсний” ринковий портфель не може бути змінений допустимим способом.

Наявні емпіричні відомості підтверджують думку про те, що аналіз інвестиційного портфеля може бути ефективним способом обліку ризику, по крайній мірі при прийнятті рішень на фондовому ринку. Незважаючи на ці обнадійливі результати до теорії інвестиційного портфеля є серйозні зауваження [19, с. 399-406], значна частина яких спрямована на обґрунтованість прийнятих у теорії припущень і можливість її практичного застосування.

Серйозні зауваження висувають і щодо припущення про існування досконалого ринку капіталу. Неможливо вивести будь-яку реальну теорію вартості цінного паперу без цього припущення, оскільки у протилежному випадку дуже складно проаналізувати ефекти комбінування не пов'язаних з ризиком активів і ринковим портфелем. Загальним недоліком є відсутність у реальній економіці повністю безризикових цінних паперів. Державні облігації виключають невиконання зобов'язань по них, однак володіння ними не захищає від інфляції.

І хоча може скластися враження, що методологічна база управління інвестиційним портфелем створена і існує багато моделей, які є цілком придатними до практичного застосування, необхідність подальших досліджень у цьому напрямку очевидна.

Так, зокрема, В. В. Вітлінський в [31, с. 157] зазначає, що "існує широке поле для подальшої розбудови неокласичної теорії портфеля та її використання в різних сферах фінансово-економічної діяльності, розбудови аксіоматичної неокласичної теорії портфеля". У роботі [80, с.6] зазначається: "процес створення сучасної теорії інвестицій іще далеко не завершений і тривають активні обговорення і суперечки з приводу її основних принципів і результатів".

Як видно з проведеного аналізу літературних джерел [2; 3; 7; 8; 13-23; 25; 27; 31-36; 38; 46; 51; 54; 57; 71-76; 80-86; 95; 101; 112; 118; 128; 135; 180; 183; 210-215; 222-224; 228; 229] окремі питання, пов'язані з моделями формуванням та управлінням інвестиційним портфелем залишилися або не дослідженими, або не доведеними до конкретних розрахункових формул, що дають змогу у певному сенсі оптимізувати інвестиційний портфель. Отже, необхідно продовжити дослідження і побудову економіко-математичних моделей для прийняття рішень з формування і управління інвестиційним портфелем. Тому розв'язанню деяких з цих задач і присвячені наступні розділи роботи. Зокрема, актуальними та нерозв'язаними є такі задачі:

– моделювання оптимізації дохідності інвестиційного портфеля, один з активів якого не супроводжується ризиком, а інші активи незалежні між собою;
– максимізації дохідності інвестиційного портфеля, фіксований ризик якого визначається згідно моделі Шарпа і один з активів якого безризиковий;
– моделювання дохідності портфеля, що складається з двох взаємозалежних і одного незалежного активу;
– оптимізації дохідності портфеля цінних паперів з фіксованою дисперсією, що визначається згідно моделі Шарпа;
– формування інвестиційного портфеля на основі мінімізації його коефіцієнта варіації;
– моделювання інвестиційного портфеля цінних паперів з різними термінами дохідності і випадковою ставкою дисконту;
– моделювання портфеля з різнотерміновими акціями, що можуть приносити випадкові номінальні доходи.

Розв'язанню щойно вказаних задач присвячене дане дисертаційне дослідження.

Виконання обчислень у процесі побудови вищевказаних моделей будемо проводити засобами MS Office.

Висновки до першого розділу

1. Інвестиційний процес є важливою складовою частиною економічної науки взагалі і фінансової теорії зокрема, що підтверджує актуальність досліджень з даної проблематики. У даному розділі проведено аналіз теорії і практики щодо інвестиційної політики підприємства із врахуванням наявних ресурсів і умов інвестиційного ринку, визначення пріоритетних цілей, підготовку та прийняття інвестиційних рішень. Проблема формування інвестиційного портфеля актуальна для інвестиційних інститутів, підприємств, організацій, фізичних осіб, які займаються інвестуванням фінансових ресурсів.

2. Проведено аналіз методів та моделей формування інвестиційного портфеля. Зазначено, що найбільший авторитет на даний час має теорія інвестиційного портфеля Г. Марковіца, М. Міллера і У. Шарпа, яка взята за основу у даному дисертаційному дослідженні. Як показує аналіз теорії і практики портфельних інвестицій в українській економічній науці приділялося недостатньо уваги даній проблемі. Вивчення та аналіз літературних джерел показали, що сучасна портфельна теорія базується на застосуванні економіко-математичних моделей, розвиток яких потребує праці ще багатьох дослідників.

3. З’ясовано, що сучасна теорія вибору портфеля є однією з основних концепцій планування інвестиційної діяльності в умовах ризику і відіграє важливу роль у розробці теорії ринку капіталу. Вона включає в себе методи обґрунтування оптимального портфеля інвестора, який містить ризикові і безризикові активи. Показано, що основним завданням, яке вирішує інвестор, що здійснює ризикові операції на ринку цінних паперів, у загальному випадку полягає у наступному: інвестор володіє певним капіталом, який він збирається розподіляти між різними ризиковими і безризиковими вкладами.

4. У результаті проведеного дослідження встановлено, що проблема прийняття ризикових інвестиційних рішень полягає у виборі на основі заданої початкової інформації тих ризикових цінних паперів, придбання яких для даного інвестора оптимальне. Для її вирішення необхідно з’ясувати, за допомогою яких характеристик описується кожна інвестиційна альтернатива,

а також, які показники можуть бути використані як критерій оптимального ризикового інвестиційного рішення. Основна особливість прийняття інвестиційних рішень в умовах ризику полягає у тому, що у такій ситуації інвестор повинен порівнювати неоднозначно визначені грошові потоки, а сподівані сприятливі чи не сприятливі результати і шанси їх реалізації при здійснені кожного з них. Наявні емпіричні відомості підтверджують думку про те, що аналіз інвестиційного портфеля може бути ефективним способом обліку ризику, по крайній мірі при прийнятті рішень на фондовому ринку.

5. Виділено основні принципи теорії формування інвестиційного портфеля, а саме: правильність розподілу засобів за типами активів; ризик інвестицій; залежність між дохідністю і ризиком цінних паперів портфеля; ймовірнісний характер оцінок, які використовують у процесі формування інвестиційного портфеля.

При диверсифікації інвестиційної діяльності необхідно дотримуватися таких принципів: принцип забезпечення реалізації інвестиційної стратегії; принцип забезпечення відповідності портфеля інвестиційним ресурсам; принцип оптимізації співвідношення дохідності і ризику інвестицій; принцип оптимізації співвідношення дохідності і ліквідності; принцип забезпечення керованості інвестиційним портфелем.

6. Сформульовано основні етапи формування та реалізації інвестиційного портфеля: вибір інвестиційної політики, дослідження інвестиційного середовища і прогнозування кон’юнктури інвестиційного ринку; аналіз ринку цінних паперів; розробка інвестиційної стратегії; вибір структури інвестиційного портфеля; формування початкового інвестиційного портфеля; остаточне формування інвестиційного портфеля, прийняття ризикових рішень з формування інвестиційного портфеля; моніторинг інвестиційного портфеля.

7. Проведений аналіз літературних джерел та практичних розробок показав, що математичним забезпеченням охоплено лише окремі аспекти інвестиційної діяльності суб’єктів господарювання, тоді коли сучасні умови господарювання потребують комплексного інтегрованого математичного забезпечення всього діапазону інвестиційної діяльності.

РОЗДІЛ 2
ПОБУДОВА МОДЕЛЕЙ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПОРТФЕЛЯ, ЩО МІСТИТЬ БЕЗРИЗИКОВІ ТА РИЗИКОВІ АКТИВИ

2.1. Оптимізація дохідності інвестиційного портфеля, один з активів якого не супроводжується ризиком, а інші незалежні між собою

Проведемо дослідження інвестиційного портфеля, один з активів якого не супроводжується ризиком. Здебільшого безризиковими вважаються облігації державної позики, які забезпечують гарантовану дохідність. Інші активи портфеля вважаються такими, що випадкові величини дохідностей їх незалежні між собою, тобто кореляція між дохідностями нульова.

Нехай потрібно сформувати інвестиційний портфель з $n\ (n \geq 3)$ активів, дохідності яких є незалежними випадковими величинами з математичними сподіваннями $\mu_i\ (i=\overline{1,n})$ та дисперсіями $D_i\ (i=\overline{1,n})$. При цьому дисперсія дохідності одного з активів нульова, оскільки один з активів безризиковий, скажімо, $D_1 = 0$. Такими, як правило, вважаються активи, фіксована дохідність яких гарантується державою.

Розглянемо задачу про обчислення таких часток $x_i\ (i=\overline{1,n})$ вкладень в i-ті активи, які б надавали максимального значення математичному сподіванню дохідності портфеля

$$\mu_p = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \tag{2.1}$$

при допустимому фіксованому рівні ризику

$$D_p = \sum_{i=2}^{n} D_i {x_i}^2 . \tag{2.2}$$

З рівності

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{2.3}$$

визначимо

$$x_1 = 1 - \sum_{i=2}^{n} x_i \tag{2.4}$$

і підставимо її у формулу (2.1):

$$\mu_p = \mu_1 + \sum_{i=2}^{n} (\mu_i - \mu_1) x_i . \tag{2.5}$$

З формули (2.2) виразимо

$$x_2 = \frac{\sqrt{D_p - \sum_{i=3}^{n} D_i x_i^2}}{\sigma_2} , \tag{2.6}$$

де $\sigma_2 = \sqrt{D_2}$.

Підставивши вираз (2.6) у формулу (2.5), отримаємо математичне сподівання дохідності портфеля як функцію $(n-2)$ незалежних змінних

$$\mu_p = \mu_1 + \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{\sigma_2}\sqrt{D_p - \sum_{i=3}^{n} D_i x_i^2} + \sum_{i=3}^{n} (\mu_i - \mu_1) x_i . \tag{2.7}$$

Щоб знайти точки екстремуму функції (2.7), обчислимо її частинні похідні за змінними x_i $(i = \overline{3,n})$

$$\frac{\partial \mu_p}{\partial x_i} = \mu_i - \mu_1 - \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{\sigma_2} \frac{D_i x_i}{\sqrt{D_p - \sum_{j=3}^{n} D_j x_j^2}} . \tag{2.8}$$

Прирівнявши отримані похідні до нуля, отримаємо систему з (n – 2) рівнянь

$$\frac{x_i}{\sqrt{D_p - \sum_{j=3}^{n} D_j x_j^2}} = \frac{\mu_i - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \cdot \frac{\sigma_2}{D_i} , \qquad (i = \overline{3,n}). \tag{2.9}$$

Оскільки ліві частини в рівняннях системи (2.9) невід′ємні, то для існування дійсних розв′язків цієї системи необхідно, щоб такими ж були і її праві частини:

$$\frac{\mu_i - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \cdot \frac{\sigma_2}{D_i^2} \ge 0 \Rightarrow \frac{\mu_i - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \ge 0 , \qquad (i = \overline{3,n}). \tag{2.10}$$

Вважаючи, що умови (2.10) виконуються, перетворимо систему (2.9)

$$\frac{x_i^2}{D_p - \sum_{j=3}^{n} D_i x_i^2} = \left(\frac{\mu_i - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \right)^2 \frac{D_2}{D_i^2} , \qquad (i = \overline{3,n});$$

$$D_i^2 x_i^2 = \left(\frac{\mu_i - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \right)^2 D_2 \left(D_p - \sum_{j=3}^{n} D_i x_i^2 \right);$$

$$D_i^{\,2} x_i^{\,2} + \left(\frac{\mu_i - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1}\right)^2 D_2 \sum_{j=3}^{n} D_j x_j^{\,2} = \left(\frac{\mu_i - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1}\right)^2 D_2 D_p; \qquad \left(i = \overline{3,n}\right). \tag{2.11}$$

Для зручності розв′язування системи (2.11) введемо позначення

$$y_i = x_i^{\,2}, \ \left(i = \overline{3,n}\right), \tag{2.12}$$

$$\lambda_i = \left(\frac{\mu_i - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1}\right)^2 D_2, \quad \left(i = \overline{3,n}\right). \tag{2.13}$$

З врахуванням цих позначень отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь з невідомими $y_i \quad \left(i = \overline{3,n}\right)$

$$D_i^{\,2} y_i + \lambda_i \sum_{j=3}^{n} D_j y_j = \lambda_i D_p, \quad \left(i = \overline{3,n}\right). \tag{2.14}$$

Систему (2.14) можна записати у більш наочній формі

$$\begin{cases} \left(D_3^{\,2} + \lambda_3 D_3\right) y_3 + \lambda_3 D_4 y_4 + \lambda_3 D_5 y_5 + \cdots + \lambda_3 D_n y_n = \lambda_3 D_p \\ \lambda_4 D_3 y_3 + \left(D_4^{\,2} + \lambda_4 D_4\right) y_4 + \lambda_4 D_5 y_5 + \cdots + \lambda_4 D_n y_n = \lambda_4 D_p \\ \lambda_5 D_3 y_3 + \lambda_5 D_4 y_4 + \left(D_5^{\,2} + \lambda_5 D_5\right) y_5 + \cdots + \lambda_5 D_n y_n = \lambda_5 D_p \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_n D_3 y_3 + \lambda_n D_4 y_4 + \lambda_n D_5 y_5 + \cdots + \left(D_n^{\,2} + \lambda_n D_n\right) y_n = \lambda_n D_p \end{cases}. \tag{2.15}$$

Обчислимо головний визначник системи (2.15) (n – 2)-го порядку

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} D_3^{\,2} + \lambda_3 D_3 & \lambda_3 D_4 & \cdots & \lambda_3 D_n \\ \lambda_4 D_3 & D_4^{\,2} + \lambda_4 D_4 & \cdots & \lambda_4 D_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_n D_3 & \lambda_n D_4 & \cdots & D_n^{\,2} + \lambda_n D_n \end{vmatrix}. \tag{2.16}$$

Як відомо з теорії детермінантів довільний визначник (n – 2)-го порядку є сумою (n – 2)! доданків, кожен з яких є добутком (n – 2) його компонентів. Так, наприклад, при n = 7 визначник 5-го порядку – це сума з 5! = 120 доданків, кожен з яких є добутком 5-х множників, а при n = 9 отримується сума з 7! = 5040 доданків, кожен з яких є добутком сімох компонент.

Однак обчислення визначника (2.16), якщо врахувати структуру його компонентіів, можна значно спростити.

Лема. Визначник (2.16) можна обчислити за формулою

$$\Delta_n = \prod_{i=3}^{n} D_i \left(\prod_{i=3}^{n} D_i + \sum_{i=3}^{n} \lambda_i \prod_{\substack{j=3 \\ j\neq i}}^{n} D_j \right). \tag{2.17}$$

Доведення. Поряд з визначником Δ_n розглянемо визначник

$$\delta_n = \begin{vmatrix} D_3+\lambda_3 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_3 \\ \lambda_4 & D_4+\lambda_4 & \cdots & \lambda_4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_n & \lambda_n & \cdots & D_n+\lambda_n \end{vmatrix}. \tag{2.18}$$

Детермінант δ_n отримується з Δ_n, якщо з його 1-го стовпчика винести D_3, з другого – D_4, і т.д., з (n – 2)-го – D_n. Отже, отримуємо формулу

$$\Delta_n = \prod_{i=3}^{n} D_i \delta_n . \tag{2.19}$$

Отже, залишається довести формулу

$$\delta_n = \prod_{i=3}^{n} D_i + \sum_{i=3}^{n} \lambda_i \prod_{\substack{i=3 \\ j\neq i}}^{n} D_j \tag{2.20}$$

Для цього у визначнику (2.18) від кожного з перших $(n-1)$ стовпчиків віднімемо наступний і отримаємо

$$\delta_n = \begin{vmatrix} D_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_3 \\ -D_4 & D_4 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_4 \\ 0 & -D_5 & D_5 & \cdots & 0 & \lambda_5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D_{n-1} & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -D_n & D_n+\lambda_n \end{vmatrix}. \tag{2.21}$$

Скориставшись правилом Лапласа, розкладемо визначник (2.21) по останньому стовпчику. В результаті отримаємо

$$\delta_n = \left(D_n+\lambda_n\right) D_3 D_4 D_5 \cdots D_{n-1} + \lambda_{n-1} D_3 D_4 \cdots D_{n-2} D_n + \cdots + \lambda_3 D_4 D_5 \cdots D_n =$$

$$= \sum_{i=3}^{n} D_i + \sum_{i=3}^{n} \lambda_i \prod_{\substack{j=3 \\ j\neq i}}^{n} D_j ,$$

що і треба було довести.

Як бачимо, формула (2.17) набагато економніша, ніж загальна, оскільки містить лише (n – 2) доданки, тобто 5 доданків замість 120 при n = 7, чи 7 доданків замість 5040 при n = 9.

Як видно з формули (2.17), головний визначник системи (2.15) додатний, оскільки $D_i > 0$ і згідно формули (2.13) $\lambda_i > 0$, а, отже, ця система сумісна і має єдиний розв′язок.

Для того щоб знайти цей розв′язок за правилом Крамера, потрібно обчислити ще $(n-2)$ допоміжні визначники $(n-2)$-го порядку:

$$\Delta_{y_3} = \begin{vmatrix} \lambda_3 D_p & \lambda_3 D_4 & \lambda_3 D_5 & \cdots & \lambda_3 D_n \\ \lambda_4 D_p & D_4{}^2 + \lambda_4 D_4 & \lambda_4 D_5 & \cdots & \lambda_4 D_n \\ \lambda_5 D_p & \lambda_5 D_4 & D_5{}^2 + \lambda_5 D_5 & \cdots & \lambda_5 D_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_n D_p & \lambda_n D_4 & \lambda_n D_5 & \cdots & D_n{}^2 + \lambda_n D_n \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{y_4} = \begin{vmatrix} D_3{}^2 + \lambda_3 D_3 & \lambda_3 D_p & \lambda_3 D_5 & \cdots & \lambda_3 D_n \\ \lambda_4 D_3 & \lambda_4 D_p & \lambda_4 D_5 & \cdots & \lambda_4 D_n \\ \lambda_5 D_3 & \lambda_5 D_p & D_5{}^2 + \lambda_5 D_5 & \cdots & \lambda_5 D_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_n D_3 & \lambda_n D_p & \lambda_n D_5 & \cdots & D_n{}^2 + \lambda_n D_n \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{y_5} = \begin{vmatrix} D_3{}^2 + \lambda_3 D_3 & \lambda_3 D_4 & \lambda_3 D_p & \cdots & \lambda_3 D_n \\ \lambda_4 D_3 & D_4{}^2 + \lambda_4 D_4 & \lambda_4 D_p & \cdots & \lambda_4 D_n \\ \lambda_5 D_3 & \lambda_5 D_4 & \lambda_5 D_p & \cdots & \lambda_5 D_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_n D_3 & \lambda_n D_4 & \lambda_n D_p & \cdots & D_n{}^2 + \lambda_n D_n \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{y_n} = \begin{vmatrix} D_3{}^2 + \lambda_3 D_3 & \lambda_3 D_4 & \lambda_3 D_5 & \cdots & \lambda_3 D_p \\ \lambda_4 D_3 & D_4{}^2 + \lambda_4 D_4 & \lambda_4 D_5 & \cdots & \lambda_4 D_p \\ \lambda_5 D_3 & \lambda_5 D_4 & D_5{}^2 + \lambda_5 D_5 & \cdots & \lambda_5 D_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_n D_3 & \lambda_n D_4 & \lambda_n D_5 & \cdots & \lambda_n D_p \end{vmatrix}.$$

У кожному з цих визначників з кожного стовпчика винесемо спільні множники. Отримаємо:

$$\Delta_{y_3} = D_p D_4 D_5 \cdots D_n \cdot \delta_{y_3}, \delta_{y_3} = \begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_3 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_3 \\ \lambda_4 & D_4 + \lambda_4 & \lambda_4 & \cdots & \lambda_4 \\ \lambda_5 & \lambda_5 & D_5 + \lambda_5 & \cdots & \lambda_5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_n & \lambda_n & \lambda_n & \cdots & D_n + \lambda_n \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{y_4} = D_3 D_p D_5 \cdots D_n \cdot \delta_{y_4}, \delta_{y_4} = \begin{vmatrix} D_3+\lambda_3 & \lambda_3 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_3 \\ \lambda_4 & \lambda_4 & \lambda_4 & \cdots & \lambda_4 \\ \lambda_5 & \lambda_5 & D_5+\lambda_5 & \cdots & \lambda_5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_n & \lambda_n & \lambda_n & \cdots & D_n+\lambda_n \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{y_5} = D_3 D_4 D_p \cdots D_n \cdot \delta_{y_5}, \delta_{y_5} = \begin{vmatrix} D_3+\lambda_3 & \lambda_3 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_3 \\ \lambda_4 & D_4+\lambda_4 & \lambda_4 & \cdots & \lambda_4 \\ \lambda_5 & \lambda_5 & \lambda_5 & \cdots & \lambda_5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_n & \lambda_n & \lambda_n & \cdots & D_n+\lambda_n \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{y_n} = D_3 D_4 D_5 \cdots D_{n-1} D_p \cdot \delta_{y_n}, \delta_{y_n} = \begin{vmatrix} D_3+\lambda_3 & \lambda_3 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_3 \\ \lambda_4 & D_4+\lambda_4 & \lambda_4 & \cdots & \lambda_4 \\ \lambda_5 & \lambda_5 & D_5+\lambda_5 & \cdots & \lambda_5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_n & \lambda_n & \lambda_n & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}.$$

Отримані формули можна узагальнити так:

$$\Delta_{y_i} = D_p \prod_{\substack{j=3 \\ j \neq i}}^{n} D_j \cdot \delta_{y_i}, \quad \left(i = \overline{3,n}\right), \tag{2.22}$$

де δ_{y_i} – визначники, які не залежать від дисперсії портфеля D_p. Потрібно тепер обчислити визначники δ_{y_i} $\left(i = \overline{3,n}\right)$. У першому з них від кожного стовпчика, починаючи з другого віднімемо перший.

$$\delta_{y_3} = \begin{vmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_4 & D_4 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_5 & 0 & D_5 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_n & 0 & 0 & \cdots & \mathrm{D}_n \end{vmatrix}.$$

Скориставшись в даному визначнику δ_{y_3} правилом Лапласа [106] його розкладу за компонентами першого рядка, отримаємо:

$$\delta_{y_3} = \lambda_3 D_4 D_5 \cdots D_n. \tag{2.23}$$

Відповідно в 2-му визначнику δ_{y_4} від кожного стовпчика, крім другого, віднімемо компоненти 2-го стовпчика

$$\delta_{y_4}=\begin{vmatrix} D_3 & \lambda_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_5 & D_5 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda_n & \lambda_n & \cdots & D_n \end{vmatrix}.$$

Аналогічно отримаємо

$$\delta_{y_4}=D_3\lambda_4 D_5\cdots D_n. \tag{2.24}$$

Відповідно, віднімаючи у δ_{y_5} від кожного стовпчика 3-й (крім самого третього), отримаємо:

$$\delta_{y_5}=\begin{vmatrix} D_3 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ 0 & D_4 & \lambda_4 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_5 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_n & \cdots & D_n \end{vmatrix},$$

$$\delta_{y_5}=D_3 D_4\lambda_5\cdots D_n, \tag{2.25}$$

і т.д.

Останній з допоміжних визначників δ_{y_n} також зводиться до обчислення одного добутку:

$$\delta_{y_n}=\begin{vmatrix} D_3 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_3 \\ 0 & D_4 & 0 & \cdots & \lambda_4 \\ 0 & 0 & D_5 & \cdots & \lambda_5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix},$$

$$\delta_{y_n}=D_3 D_4 D_5\cdots D_{n-1}\lambda_n. \tag{2.26}$$

Узагальнюючи формули (2.23)-(2.26), можна отримати наступну:

$$\delta_{y_i}=\lambda_i\prod_{\substack{j=3\\ j\neq i}}^{n} D_j\ . \tag{2.27}$$

Підставивши отриманий результат (2.27) у формулу (2.22), дістаємо допоміжні визначники Δ_{y_i} в досить наочній формі

$$\delta_{y_i} = D_p \lambda_i \prod_{\substack{j=3 \\ j \neq i}}^{n} D_j^{\,2} . \tag{2.28}$$

Використовуючи формули (2.17) та (2.28) знайдемо розв′язок системи лінійних рівнянь (2.15)

$$y_i = \frac{\Delta_{y_i}}{\Delta}; \qquad y_i = \frac{D_p \lambda_i \prod\limits_{\substack{j=3 \\ j \neq i}}^{n} D_j^{\,2}}{\prod\limits_{j=3}^{n} D_j \left(\prod\limits_{j=3}^{n} D_j + \sum\limits_{i=3}^{n} \lambda_i \prod\limits_{\substack{k=3 \\ k \neq j}}^{n} D_k \right)}, \quad \left(i = \overline{3, n} \right). \tag{2.29}$$

Як видно з формул (2.13) та (2.29), отримані розв′язки y_i додатні $y_i > 0$, а, отже, зважаючи на формулу (2.12), отримаємо розв′язок системи рівнянь (2.11) з додатними компонентами

$$x_i = \left(\frac{D_p \lambda_i \prod\limits_{\substack{j=3 \\ j \neq i}}^{n} D_j}{D_i \left(\prod\limits_{j=3}^{n} D_j + \sum\limits_{j=3}^{n} \lambda_j \prod\limits_{\substack{k=3 \\ k \neq j}}^{n} D_k \right)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \left(i = \overline{3, n} \right). \tag{2.30}$$

Якщо при цьому точка, координати якої x_i визначаються формулою (2.30), належить області визначення функції $\mu_p \left(x_3, x_4, \cdots, x_n \right)$, то ця точка задовольняє необхідні умови екстремуму (згідно відомої теореми Ферма) [106].

Однак точка, яка задовольняє необхідні умови екстремуму, може бути або точкою максимуму функції μ_p – кращий для особи, що приймає рішення, випадок, або точкою мінімуму – найгірший варіант розподілу коштів між активами, або й взагалі не бути ні точкою максимуму, ні точкою мінімуму.

Тому потрібно дослідити достатні умови екстремальності точки з координатами (2.30). Для цього обчислимо частинні похідні другого порядку функції:

$$\mu_p(x_3, x_4, \cdots, x_n) = \mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma_2}\left(D_p - \sum_{i=3}^{n} D_i x_i^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=3}^{n}(\mu_i - \mu_1)x_i .$$

Продиференціюємо спочатку кожну з її частинних похідних 1-го порядку

$$\frac{\partial \mu_p}{\partial x_i} = \mu_i - \mu_1 - \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma_2} D_i x_i \left(D_p - \sum_{j=3}^{n} D_j x_j^{\,2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

де $(i = \overline{3,n})$,

за цією ж змінною x_i

$$\frac{\partial^2 \mu_p}{\partial x_i^{\,2}} = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma_2} D_i \left[\left(D_p - \sum_{j=3}^{n} D_j x_j^{\,2}\right)^{-\frac{1}{2}} + D_i x_i^{\,2}\left(D_p - \sum_{j=3}^{n} D_j x_j^{\,2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]. \qquad (2.31)$$

Як видно з формули (2.31), частинна похідна μ_p за змінною x_i $(i = \overline{3,n})$ має таку структуру:

$$\frac{\partial^2 \mu_p}{\partial x_i^{\,2}} = k_2 \cdot \varphi_{ii}, \qquad (2.32)$$

де $k_2 = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma_2}$ – постійна величина, що не залежить від $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ – часток вкладень коштів у відповідні активи;

φ_{ii} – додатні функції змінних $x_3, \cdots, x_n$,

$$\varphi_{ii} = D_i \left[\left(D_p - \sum_{j=3}^{n} D_j x_j^{\,2}\right)^{-\frac{1}{2}} + D_i x_i^{\,2}\left(D_p - \sum_{j=3}^{n} D_j x_j^{\,2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]. \qquad (2.33)$$

Обчислимо також мішані частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 \mu_p}{\partial x_i \partial x_k} = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma_2} D_i D_k x_i x_k \left(D_p - \sum_{j=3}^{n} D_j x_j^{\,2}\right)^{-\frac{3}{2}}, \qquad (2.34)$$

де $(i = \overline{3,n})$, $(k = \overline{3,n})$, $(i \neq k)$.

Формулу (2.34) запишемо у компактнішому вигляді:

$$\frac{\partial^2 \mu_p}{\partial x_i \partial x_k} = k_2 \varphi_{ik}, \qquad (2.35)$$

де φ_{ik} – додатні функції змінних $x_3,\cdots,x_n$ $(i \neq k)$,

$$\varphi_{ik} = D_i D_k x_i x_k \left(D_p - \sum_{j=3}^{n} D_j x_j^{\,2} \right)^{-\frac{3}{2}}. \tag{2.36}$$

З отриманих частинних похідних побудуємо симетричну матрицю A:

$$A = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \mu_p}{\partial x_3^{\,2}} & \dfrac{\partial^2 \mu_p}{\partial x_3 \partial x_4} & \dfrac{\partial^2 \mu_p}{\partial x_3 \partial x_5} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \mu_p}{\partial x_3 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 \mu_p}{\partial x_4 \partial x_3} & \dfrac{\partial^2 \mu_p}{\partial x_4^{\,2}} & \dfrac{\partial^2 \mu_p}{\partial x_4 \partial x_5} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \mu_p}{\partial x_4 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 \mu_p}{\partial x_5 \partial x_3} & \dfrac{\partial^2 \mu_p}{\partial x_5 \partial x_4} & \dfrac{\partial^2 \mu_p}{\partial x_5^{\,2}} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \mu_p}{\partial x_5 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 \mu_p}{\partial x_n \partial x_3} & \dfrac{\partial^2 \mu_p}{\partial x_n \partial x_4} & \dfrac{\partial^2 \mu_p}{\partial x_n \partial x_5} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \mu_p}{\partial x_n^{\,2}} \end{vmatrix}. \tag{2.37}$$

Як відомо з курсу математичного аналізу, для того щоб точка $(x_3,\cdots,x_n)$, яка задовольняє необхідні умови екстремуму, була точкою максимуму, достатньо щоб матриця (– A) була додатно визначеною.

На основі формул (2.37), (2.32) та (2.35) запишемо матрицю $(-A)$ у вигляді

$$-A = \begin{vmatrix} -k_2\varphi_{33} & -k_2\varphi_{34} & -k_2\varphi_{35} & \cdots & -k_2\varphi_{3n} \\ -k_2\varphi_{43} & -k_2\varphi_{44} & -k_2\varphi_{45} & \cdots & -k_2\varphi_{4n} \\ -k_2\varphi_{53} & -k_2\varphi_{54} & -k_2\varphi_{55} & \cdots & -k_2\varphi_{5n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -k_2\varphi_{n3} & -k_2\varphi_{n4} & -k_2\varphi_{n5} & \cdots & -k_2\varphi_{nn} \end{vmatrix}. \tag{2.38}$$

Згідно критерію Сильвестра **[**106**]** матриця (2.38) додатно визначена тоді і тільки тоді, коли додатні головні її мінори. Зокрема, повинна виконуватися нерівність

$$-k_2\varphi_{33} > 0. \tag{2.39}$$

Звідси, внаслідок додатності числа φ_{33}, випливає нерівність

$$-k_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma_2} > 0; \qquad \mu_2 > \mu_1. \tag{2.40}$$

Економічний зміст умови (2.40) полягає в тому, що сподівана дохідність ризикованого активу повинна перевищувати гарантовану дохідність безризикового активу, оскільки в протилежному випадку для несхильного до ризику інвестора немає сенсу включати в свій портфель ризиковані активи, дохідність яких була би нижчою від дохідності не ризикованого активу.

Якщо виконується умова (2.40), то для того щоб матриця (–*A*) була додатно визначеною, необхідно і достатньо, щоб була додатно визначеною матриця $B = k_2^{-1} \cdot A$:

$$B = \begin{vmatrix} \varphi_{33} & \varphi_{34} & \varphi_{35} & \cdots & \varphi_{3n} \\ \varphi_{43} & \varphi_{44} & \varphi_{45} & \cdots & \varphi_{4n} \\ \varphi_{53} & \varphi_{54} & \varphi_{55} & \cdots & \varphi_{5n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n3} & \varphi_{n4} & \varphi_{n5} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix}. \tag{2.41}$$

Визначимо знак головного мінора другого порядку B_2 матриці *B*

$$B_2 = \begin{vmatrix} \varphi_{33} & \varphi_{34} \\ \varphi_{43} & \varphi_{44} \end{vmatrix} = \varphi_{33} \cdot \varphi_{44} - \varphi_{34}^{\ 2}. \tag{2.42}$$

Підставимо у формулу (2.42) значення функцій φ_{33}, φ_{44} та φ_{34}:

$$B_2 = D_3\left[\left(D_p - \sum_{j=3}^{n} D_j x_j^{\ 2}\right)^{-\frac{1}{2}} + D_3 x_3^{\ 2}\left(D_p - \sum_{j=3}^{n} D_j x_j^{\ 2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right] \times$$

$$\times D_4\left[\left(D_p - \sum_{j=3}^{n} D_j x_j^{\ 2}\right)^{-\frac{1}{2}} + D_4 x_4^{\ 2}\left(D_p - \sum_{j=3}^{n} D_j x_j^{\ 2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right] -$$

$$- D_3^{\ 2} D_4^{\ 2} x_3^{\ 2} x_4^{\ 2}\left(D_p - \sum_{j=3}^{n} D_j x_j^{\ 2}\right)^{-3} = D_3 D_4\left(D_p - \sum_{j=3}^{n} D_j x_j^{\ 2}\right)^{-1} +$$

$$+ D_3 D_4 x_3^{\ 2}\left(D_p - \sum_{j=3}^{n} D_j x_j^{\ 2}\right)^{-2} + D_3 D_4 x_4^{\ 2}\left(D_p - \sum_{j=3}^{n} D_j x_j^{\ 2}\right)^{-2} > 0.$$

Отже, головний мінор другого порядку матриці *B* додатний.

Залишається дослідити знаки мінорів вищих порядків:

$$B_k = \begin{vmatrix} D_3\left(D^{-\frac{1}{2}} + D_3{x_3}^2 D^{-\frac{3}{2}}\right) & D_3 D_4 x_3 x_4 D^{-\frac{3}{2}} & \cdots & D_3 D_{k+2} x_3 x_{k+2} D^{-\frac{3}{2}} \\ D_3 D_4 x_3 x_4 D^{-\frac{3}{2}} & D_4\left(D^{-\frac{1}{2}} + D_4{x_4}^2 D^{-\frac{3}{2}}\right) & \cdots & D_4 D_{k+2} x_4 x_{k+2} D^{-\frac{3}{2}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D_3 D_{k+2} x_3 x_{k+2} D^{-\frac{3}{2}} & D_4 D_{k+2} x_4 x_{k+2} D^{-\frac{3}{2}} & \cdots & D_{k+2}(D^{-\frac{1}{2}} + D_{k+2} x_{k+2}^2 D^{-\frac{3}{2}}) \end{vmatrix},$$

(2.43)

де $D = D_p - \sum_{j=3}^{n} D_j {x_j}^2 > 0$.

З першого стовпчика визначника B_k винесемо множник $D_3 \cdot D^{-\frac{3}{2}}$, з другого – $D_4 \cdot D^{-\frac{3}{2}}$, з ($k$ + 2)-го – множник $D_{k+2} \cdot D^{-\frac{3}{2}}$. Отримаємо

$$B_k = D^{-\frac{3k}{2}} \cdot D_3 \cdot D_4 \cdots D_{k+2} \begin{vmatrix} D + D_3{x_3}^2 & D_3 x_3 x_4 & \cdots & D_3 x_3 x_{k+2} \\ D_4 x_3 x_4 & D + D_4{x_4}^2 & \cdots & D_4 x_4 x_{k+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{k+2} x_3 x_{k+2} & D_{k+2} x_4 x_{k+2} & \cdots & D + D_{k+2} x_{k+2}^2 \end{vmatrix}. \qquad (2.44)$$

Оскільки множник $D^{-\frac{3k}{2}} \cdot D_3 \cdot D_4 \cdots D_{k+2}$ додатний, то знак визначника B_k збігається зі знаком визначника $\gamma_k = \dfrac{B_k}{\left(D^{-\frac{3k}{2}} \cdot D_3 \cdot D_4 \cdots D_{k+2}\right)}$:

$$\gamma_k = \begin{vmatrix} D + D_3{x_3}^2 & D_3 x_3 x_4 & \cdots & D_3 x_3 x_{k+2} \\ D_4 x_3 x_4 & D + D_4{x_4}^2 & \cdots & D_4 x_4 x_{k+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{k+2} x_3 x_{k+2} & D_{k+2} x_4 x_{k+2} & \cdots & D + D_{k+2} x_{k+2}^2 \end{vmatrix}. \qquad (2.45)$$

Доведемо, що визначник γ_k $\left(k = \overline{1, n-2}\right)$ додатний. Для цього винесемо з 1-го рядка множник $D_3 x_3$, з другого – $D_4 x_4$, і т.д., з k-го – $D_{k+2} x_{k+2}$. Отримаємо формулу:

$$\gamma_k = D_3 x_3 \cdot D_4 x_4 \cdots D_{k+2} x_{k+2} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} D\left(D_3 x_3\right)^{-1} + x_3 & x_4 & \cdots & x_{k+2} \\ x_3 & D\left(D_4 x_4\right)^{-1} + x_4 & \cdots & x_{k+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_3 & x_4 & \cdots & D\left(D_{k+2} x_{k+2}\right)^{-1} + x_{k+2} \end{vmatrix}.$$

Якщо ще з кожного j-го $\left(j=\overline{1,k}\right)$ стовпчика винести за знак визначника x_{j+2}, то матимемо

$$\gamma_k = D_3 x_3^{\,2} \cdot D_4 x_4^{\,2} \cdots D_{k+2} x_{k+2}^2 \begin{vmatrix} DD_3^{\,-1} x_3^{\,-2} + 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & DD_4^{\,-1} x_4^{\,-2} + 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & DD_{k+2}^{-1} x_{k+2}^{-2} + 1 \end{vmatrix}.$$

Віднявши тепер від кожного стовпчика, починаючи з другого, перший стовпчик, одержимо:

$$\gamma_k = D_3 x_3^{\,2} \cdot D_4 x_4^{\,2} \cdots D_{k+2} x_{k+2}^2 \begin{vmatrix} DD_3^{\,-1} x_3^{\,-2} + 1 & -DD_3^{\,-1} x_3^{\,-2} & \cdots & -DD_3^{\,-1} x_3^{\,-2} \\ 1 & DD_4^{\,-1} x_4^{\,-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & DD_{k+2}^{-1} x_{k+2}^{-2} \end{vmatrix}.$$

Згідно правила Лапласа розкладу визначника за компонентами першого стовпчика, отримаємо

$$\gamma_k = D_3 x_3^{\,2} \cdot D_4 x_4^{\,2} \cdots D_{k+2} x_{k+2}^2 \left(\left(1 + DD_3^{\,-1} x_3^{\,-2}\right) DD_4^{\,-1} x_4^{\,-2} \cdots DD_{k+2}^{-1} x_{k+2}^{-2} + \right.$$
$$\left. + DD_3^{\,-1} x_3^{\,-2} \cdot DD_5^{\,-1} x_5^{\,-2} \cdots DD_{k+2}^{-1} x_{k+2}^{-2} + DD_3^{\,-1} x_3^{\,-2} \cdot DD_4^{\,-1} x_4^{\,-2} \cdots DD_{k+1}^{-1} x_{k+1}^{-1} \right) > 0. \quad (2.46)$$

Отже, всі головні мінори матриці $(-A)$ додатні, а цього достатньо, щоб значення x_i, обчислені за формулою (2.30) надавали сподіваній дохідності портфеля μ_p максимального значення при заданому фіксованому рівні ризику D_p.

Формування портфеля з незалежних активів, де один актив безризиковий із заданим рівнем ризику для решти активів згідно формули (2.30) наведено у таблиці 2.1. Обчислення виконано засобами електронних таблиць MS Excel, і подано в додатку А.1.

Отримані результати ілюструються діаграмою на рис. 2.1 і показують розподіл часток вкладень інвестиційного портфеля, що складається з незалежних активів, в якому перший актив безризиковий.

Таблиця 2.1

Формування портфеля з незалежних активів

Математичне сподівання дохідності i-го активу μ_i	Стандартне відхилення дохідності i-го активу σ_i	Фіксований рівень ризику портфеля D_p	Оптимальні частки вкладень в i-ті активи x_i
0,10	0,00		0,147
0,12	0,02		0,223
0,13	0,03		0,148
0,15	0,05		0,089
0,18	0,06	0,0003	0,099
0,23	0,08		0,090
0,25	0,09		0,082
0,27	0,10		0,076
0,30	0,14		0,045

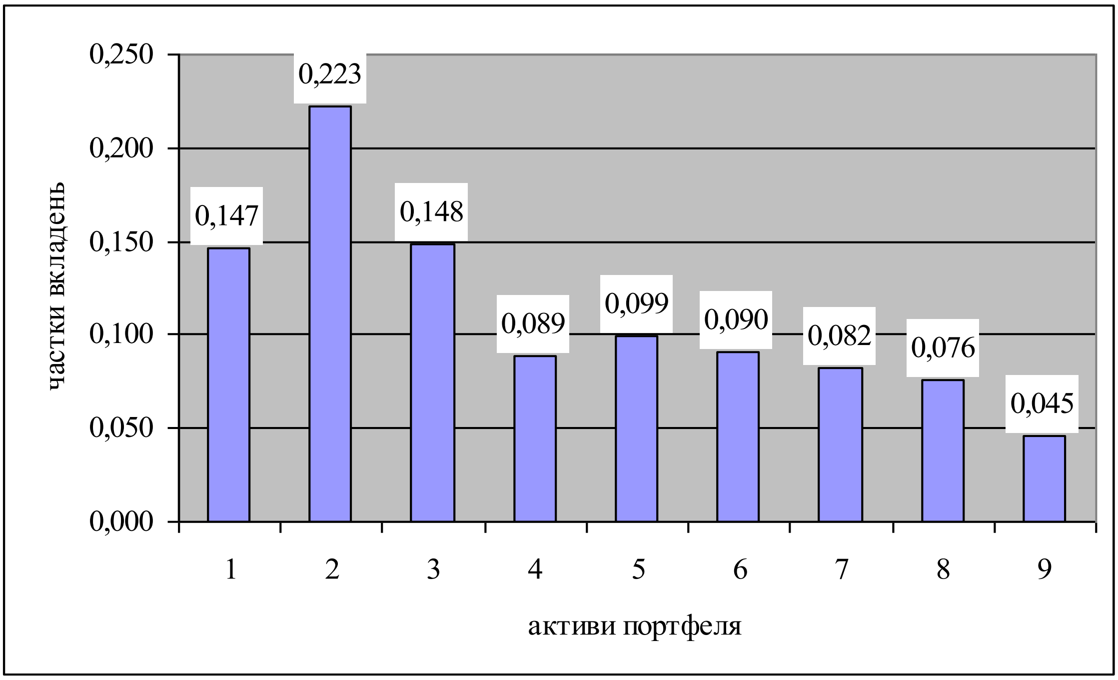

Рис. 2.1. Діаграма розподілу часток вкладень портфеля з незалежних активів

Отже, отримана формула (2.30) дозволяє сформувати інвестиційний портфель з заданим рівнем ризику, що складається з незалежних активів, причому один з активів безризиковий, з тим, щоб сподівана дохідність портфеля була максимальною.

Як видно з діаграми (рис. 2.1.) частка вкладень в безризиковий актив не є найбільшою, хоча очевидним здається, що безризиковий актив повинен бути найбільш прийнятним для інвестора.

2.2. Максимізація дохідності портфеля, фіксований ризик якого визначається згідно з моделлю Шарпа і один з активів якого безризиковий

У цьому параграфі дослідимо задачу, в якій один актив інвестиційного портфеля вважається безризиковим, тобто забезпечує гарантовану дохідність, а припущення про взаємну незалежність решти активів замінюється менш обтяжливим припущенням про залежність їх дохідностей від дохідності так званого ринкового портфеля, що описується в моделі Шарпа [183, с. 212-216].

Розглянемо задачу про знаходження таких часток x_i $(i = \overline{1,n})$ вкладень в *i*-ті активи деякого портфеля цінних паперів, які б максимізували математичне сподівання дохідності цього портфеля [210-213],

$$\mu_p = \mu_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i x_i \ , \tag{2.47}$$

при заданому рівні ризику портфеля

$$D_p = \left(\sum_{i=2}^{n} x_i \beta_i \right)^2 D_m + \sum_{i=2}^{n} x_i^2 D_{\varepsilon i} \ , \tag{2.48}$$

де μ_1 – гарантована дохідність 1-го активу;

μ_i $(i = \overline{2,n})$ – математичне сподівання дохідності *i*-го активу;

D_m – систематичний ризик ринкового портфеля;

$D_{\varepsilon i}$ $(i = \overline{2,n})$ – залишковий (індивідуальний) ризик *i*-го цінного паперу (активу);

$\beta_i \ (i = \overline{2,n})$ – міра чутливості дохідності i-го активу до дохідності ринкового портфеля.

У моделі У. Шарпа [183] мінімізований ризик при певному рівні дохідності. Розв'яжемо задачу максимізації дохідності інвестиційного портфеля при фіксованому ризику, коли один з активів якого безризиковий.

Розв′яжемо рівняння (2.48) відносно однієї зі змінних $x_i \ (i = \overline{2,n})$, наприклад, щодо x_2. Для цього запишемо рівняння (2.48) в такому вигляді:

$$x_2^2 (\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) + 2\beta_2 \sum_{i=3}^{n} x_i \beta_i D_m x_2 + \sum_{i=3}^{n} x_i^2 D_{\varepsilon i} + \left(\sum_{i=3}^{n} x_i \beta_i \right)^2 D_m - D_p = 0 . \quad (2.49)$$

Необхідною умовою існування дійсних коренів рівняння (2.49) є невід′ємність його дискримінанта:

$$D(x_3, \ldots, x_n) = \beta_2^2 D_m^2 \left(\sum_{i=3}^{n} x_i \beta_i \right)^2 - (\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) \left(\sum_{i=3}^{n} x_i^2 D_{\varepsilon i} + \left(\sum_{i=3}^{n} x_i \beta_i \right)^2 D_m - D_p \right) \geq 0 . \quad (2.50)$$

Умову (2.50) можна записати в компактнішій формі:

$$D(x) = (\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) \left(D_p - \sum_{i=3}^{n} x_i^2 D_{\varepsilon i} \right) - D_m D_{\varepsilon 2} \left(\sum_{i=3}^{n} x_i \beta_i \right)^2 \geq 0 . \quad (2.51)$$

де $x = (x_3, \ldots, x_n)$.

Крім необхідної умови (2.51) припустимо, що виконуються умови:

$$\beta_2 \sum_{i=3}^{n} x_i \beta_i \geq 0 \quad (2.52)$$

і

$$\sqrt{D(x)} \geq \beta_2 \sum_{i=3}^{n} x_i \beta_i . \quad (2.53)$$

Якщо виконуються умови (2.51) - (2.53), то додатний розв′язок рівняння (2.49) запишеться у вигляді:

$$x_2 = \frac{-\beta_2 \sum_{i=3}^{n} x_i \beta_i D_m + \sqrt{D(x)}}{\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}} . \quad (2.54)$$

Підставимо у формулу (2.47) значення

$$x_1 = 1 - x_2 - \sum_{i=3}^{n} x_i \qquad (2.55)$$

та розв′язок (2.54). Отримаємо:

$$\mu_p = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)\frac{-\beta_2\sum_{i=3}^{n} x_i\beta_i D_m + \sqrt{D(x)}}{\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}} + \sum_{i=3}^{n}(\mu_i - \mu_1)x_i\,. \qquad (2.56)$$

З моделі (2.30) випливає, що сподівана дохідність портфеля лінійно залежить від дохідності кожного з активів і нелінійно: від систематичного ризику ринкового портфеля, від залишкових ризиків кожного з активів та від бета-коефіцієнтів – мір чутливості дохідності кожного з активів до дохідності ринкового портфеля.

Для того, щоб знайти стаціонарні точки функції (2.56), обчислимо її частинні похідні за змінними x_i $(i = \overline{3,n})$:

$$\frac{\partial\mu_p}{\partial x_i} = \mu_i - \mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}}\left(-\beta_2\beta_i D_m + \frac{1}{2\sqrt{D(x)}}\cdot\frac{\partial D(x)}{\partial x_i}\right), \qquad (2.57)$$

де частинна похідна дискримінанта $D(x)$ за змінною x_i $(i = \overline{3,n})$ визначається такою формулою:

$$\frac{\partial D(x)}{\partial x_i} = -2D_{\varepsilon i}(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2})x_i - 2D_{\varepsilon 2}\left(\sum_{j=3}^{n} x_j\beta_j\right)\cdot\beta_i D_m\,. \qquad (2.58)$$

Підставивши формулу (2.58) в (2.57), отримаємо:

$$\frac{\partial\mu_p}{\partial x_i} = \mu_i - \mu_1 - \frac{\mu_2 - \mu_1}{\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}}\times$$

$$\times\left(\beta_2\beta_i D_m + (D(x))^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(D_{\varepsilon i}(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2})x_i + D_m D_{\varepsilon 2}\left(\sum_{j=3}^{n} x_j\beta_j\right)\beta_i\right)\right),\quad (i = \overline{3,n}). \qquad (2.59)$$

Прирівнявши отримані похідні до нуля, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\frac{\left(D_{\varepsilon i}(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2})x_i + D_m D_{\varepsilon 2}\left(\sum_{j=3}^{n} x_j\beta_j\right)\beta_i\right)}{\sqrt{D(x)}} =$$

$$= \frac{\mu_i - \mu_1}{(\mu_2 - \mu_1)} \left(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}\right) - \beta_2 \beta_i D_m, \quad \left(i = \overline{3,n}\right). \tag{2.60}$$

Якщо ввести деякий додатний параметр $D > 0$, то систему (2.60) з $(n - 2)$-х алгебраїчних рівнянь можна розглядати як систему з $(n - 1)$-го рівняння, перші $(n - 2)$ з яких лінійні, а останнє $(n - 1)$-е – ірраціональне:

$$\begin{cases} D_{\varepsilon i} \left(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}\right) x_i + D_m D_{\varepsilon 2} \left(\sum\limits_{j=3}^{n} x_j \beta_j \right) \beta_i = \\ = \sqrt{D} \left(\dfrac{\mu_i - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \left(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}\right) - \beta_2 \beta_i D_m \right), \qquad (i = \overline{3,n}). \\ \\ D(x) = D \end{cases} \tag{2.61}$$

Розглянемо спочатку випадок, коли всі бета-коефіцієнти додатні:

$$\beta_i > 0, \qquad (i = \overline{2,n}). \tag{2.62}$$

Очевидно, що при виконанні умови (2.62), необхідною умовою існування невід′ємних розв′язків $x_i \ \left(i = \overline{3,n}\right)$ системи (2.61) є додатність величин:

$$\mu_i - \mu_1 > 0, \quad \left(i = \overline{2,n}\right). \tag{2.63}$$

Щоб знайти розв′язок лінійної частини системи рівнянь (2.61), знайдемо її головний детермінант:

$$\Delta = \begin{vmatrix} D_{\varepsilon 3}\left(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}\right) + \beta_3^2 D_m D_{\varepsilon 2} & D_m D_{\varepsilon 2} \beta_3 \beta_4 & D_m D_{\varepsilon 2} \beta_3 \beta_5 & \cdots & D_m D_{\varepsilon 2} \beta_3 \beta_n \\ D_m D_{\varepsilon 2} \beta_3 \beta_4 & D_{\varepsilon 4}\left(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}\right) + \beta_4^2 D_m D_{\varepsilon 2} & D_m D_{\varepsilon 2} \beta_4 \beta_5 & \cdots & D_m D_{\varepsilon 2} \beta_4 \beta_n \\ D_m D_{\varepsilon 2} \beta_3 \beta_5 & D_m D_{\varepsilon 2} \beta_4 \beta_5 & D_{\varepsilon 5}\left(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}\right) + \beta_5^2 D_m D_{\varepsilon 2} & \cdots & D_m D_{\varepsilon 2} \beta_5 \beta_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_m D_{\varepsilon 2} \beta_3 \beta_n & D_m D_{\varepsilon 2} \beta_4 \beta_n & D_m D_{\varepsilon 2} \beta_5 \beta_n & \cdots & D_{\varepsilon n}\left(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}\right) + \beta_n^2 D_m D_{\varepsilon 2} \end{vmatrix}. \tag{2.64}$$

Визначник $(n - 2)$-го порядку Δ, як видно з формули (2.64), симетричний відносно головної діагоналі, компоненти якого додатні згідно з умовою (2.62).

Введемо позначення:

$$d_2 = \beta_2^2 D_{\varepsilon 2}^{-1} + D_m^{-1}. \tag{2.65}$$

Тоді, якщо з кожного стовпчика визначника (2.64) винести за знак визначники $D_m D_{\varepsilon 2}$, то отримаємо таку формулу:

$$\frac{\Delta}{D_m^{n-2} D_{\varepsilon 2}^{n-2}} = \begin{vmatrix} d_2 D_{\varepsilon 3} + \beta_3^2 & \beta_3\beta_4 & \beta_3\beta_5 & \cdots & \beta_3\beta_n \\ \beta_3\beta_4 & d_2 D_{\varepsilon 4} + \beta_4^2 & \beta_4\beta_5 & \cdots & \beta_4\beta_n \\ \beta_3\beta_5 & \beta_4\beta_5 & d_2 D_{\varepsilon 5} + \beta_5^2 & \cdots & \beta_5\beta_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_3\beta_n & \beta_4\beta_n & \beta_5\beta_n & \cdots & d_2 D_{\varepsilon n} + \beta_n^2 \end{vmatrix}. \qquad (2.66)$$

У детермінанті (2.66) винесемо за знак визначника множник β_3 з 1-го стовпчика, β_4 – з другого, і т.д. β_n – з (n – 2)-го стовпчика. Одержимо таку формулу:

$$\Delta = D_m^{n-2} D_{\varepsilon 2}^{n-2} \prod_{j=3}^{n} \beta_j \times$$

$$\times \begin{vmatrix} d_2 D_{\varepsilon 3}\beta_3^{-1} + \beta_3 & \beta_3 & \beta_3 & \cdots & \beta_3 \\ \beta_4 & d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-1} + \beta_4 & \beta_4 & \cdots & \beta_4 \\ \beta_5 & \beta_5 & d_2 D_{\varepsilon 5}\beta_5^{-1} + \beta_5 & \cdots & \beta_5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_n & \beta_n & \beta_n & \cdots & d_2 D_{\varepsilon n}\beta_n^{-1} + \beta_n \end{vmatrix}. \qquad (2.67)$$

У визначнику (2.67) винесемо за його знак з першого рядка β_3, з другого рядка β_4, і т.д., з (n – 2)-го рядка – β_n. Таким чином отримаємо визначник, всі компоненти якого, крім діагональних, дорівнюють одиниці:

$$\Delta = D_m^{n-2} D_{\varepsilon 2}^{n-2} \prod_{j=3}^{n} \beta_j^2 \times$$

$$\times \begin{vmatrix} d_2 D_{\varepsilon 3}\beta_3^{-2} + 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-2} + 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & d_2 D_{\varepsilon 5}\beta_5^{-2} + 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & d_2 D_{\varepsilon n}\beta_n^{-2} + 1 \end{vmatrix}. \qquad (2.68)$$

У визначнику (2.68) від кожного стовпчика, починаючи з другого, віднімаємо 1-й стовпчик. У результаті отримаємо визначник, який має нульові елементи, крім першого стовпчика, першого рядка та головної діагоналі:

$$\Delta = (D_m D_{\varepsilon 2})^{n-2} \prod_{j=3}^{n} \beta_j^2 \begin{vmatrix} d_2 D_{\varepsilon 3}\beta_3^{-2}+1 & -d_2 D_{\varepsilon 3}\beta_3^{-2} & -d_2 D_{\varepsilon 3}\beta_3^{-2} & \cdots & -d_2 D_{\varepsilon 3}\beta_3^{-2} \\ 1 & d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & d_2 D_{\varepsilon 5}\beta_5^{-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & d_2 D_{\varepsilon n}\beta_n^{-2} \end{vmatrix}. \tag{2.69}$$

Розкладемо отриманий визначник за компонентами його першого стовпчика:

$$\Delta = (D_m D_{\varepsilon 2})^{n-2} \prod_{j=3}^{n} \beta_j^2 \cdot [(1 + d_2 D_{\varepsilon 3}\beta_3^{-2}) \cdot d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-2} d_2 D_{\varepsilon 5}\beta_5^{-2} \cdots d_2 D_{\varepsilon n}\beta_n^{-2} +$$

$$+ d_2 D_{\varepsilon 3}\beta_3^{-2} d_2 D_{\varepsilon 5}\beta_5^{-2} \cdots d_2 D_{\varepsilon n}\beta_n^{-2} + d_2 D_{\varepsilon 3}\beta_3^{-2} d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-2} d_2 D_{\varepsilon 6}\beta_6^{-2} \cdots d_2 D_{\varepsilon n}\beta_n^{-2} +$$

$$+ \cdots d_2 D_{\varepsilon 3}\beta_3^{-2} d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-2} d_2 D_{\varepsilon n-1}\beta_{n-1}^{-2}]. \tag{2.70}$$

Запишемо формулу (2.70) в компактнішому вигляді:

$$\Delta = (D_m D_{\varepsilon 2})^{n-2} \prod_{j=3}^{n} \beta_j^2 \cdot (d_2^{n-2} \prod_{j=3}^{n} D_{\varepsilon j}\beta_j^{-2} + \sum_{j=3}^{n} d_2^{n-3} \prod_{k=3,k\neq j}^{n} D_{\varepsilon k}\beta_k^{-2});$$

$$\Delta = (D_m D_{\varepsilon 2})^{n-2} d_2^{n-3} (d_2 \prod_{j=3}^{n} D_{\varepsilon j} + \sum_{j=3}^{n} \beta_j^2 \prod_{k=3,k\neq j}^{n} D_{\varepsilon k}). \tag{2.71}$$

Підставимо у вираз (2.71) позначення (2.65):

$$\Delta = (D_m D_{\varepsilon 2})^{n-2} \cdot (\beta_2^2 D_{\varepsilon 2}^{-1} + D_m^{-1})^{n-3} \left((\beta_2^2 D_{\varepsilon 2}^{-1} + D_m^{-1}) \prod_{j=3}^{n} D_{\varepsilon j} + \sum_{j=3}^{n} \beta_j^2 \prod_{k=3,k\neq j}^{n} D_{\varepsilon k} \right),$$

або, після спрощень:

$$\Delta = (\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2})^{n-3} \left((\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) \prod_{j=3}^{n} D_{\varepsilon j} + D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3}^{n} \beta_j^2 \prod_{k=3,k\neq j}^{n} D_{\varepsilon k} \right). \tag{2.72}$$

Як видно з формули (2.72), визначник Δ лінійної частини системи рівнянь (2.61) додатний за умови додатності бета-коефіцієнтів (2.62). А це, згідно теореми Кронекера-Капелі [106], означає, що ця лінійна підсистема має єдиний розв′язок. Для того, щоб обчислити цей розв′язок за правилом Крамера, потрібно ще знайти (n – 2) допоміжні визначники:

$$
\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix}
\lambda_3 & D_m D_{\varepsilon 2}\beta_3\beta_4 & D_m D_{\varepsilon 2}\beta_3\beta_5 & \cdots & D_m D_{\varepsilon 2}\beta_3\beta_n \\
\lambda_4 & D_{\varepsilon 4}\left(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}\right) + \beta_4^2 D_m D_{\varepsilon 2} & D_m D_{\varepsilon 2}\beta_4\beta_5 & \cdots & D_m D_{\varepsilon 2}\beta_4\beta_n \\
\lambda_5 & D_m D_{\varepsilon 2}\beta_4\beta_5 & D_{\varepsilon 5}\left(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}\right) + \beta_5^2 D_m D_{\varepsilon 2} & \cdots & D_m D_{\varepsilon 2}\beta_5\beta_n \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\lambda_n & D_m D_{\varepsilon 2}\beta_4\beta_n & D_m D_{\varepsilon 2}\beta_5\beta_n & \cdots & D_{\varepsilon 5}\left(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}\right) + \beta_n^2 D_m D_{\varepsilon 2}
\end{vmatrix}, \quad (2.73)
$$

де

$$
\lambda_j = \sqrt{D}\left(\frac{\mu_j - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1}\left(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}\right) - \beta_2\beta_i D_m\right), \quad \left(i = \overline{3,n}\right) \quad (2.74)
$$

– праві частини лінійної підсистеми рівнянь (2.61).

Використовуючи позначення (2.65), запишемо визначник (2.73) у такому вигляді:

$$
\Delta_{x_3} = \left(D_m D_{\varepsilon 2}\right)^{n-3} \begin{vmatrix}
\lambda_3 & \beta_3\beta_4 & \beta_3\beta_5 & \cdots & \beta_3\beta_n \\
\lambda_4 & d_2 D_{\varepsilon 4} + \beta_4^2 & \beta_4\beta_5 & \cdots & \beta_4\beta_n \\
\lambda_5 & \beta_4\beta_5 & d_2 D_{\varepsilon 5} + \beta_5^2 & \cdots & \beta_5\beta_n \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\lambda_n & \beta_4\beta_n & \beta_5\beta_n & \cdots & d_2 D_{\varepsilon n} + \beta_n^2
\end{vmatrix}, \quad (2.75)
$$

Винесемо з кожного l-го $\left(l = \overline{2, n-2}\right)$ стовпчика множник β_{l+2} і отримаємо:

$$
\Delta_{x_3} = \left(D_m D_{\varepsilon 2}\right)^{n-3}\beta_4\beta_5\cdots\beta_n \begin{vmatrix}
\lambda_3 & \beta_3 & \beta_3 & \cdots & \beta_3 \\
\lambda_4 & d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-1} + \beta_4 & \beta_4 & \cdots & \beta_4 \\
\lambda_5 & \beta_5 & d_2 D_{\varepsilon 5}\beta_5^{-1} + \beta_5 & \cdots & \beta_5 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\lambda_n & \beta_n & \beta_n & \cdots & d_2 D_{\varepsilon n}\beta_n^{-1} + \beta_n
\end{vmatrix}. \quad (2.76)
$$

У детермінанті (2.76) віднімемо другий стовпчик від кожного стовпчика, починаючи з третього:

$$
\Delta_{x_3} = \left(D_m D_{\varepsilon 2}\right)^{n-3}\prod_{j=4}^{n}\beta_j \begin{vmatrix}
\lambda_3 & \beta_3 & 0 & \cdots & 0 \\
\lambda_4 & d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-1} + \beta_4 & -d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-1} & \cdots & -d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-1} \\
\lambda_5 & \beta_5 & d_2 D_{\varepsilon 5}\beta_5^{-1} & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\lambda_n & \beta_n & 0 & \cdots & d_2 D_{\varepsilon n}\beta_n^{-1}
\end{vmatrix}, \quad (2.77)
$$

або

$$
\Delta_{x_3} = \prod_{j=4}^{n}\beta_j \left(D_m D_{\varepsilon 2}\right)^{n-3}\delta_{x_3}.
$$

Визначник (n – 2)-го порядку δ_{x_3} можна записати у вигляді лінійної комбінації (n – 2)-го визначників (n – 3)-го порядку:

$$\delta_{x_3} = \lambda_3 \begin{vmatrix} d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-1} + \beta_4 & -d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-1} & \cdots & -d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-1} \\ \beta_5 & d_2 D_{\varepsilon 5}\beta_5^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_n & 0 & \cdots & d_2 D_{\varepsilon n}\beta_n^{-1} \end{vmatrix} -$$

$$-\lambda_4 \begin{vmatrix} \beta_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_5 & d_2 D_{\varepsilon 5}\beta_5^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_n & 0 & \cdots & d_2 D_{\varepsilon n}\beta_n^{-1} \end{vmatrix} +$$

$$+\lambda_5 \begin{vmatrix} \beta_3 & 0 & \cdots & 0 \\ d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-1} + \beta_4 & -d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-1} & \cdots & -d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_n & 0 & \cdots & d_2 D_{\varepsilon n}\beta_n^{-1} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n-1}\lambda_n \begin{vmatrix} \beta_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-1} + \beta_4 & -d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-1} & -d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-1} & \cdots & -d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-1} \\ \beta_5 & d_2 D_{\varepsilon 5}\beta_5^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & d_2 D_{\varepsilon n-1}\beta_{n-1}^{-1} \end{vmatrix}. \qquad (2.78)$$

Якщо скористатися розкладом визначника (2.77) за компонентами 1-го рядка, то визначник δ_{x_3} можна зобразити у вигляді лінійної комбінації 2-х визначників (n – 3)-го порядку:

$$\delta_{x_3} = \lambda_3 \begin{vmatrix} d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-1} + \beta_4 & -d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-1} & \cdots & -d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-1} \\ \beta_5 & d_2 D_{\varepsilon 5}\beta_5^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_n & 0 & \cdots & d_2 D_{\varepsilon n}\beta_n^{-1} \end{vmatrix} -$$

$$-\beta_3 \begin{vmatrix} \lambda_4 & -d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-1} & -d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-1} & \cdots & -d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-1} \\ \lambda_5 & d_2 D_{\varepsilon 5}\beta_5^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_6 & 0 & d_2 D_{\varepsilon 6}\beta_6^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_n & 0 & 0 & \cdots & d_2 D_{\varepsilon n}\beta_n^{-1} \end{vmatrix}. \qquad (2.79)$$

Розклавши в свою чергу кожен з визначників формули (2.79) за елементами першого стовпчика, отримаємо:

$$\delta_{x_3} = \lambda_3[(d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-1} + \beta_4) d_2 D_{\varepsilon 5}\beta_5^{-1} \cdots d_2 D_{\varepsilon n}\beta_n^{-1} + \beta_5 d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-1} d_2 D_{\varepsilon 6}\beta_6^{-1} \cdots d_2 D_{\varepsilon n}\beta_n^{-1} + \cdots +$$

$$+ \beta_n d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-1} d_2 D_{\varepsilon 5}\beta_5^{-1} \cdots d_2 D_{\varepsilon n-1}\beta_{n-1}^{-1}] - \beta_3[\lambda_4 d_2 D_{\varepsilon 5}\beta_5^{-1} d_2 D_{\varepsilon 6}\beta_6^{-1} \cdots d_2 D_{\varepsilon n}\beta_n^{-1} +$$

$$+ \lambda_5 d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-1} d_2 D_{\varepsilon 6}\beta_6^{-1} \cdots d_2 D_{\varepsilon n}\beta_n^{-1} + \cdots + \lambda_n d_2 D_{\varepsilon 4}\beta_4^{-1} d_2 D_{\varepsilon 5}\beta_5^{-1} \cdots d_2 D_{\varepsilon n-1}\beta_{n-1}^{-1}]. \qquad (2.80)$$

Отриману формулу (2.80) можна записати так:

$$\delta_{x_3} = \lambda_3\left[\prod_{j=4}^{n}\left(d_2 D_{\varepsilon j}\beta_j^{-1}\right) + \sum_{j=4}^{n}\beta_j \cdot \prod_{k=4,k\neq j}^{n}\left(d_2 D_{\varepsilon k}\beta_k^{-1}\right)\right] - \beta_3\sum_{j=4}^{n}\lambda_j \cdot \prod_{k=4,k\neq j}^{n}\left(d_2 D_{\varepsilon k}\beta_k^{-1}\right). \qquad (2.81)$$

Підставимо отриману формулу (2.81) у рівність (2.77):

$$\Delta_{x_3} = \left(D_m D_{\varepsilon 2}\right)^{n-3}\left(\lambda_3\left[\prod_{j=4}^{n}\left(d_2 D_{\varepsilon j}\right) + \sum_{j=4}^{n}\beta_j^2 \prod_{k=4,k\neq j}^{n}\left(d_2 D_{\varepsilon k}\right)\right] - \beta_3\sum_{j=4}^{n}\left(\beta_j\lambda_j \prod_{k=4,k\neq j}^{n}\left(d_2 D_{\varepsilon k}\right)\right)\right). \qquad (2.82)$$

Формулу (2.82) можна також записати у вигляді:

$$\Delta_{x_3} = \left(D_m D_{\varepsilon 2}\right)^{n-3} d_2^{n-4} \cdot \left(\lambda_3\left[d_2\prod_{j=4}^{n} D_{\varepsilon j} + \sum_{j=4}^{n}\beta_j^2 \prod_{k=4,k\neq j}^{n} D_{\varepsilon k}\right] - \beta_3\sum_{j=4}^{n}\left(\beta_j\lambda_j \prod_{k=4,k\neq j}^{n} D_{\varepsilon k}\right)\right).$$

Враховуючи позначення (2.65), зобразимо останню формулу в такому вигляді:

$$\Delta_{x_3} = \left(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}\right)^{n-4}\left(\lambda_3\left[\left(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}\right)\prod_{j=4}^{n} D_{\varepsilon j} + D_m D_{\varepsilon 2}\sum_{j=4}^{n}\beta_j^2 \prod_{k=4,k\neq j}^{n} D_{\varepsilon k}\right] -\right.$$

$$\left. - \beta_3 D_m D_{\varepsilon 2}\sum_{j=4}^{n}\left(\beta_j\lambda_j \prod_{k=4,k\neq j}^{n} D_{\varepsilon k}\right)\right). \qquad (2.83)$$

Другий допоміжний визначник лінійної підсистеми (2.61):

$$\Delta_{x_4} = \begin{vmatrix} D_{\varepsilon 4}\left(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}\right) + \beta_3^2 D_m D_{\varepsilon 2} & \lambda_3 & D_m D_{\varepsilon 2}\beta_3\beta_5 & \cdots & D_m D_{\varepsilon 2}\beta_3\beta_n \\ D_m D_{\varepsilon 2}\beta_3\beta_4 & \lambda_4 & D_m D_{\varepsilon 2}\beta_4\beta_5 & \cdots & D_m D_{\varepsilon 2}\beta_4\beta_n \\ D_m D_{\varepsilon 2}\beta_3\beta_5 & \lambda_5 & D_{\varepsilon 5}\left(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}\right) + \beta_5^2 D_m D_{\varepsilon 2} & \cdots & D_m D_{\varepsilon 2}\beta_5\beta_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_m D_{\varepsilon 2}\beta_3\beta_n & \lambda_n & D_m D_{\varepsilon 2}\beta_5\beta_n & \cdots & D_{\varepsilon n}\left(\beta_n^2 D_m + D_{\varepsilon 2}\right) + \beta_n^2 D_m D_{\varepsilon 2} \end{vmatrix}. \qquad (2.84)$$

У детермінанті (2.84) від кожного r-го стовпчика $\left(r = 3;4;\cdots,n-2\right)$ віднімемо перший стовпчик, і з кожного r-го стовпчика, крім другого, винесемо множник $\beta_r D_m D_{\varepsilon 2}$ за знак визначника:

$$\Delta_{x_4} = (\Phi_m D_{\varepsilon 2})^{n-3} \prod_{r=3, r\neq 4}^{n} \beta_r \begin{vmatrix} D_{\varepsilon 3} d_2 \beta_3^{-1} + \beta_3 & \lambda_3 & -D_{\varepsilon 3} d_2 \beta_3^{-1} & \cdots & -D_{\varepsilon 3} d_2 \beta_3^{-1} \\ \beta_4 & \lambda_4 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_5 & \lambda_5 & D_{\varepsilon 5} d_2 \beta_5^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_n & \lambda_n & 0 & \cdots & D_{\varepsilon n} d_2 \beta_n^{-1} \end{vmatrix}. \qquad (2.85)$$

У визначнику (2.85) найменше ненульових компонент містить його другий рядок, тому подамо цей визначник у вигляді лінійної комбінації двох визначників (n – 3)-го порядку:

$$\Delta_{x_4} = (\Phi_m D_{\varepsilon 2})^{n-3} \prod_{r=3, r\neq 4}^{n} (\beta_r) \cdot \left(\lambda_4 \begin{vmatrix} D_{\varepsilon 3} d_2 \beta_3^{-1} + \beta_3 & -D_{\varepsilon 3} d_2 \beta_3^{-1} & \cdots & -D_{\varepsilon 3} d_2 \beta_3^{-1} \\ \beta_5 & D_{\varepsilon 5} d_2 \beta_5^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_n & 0 & \cdots & D_{\varepsilon n} d_2 \beta_n^{-1} \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. - \beta_4 \begin{vmatrix} \lambda_3 & -D_{\varepsilon 3} d_2 \beta_3^{-1} & \cdots & -D_{\varepsilon 3} d_2 \beta_3^{-1} \\ \lambda_5 & D_{\varepsilon 5} d_2 \beta_5^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_n & 0 & \cdots & D_{\varepsilon n} d_2 \beta_n^{-1} \end{vmatrix} \right). \qquad (2.86)$$

Розкривши обидва визначники у формулі (2.86), отримаємо наступну формулу:

$$\Delta_{x_4} = (\Phi_m D_{\varepsilon 2})^{n-3} \prod_{r=3, r\neq 4}^{n} (\beta_r) \cdot (\lambda_4 [(D_{\varepsilon 3} d_2 \beta_3^{-1} + \beta_3) D_{\varepsilon 5} d_2 \beta_5^{-1} \cdots D_{\varepsilon n} d_2 \beta_n^{-1} +$$

$$+ \beta_5 D_{\varepsilon 3} d_2 \beta_3^{-1} D_{\varepsilon 6} d_2 \beta_6^{-1} \cdots D_{\varepsilon n} d_2 \beta_n^{-1} + \beta_6 D_{\varepsilon 3} d_2 \beta_3^{-1} D_{\varepsilon 5} d_2 \beta_5^{-1} \cdots D_{\varepsilon n} d_2 \beta_n^{-1} + \cdots +$$

$$+ \beta_n D_{\varepsilon 3} d_2 \beta_3^{-1} D_{\varepsilon 3} d_2 \beta_5^{-1} \cdots D_{\varepsilon, n-1} d_2 \beta_{n-1}^{-1}] - \beta_4 [\lambda_3 D_{\varepsilon 5} d_2 \beta_5^{-1} D_{\varepsilon 6} d_2 \beta_6^{-1} \cdots D_{\varepsilon n} d_2 \beta_n^{-1} +$$

$$+ \lambda_5 D_{\varepsilon 3} d_2 \beta_3^{-1} D_{\varepsilon 6} d_2 \beta_6^{-1} \cdots D_{\varepsilon n} d_2 \beta_n^{-1} + \lambda_6 D_{\varepsilon 3} d_2 \beta_3^{-1} D_{\varepsilon 5} d_2 \beta_5^{-1} \cdots D_{\varepsilon n} d_2 \beta_n^{-1} + \cdots +$$

$$+ \lambda_n D_{\varepsilon 3} d_2 \beta_3^{-1} D_{\varepsilon 5} d_2 \beta_5^{-1} \cdots D_{\varepsilon, n-1} d_2 \beta_{n-1}^{-1}]).$$

Використовуючи спеціальні знаки для сум і добутків, що містяться в останній формулі, її можна записати у більш стислому вигляді:

$$\Delta_{x_4} = (\Phi_m D_{\varepsilon 2})^{n-3} \prod_{r=3, r\neq 4}^{n} (\beta_r) \cdot (\lambda_4 [\prod_{j=3, j\neq 4}^{n} (D_{\varepsilon j} d_2 \beta_j^{-1}) +$$

$$+ \sum_{j=3, j\neq 4}^{n} (\beta_j \prod_{\substack{k=3, k\neq j \\ k\neq 4}}^{n} (D_{\varepsilon k} d_2 \beta_k^{-1}))] - \beta_4 \sum_{j=3, j\neq 4}^{n} (\lambda_j \prod_{\substack{k=3, k\neq j \\ k\neq 4}}^{n} (D_{\varepsilon k} d_2 \beta_k^{-1}))). \qquad (2.87)$$

Формулу (2.87) можна спростити, виносячи за дужки множник d_2 у відповідному степені і вносячи в них добуток бета-коефіцієнтів:

$$\Delta_{x_4} = \left(D_m D_{\varepsilon 2}\right)^{n-3} \Big(\lambda_4 [d_2^{n-3} \prod_{j=3,\, j\neq 4}^{n} (D_{\varepsilon j}) + d_2^{n-4} \sum_{j=3,\, j\neq 4}^{n} (\beta_j^2 \prod_{\substack{k=3, k\neq j \\ k\neq 4}}^{n} (D_{\varepsilon k}))] -$$

$$- \beta_4 d_2^{n-4} \sum_{j=3,\, j\neq 4}^{n} (\lambda_j \beta_j \prod_{\substack{k=3, k\neq j \\ k\neq 4}}^{n} (D_{\varepsilon k}))\Big). \qquad (2.88)$$

Враховуючи позначення (2.65), формулу (2.88) можна перетворити так:

$$\Delta_{x_4} = \left(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}\right)^{n-4} \Big(\lambda_4 [(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) \prod_{j=3,\, j\neq 4}^{n} (D_{\varepsilon j}) + D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3,\, j\neq 4}^{n} (\beta_j^2 \prod_{\substack{k=3, k\neq j \\ k\neq 4}}^{n} (D_{\varepsilon k}))] -$$

$$- \beta_4 D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3,\, j\neq 4}^{n} (\lambda_j \beta_j \prod_{\substack{k=3, k\neq j \\ k\neq 4}}^{n} (D_{\varepsilon k}))\Big). \qquad (2.89)$$

Аналогічно отримуємо і решту допоміжних визначників лінійної підсистеми (2.61):

$$\Delta_{x_5} = \left(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}\right)^{n-4} \Big(\lambda_5 [(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) \prod_{j=3,\, j\neq 5}^{n} (D_{\varepsilon j}) + D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3,\, j\neq 5}^{n} (\beta_j^2 \prod_{\substack{k=3, k\neq j \\ k\neq 5}}^{n} (D_{\varepsilon k}))] -$$

$$- \beta_5 D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3,\, j\neq 5}^{n} (\lambda_j \beta_j \prod_{\substack{k=3, k\neq j \\ k\neq 5}}^{n} (D_{\varepsilon k}))\Big). \qquad (2.90)$$

$$\Delta_{x_n} = \left(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}\right)^{n-4} \Big(\lambda_n [(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) \prod_{j=3}^{n-1} (D_{\varepsilon j}) + D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3}^{n-1} (\beta_j^2 \prod_{k=3, k\neq j}^{n-1} (D_{\varepsilon k}))] -$$

$$- \beta_n D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3}^{n-1} (\lambda_j \beta_j \prod_{k=3, k\neq j}^{n-1} (D_{\varepsilon k}))\Big). \qquad (2.91)$$

Узагальнюючи формули (2.83), (2.89), (2.90), (2.91), одержимо допоміжні визначники лінійної підсистеми (2.61) в такому вигляді:

$$\Delta_{x_r} = \left(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}\right)^{n-4} \Big(\lambda_r [(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) \prod_{j=3,\, j\neq r}^{n} (D_{\varepsilon j}) + D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3,\, j\neq r}^{n} (\beta_j^2 \prod_{\substack{k=3, k\neq j \\ k\neq r}}^{n} (D_{\varepsilon k}))] -$$

$$- \beta_r D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3,\, j\neq r}^{n} (\lambda_j \beta_j \prod_{\substack{k=3, k\neq j \\ k\neq r}}^{n} (D_{\varepsilon k}))\Big), \qquad \left(r = \overline{3,n}\right). \qquad (2.92)$$

Використовуючи формули (2.72) та (2.92) знайдемо формальний розв′язок лінійної підсистеми (2.61) за правилом Крамера [106]:

$$x_r = \frac{\Delta_{x_r}}{\Delta} = (\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2})^{n-4} (\lambda_r [(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) \prod_{j=3, j\neq r}^{n} (D_{\varepsilon j}) + D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3, j\neq r}^{n} (\beta_j^2 \prod_{\substack{k=3,k\neq j \\ k\neq r}}^{n} (D_{\varepsilon k}))] -$$

$$- \beta_r D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3, j\neq r}^{n} (\lambda_j \beta_j \prod_{\substack{k=3,k\neq j \\ k\neq r}}^{n} (D_{\varepsilon k}))) / [(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2})^{n-3} \times$$

$$\times ((\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) \prod_{j=3}^{n} (D_{\varepsilon j}) + D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3}^{n} (\beta_j^2 \prod_{k=3,k\neq j}^{n} (D_{\varepsilon k})))], \ (r = \overline{3,n}). \qquad (2.93)$$

Формулу (2.93) можна дещо спростити, виконавши очевидні алгебраїчні перетворення:

$$x_r = \sqrt{D} \left(\left(\frac{\mu_r - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} (\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) - \beta_2 \beta_r D_m \right) \cdot [(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) \prod_{j=3, j\neq r}^{n} (D_{\varepsilon j}) + \right.$$

$$+ D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3, j\neq r}^{n} (\beta_j^2 \prod_{\substack{k=3,k\neq j \\ k\neq r}}^{n} (D_{\varepsilon k}))] -$$

$$- \beta_r D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3, j\neq r}^{n} (\beta_j (\frac{\mu_r - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} (\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) - \beta_2 \beta_j D_m) \prod_{\substack{k=3,k\neq j \\ k\neq r}}^{n} (D_{\varepsilon k}))) / [(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) \times$$

$$\times ((\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) \prod_{j=3}^{n} D_{\varepsilon j} + D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3}^{n} (\beta_j^2 \prod_{k=3,k\neq j}^{n} (D_{\varepsilon k})))], \ (r = \overline{3,n}). \qquad (2.94)$$

Отримані формальні розв′язки (2.94) повинні задовольняти умову додатності:

$$x_r > 0, \qquad (r = \overline{3,n}). \qquad (2.95)$$

Вважаючи, що математичне сподівання дохідності другого активу μ_2 перевищує гарантовану дохідність першого активу μ_1 $(\mu_2 > \mu_1)$, умову (2.95) можна записати через фінансові показники всіх активів розглядуваного портфеля:

$$k(M_r - \mu_1)[(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) \prod_{j=3, j\neq r}^{n} (D_{\varepsilon j}) + D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3, j\neq r}^{n} (\beta_j^2 \prod_{\substack{k=3,k\neq j \\ k\neq r}}^{n} (D_{\varepsilon k}))] >$$

$$> \beta_r D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3, j\neq r}^{n} (\beta_j (M_j - \mu_1) \prod_{\substack{k=3,k\neq j \\ k\neq r}}^{n} (D_{\varepsilon k})), \qquad (2.96)$$

де

.

За умови (2.96) додатні значення x_r зобразимо у вигляді:

$$x_r = \sqrt{D}\alpha_r, \ (r = \overline{3,n}), \tag{2.97}$$

де

$$\alpha_r = \frac{1}{(\mu_2 - \mu_1)}((M_r - \mu_1)[(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) \prod_{j=3, j\neq r}^{n} (D_{\varepsilon j}) +$$

$$+ D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3, j\neq r}^{n} (\beta_j^2 \prod_{\substack{k=3, k\neq j \\ k\neq r}}^{n} (D_{\varepsilon k}))] - \beta_r D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3, j\neq r}^{n} (\beta_j (M_j - \mu_1) \prod_{\substack{k=3, k\neq j \\ k\neq r}}^{n} (D_{\varepsilon k})))/((\beta_2 D_m + D_{\varepsilon 2}) \times$$

$$\times \prod_{j=3}^{n} D_{\varepsilon j} + D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3}^{n} (\beta_j^2 \prod_{k=3, k\neq j}^{n} (D_{\varepsilon k}))) . \tag{2.98}$$

Рівність (2.97) запишемо у вигляді:

$$\sqrt{D} = \frac{x_3}{\alpha_3} = \frac{x_4}{\alpha_4} = \frac{x_5}{\alpha_5} = \cdots = \frac{x_n}{\alpha_n} . \tag{2.99}$$

Таким чином, величини $x_4, x_5, \ldots, x_n$ можна виразити через x_3:

$$x_4 = \frac{\alpha_4}{\alpha_3} x_3; \ x_5 = \frac{\alpha_5}{\alpha_3} x_3; \ \ldots x_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_3} x_3,$$

тобто:

$$x_r = \frac{\alpha_r}{\alpha_3} x_3, \tag{2.100}$$

де $r = \overline{4,n}$.

Підставивши отримані формули у рівність (2.51) та останнє рівняння системи (2.61), отримаємо рівняння для обчислення величини x_3:

$$(D_{m2}^{\,2} + D_{\varepsilon 2}) \left(D_p - x_3^2 \left(D_{\varepsilon 3} + \sum_{i=4}^{n} \frac{\alpha_i^2}{\alpha_3^2} D_{\varepsilon i} \right) \right) - D_m D_{\varepsilon 2} x_3^2 \left(\beta_3 + \sum_{i=4}^{n} \frac{\alpha_j \beta_j}{\alpha_3} \right)^2 = \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} . \tag{2.101}$$

Додатний розв'язок x_3 рівняння (2.101) обчислюється за формулою:

$$x_3 = \left(D_p (\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) / \left[(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) \left(D_{\varepsilon 3} + \sum_{i=4}^{n} \frac{\alpha_i^2}{\alpha_3^2} D_{\varepsilon i} \right) + D_m D_{\varepsilon 2} \left(\beta_3 + \sum_{i=4}^{n} \frac{\alpha_i \beta_i}{\alpha_3} \right)^2 + \alpha_3^{-2} \right] \right)^{1/2} . \tag{2.102}$$

Підставивши отриманий розв'язок (2.102) у рівності (2.100), в аналогічній формі одержимо і решту розв'язків x_r $(r=\overline{4,n})$ системи (2.60). Отже, отримуємо всі розв′язки:

$$x_r = \left(D_p (\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) \Big/ \left[(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) \left(D_{\varepsilon r} + \sum_{i=3, i\neq r}^{n} \frac{\alpha_i^2}{\alpha_r^2} D_{\varepsilon i} \right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + D_m D_{\varepsilon 2} \left(\beta_r + \sum_{i=3, i\neq r}^{n} \frac{\alpha_i \beta_i}{\alpha_r} \right)^2 + \alpha_r^{-2} \right] \right)^{1/2}, \quad r=\overline{3,n}. \qquad (2.103)$$

Підставивши у формулу (2.103) позначення (2.99), отримаємо координати точки екстремуму функції (2.56) через показники дохідності активів портфеля, бета-коефіцієнти, індивідуальні дисперсії дохідностей активів, дисперсію дохідності ринкового портфеля та задану дисперсію розглядуваного портфеля:

$$x_r = (D_p(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2})/[(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2})(D_{\varepsilon r} + \sum_{i=3, i\neq r}^{n}(((M_i - \mu_1)[(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) \prod_{j=3, j\neq i}^{n}(D_{\varepsilon j}) +$$

$$+ D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3, j\neq i}^{n} (\beta_j^2 \prod_{\substack{k=3, k\neq j \\ k\neq r}}^{n} (D_{\varepsilon k}))] - \beta_i D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3, j\neq i}^{n} (\beta_j (M_i - \mu_1) \prod_{\substack{k=3, k\neq j \\ k\neq i}}^{n} (D_{\varepsilon k})))^2 /((\mu_r - \mu_1) \times$$

$$\times [(\beta_2 D_m + D_{\varepsilon 2}) \prod_{j=3, j\neq r}^{n} (D_{\varepsilon j}) + D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3, j\neq r}^{n} (\beta_j^2 \prod_{\substack{k=3, k\neq j \\ k\neq r}}^{n} (D_{\varepsilon k}))] - \beta_r D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3, j\neq r}^{n} (\beta_j (M_j - \mu_1) \times$$

$$\times \prod_{\substack{k=3, k\neq j \\ k\neq r}}^{n} (D_{\varepsilon k})))^2 D_{\varepsilon i})) + D_m D_{\varepsilon 2} [\beta_r + \sum_{i=3, i\neq r}^{n} (\beta_i ((\mu_i - \mu_1)[(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) \prod_{j=3, j\neq i}^{n} (D_{\varepsilon j}) + D_m D_{\varepsilon 2} \times$$

$$\times \sum_{j=3, j\neq i}^{n} (\beta_j^2 \prod_{\substack{k=3, k\neq j \\ k\neq i}}^{n} (D_{\varepsilon k}))] - \beta_i D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3, j\neq i}^{n} (\beta_j (\mu_i - \mu_1) \prod_{\substack{k=3, k\neq j \\ k\neq i}}^{n} (D_{\varepsilon k})))/((\mu_r - \mu_1)[(\beta_2 D_m + D_{\varepsilon 2}) \times$$

$$\times \prod_{j=3, j\neq r}^{n} (D_{\varepsilon j}) + D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3, j\neq r}^{n} (\beta_j^2 \prod_{\substack{k=3, k\neq j \\ k\neq r}}^{n} (D_{\varepsilon k}))] - \beta_r D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3, j\neq r}^{n} (\beta_j (M_j - \mu_1) \prod_{\substack{k=3, k\neq j \\ k\neq r}}^{n} (D_{\varepsilon k}))))]^2 +$$

$$+ (\mu_2 - \mu_1)^2 (\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2})^2 ((\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) \prod_{j=3}^{n} D_{\varepsilon j} + D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3}^{n} (\beta_j^2 \prod_{k=3, k\neq j}^{n} (D_{\varepsilon k})))^2 /(M_r - \mu_1) \times$$

$$\times[(\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) \prod_{j=3,\, j\neq r}^{n} (D_{\varepsilon j}) + D_m D_{\varepsilon 2} \sum_{j=3,\, j\neq r}^{n} (\beta_j^2 \prod_{\substack{k=3,k\neq j\\ k\neq r}}^{n} (D_{\varepsilon k}))] - \beta_r D_m D_{\varepsilon 2} \times \sum_{j=3,\, j\neq r}^{n} (\beta_j (\mu_j - \mu_1) \times$$

$$\times \prod_{\substack{k=3,k\neq j\\ k\neq r}}^{n} (D_{\varepsilon k})))^2 (\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2})^{-2}])^{\frac{1}{2}}, \qquad (= \overline{3,n}). \tag{2.104}$$

Частки вкладень нелінійно залежать від показників дохідності активів портфеля, бета-коефіцієнтів, індивідуальних дисперсій дохідностей активів, дисперсій дохідності ринкового портфеля та заданого дисперсій портфеля, який оптимізуємо.

Дослідимо тепер достатні умови, за яких значення x_r, обчислені за формулами (2.104), надають максимального значення дохідності μ_p портфеля цінних паперів, вираженої за формулою (2.56). Для цього обчислимо спочатку її частинні похідні другого порядку за змінними x_i $(= \overline{3,n})$:

$$\frac{\partial^2 \mu_p}{\partial x_i^2} = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}} ((D(x))^{-\frac{1}{2}} (D_{\varepsilon i} (\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) + \beta_i^2 D_m D_{\varepsilon 2}) - \frac{1}{2} (D(x))^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial D(x)}{\partial x_i} \times$$

$$\times (D_{\varepsilon i} (\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) x_i + D_m D_{\varepsilon 2} \beta_i \sum_{j=3}^{n} (\beta_j x_j))), \quad (= \overline{3,n}). \tag{2.105}$$

Підставивши у формулу (2.105) формулу (2.58), отримаємо:

$$\frac{\partial^2 \mu_p}{\partial x_i^2} = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{(D(x))^{\frac{3}{2}} (\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2})} (D(x)(D_{\varepsilon i} (\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) + \beta_i^2 D_m D_{\varepsilon 2}) +$$

$$+ (D_{\varepsilon i} (\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) x_i + D_m D_{\varepsilon 2} \beta_i \sum_{j=3}^{n} (\beta_j x_j))^2), \quad (= \overline{3,n}). \tag{2.106}$$

Обчислимо також мішані частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 \mu_p}{\partial x_i \partial x_r} = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}} ((D(x))^{-\frac{1}{2}} D_m D_{\varepsilon 2} \beta_i \beta_r + (D(x))^{-\frac{3}{2}} (D_{\varepsilon i} (\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) x_i + D_m D_{\varepsilon 2} \times$$

$$\times (\sum_{j=3}^{n} x_j \beta_j) \beta_i)(D_{\varepsilon r} (\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) x_r + D_m D_{\varepsilon 2} (\sum_{j=3}^{n} x_j \beta_j) \beta_r)), \; (= \overline{3,n}, \; r = \overline{3,n}, \; i \neq r). \tag{2.107}$$

З отриманих $(n-2)$-х похідних за формулою (2.106) та (n^2-5n+6)-х похідних за формулою (2.107) побудуємо симетричну матрицю A $(n-2)$-го порядку:

$$A=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\mu_p}{\partial x_3^2} & \frac{\partial^2\mu_p}{\partial x_3\partial x_4} & \frac{\partial^2\mu_p}{\partial x_3\partial x_5} & \cdots & \frac{\partial^2\mu_p}{\partial x_3\partial x_n} \\ \frac{\partial^2\mu_p}{\partial x_3\partial x_4} & \frac{\partial^2\mu_p}{\partial x_4^2} & \frac{\partial^2\mu_p}{\partial x_4\partial x_5} & \cdots & \frac{\partial^2\mu_p}{\partial x_4\partial x_n} \\ \frac{\partial^2\mu_p}{\partial x_3\partial x_5} & \frac{\partial^2\mu_p}{\partial x_4\partial x_5} & \frac{\partial^2\mu_p}{\partial x_5^2} & \cdots & \frac{\partial^2\mu_p}{\partial x_5\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2\mu_p}{\partial x_3\partial x_n} & \frac{\partial^2\mu_p}{\partial x_4\partial x_n} & \frac{\partial^2\mu_p}{\partial x_5\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2\mu_p}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}. \tag{2.108}$$

Якщо матриця $(-A)$ – протилежна до матриці A – додатно визначена, то формула (2.104) визначає точку максимуму дохідності портфеля μ_p, що обчислюється за формулою (2.56).

Для зручності дослідження матриці $(-A)$ запишемо її у вигляді:

$$-A=\frac{\mu_2-\mu_1}{(D(x))^{\frac{3}{2}}(\beta_2^2D_m+D_{\varepsilon 2})}=\begin{vmatrix} c_3+g\beta_3^2+\tau_3^2 & g\beta_3\beta_4+\tau_3\tau_4 & \cdots & g\beta_3\beta_n+\tau_3\tau_n \\ g\beta_3\beta_4+\tau_3\tau_4 & c_4+g\beta_4^2+\tau_4^2 & \cdots & g\beta_4\beta_n+\tau_4\tau_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g\beta_3\beta_n+\tau_3\tau_n & g\beta_4\beta_n+\tau_4\tau_n & \cdots & c_n+g\beta_n^2+\tau_n^2 \end{vmatrix}, \tag{2.109}$$

де

$$c_i=D(x)D_{\varepsilon i}(\beta_2^2D_m+D_{\varepsilon 2})>0,\quad (i=\overline{3,n}); \tag{2.110}$$

$$g=D(x)D_mD_{\varepsilon 2}>0; \tag{2.111}$$

$$\tau_i=D_{\varepsilon i}(\beta_2^2D_m+D_{\varepsilon 2})x_i+D_mD_{\varepsilon 2}\beta_i\sum_{j=3}^{n}(\beta_jx_j)>0. \tag{2.112}$$

З'ясуємо, які знаки мають головні мінори матриці (2.109).

Головний мінор першого порядку A_1 додатний. Справді,

$$A_1=c_3+g\beta_3^2+\tau_3^2>0, \tag{2.113}$$

внаслідок формул (2.110)-(2.112).

Обчислимо головний мінор другого порядку:

$$A_2=\begin{vmatrix} c_3+g\beta_3^2+\tau_3^2 & g\beta_3\beta_4+\tau_3\tau_4 \\ g\beta_3\beta_4+\tau_3\tau_4 & c_4+g\beta_4^2+\tau_4^2 \end{vmatrix}.$$

Розкривши цей визначник другого порядку, отримаємо:

$$A_2 = (c_3 + g\beta_3^2 + \tau_3^2)(c_4 + g\beta_4^2 + \tau_4^2) - (g\beta_3\beta_4 + \tau_3\tau_4)^2,$$

або після розкриття дужок:

$$A_2 = c_3c_4 + c_3g\beta_4^2 + c_3\tau_4^2 + c_4g\beta_3^2 + c_4\tau_3^2 + g\beta_3^2\tau_4^2 + g\beta_4^2\tau_3^2 - 2g\beta_3\beta_4\tau_3\tau_4;$$

$$A_2 = c_3c_4 + c_3g\beta_4^2 + c_3\tau_4^2 + c_4g\beta_3^2 + c_4\tau_3^2 + g(\beta_3\tau_4 - \beta_4\tau_3)^2 > 0. \qquad (2.114)$$

Головний мінор $(k-2)$-го $(k = \overline{5,n})$ порядку має такий вигляд:

$$A_{k-2} = \begin{vmatrix} c_3 + g\beta_3^2 + \tau_3^2 & g\beta_3\beta_4 + \tau_3\tau_4 & \cdots & g\beta_3\beta_k + \tau_3\tau_k \\ g\beta_3\beta_4 + \tau_3\tau_4 & c_4 + g\beta_4^2 + \tau_4^2 & \cdots & g\beta_4\beta_k + \tau_4\tau_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g\beta_3\beta_k + \tau_3\tau_k & g\beta_4\beta_k + \tau_4\tau_k & \cdots & c_k + g\beta_k^2 + \tau_k^2 \end{vmatrix}. \qquad (2.115)$$

Зокрема при $k = 5$:

$$A_3 = \begin{vmatrix} c_3 + g\beta_3^2 + \tau_3^2 & g\beta_3\beta_4 + \tau_3\tau_4 & g\beta_3\beta_5 + \tau_3\tau_5 \\ g\beta_3\beta_4 + \tau_3\tau_4 & c_4 + g\beta_4^2 + \tau_4^2 & g\beta_4\beta_5 + \tau_4\tau_5 \\ g\beta_3\beta_5 + \tau_3\tau_5 & g\beta_4\beta_5 + \tau_4\tau_5 & c_5 + g\beta_5^2 + \tau_5^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (c_3 + g\beta_3^2 + \tau_3^2)(c_4 + g\beta_4^2 + \tau_4^2)(c_5 + g\beta_5^2 + \tau_5^2) + 2(g\beta_3\beta_4 + \tau_3\tau_4)(g\beta_4\beta_5 + \tau_4\tau_5)\times$$

$$\times(g\beta_3\beta_5 + \tau_3\tau_5) - (c_4 + g\beta_4^2 + \tau_4^2)(g\beta_3\beta_5 + \tau_3\tau_5)^2 - (c_3 + g\beta_3^2 + \tau_3^2)(g\beta_4\beta_5 + \tau_4\tau_5)^2 -$$

$$-(c_5 + g\beta_5^2 + \tau_5^2)(g\beta_3\beta_4 + \tau_3\tau_4)^2 = c_3[(g\beta_4^2 + \tau_4^2)(g\beta_5^2 + \tau_5^2) - (g\beta_4\beta_5 + \tau_4\tau_5)^2] +$$

$$+c_4[(g\beta_3^2 + \tau_3^2)(g\beta_5^2 + \tau_5^2) - (g\beta_3\beta_5 + \tau_3\tau_5)^2] + c_5[(g\beta_3^2 + \tau_3^2)(g\beta_4^2 + \tau_4^2) - (g\beta_3\beta_4 + \tau_3\tau_4)^2] +$$

$$+R = c_3(g\beta_4^2\tau_5^2 + g\beta_5^2\tau_4^2 - 2g\beta_4\beta_5\tau_4\tau_5) + c_4(g\beta_3^2\tau_5^2 + g\beta_5^2\tau_3^2 - 2g\beta_3\beta_5\tau_3\tau_5) +$$

$$+c_5(g\beta_3^2\tau_4^2 + g\beta_4^2\tau_3^2 - 2g\beta_3\beta_4\tau_3\tau_4) + R,$$

де $R = c_3c_4c_5 + c_3c_4(g\beta_5^2 + \tau_5^2) + c_3c_5(g\beta_4^2 + \tau_4^2) + c_4c_5(g\beta_3^2 + \tau_3^2) + 2(g\beta_3\beta_4 + \tau_3\tau_4)\times$

$$\times(g\beta_4\beta_5 + \tau_4\tau_5)(g\beta_3\beta_5 + \tau_3\tau_5) > 0.$$

Отже,

$$A_3 = c_3g(\beta_4\tau_5 - \beta_5\tau_4)^2 + c_4g(\beta_3\tau_5 - \beta_5\tau_3)^2 + c_5g(\beta_3\tau_4 - \beta_4\tau_3)^2 + R > 0.$$

Методом математичної індукції можна довести додатність мінора A_k і при інших значеннях k.

Додатність головних мінорів матриці (– A) є достатньою умовою її додатної визначеності згідно критерію Сильвестра, а додатна визначеність матриці (–

A) в свою чергу є достатньою умовою того, що розв′язок (2.104) системи (2.60) є точкою максимуму дохідності портфеля μ_p.

Обчислення оптимальних часток вкладень в активи інвестиційного портфеля згідно формул (2.47), (2.104)) наведено в таблиці 2.2. Обчислення виконано засобами електронних таблиць MS Excel і подано в додатку А.2.

Таблиця 2.2

Оптимальні частки вкладень в активи портфеля з фіксованим ризиком

Параметр	Назва параметру	Значення		
μ_i	Сподівана дохідність *і*-го активу	0,10	0,12	0,13
β_i	Міра чутливості дохідності *і*-го активу до дохідності ринкового портфеля	0	0,5	0,7
D_i	Дисперсія дохідності *і*-го активу	0	0,0004	0,0009
D_p	Фіксований рівень ризику портфеля	0,0003		
D_m	Систематичний ризик ринкового портфеля	0,001		
x_i	Оптимальні частки вкладень в *і*-ті активи	0,26	0,43	0,31
μ	Сподівана дохідність портфеля	0,118		

Отримані результати ілюструються діаграмою на рис. 2.2. і показують, що оптимальні частки вкладень а активи інвестиційного портфеля з фіксованим ризиком мають наступні співвідношення: перший актив – 0,26; другий – о,43 і третій актив відповідно 0,31. За такого співвідношення інвестиційним портфелем забезпечить ВАТ “Опілля” (м. Тернопіль) максимальну дохідність.

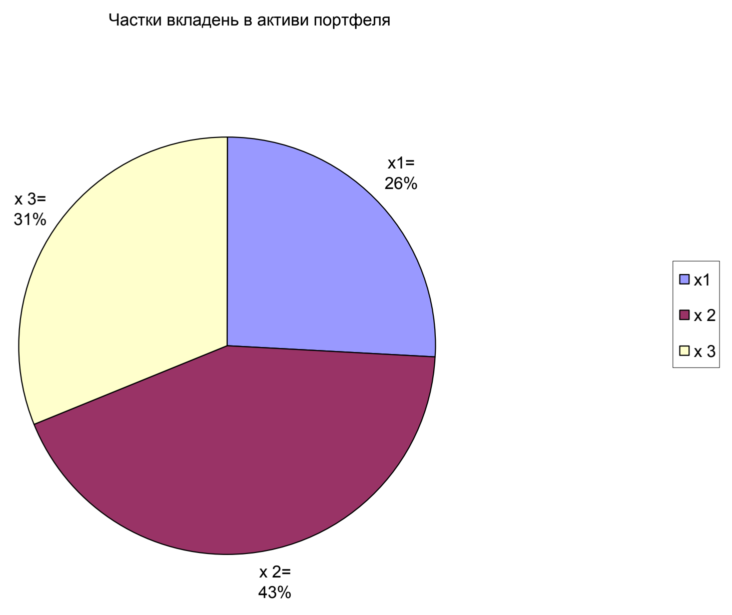

Рис. 2.2. Діаграма розподілу оптимальних часток вкладень в активи інвестиційного портфеля з фіксованим ризиком

Розглянемо тепер випадок, коли один з активів портфеля, наприклад, другий, має дохідність, яка пов′язана з дохідністю ринкового портфеля оберненою кореляційною залежністю, тобто:

$$\beta_2 < 0. \qquad (2.116)$$

Тоді, якщо виконується нерівність

$$-\beta_2 \sum x_i \beta_i D_m > \sqrt{D(x)}, \qquad (2.117)$$

то рівняння (2.49), крім розв′язку (2.54), має ще один додатній розв′язок:

$$x_2 = \frac{-\beta_2 \sum_{i=3}^{n} x_i \beta_i D_m - \sqrt{D(x)}}{\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}}. \qquad (2.118)$$

Підставивши тепер у вираз дохідності портфеля (2.47) формули (2.55) та (2.118), отримаємо таку формулу

$$\mu_p = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)\frac{-\beta_2 \sum_{i=3}^{n} x_i \beta_i D_m - \sqrt{D(x)}}{\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}} + \sum_{i=3}^{n} (\mu_i - \mu_1) x_i. \qquad (2.119)$$

Частинні похідні функції (2.119) за змінними x_i $(i = \overline{3,n})$ обчислюються за формулою:

$$\frac{\partial \mu_p}{\partial x_i} = \mu_i - \mu_1 - \frac{\mu_2 - \mu_1}{\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}} \left(\beta_2 \beta_i D_m + \frac{1}{2\sqrt{D(x)}} \frac{\partial D(x)}{\partial x_i} \right). \quad (2.120)$$

Підставивши у формулу (2.120) значення частинної похідної дискримінанта, отримаємо:

$$\frac{\partial \mu_p}{\partial x_i} = \mu_i - \mu_1 - \frac{\mu_2 - \mu_1}{\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}} (\beta_2 \beta_i D_m - \sqrt{\frac{1}{D(x)}} \cdot (D_{\varepsilon i} x_i (\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) +$$

$$+ D_m D_{\varepsilon 2} (\sum_{j=3}^{n} x_j \beta_j) \beta_i)), \ (i = \overline{3,n}). \quad (2.121)$$

Згідно теореми Ферма необхідною умовою екстремальності функції є рівність нулеві її частинних похідних першого порядку:

$$\mu_i - \mu_1 - \frac{\mu_2 - \mu_1}{\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}} (\beta_2 \beta_i D_m - \sqrt{\frac{1}{D(x)}} \cdot (D_{\varepsilon i} x_i (\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) +$$

$$+ D_m D_{\varepsilon 2} (\sum_{j=3}^{n} x_j \beta_j) \beta_i)) = 0, \ (i = \overline{3,n}). \quad (2.122)$$

Отже, ми отримали систему $(n - 2)$ x, взагалі кажучи ірраціональних рівнянь, яку можна записати у такому вигляді:

$$\frac{\mu_2 - \mu_1}{\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}} (D_{\varepsilon i} x_i (\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) + D_m D_{\varepsilon 2} (\sum_{j=3}^{n} x_j \beta_j) \beta_i) / \sqrt{D(x)} =$$

$$= \frac{(\mu_2 - \mu_1) \beta_2 \beta_i D_m}{\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}} - (\mu_i - \mu_1).$$

Звідси:

$$D_{\varepsilon i} x_i (\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}) + D_m D_{\varepsilon 2} \beta_i \sum_{j=3}^{n} \beta_j x_j = \sqrt{D(x)} \cdot (\beta_2 \beta_i D_m - \frac{\mu_i - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} (\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2})), \ (i = \overline{3,n}). \quad (2.123)$$

Якщо праві частини системи рівнянь (2.123) нульові, тобто виконуються умови:

$$\beta_2 \beta_i D_m = \frac{\mu_i - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} (\beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2}), \ (i = \overline{3,n}), \quad (2.124)$$

то система (2.123) перетворюється в лінійну однорідну.

Така система внаслідок відмінності від нуля її головного визначника має єдиний нульовий розв′язок.

При порушенні умов (2.124) алгебраїчна система (2.123) досліджується аналогічно як система (2.60), оскільки відрізняється від неї лише знаками правих частин.

Залишається розглянути частковий випадок нульової міри чутливості дохідності 2-го активу до дохідності ринкового портфеля:

$$\beta_2 = 0. \tag{2.125}$$

За умови (2.125) рівняння (2.49) спрощується:

$$D_{\varepsilon 2} x_2^2 = D_p - \sum_{i=3}^{n} x_i^2 D_{\varepsilon i} - \left(\sum_{i=3}^{n} x_i \beta_i \right)^2 D_m, \tag{2.126}$$

якщо права частина рівняння (2.126) додатна, тобто:

$$D_p - \sum_{i=3}^{n} x_i^2 D_{\varepsilon i} - \left(\sum_{i=3}^{n} x_i \beta_i \right)^2 D_m > 0. \tag{2.127}$$

За умови (2.127) рівняння (2.126) має єдиний додатний розв′язок:

$$x_2 = \frac{\sqrt{D_p - \sum_{i=3}^{n} x_i^2 D_{\varepsilon i} - \left(\sum_{i=3}^{n} x_i \beta_i \right)^2 D_m}}{\sqrt{D_{\varepsilon 2}}}. \tag{2.128}$$

Дохідність портфеля з урахуванням формули (2.128) можна записати у вигляді:

$$\mu_p = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1) \frac{\sqrt{D_p - \sum_{i=3}^{n} x_i^2 D_{\varepsilon i} - \left(\sum_{i=3}^{n} x_i \beta_i \right)^2 D_m}}{\sqrt{D_{\varepsilon 2}}} + \sum_{i=3}^{n} (\mu_i - \mu_1) x_i. \tag{2.129}$$

Функцію (2.129) можна отримати також з функції (2.56) за допомогою граничного переходу $\beta_2 \to 0$. А, отже, і точку максимуму функції (2.129) можна отримати з точки максимуму функції (2.56) цим же граничним спрямуванням $\beta_2 \to 0$.

Отже, проведене в даному підрозділі дослідження дає можливість розподілити інвестиційні кошти між активами портфеля з фіксованим рівнем ризику, який визначається згідно з моделлю Шарпа і один з активів безризиковий для отримання максимально можливої сподіваної норми дохідності портфеля.

Висновки до другого розділу

1. Досліджено задачу формування оптимального інвестиційного портфеля, що складається з активів, дохідності яких є незалежними випадковими величинами і при цьому дохідність одного з активів є сталою величиною. Виведена формула (2.7) сподіваної дохідності портфеля враховує дохідності кожного з активів, їх дисперсії та допустиму дисперсію дохідності інвестиційного портфеля.

2. Методом диференціального числення функції з багатьма аргументами та теорії визначників знайдено точку екстремуму цієї дохідності, тобто значення часток вкладень в активи, при яких сподівана дохідність досягає свого екстремального значення, можливо, максимального, а, можливо, і мінімального. Доведено, що знайдені частки (2.30) надають сподіваній дохідності портфеля максимального значення при заданому фіксованому рівні ризику. Обчислення оптимальних часток портфеля з незалежних активів, причому один з них безризиковий реалізовано засобами MS Excel (додаток А.1).

3. Проведено дослідження формування оптимального інвестиційного портфеля при заміні припущення про незалежність дохідностей активів на припущення про лінійну залежність ризику кожного з активів від дисперсії ринкового портфеля зі збереженням припущення про безризиковість одного з активів та заданого фіксованого рівня ризику портфеля, що визначається згідно моделі Шарпа. Отримано модель (2.56) щодо сподіваної дохідності такого портфеля. З цієї моделі випливає, що сподівана дохідність портфеля лінійно залежить від дохідності кожного з активів і нелінійно: від систематичного ризику ринкового портфеля, від залишкових ризиків кожного з активів та від бета-коефіцієнтів – мір чутливості дохідності кожного з активів до дохідності ринкового портфеля.

4. Показано, що задача максимізації дохідності портфеля при заданому фіксованому рівні ризику зводиться до питання про існування розв’язків

розв'язність ірраціональних алгебраїчних рівнянь (2.60). Запропонований в роботі підхід дозволив розв'язати цю систему в явній аналітичній формі.

5. Виведено модель (2.104), яка виражає частки вкладень в активи портфеля, які надають його дохідності екстремального значення. Частки вкладень нелінійно залежать від показників дохідності активів портфеля, бета-коефіцієнтів, індивідуальних дисперсій дохідностей активів, дисперсій дохідності ринкового портфеля та заданого дисперсій портфеля, який оптимізуємо. Подальша перевірка критерію максимальності показала, що знайдений розв'язок (2.104) надає дохідності (2.56) інвестиційного портфеля максимального значення. Засобами електронної таблиці MS Excel обчислено оптимальні частки вкладень в активи портфеля, в якому ризик дохідності кожного з активів лінійно залежать від ризику ринкового портфеля, причому один з активів безризиковий.

6. Проаналізовано випадки від'ємних та нульових бета-коефіцієнтів. У випадку від'ємного бета-коефіцієнта отримано модель сподіваної дохідності портфеля (2.119), а у випадку нульового бета-коефіцієнта – модель (2.129).

РОЗДІЛ 3
ПОБУДОВА МОДЕЛЕЙ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПОРТФЕЛЯ, ВСІ АКТИВИ ЯКОГО РИЗИКОВІ

3.1. Модель максимізації дохідності інвестиційного портфеля, що складається з двох взаємозалежних і одного незалежного активу

Розглянемо задачу формування інвестиційного портфеля з двох взаємозалежних і одного незалежного активу. Не зменшуючи загальності вважатимемо, що кореляція між дохідностями 1-го та 2-го активів

$$\rho_{12} = 1,$$

а інші кореляції $\rho_{13} = \rho_{23} = 0$.

Дисперсія такого портфеля запишеться у вигляді

$$D_p = D_1 x_1^2 + D_2 x_2^2 + D_3 x_3^2 + 2\sqrt{D_1 D_2}\, x_1 x_2 . \tag{3.1}$$

де x_i – частка вкладень в i-й актив ($i = \overline{1,3}$).

З формули (3.1) виключимо змінну $x_1 = 1 - x_2 - x_3$.

$$D_p = \sigma_1^2 (1 - x_2 - x_3)^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 x_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 (1 - x_2 - x_3) x_2 . \tag{3.2}$$

Зведемо рівняння (3.2) до стандартної форми відносно x_2:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 x_2^2 - (2\sigma_1^2 (1 - x_3) - 2\sigma_1\sigma_2 (1 - x_3)) x_2 + \sigma_3^2 x_3^2 - D_p + \sigma_1^2 (1 - x_3)^2 = 0 . \tag{3.3}$$

Якщо $\sigma_1 = \sigma_2$, то рівняння (3.3) не залежить від x_2. Тому надалі вважатимемо, що

$$|\sigma_1 - \sigma_2| > 0 . \tag{3.4}$$

Для розв′язності рівняння (3.3) відносно x_2 необхідно, щоб його дискримінант був невід′ємний:

$$d = \sigma_1^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 (1 - x_3)^2 - (\sigma_1 - \sigma_2)^2 (\sigma_3^2 x_3^2 + \sigma_1^2 (1 - x_3)^2 - D_p) \geq 0 , \tag{3.5}$$

або після спрощень:

$$d = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 (D_p - \sigma_3^2 x_3^2) \geq 0 . \tag{3.6}$$

Нерівність (3.6) виконується, якщо дисперсія портфеля перевищує дисперсію третього активу: $D_p \geq \sigma_3^2$.

За умови (3.6) рівняння (3.3) має розв′язки:

$$x_2 = \frac{\sigma_1 (\sigma_1 - \sigma_2)(1 - x_3) \pm |\sigma_1 - \sigma_2| \sqrt{D_p - \sigma_3^2 x_3^2}}{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}, \tag{3.7}$$

та

$$x_2 = \frac{\sigma_1 (1 - x_3) - \sqrt{D_p - \sigma_3^2 x_3^2}}{\sigma_1 - \sigma_2}, \quad \text{якщо } \sigma_1 > \sigma_2 . \tag{3.8}$$

Дохідність портфеля згідно формули (3.7) можна записати так:

$$\mu_p = \mu_1 (1 - x_2 - x_3) + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 ;$$

$$\mu_p = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1) x_2 + (\mu_3 - \mu_1) x_3 ;$$

$$\mu_p = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1) \frac{\sigma_1 (1 - x_3) + \sqrt{D_p - \sigma_3^2 x_3^2}}{\sigma_1 - \sigma_2} + (\mu_3 - \mu_1) x_3 . \tag{3.9}$$

Щоб знайти максимальну сподівану дохідність портфеля, обчислимо похідну функції (3.9):

$$\frac{\partial \mu_p}{\partial x_3} = \mu_3 - \mu_1 - \frac{(\mu_2 - \mu_1)\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2} - \frac{\sigma_3^2 x_3}{\sqrt{D_p - \sigma_3^2 x_3^2}} \cdot \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma_1 - \sigma_2} . \tag{3.10}$$

Прирівняємо отриману похідну до нуля:

$$\mu_3 - \mu_1 - \frac{(\mu_2 - \mu_1)\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2} - \frac{\sigma_3^2 x_3}{\sqrt{D_p - \sigma_3^2 x_3^2}} \cdot \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma_1 - \sigma_2} = 0 . \tag{3.11}$$

Домноживши рівняння (3.11) на додатну величину $(\sigma_1 - \sigma_2)$, матимемо таке рівняння:

$$(\mu_3 - \mu_1)(\sigma_1 - \sigma_2) - (\mu_2 - \mu_1)\sigma_1 - (\mu_2 - \mu_1) \frac{\sigma_3^2 x_3}{\sqrt{D_p - \sigma_3^2 x_3^2}} = 0 . \tag{3.12}$$

Вважаючи, що $\mu_2 - \mu_1 \neq 0$, введемо позначення:

$$\lambda = \frac{(\mu_3 - \mu_1)(\sigma_1 - \sigma_2) - (\mu_2 - \mu_1)\sigma_1}{\mu_2 - \mu_1} . \tag{3.13}$$

Якщо $\lambda \leq 0$, то рівняння (3.12) не має додатних коренів.

За умови $\lambda > 0$ рівняння (3.12) можна розв′язати:

$$\frac{\sigma_3^4 x_3^2}{D_p - \sigma_3^2 x_3^2} = \lambda^2;$$

$$\sigma_3^4 x_3^2 = \lambda^2 D_p - \lambda^2 \sigma_3^2 x_3^2;$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{\lambda^2 D_p}}{\sigma_3 \sqrt{\sigma_3^2 + \lambda^2}}. \tag{3.14}$$

Отриманий розв′язок (3.14) повинен задовольняти нерівність:

$$\frac{\lambda \cdot \sqrt{D_p}}{\sigma_3 \sqrt{\sigma_3^2 + \lambda^2}} < 1,$$

або

$$D_p < \frac{\sigma_3^2 (\sigma_3^2 + \lambda^2)}{\lambda^2}. \tag{3.15}$$

Частка коштів x_3, визначена за формулою (3.14) надає максимального значення дохідності портфеля μ_p, якщо її друга похідна від′ємна:

$$\frac{\partial^2 \mu_p}{\partial x_3^2} < 0. \tag{3.16}$$

Нерівність (3.16) можна записати у вигляді:

$$-\frac{\sigma_3^2 (\mu_2 - \mu_1)}{\sigma_1 - \sigma_2} \left(\frac{1}{\sqrt{D_p - \sigma_3^2 x_3^2}} + \frac{\sigma_3^2 x_3^2}{(\sqrt{D_p - \sigma_3^2 x_3^2})^3} \right) < 0. \tag{3.17}$$

Легко переконатися, що нерівність (3.17) за умови $\sigma_1 > \sigma_2$ виконується, якщо $\mu_2 > \mu_1$.

Вважаючи цю умову виконаною, підставимо формулу (3.14) у рівність (3.8) і отримаємо:

$$x_2 = \frac{\left(\sigma_1 \left(1 - \frac{\sqrt{\lambda^2 D_p}}{\sigma_3 \sqrt{\sigma_3^2 + \lambda^2}} \right) + \frac{\sigma_3^2 x_3}{\lambda} \right)}{(\sigma_1 - \sigma_2)}. \tag{3.18}$$

Очевидно, що значенням формули (3.18) є додатне число, а тому для того? щоб воно визначало доцільну частку інвестицій в другий актив, достатньо, щоб виконувалася нерівність:

$$x_2 + x_3 \le 1. \tag{3.19}$$

Враховуючи формули (3.18) та (3.14), нерівність (3.19) можна записати так:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2}\left(1 - \frac{\lambda\sqrt{D_p}}{\sigma_3\sqrt{\sigma_3^2 + \lambda^2}}\right) + \left(\frac{\sigma_3^2}{\lambda(\sigma_1 - \sigma_2)} + 1\right)\cdot\frac{\lambda\sqrt{D_p}}{\sigma_3\sqrt{\sigma_3^2 + \lambda^2}} \le 1. \tag{3.20}$$

Якщо x_2 виражається формулою (3.8), то для обчислення x_3 отримується рівняння, аналогічне рівнянню (3.12):

$$(\mu_3 - \mu_1)(\sigma_1 - \sigma_2) - (\mu_2 - \mu_1)\sigma_1 + (\mu_2 - \mu_1)\frac{\sigma_3^2 x_3}{\sqrt{D_p - \sigma_3^2 x_3^2}} = 0. \tag{3.21}$$

Однак на відміну від рівняння (3.12) додатний розв′язок

$$x_3 = \frac{\sqrt{\lambda^2 D_p}}{\sigma_3\sqrt{\sigma_3^2 + \lambda^2}}$$

існує за умови:

$$\lambda = \frac{(\mu_3 - \mu_1)(\sigma_1 - \sigma_2) - (\mu_2 - \mu_1)\sigma_1}{\mu_2 - \mu_1} < 0. \tag{3.22}$$

Отриманий розв′язок x_3 є тепер точкою максимуму дохідності портфеля, якщо при $\sigma_1 > \sigma_2$ виконується нерівність $\mu_1 > \mu_2$.

Виведемо тепер умову, за якої значення x_2, отримане за формулою (3.8), додатне:

$$x_2 = \frac{\left(\sigma_1\left(1 - \frac{\sqrt{\lambda^2 D_p}}{\sigma_3\sqrt{\sigma_3^2 + \lambda^2}}\right) - \sqrt{D_p - \frac{\lambda^2 D_p}{\sigma_3^2 + \lambda^2}}\right)}{(\sigma_1 - \sigma_2)} > 0. \tag{3.23}$$

З нерівності (3.23) випливає:

$$\left(\frac{\sigma_1|\lambda|}{\sigma_3\sqrt{\sigma_3^2 + \lambda^2}} + \frac{\sigma_3}{\sqrt{\sigma_3^2 + \lambda^2}}\right)\sigma_p < \sigma_1, \tag{3.24}$$

де $\sigma_p = \sqrt{D_p}$.

Отже, за умови (3.24) формули (3.14) та (3.23) виражають оптимальні частки вкладень в третій та другий актив відповідно, якщо при цьому виконується умова (3.19).

Формування оптимального портфеля з заданим ризиком, в якому перші два активи прямо залежні між собою, а третій незалежний наведено у таблиці 3.1. Обчислення виконано засобами MS Excel і подані в додатку Б.1.

Таблиця 3.1

Формування портфеля з заданим ризиком, в якому перші два активи прямо залежні між собою, а третій незалежний

Сподівана дохідність i-го активу μ_i	Стандартне відхилення дохідності i-го активу σ_i	Фіксований рівень дисперсії дохідності портфеля D_p	Оптимальні частки вкладень в i-ті активи x_i	Сподівана дохідність портфеля μ
0,3	0,17	0,02	0,447	0,355
0,2	0,07		0,187	
0,5	0,03		0,366	

Отримані результати ілюструються діаграмою (рис. 3.1).

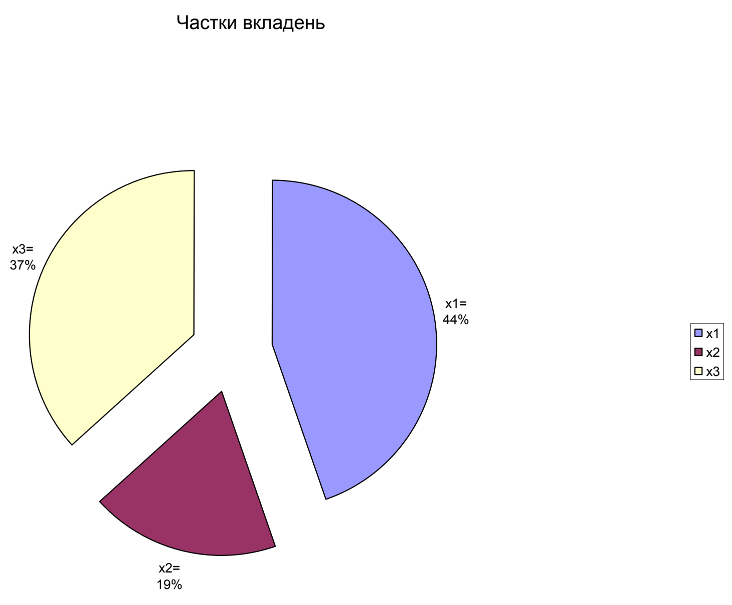

Рис. 3.1. Діаграма розподілу часток вкладень інвестиційного портфеля

Розглянемо тепер випадок оберненої кореляційної залежності між першим та другим активами:

$$\rho_{12} = -1 .$$

Ризик дохідності такого портфеля обчислюється за формулою:

$$D_p = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 x_3^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 x_1 x_2 , \tag{3.25}$$

або

$$D_p = \sigma_1^2 (1 - x_2 - x_3)^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 x_3^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 (1 - x_2 - x_3) x_2 . \tag{3.26}$$

Формулу (3.26) можна записати у вигляді рівняння відносно x_2:

$$(\sigma_1 + \sigma_2)^2 x_2^2 - 2\sigma_1^2 (1 - x_3) x_2 - 2\sigma_1 \sigma_2 (1 - x_3) x_2 + \sigma_1^2 (1 - x_3)^2 + \sigma_3^2 x_3^2 - D_p = 0; \tag{3.27}$$

$$\left[(\sigma_1 + \sigma_2) x_2 - \sigma_1 (1 - x_3)\right]^2 = D_p - \sigma_3^2 x_3^2 . \tag{3.28}$$

Рівняння (3.28) має дійсні розв′язки, якщо виконується нерівність:

$$D_p \ge \sigma_3^2 = D_3 . \tag{3.29}$$

За умови (3.29) обчислимо:

$$x_2 = \frac{\sigma_1 (1 - x_3) + \sqrt{D_p - \sigma_3^2 x_3^2}}{\sigma_1 + \sigma_2} \tag{3.30}$$

та

$$x_2 = \frac{\sigma_1 (1 - x_3) - \sqrt{D_p - \sigma_3^2 x_3^2}}{\sigma_1 + \sigma_2} . \tag{3.31}$$

Якщо x_2 знайдене за формулою (3.30), то дохідність портфеля:

$$\mu_p = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1) \frac{\sigma_1 (1 - x_3) + \sqrt{D_p - \sigma_3^2 x_3^2}}{\sigma_1 + \sigma_2} + (\mu_3 - \mu_1) x_3 . \tag{3.32}$$

Структура функції (3.32) аналогічна функції (3.9), тому і дослідження на максимум цієї функції цілком аналогічне. Отже, не вдаючись до детальних викладок, отримуємо такі результати.

Якщо:

$$\lambda_1 = \frac{(\mu_3 - \mu_1)(\sigma_1 + \sigma_2) - (\mu_2 - \mu_1)\sigma_1}{\mu_2 - \mu_1} > 0 \quad \text{і} \quad \mu_2 > \mu_1 ,$$

то

$$x_3 = \frac{\lambda_1 \sqrt{D_p}}{\sigma_3 \sqrt{\sigma_3^2 + \lambda_1^2}}, \tag{3.33}$$

$$\text{і } x_2 = \frac{\left(\sigma_1 \left(1 - \frac{\lambda_1 \sqrt{D_p}}{\sigma_3 \sqrt{\sigma_3^2 + \lambda_1^2}} \right) + \frac{\sigma_3^2 x_3}{\lambda_1} \right)}{(\sigma_1 + \sigma_2)}, \tag{3.34}$$

якщо при цьому середнє квадратичне відхилення дохідності портфеля σ_p задовольняє нерівності:

$$\sigma_p^2 < \frac{\sigma_3^2 (\sigma_3^2 + \lambda_1^2)}{\lambda_1^2}, \tag{3.35}$$

$$\text{і } \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \left(1 - \frac{\lambda_1 \sigma_p}{\sigma_3 \sqrt{\sigma_3^2 + \lambda_1^2}} \right) + \left(\frac{\sigma_3^2}{\lambda_1 (\sigma_1 + \sigma_2)} + 1 \right) \frac{\lambda_1 \sigma_p}{\sigma_3 \sqrt{\sigma_3^2 + \lambda_1^2}} < 1. \tag{3.36}$$

Формування (формули (3.33 – 3.36)) оптимального портфеля з заданим ризиком портфеля 0,5%, в якому перші два активи обернено залежні між собою, а третій незалежний наведено в таблиці 3.2. Обчислення проведено засобами MS Excel і подано в додатку Б.2.

Таблиця 3.2

Формування оптимального портфеля з заданим ризиком, в якому перші два активи обернено залежні між собою, а третій незалежний

Сподівана дохідність i-го активу μ_i	Стандартне відхилення дохідності i-го активу σ_i	Фіксований рівень дисперсії дохідності портфеля D_p	Оптимальні частки вкладень в i-ті активи x_i	Сподівана дохідність портфеля μ
0,2	0,08	0,005	0,365	0,316
0,3	0,15		0,373	
0,5	0,25		0,262	

Отримані результати ілюструються діаграмою (рис. 3.2).

Якщо величина λ_1 від'ємна, тобто:

$$\lambda_1 = \frac{(\mu_3 - \mu_1)(\sigma_1 + \sigma_2) - (\mu_2 - \mu_1)\sigma_1}{\mu_2 - \mu_1} < 0 \tag{3.37}$$

$$\text{і } \mu_2 < \mu_1,$$

то

$$x_3 = -\frac{\lambda_1 \sigma_p}{\sigma_3 \sqrt{\sigma_3^2 + \lambda_1^2}} \tag{3.38}$$

і

$$x_2 = \frac{\left(\sigma_1 \left(1 + \frac{\lambda_1 \sigma_p}{\sigma_3 \sqrt{\sigma_3^2 + \lambda_1^2}}\right) - \sigma_p \frac{\sigma_3}{\sqrt{\sigma_3^2 + \lambda_1^2}}\right)}{(\sigma_1 + \sigma_2)}, \tag{3.39}$$

якщо, крім того, виконуються нерівності (3.35), (3.14) та

$$\left(\frac{\sigma_1 |\lambda_1|}{\sigma_3 \sqrt{\sigma_3^2 + \lambda_1^2}} + \frac{\sigma_3}{\sqrt{\sigma_3^2 + \lambda_1^2}}\right) \sigma_p < \sigma_1 . \tag{3.40}$$

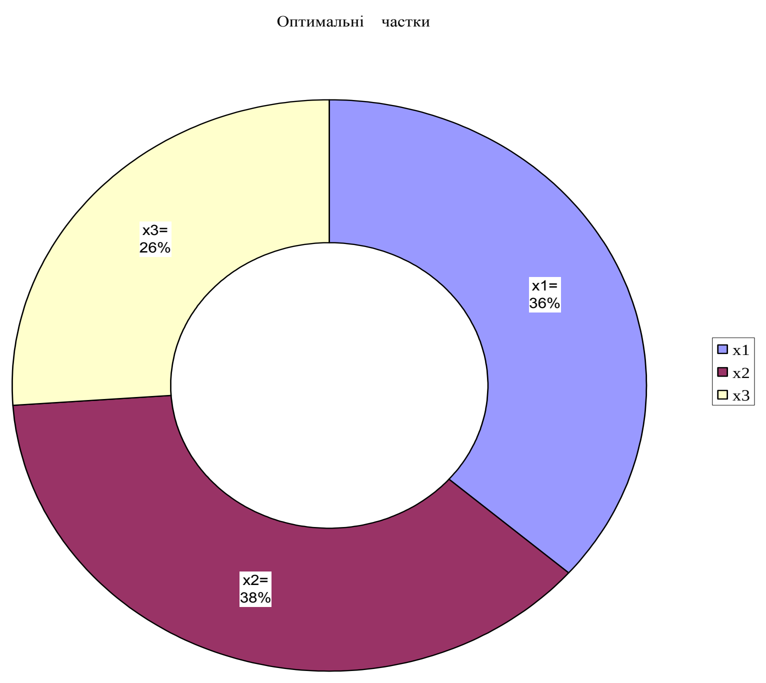

Рис. 3.2. Діаграма розподілу часток вкладень в активи портфеля з заданим ризиком , в якому перші два активи обернено залежні між собою, а третій – незалежний

Отже, знайдено частки вкладень в активи, які дозволяють максимізувати дохідність інвестиційного портфеля, для випадку, коли один з активів незалежний, а випадкові дохідності інших двох пов'язаних прямою чи оберненою кореляційною залежністю, при заданому допустимому рівні ризику портфеля.

3.2. Модель оптимізації дохідності портфеля цінних паперів з фіксованим ризиком, що визначається згідно з моделлю Шарпа

3.2.1. Мінімізація можливого ризику інвестиційного портфеля. Розглянемо задачу про обчислення часток $x_i \ (i = \overline{1,n})$ вкладень в *i*-ті активи деякого портфеля, які би максимізували математичне сподівання дохідності портфеля

$$\mu_p = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right) \tag{3.41}$$

за деякого фіксованого рівня ризику портфеля

$$D_p = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i \right)^2 D_m + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 D_{\varepsilon i}\ , \tag{3.42}$$

де $\mu_i \ (i = \overline{1,n})$ - математичне сподівання дохідності *i*-го активу;

D_m – систематичний ризик ринкового портфеля;

$D_{\varepsilon i} \ (i = \overline{1,n})$ - залишкова дисперсія дохідності *i*-го активу;

$\beta_i \ (i = \overline{1,n})$ - міра чутливості дохідності *i*-го активу до дохідності ринкового портфеля.

Дисперсія портфеля D_p не може бути як завгодно малою, як у задачі з портфелем, що містить один безризиковий актив. Як випливає з формули (3.42), повинні виконуватися нерівності

$$D_p > \min_{i=\overline{1,n}} D_{\varepsilon i} / n \tag{3.43}$$

та

$$D_p > D_m \min_{i=\overline{1,n}} \beta_i^2 / n, \tag{3.44}$$

якщо всі $\beta_i > 0$.

Умови (3.43)-(3.44) необхідні, але можуть бути недостатніми, оскільки мінімум квадратів бета-коефіцієнтів може досягатися для активу, в якого залишкова дисперсія не мінімальна. У цьому випадку мінімально можливий ризик портфеля можна знайти методами дослідження функцій багатьох змінних.

Функцію $d(x_1,...,x_n)$ від *n* незалежних між собою змінних

$$d(x_1,...,x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\beta_i\right)^2 D_m + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 D_{\varepsilon i} \tag{3.45}$$

можна замінити функцією (*n*-1)-ї незалежної змінної, виключивши

$$x_1 = 1 - \sum_{j=2}^{n} x_j \; ; \tag{3.46}$$

$$d(x) = \left(\beta_1 + \sum_{i=2}^{n}(\beta_i - \beta_1)x_i\right)^2 D_m + \left(1 - \sum_{i=2}^{n} x_i\right)^2 D_{\varepsilon 1} + \sum_{i=2}^{n} x_i^2 D_{\varepsilon i} \; . \tag{3.47}$$

Для обчислення екстремальних значень функції (3.47) обчислимо її частинні похідні за змінними x_i $(i = \overline{2,n})$

$$\frac{\partial d(x)}{\partial x_i} = 2\left(\beta_1 + \sum_{j=2}^{n}(\beta_j - \beta_1)x_j\right)D_m(\beta_i - \beta_1) - 2\left(1 - \sum_{j=2}^{n} x_j\right)D_{\varepsilon 1} + 2x_i D_{\varepsilon i}\,, \quad (i = \overline{2,n}). \tag{3.48}$$

Згідно теореми Ферма частинні похідні першого порядку в точці екстремуму дорівнюють нулеві. Прирівнявши до нуля частинні похідні (3.48), отримаємо систему з *(n*-1*)*-го лінійного рівняння:

$$\left(\beta_1 + \sum_{j=2}^{n}(\beta_j - \beta_1)x_j\right)D_m(\beta_i - \beta_1) + D_{\varepsilon 1}\sum_{j=2}^{n} x_j + x_i D_{\varepsilon i} - D_{\varepsilon 1} = 0\,, \quad (i = \overline{2,n}). \tag{3.49}$$

У кожному рівнянні системи (3.49) перенесемо вільні члени в праву частину:

$$D_m \sum_{j=2}^{n} \left((\beta_j - \beta_1)x_j\right)(\beta_i - \beta_1) + D_{\varepsilon 1}\sum_{j=2}^{n} x_j + x_i D_{\varepsilon i} = D_{\varepsilon 1} - \beta_1 D_m(\beta_i - \beta_1)\,, \quad (i = \overline{2,n}). \tag{3.50}$$

Систему (3.50) можна записати в розгорненому вигляді:

$$
\begin{cases}
\left(D_{\varepsilon 2}+(\beta_2-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon 1}\right)x_2+\left((\beta_3-\beta_1)(\beta_2-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1}\right)x_3+\ldots+\left((\beta_n-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1}\right)x_n=\\
=D_{\varepsilon 1}-\beta_1 D_m(\beta_2-\beta_1);\\
\left((\beta_3-\beta_1)(\beta_2-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1}\right)x_2+\left((\beta_3-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon 3}+D_{\varepsilon 1}\right)x_3\ldots+\left((\beta_n-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1}\right)x_n=\\
=D_{\varepsilon 1}-\beta_2 D_m(\beta_3-\beta_1);\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\left((\beta_n-\beta_1)(\beta_2-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1}\right)x_2+\left((\beta_n-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1}\right)x_3\ldots+\left((\beta_n-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon n}+D_{\varepsilon 1}\right)x_n=\\
=D_{\varepsilon 1}-\beta_1 D_m(\beta_n-\beta_1).
\end{cases}
$$

Головний визначник системи (3.50) симетричний

$$
\Delta_n=\begin{vmatrix}
(\beta_2-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2} & (\beta_3-\beta_1)(\beta_2-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1} & \ldots & (\beta_n-\beta_1)(\beta_2-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1}\\
(\beta_3-\beta_1)(\beta_2-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1} & (\beta_3-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon 3}+D_{\varepsilon 1} & \ldots & (\beta_n-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1}\\
(\beta_4-\beta_1)(\beta_2-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1} & (\beta_4-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1} & \ldots & (\beta_n-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\
(\beta_n-\beta_1)(\beta_2-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1} & (\beta_n-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1} & \ldots & (\beta_n-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon n}+D_{\varepsilon 1}
\end{vmatrix}
\tag{3.51}
$$

Для існування єдиного розв'язку системи (3.50) необхідно, щоб її визначник (3.51) був відмінний від нуля

$$\Delta_n \neq 0. \tag{3.52}$$

Знайдемо достатні умови на фінансові показники активів портфеля, за яких виконується нерівність (3.52). Зокрема, при *n=2* визначник Δ_2 зводиться до однієї компоненти

$$\Delta_2=(\beta_2-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon 2}+D_{\varepsilon 1}. \tag{3.53}$$

Оскільки кожен з доданків у правій частині рівності (3.53) невід'ємний, то

$$\Delta_2 \geq 0, \tag{3.54}$$

причому нерівність (3.54) може перетворитися у рівність лише у винятковому випадку, коли бета-коефіцієнти обох активів рівні між собою

$$\beta_2=\beta_1 \tag{3.55}$$

та залишкові дисперсії обох активів дорівнюють нулеві:

$$D_{\varepsilon 2}=D_{\varepsilon 1}=0. \tag{3.56}$$

Якщо хоч одна з рівностей (3.55) та (3.56) не виконується, то

$$\Delta_2 > 0. \tag{3.57}$$

Дослідимо спочатку визначник (3.51) у випадку, коли бета-коефіцієнти всіх активів рівні між собою:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_n. \tag{3.58}$$

За умови (3.58) структура визначника Δ_n значно спрощується:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} & \ldots & D_{\varepsilon 1} \\ D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} & \ldots & D_{\varepsilon 1} \\ D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 4} + D_{\varepsilon 1} & \ldots & D_{\varepsilon 1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} & \ldots & D_{\varepsilon n} + D_{\varepsilon 1} \end{vmatrix}. \tag{3.59}$$

Якщо у визначнику (3.59) від кожного стовпчика, починаючи з другого, відняти перший, то отримаємо визначник, значна частина компонент якого будуть нульовими:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1} & -D_{\varepsilon 2} & -D_{\varepsilon 2} & \ldots & -D_{\varepsilon 2} \\ D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 3} & 0 & \ldots & 0 \\ D_{\varepsilon 1} & 0 & D_{\varepsilon 4} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D_{\varepsilon 1} & 0 & 0 & \ldots & D_{\varepsilon n} \end{vmatrix}. \tag{3.60}$$

Визначник (3.60) можна записати у вигляді лінійної комбінації двох визначників (n-2)-го порядку:

$$\Delta_n = -D_{\varepsilon 1} \begin{vmatrix} -D_{\varepsilon 2} & -D_{\varepsilon 2} & \ldots & -D_{\varepsilon 2} \\ 0 & D_{\varepsilon 4} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & D_{\varepsilon n} \end{vmatrix} + D_{\varepsilon 3} \begin{vmatrix} D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1} & -D_{\varepsilon 2} & \ldots & -D_{\varepsilon 2} \\ D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 4} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D_{\varepsilon 1} & 0 & \ldots & D_{\varepsilon n} \end{vmatrix}. \tag{3.61}$$

Обидва визначники в сумі (3.61) легко обчислюються:

$$\Delta_n = D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2} D_{\varepsilon 4} \ldots D_{\varepsilon n} + (D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1}) D_{\varepsilon 3} D_{\varepsilon 4} \ldots D_{\varepsilon n} + D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2} D_{\varepsilon 3} D_{\varepsilon 5} \ldots D_{\varepsilon n} + \ldots$$
$$+ D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2} D_{\varepsilon 3} \ldots D_{\varepsilon (n-1)} = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1,\, j \neq i}^{n} D_{\varepsilon j}. \tag{3.62}$$

Оскільки дисперсія – величина невід’ємна, то визначник (3.62) теж невід’ємний і може перетворитися в нуль тільки у виключному випадку, коли залишкові дисперсії всіх активів дорівнюють нулю.

Аналогічно перетворимо визначник (3.51) у випадку різних бета-коефіцієнтів:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} (\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1} & (\beta_3-\beta_2)(\beta_2-\beta_1)D_m - D_{\varepsilon 2} & \dots & (\beta_n-\beta_2)(\beta_2-\beta_1)D_m - D_{\varepsilon 2} \\ (\beta_3-\beta_1)(\beta_2-\beta_1)D_m + D_{\varepsilon 1} & (\beta_3-\beta_1)(\beta_3-\beta_2)D_m + D_{\varepsilon 3} & \dots & (\beta_n-\beta_2)(\beta_3-\beta_1)D_m \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ (\beta_n-\beta_1)(\beta_2-\beta_1)D_m + D_{\varepsilon 1} & (\beta_n-\beta_1)(\beta_3-\beta_2)D_m & \dots & (\beta_n-\beta_1)(\beta_n-\beta_2)D_m + D_{\varepsilon n} \end{vmatrix}.$$

(3.63)

Якщо $\beta_1 \neq \beta_2, \beta_3 \neq \beta_2, \beta_4 \neq \beta_2 \dots \beta_{n1} \neq \beta_2$, то

$$\Delta_n = (\beta_2-\beta_1)\prod_{j=3}^{n}(\beta_j-\beta_2)\times$$

$$\begin{vmatrix} (\beta_2-\beta_1)D_m + (D_{\varepsilon 2}+D_{\varepsilon 1})(\beta_2-\beta_1)^{-1} & (\beta_2-\beta_1)D_m - D_{\varepsilon 2}(\beta_3-\beta_2)^{-1} & \cdots & (\beta_2-\beta_1)D_m - D_{\varepsilon 2}(\beta_n-\beta_2)^{-1} \\ (\beta_3-\beta_1)D_m + D_{\varepsilon 1}(\beta_2-\beta_1)^{-1} & (\beta_3-\beta_1)D_m + D_{\varepsilon 3}(\beta_3-\beta_2)^{-1} & \cdots & (\beta_3-\beta_1)D_m \\ (\beta_4-\beta_1)D_m + D_{\varepsilon 1}(\beta_2-\beta_1)^{-1} & (\beta_4-\beta_1)D_m & \cdots & (\beta_4-\beta_1)D_m \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ (\beta_n-\beta_1)D_m + D_{\varepsilon 1}(\beta_2-\beta_1)^{-1} & (\beta_n-\beta_1)D_m & \cdots & (\beta_n-\beta_1)D_m + D_{\varepsilon n}(\beta_n-\beta_2)^{-1} \end{vmatrix}.$$

(3.64)

Якщо крім того $\beta_3 \neq \beta_1, \beta_4 \neq \beta_1 \dots \beta_n \neq \beta_1$, то з кожного r-го $(r=\overline{1,n-1})$ рядка можна винести множник $(\beta_{r+1}-\beta_1)$. У результаті отримаємо визначник, значна частина компонент якого рівні між собою і дорівнюють дисперсії ринкового портфеля D_m.

$$\Delta_n = (\beta_2-\beta_1)^2\prod_{j=3}^{n}(\beta_j-\beta_2)(\beta_j-\beta_1)\times$$

$$\times\begin{vmatrix} D_m + (D_{\varepsilon 2}+D_{\varepsilon 1})(\beta_2-\beta_1)^{-2} & D_m - D_{\varepsilon 2}(\beta_3-\beta_2)^{-1}(\beta_2-\beta_1)^{-1} & \cdots & D_m - D_{\varepsilon 2}(\beta_n-\beta_2)^{-1}(\beta_2-\beta_1)^{-1} \\ D_m + D_{\varepsilon 1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}(\beta_3-\beta_1)^{-1} & D_m + D_{\varepsilon 3}(\beta_3-\beta_1)^{-1}(\beta_3-\beta_2)^{-1} & \cdots & D_m \\ D_m + D_{\varepsilon 1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}(\beta_4-\beta_1)^{-1} & D_m & \cdots & D_m \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ D_m + D_{\varepsilon 1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}(\beta_n-\beta_1)^{-1} & D_m & \cdots & D_m + D_{\varepsilon n}(\beta_n-\beta_2)^{-1}(\beta_n-\beta_1)^{-1} \end{vmatrix}$$

(3.65)

Якщо у визначнику (3.65) від кожного рядка, починаючи з третього, відняти другий, то отримаємо:

$$\frac{\Delta_n}{(\beta_2-\beta_1)^2\prod_{j=3}^{n}(\beta_j-\beta_2)(\beta_j-\beta_1)}=\delta_n=$$

$$\begin{vmatrix} D_m+(D_{\varepsilon2}+D_{\varepsilon1})(\beta_2-\beta_1)^{-2} & D_m-D_{\varepsilon2}(\beta_3-\beta_2)^{-1}(\beta_2-\beta_1)^{-1} & \cdots D_m-D_{\varepsilon2}(\beta_n-\beta_2)^{-1}(\beta_2-\beta_1)^{-1} \\ D_m+D_{\varepsilon1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}(\beta_3-\beta_1)^{-1} & D_m+D_{\varepsilon3}(\beta_3-\beta_1)^{-1}(\beta_3-\beta_2)^{-1} & \cdots \quad D_m \\ D_{\varepsilon1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}\left((\beta_4-\beta_1)^{-1}-(\beta_3-\beta_1)^{-1}\right) & -D_{\varepsilon3}(\beta_3-\beta_2)^{-1}(\beta_3-\beta_1)^{-1} & \cdots \quad 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ D_{\varepsilon1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}\left((\beta_n-\beta_1)^{-1}-(\beta_3-\beta_1)^{-1}\right) & -D_{\varepsilon3}(\beta_3-\beta_2)^{-1}(\beta_3-\beta_1)^{-1} & \cdots \quad D_{\varepsilon n}(\beta_n-\beta_2)^{-1}(\beta_n-\beta_1)^{-1} \end{vmatrix}$$

(3.66)

У цьому визначнику всі елементи, крім головної діагоналі, першого та другого рядків, першого та другого стовпчиків, нульові.

Отриманий визначник зручно записати у вигляді лінійної комбінації трьох визначників (n-2)-го порядку, скориставшись правилом Лапласа розкладу за компонентами останнього стовпця:

$$\Delta_n=(\beta_2-\beta_1)^2\prod_{j=3}^{n}\left((\beta_j-\beta_2)(\beta_j-\beta_1)\right)\left((-1)^n(D_m-D_{\varepsilon2}(\beta_n-\beta_2)^{-1}(\beta_2-\beta_1)^{-1})M_{1,n-1}\right.$$
$$\left.+(-1)^{n-1}D_mM_{2,n-1}+D_{\varepsilon n}(\beta_n-\beta_2)^{-1}(\beta_n-\beta_1)^{-1}M_{n-1,n-1}\right)$$

де $M_{1,n-1},M_{2,n-1},M_{n-1,n-1}$ мінори (n-2)-го порядку:

$$M_{1,n-1}=\begin{vmatrix} D_m+D_{\varepsilon1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}(\beta_3-\beta_1)^{-1} & D_m+D_{\varepsilon3}(\beta_3-\beta_1)^{-1}(\beta_3-\beta_2)^{-1} & \cdots \quad D_m \\ D_{\varepsilon1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}\left((\beta_4-\beta_1)^{-1}-(\beta_3-\beta_1)^{-1}\right) & -D_{\varepsilon3}(\beta_3-\beta_2)^{-1}(\beta_3-\beta_1)^{-1} & \cdots \quad 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ D_{\varepsilon1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}\left((\beta_{n-1}-\beta_1)^{-1}-(\beta_3-\beta_1)^{-1}\right) & -D_{\varepsilon3}(\beta_3-\beta_2)^{-1}(\beta_3-\beta_1)^{-1} & \cdots D_{\varepsilon,n-1}(\beta_{n-1}-\beta_2)^{-1}(\beta_{n-1}-\beta_1)^{-1} \\ D_{\varepsilon1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}\left((\beta_n-\beta_1)^{-1}-(\beta_3-\beta_1)^{-1}\right) & -D_{\varepsilon3}(\beta_3-\beta_2)^{-1}(\beta_3-\beta_1)^{-1} & \cdots \quad 0 \end{vmatrix}$$

,

(3.67)

$$M_{2,n-1}=\begin{vmatrix} D_m+(D_{\varepsilon2}+D_{\varepsilon1})(\beta_2-\beta_1)^{-2} & D_m-D_{\varepsilon2}(\beta_3-\beta_2)^{-1}(\beta_2-\beta_1)^{-1} & \cdots D_m-D_{\varepsilon2}(\beta_n-\beta_2)^{-1}(\beta_2-\beta_1)^{-1} \\ D_{\varepsilon1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}\left((\beta_4-\beta_1)^{-1}-(\beta_3-\beta_1)^{-1}\right) & -D_{\varepsilon3}(\beta_3-\beta_2)^{-1}(\beta_3-\beta_1)^{-1} & \cdots \quad 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ D_{\varepsilon1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}\left((\beta_{n-1}-\beta_1)^{-1}-(\beta_3-\beta_1)^{-1}\right) & -D_{\varepsilon3}(\beta_3-\beta_2)^{-1}(\beta_3-\beta_1)^{-1} & \cdots D_{\varepsilon,n-1}(\beta_{n-1}-\beta_2)^{-1}(\beta_{n-1}-\beta_1)^{-1} \\ D_{\varepsilon1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}\left((\beta_n-\beta_1)^{-1}-(\beta_3-\beta_1)^{-1}\right) & -D_{\varepsilon3}(\beta_3-\beta_2)^{-1}(\beta_3-\beta_1)^{-1} & \cdots \quad 0 \end{vmatrix}$$

,

(3.68)

$$M_{n-1,n-1}=\begin{vmatrix} D_m+(D_{\varepsilon 2}+D_{\varepsilon 1})(\beta_2-\beta_1)^{-2} & D_m-D_{\varepsilon 2}(\beta_3-\beta_2)^{-1}(\beta_2-\beta_1)^{-1} & \cdots & D_m-D_{\varepsilon 2}(\beta_{n-1}-\beta_2)^{-1}(\beta_2-\beta_1)^{-1} \\ D_m+D_{\varepsilon 1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}-(\beta_3-\beta_1)^{-1} & D_m+D_{\varepsilon 3}(\beta_3-\beta_1)^{-1}(\beta_3-\beta_2)^{-1} & \cdots & D_m \\ D_{\varepsilon 1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}\left[(\beta_4-\beta_1)^{-1}(\beta_3-\beta_1)^{-1}\right] & -D_{\varepsilon 3}(\beta_3-\beta_2)^{-1}(\beta_3-\beta_1)^{-1} & \cdots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ D_{\varepsilon 1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}\left[(\beta_{n-1}-\beta_1)^{-1}-(\beta_3-\beta_1)^{-1}\right] & -D_{\varepsilon 3}(\beta_3-\beta_2)^{-1}(\beta_3-\beta_1)^{-1} & \cdots & D_{\varepsilon,n-1}(\beta_{n-1}-\beta_2)^{-1}(\beta_{n-1}-\beta_1)^{-1} \end{vmatrix}.$$

(3.69)

Мінори (3.67) та (3.68) містять нульові елементи скрізь, крім першого рядка, першого та другого стовпчика і елементів над головною діагоналлю. Для збільшення кількості нульових компонентів у цих мінорах, можна від їх рядків, з 2-го по (n-3)-й, відняти останній (n-2)-й рядок:

$$M_{1,n-1}=\begin{vmatrix} D_m+D_{\varepsilon 1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}(\beta_3-\beta_1)^{-1} & D_m+D_{\varepsilon 3}(\beta_3-\beta_1)^{-1}(\beta_3-\beta_2)^{-1} & \cdots & D_m \\ D_{\varepsilon 1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}\left[(\beta_4-\beta_1)^{-1}-(\beta_n-\beta_1)^{-1}\right] & 0 & \cdots & 0 \\ D_{\varepsilon 1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}\left[(\beta_5-\beta_1)^{-1}-(\beta_n-\beta_1)^{-1}\right] & 0 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ D_{\varepsilon 1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}\left[(\beta_{n-1}-\beta_1)^{-1}-(\beta_n-\beta_1)^{-1}\right] & 0 & \cdots & D_{\varepsilon,n-1}(\beta_{n-1}-\beta_2)^{-1}(\beta_{n-1}-\beta_1)^{-1} \\ D_{\varepsilon 1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}\left[(\beta_n-\beta_1)^{-1}-(\beta_3-\beta_1)^{-1}\right] & -D_{\varepsilon 3}(\beta_3-\beta_2)^{-1}(\beta_3-\beta_1)^{-1} & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

(3.70)

Мінор (3.70) має таку структуру:

$$M_{1,n-1}=\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & \cdots & a_{1,n-2} \\ a_{2,1} & 0 & a_{2,3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{3,1} & 0 & 0 & a_{3,4} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{4,1} & 0 & 0 & 0 & a_{4,5} & \cdots & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}. \qquad (3.71)$$

Визначник (3.71) після розкладу його за елементами першого стовпця обчислюється таким чином:

$$M_{1,n-1} = a_{1,1}\begin{vmatrix} 0 & a_{2,3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,4} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,5} & \cdots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-3,n-2} \\ a_{n-2,2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} - a_{2,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & \cdots & a_{1,n-2} \\ 0 & 0 & a_{3,4} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,5} & \cdots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-3,n-2} \\ a_{n-2,2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{3,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & \cdots & a_{1,n-2} \\ 0 & a_{2,3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,5} & \cdots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n-2,2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n-2} a_{n-3,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & \cdots & a_{1,n-2} \\ 0 & a_{2,3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,4} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,5} & \cdots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n-2,2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{n-1} a_{n-2,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & \cdots & a_{1,n-2} \\ 0 & a_{2,3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,4} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,5} & \cdots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-3,n-2} \end{vmatrix} = (-1)^n a_{1,1} \cdot a_{n-2,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,4} \cdot a_{4,5} \cdots a_{n-3,n-2} -$$

$$\begin{gathered} -(-1)^n a_{2,1} \cdot a_{n-2,2} \cdot a_{1,3} \cdot a_{3,4} \cdot a_{4,5} \cdots a_{n-3,n-2} - (-1)^n a_{3,1} \cdot a_{n-2,2} \cdot a_{1,4} \cdot a_{2,3} \cdot a_{4,5} \cdots a_{n-3,n-2} - \\ -(-1)^n a_{n-3,1} \cdot a_{n-2,2} \cdot a_{1,n-2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,4} \cdot a_{4,5} \cdots a_{n-4,n-3} - (-1)^n a_{n-2,1} \cdot a_{1,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,4} \cdot a_{4,5} \cdots a_{n-3,n-2}. \end{gathered} \quad (3.72)$$

Формулу (3.72) можна зобразити через показники ризику активів портфеля:

$$\begin{gathered} M_{1,n-1} = (-1)^n (D_m + D_{\varepsilon 1}(\beta_2 - \beta_1)^{-1}(\beta_3 - \beta_1)^{-1})(-D_{\varepsilon 3}(\beta_3 - \beta_2)^{-1}(\beta_3 - \beta_1)^{-1})(D_{\varepsilon 4}(\beta_4 - \beta_2)^{-1}(\beta_4 - \beta_1)^{-1}) \times \\ \times (D_{\varepsilon 5}(\beta_5 - \beta_2)^{-1}(\beta_5 - \beta_1)^{-1}) \cdots (D_{\varepsilon (n-1)}(\beta_{n-1} - \beta_2)^{-1}(\beta_{n-1} - \beta_1)^{-1}) - (-1)^n D_{\varepsilon 1}(\beta_2 - \beta_1)^{-1}((\beta_4 - \beta_1)^{-1} - \\ -(\beta_n - \beta_1)^{-1})(-D_{\varepsilon 3}(\beta_3 - \beta_2)^{-1}(\beta_3 - \beta_1)^{-1})(D_m D_{\varepsilon 5}(\beta_5 - \beta_2)^{-1}(\beta_5 - \beta_1)^{-1})(D_{\varepsilon 6}(\beta_6 - \beta_2)^{-1}(\beta_6 - \beta_1)^{-1}) \cdots \end{gathered}$$

$$\cdots(D_{\varepsilon(n-1)}(\beta_{n-1}-\beta_2)^{-1}(\beta_{n-1}-\beta_1)^{-1})-(-1)^n D_{\varepsilon1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}((\beta_5-\beta_1)^{-1}(\beta_n-\beta_1)^{-1})(-D_{\varepsilon3}(\beta_3-\beta_2)^{-1}\times$$
$$\times(\beta_3-\beta_1)^{-1})D_m D_{\varepsilon4}(\beta_4-\beta_2)^{-1}(\beta_4-\beta_1)^{-1}(D_{\varepsilon6}(\beta_6-\beta_2)^{-1}(\beta_6-\beta_1)^{-1})\cdots D_{\varepsilon(n-1)}(\beta_{n-1}-\beta_2)^{-1}(\beta_{n-1}-\beta_1)^{-1}-$$
$$\cdots-(-1)^n D_{\varepsilon1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}((\beta_{n-1}-\beta_1)^{-1}-(\beta_n-\beta_1)^{-1})(-D_{\varepsilon3}(\beta_3-\beta_2)^{-1}(\beta_3-\beta_1)^{-1})D_m D_{\varepsilon4}(\beta_4-\beta_2)^{-1}\times$$

$$\times(\beta_4-\beta_1)^{-1}(D_{\varepsilon5}(\beta_5-\beta_2)^{-1}(\beta_5-\beta_1)^{-1})(D_{\varepsilon6}(\beta_6-\beta_2)^{-1}(\beta_6-\beta_1)^{-1})\cdots D_{\varepsilon(n-2)}(\beta_{n-2}-\beta_2)^{-1}(\beta_{n-2}-\beta_1)^{-1}-$$
$$-(-1)^n D_{\varepsilon1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}((\beta_n-\beta_1)^{-1}-(\beta_3-\beta_1)^{-1})(D_m+D_{\varepsilon3}(\beta_3-\beta_2)^{-1}(\beta_3-\beta_1)^{-1})(D_{\varepsilon4}(\beta_4-\beta_2)^{-1}\times$$
$$\times(\beta_4-\beta_1)^{-1})(D_{\varepsilon5}(\beta_5-\beta_2)^{-1}(\beta_5-\beta_1)^{-1})\cdots(D_{\varepsilon(n-1)}(\beta_{n-1}-\beta_2)^{-1}(\beta_{n-1}-\beta_1)^{-1}).$$

(3.73)

Використавши знаки сум та добутків, формулу (3.73) можна записати в більш стислій формі:

$$M_{1,n-1}=(-1)^{n-1}(D_m+D_{\varepsilon1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}(\beta_3-\beta_1)^{-1})\prod_{j=3}^{n-1}((\beta_j-\beta_2)(\beta_j-\beta_1)^{-1})+(-1)^n D_m\times$$
$$\times\sum_{k=4}^{n-1}\left(\prod_{j=3,j\neq k}^{n-1}(D_{\varepsilon j}((\beta_j-\beta_2)(\beta_j-\beta_1))^{-1})D_{\varepsilon1}((\beta_k-\beta_1)^{-1}-(\beta_n-\beta_1)^{-1})(\beta_2-\beta_1)^{-1}\right)+(-1)^{n-1}D_{\varepsilon1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}\times$$
$$\times((\beta_n-\beta_1)^{-1}-(\beta_3-\beta_1)^{-1})(D_m+D_{\varepsilon3}(\beta_3-\beta_2)^{-1}(\beta_3-\beta_1)^{-1})\prod_{j=4}^{n-1}(D_{\varepsilon j}((\beta_j-\beta_2)(\beta_j-\beta_1))^{-1}).$$

(3.74)

Аналогічно обчислюється і мінор $M_{2,n-1}$:

$$M_{2,n-1}=(-1)^n(D_m+(D_{\varepsilon2}+D_{\varepsilon1})(\beta_2-\beta_1)^{-2})(-D_{\varepsilon3}(\beta_3-\beta_2)^{-1}(\beta_3-\beta_1)^{-1})(D_{\varepsilon4}(\beta_4-\beta_2)^{-1}(\beta_4-\beta_1)^{-1})\times$$
$$\times(D_{\varepsilon5}(\beta_5-\beta_2)^{-1}(\beta_5-\beta_1)^{-1})\cdots(D_{\varepsilon(n-1)}(\beta_{n-1}-\beta_2)^{-1}(\beta_{n-1}-\beta_1)^{-1})-(-1)^n D_{\varepsilon1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}((\beta_4-\beta_1)^{-1}-$$
$$-(\beta_n-\beta_1)^{-1})(-D_{\varepsilon3}(\beta_3-\beta_2)^{-1}(\beta_3-\beta_1)^{-1})(D_m-D_{\varepsilon2}(\beta_4-\beta_2)^{-1}(\beta_2-\beta_1)^{-1})(D_{\varepsilon5}(\beta_5-\beta_2)^{-1}(\beta_5-\beta_1)^{-1})\times$$

$$\times(D_{\varepsilon6}(\beta_6-\beta_2)^{-1}(\beta_6-\beta_1)^{-1})\cdots(D_{\varepsilon(n-1)}(\beta_{n-1}-\beta_2)^{-1}(\beta_{n-1}-\beta_1)^{-1})-(-1)^n D_{\varepsilon1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}((\beta_5-\beta_1)^{-1}-$$
$$-(\beta_n-\beta_1)^{-1})(-D_{\varepsilon3}(\beta_3-\beta_2)^{-1}(\beta_3-\beta_1)^{-1})(D_m-D_{\varepsilon2}(\beta_5-\beta_2)^{-1}(\beta_2-\beta_1)^{-1})(D_{\varepsilon4}(\beta_4-\beta_2)^{-1}(\beta_4-\beta_1)^{-1})\times$$
$$\times(D_{\varepsilon6}(\beta_6-\beta_2)^{-1}(\beta_6-\beta_1)^{-1})\cdots D_{\varepsilon(n-1)}(\beta_{n-1}-\beta_2)^{-1}(\beta_{n-1}-\beta_1)^{-1}-\cdots-(-1)^n D_{\varepsilon1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}((\beta_{n-1}-\beta_1)^{-1}-$$
$$-(\beta_n-\beta_1)^{-1})(-D_{\varepsilon3}(\beta_3-\beta_2)^{-1}(\beta_3-\beta_1)^{-1})(D_m-D_{\varepsilon2}(\beta_{n-1}-\beta_2)^{-1}(\beta_2-\beta_1)^{-1})(D_{\varepsilon4}(\beta_4-\beta_2)^{-1}\times$$
$$\times(\beta_4-\beta_1)^{-1}(D_{\varepsilon5}(\beta_5-\beta_2)^{-1}(\beta_5-\beta_1)^{-1})(D_{\varepsilon6}(\beta_6-\beta_2)^{-1}(\beta_6-\beta_1)^{-1})\cdots D_{\varepsilon(n-2)}(\beta_{n-2}-\beta_2)^{-1}(\beta_{n-2}-\beta_1)^{-1}-$$
$$-(-1)^n D_{\varepsilon1}(\beta_2-\beta_1)^{-1}((\beta_n-\beta_1)^{-1}-(\beta_3-\beta_1)^{-1})(D_m-D_{\varepsilon2}(\beta_3-\beta_2)^{-1}(\beta_2-\beta_{11})^{-1})(D_{\varepsilon4}(\beta_4-\beta_2)^{-1}\times$$
$$\times(\beta_4-\beta_1)^{-1})(D_{\varepsilon5}(\beta_5-\beta_2)^{-1}(\beta_5-\beta_1)^{-1})\cdots(D_{\varepsilon(n-1)}(\beta_{n-1}-\beta_2)^{-1}(\beta_{n-1}-\beta_1)^{-1}).$$

(3.75)

Легко бачити, що мінор $M_{n-1,n-1}$ має таку ж структуру як і визначник δ_n, тільки на порядок менший. На основі формул (3.66), (3.74) та (3.75) отримується рекурентна формула обчислення визначника δ_n:

$$\delta_n = (-1)^n (D_m - D_{\varepsilon 2}(\beta_n - \beta_2)^{-1}(\beta_2 - \beta_1)^{-1}) M_{1,n-1} + (-1)^{n-1} D_m M_{2,n-1} + D_{\varepsilon n}(\beta_n - \beta_2)^{-1}(\beta_n - \beta_1)^{-1}\delta_{n-1}$$
.

(3.76)

Отже, користуючись формулою (3.76), можна послідовно зменшувати розмірність визначника, який потрібно обчислити, аж до другого порядку.

Тому доцільно дослідити систему (3.50) при невеликих значеннях n – кількості активів у портфелі. Розглянемо спочатку випадок n=2. Модель Шарпа для двох активів дещо складніша, ніж модель Марковіца, оскільки залежить від п'ятьох різних параметрів $(\beta_1, D_{\varepsilon 1}, \beta_2, D_{\varepsilon 2}, D_m)$, в той час, коли модель Марковіца залежить лише від трьох параметрів $(D_1, D_2, \rho_{1,2})$. Система (3.50) в цьому випадку зводиться до одного рівняння:

$$(D_{\varepsilon 2} + (\beta_2 - \beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1})x_2 = D_{\varepsilon 1} - \beta_1 D_m (\beta_2 - \beta_1). \qquad (3.77)$$

Рівняння (3.77) за умови (3.57) має розв’язок:

$$x_2 = \frac{D_{\varepsilon 1} - \beta_1 D_m (\beta_2 - \beta_1)}{D_{\varepsilon 2} + (\beta_2 - \beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1}} \ , \qquad (3.78)$$

якщо розв’язок (3.78) задовольняє нерівності

$$D_{\varepsilon 1} > \beta_1 D_m (\beta_2 - \beta_1) \qquad (3.79)$$

та $\quad \beta_1(\beta_1 - \beta_2) D_m \le D_{\varepsilon 2} + (\beta_2 - \beta_1)^2 D_m,$ (3.80)

то цей розв’язок є точкою екстремуму функції (3.47) при n = 2.

Щоб визначити, чи значення x_2, обчислене за формулою (3.78) є точкою мінімуму, чи максимуму функції (3.47), обчислимо її похідну другого порядку

$$\frac{\partial^2 d(x_2)}{\partial x_2^2} = 2(\beta_2 - \beta_1)^2 D_m + 2D_{\varepsilon 1} + 2D_{\varepsilon 2} > 0. \qquad (3.81)$$

Додатність похідної другого порядку означає, що значення (3.78) є точкою мінімуму дисперсії портфеля. Підставивши формулу (3.78) у функцію (3.47), отримаємо мінімально можливе значення дисперсії

$$\min d(x_2) = \left(\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) \frac{D_{\varepsilon 1} - \beta_1 D_m (\beta_2 - \beta_1)}{D_{\varepsilon 2} + (\beta_2 - \beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1}} \right)^2 D_m + \left(1 - \frac{D_{\varepsilon 1} - \beta_1 D_m (\beta_2 - \beta_1)}{D_{\varepsilon 2} + (\beta_2 - \beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1}} \right)^2 D_{\varepsilon 1} +$$

$$+ \left(\frac{D_{\varepsilon 1} - \beta_1 D_m (\beta_2 - \beta_1)}{D_{\varepsilon 2} + (\beta_2 - \beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1}} \right)^2 D_{\varepsilon 2} \,.$$

Щойно отриману формулу можна дещо спростити :

$$\min d(x_2) = \frac{((\beta_1 D_{\varepsilon 2} + \beta_2 D_{\varepsilon 1})^2 D_m + (D_{\varepsilon 2} - \beta_2 (\beta_1 - \beta_2) D_m)^2 D_{\varepsilon 1} + (D_{\varepsilon 1} - \beta_1 (\beta_2 - \beta_1) D_m)^2 D_{\varepsilon 2})}{(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2} + (\beta_2 - \beta_1) D_m)^2}$$

.

(3.82)

Обчислення мінімального ризику інвестиційного портфеля з двох активів (формули (3.78 – 3.80), (3.82)) наведено в таблиці 3.3. Обрахунки виконано засобами MS Excel і подано в додатку Б.3.

Таблиця 3.3

Обчислення мінімального ризику портфеля з двох активів

Систематичний ризик ринкового портфеля D_m	Залишковий ризик i-го активу $D_{\varepsilon i}$	Міра чутливості дохідності i-го активу до дохідності ринкового портфеля β_i	Частки вкладень в i-ті активи x_i	Дисперсія дохідності портфеля $\min d(x_2)$
0,03	0,005	0,7	0,651	0,028
	0,008	0,6	0,349	

При порушенні нерівності (3.79) чи (3.80) мінімально можливий ризик портфеля досягається при повному вкладенні коштів в один з активів

$$\min d(x_2) = \min\{ \beta_1^2 D_m + D_{\varepsilon 1}, \beta_2^2 D_m + D_{\varepsilon 2} \} \,. \qquad (3.83)$$

Розглянемо тепер портфель з трьох активів (n=3). І в цьому випадку модель Шарпа [183] залишається складнішою, ніж модель Марковіца [210-213]. Справді, при n=3 модель Шарпа залежить від сімох різних параметрів $\beta_1, \beta_2, \beta_3, D_{\varepsilon 1}, D_{\varepsilon 2}, D_{\varepsilon 3}, D_m$, а модель Марковіца – від шістьох

$D_1, D_2, D_3, \rho_{1,2}, \rho_{1,3}, \rho_{2,3}$. Система (3.50) в цьому випадку складається з двох рівнянь:

$$\begin{cases}(D_{\varepsilon 2}+(\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1})x_2 + ((\beta_3-\beta_1)(\beta_2-\beta_1)D_m + D_{\varepsilon 1})x_3 = D_{\varepsilon 1} - \beta_1(\beta_2-\beta_1)D_m; \\ ((\beta_3-\beta_1)(\beta_2-\beta_1)D_m + D_{\varepsilon 1})x_2 + ((\beta_3-\beta_1)^3 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 3})x_3 = D_{\varepsilon 1} - \beta_1(\beta_3-\beta_1)D_m.\end{cases}$$

(3.84)

Якщо $\Delta_2 = D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1} + (\beta_2-\beta_1)^2 D_m \neq 0$, то з першого рівняння системи (3.84) можна x_2 виразити через x_3:

$$x_2 = \frac{D_{\varepsilon 1} - \beta_1(\beta_2-\beta_1)D_m - ((\beta_3-\beta_1)(\beta_2-\beta_1)D_m + D_{\varepsilon 1})x_3}{D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1} + (\beta_2-\beta_1)^2 D_m}. \quad (3.85)$$

Підставивши (3.85) в друге рівняння системи (3.84), отримаємо рівняння з невідомою x_3:

$$\frac{((\beta_3-\beta_1)(\beta_2-\beta_1)D_m + D_{\varepsilon 1})(D_{\varepsilon 1} - \beta_1(\beta_2-\beta_1)D_m - ((\beta_3-\beta_1)(\beta_2-\beta_1)D_m + D_{\varepsilon 1})x_3}{(D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1} + (\beta_2-\beta_1)^2 D_m) + (D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 1} + (\beta_3-\beta_1)^2 D_m)x_3} = D_{\varepsilon 1} - \beta_1(\beta_3-\beta_1)D_m$$

.

(3.86)

Звівши рівняння (3.86) до спільного знаменника і перенісши вільні члени в праву частину, отримаємо таке рівняння:

$$\left[D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2} + (\beta_2-\beta_1)^2 D_m)(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 3} + (\beta_3-\beta_1)^2 D_m) - (D_{\varepsilon 1} + (\beta_3-\beta_1)(\beta_2-\beta_1)D_m)^2\right] x_3 =$$
$$= (D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2} + (\beta_2-\beta_1)^2 D_m)(D_{\varepsilon 1} - \beta_1(\beta_3-\beta_1)D_m) - (D_{\varepsilon 1} - \beta_1(\beta_2-\beta_1)D_m)((\beta_3-\beta_1)(\beta_2-\beta_1)D_m + D_{\varepsilon 1}).$$

(3.87)

Коефіцієнт біля x_3 – це визначник 2-го порядку Δ_3 системи (3.50) при n =3.

$$\Delta_3 = D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 1}(\beta_3-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 3}(\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1}(\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 2}(\beta_3-\beta_1)^2 D_m -$$
$$- 2D_{\varepsilon 1}(\beta_3-\beta_1)(\beta_2-\beta_1)D_m + D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3} = D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 1}(\beta_3-\beta_2)^2 D_m +$$
$$+ D_{\varepsilon 2}(\beta_3-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 3}(\beta_2-\beta_1)^2 D_m > 0.$$

(3.88)

На основі формул (3.87) та (3.88) обчислимо x_3:

$$x_3 = \Delta_3^{-1}(D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 1}(\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 3}\beta_1(\beta_3-\beta_1)D_m - D_{\varepsilon 2}\beta_1(\beta_3-\beta_1)D_m - \beta_1(\beta_3-\beta_1)(\beta_2-\beta_1)^2 D_m^2 -$$
$$- D_{\varepsilon 1}(\beta_3-\beta_1)(\beta_2-\beta_1)D_m + \beta_1(\beta_3-\beta_1)(\beta_2-\beta_1)^2 D_m^2 + D_{\varepsilon 1}\beta_1(\beta_2-\beta_1)D_m)$$

або після спрощень

$$x_3 = (D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + \beta_1(\beta_3-\beta_1)D_{\varepsilon 2}D_m + D_{\varepsilon 1}D_m((\beta_2-\beta_1)^2 - \beta_1(\beta_3-\beta_1) - (\beta_3-\beta_1)(\beta_2-\beta_1) + \beta_1(\beta_2-\beta_1) +$$
$$+ \beta_1(\beta_2-\beta_1))/\Delta_3;$$

$$x_3 = (D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + \beta_1(\beta_3-\beta_1)D_{\varepsilon 2}D_m + D_{\varepsilon 1}D_m(\beta_2(\beta_2-\beta_1) - \beta_2(\beta_3-\beta_1)))/\Delta_3;$$

$$x_3 = (D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2} + \beta_1(\beta_1 - \beta_3)D_{\varepsilon2}D_m + D_{\varepsilon1}D_m\beta_2(\beta_2 - \beta_3))/(D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2} + D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon3} + D_{\varepsilon2}D_{\varepsilon3} +$$
$$+ D_{\varepsilon1}(\beta_3 - \beta_2)^2 D_m + D_{\varepsilon2}(\beta_3 - \beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon3}(\beta_2 - \beta_1)^2 D_m)\,. \tag{3.89}$$

Щоб знайти розв'язок x_2 системи (3.84), підставимо формулу (3.89) у рівність (3.84):

$$x_2 = \left[D_{\varepsilon1} - \beta_1(\beta_2 - \beta_1)D_m)\Delta_3 - ((\beta_3 - \beta_1)(\beta_2 - \beta_1)D_m + D_{\varepsilon1})(D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2} + \beta_1(\beta_1 - \beta_3)D_{\varepsilon2}D_m +\right.$$
$$\left.+ \beta_2(\beta_2 - \beta_3)D_{\varepsilon1}D_m)\right]/(\Delta_3\Delta_2)\,.$$

Звідси

$$x_2 = [D_{\varepsilon1}^2D_{\varepsilon2} + D_{\varepsilon1}^2D_{\varepsilon3} + D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}D_{\varepsilon3} + D_{\varepsilon1}^2(\beta_3 - \beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}(\beta_3 - \beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon3}(\beta_2 - \beta_1)^2 D_m -$$
$$- \beta_1(\beta_2 - \beta_1)D_mD_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2} - \beta_1(\beta_2 - \beta_1)D_mD_{\varepsilon1}D_{\varepsilon3} - \beta_1(\beta_2 - \beta_1)D_mD_{\varepsilon2}D_{\varepsilon3} - \beta_1(\beta_2 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_2)^2 D_{\varepsilon1}D_m^2 -$$
$$- \beta_1(\beta_2 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_2)^2 D_{\varepsilon2}D_m^2 - \beta_1(\beta_2 - \beta_1)^3 D_{\varepsilon3}D_m^2 - \beta_1(\beta_3 - \beta_1)(\beta_2 - \beta_1)D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}D_m + \beta_1(\beta_1 - \beta_3)^2 \times$$
$$\times(\beta_2 - \beta_1)D_{\varepsilon2}D_m^2 - \beta_2(\beta_3 - \beta_1)(\beta_2 - \beta_1)(\beta_2 - \beta_3)D_{\varepsilon1}D_m^2 - D_{\varepsilon1}^2D_{\varepsilon2} - \beta_1(\beta_1 - \beta_3)D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}D_m -$$
$$- \beta_2(\beta_2 - \beta_3)D_mD_{\varepsilon1}^2]/(\Delta_3\Delta_2)\,.$$

Спростимо цю формулу

$$x_2 = \left[D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon3}(D_{\varepsilon1} + D_{\varepsilon2} + (\beta_2 - \beta_1)^2 D_m) + \beta_3(\beta_3 - \beta_2)D_{\varepsilon1}^2D_m + D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}D_m((\beta_3 - \beta_1)^2 - \beta_1(\beta_2 - \beta_1) -\right.$$
$$- (\beta_3 - \beta_1)(\beta_2 - \beta_1) - \beta_1(\beta_1 - \beta_3)) - \beta_1(\beta_2 - \beta_1)D_{\varepsilon3}D_m(D_{\varepsilon1} + D_{\varepsilon2}) - (\beta_1(\beta_2 - \beta)^3 D_{\varepsilon3}D_m^2 - D_{\varepsilon1}D_m^2 \times$$
$$\times(\beta_1(\beta_2 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_2)^2 + \beta_2(\beta_3 - \beta_1)(\beta_2 - \beta_1)(\beta_2 - \beta_3)) + D_{\varepsilon2}D_m^2(\beta_1(\beta_1 - \beta_3)^2(\beta_2 - \beta_1) - \beta_1(\beta_2 - \beta_1) \times$$
$$\left.\times(\beta_1 - \beta_3)^2)\right]/(\Delta_3\Delta_2)\,;$$

$$x_2 = \left[D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon3}(D_{\varepsilon1} + D_{\varepsilon2} + (\beta_2 - \beta_1)^2 D_m) + \beta_1(\beta_1 - \beta_2)D_{\varepsilon3}D_m(D_{\varepsilon1} + D_{\varepsilon2} + D_m(\beta_2 - \beta_1)^2) + D_{\varepsilon1}D_m(D_{\varepsilon2} \times\right.$$
$$\times\beta_3(\beta_3 - \beta_1) - \beta_3(\beta_2 - \beta_1)) + D_{\varepsilon1}\beta_3(\beta_3 - \beta_2) - D_m(\beta_2 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_2)(\beta_1(\beta_3 - \beta_2) -$$
$$\left.- \beta_2(\beta_3 - \beta_1)))\right]/(\Delta_3\Delta_2)\,;$$

$$x_2 = \left[D_{\varepsilon1} + D_{\varepsilon2} + (\beta_2 - \beta_1)^2 D_m)(D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon3} + \beta_1(\beta_1 - \beta_2)D_{\varepsilon3}D_m + D_{\varepsilon1}D_m(D_{\varepsilon2}\beta_3(\beta_3 - \beta_2) + D_{\varepsilon1}\beta_3(\beta_3 - \beta_2) +\right.$$
$$\left.+ \beta_3(\beta_3 - \beta_2)(\beta_2 - \beta_1)^2 D_m)\right]/(\Delta_3\Delta_2)\,;$$

$$x_2 = (D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon3} + \beta_1(\beta_1 - \beta_2)D_{\varepsilon3} + D_{\varepsilon1}D_m\beta_3(\beta_3 - \beta_2))/\Delta_2\,. \tag{3.90}$$

І, нарешті

$$x_1 = 1 - x_2 - x_3 = (D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2} + D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon3} + D_{\varepsilon2}D_{\varepsilon3} + D_{\varepsilon1}(\beta_3 - \beta_2)^2 D_m + D_{\varepsilon2}(\beta_3 - \beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon3}(\beta_2 - \beta_1)^2 D_m -$$
$$- D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon3} - \beta_1(\beta_1 - \beta_2)D_{\varepsilon3} - \beta_3(\beta_3 - \beta_2)D_{\varepsilon1}D_m - D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2} - \beta_1(\beta_1 - \beta_3)D_{\varepsilon2}D_m - \beta_2(\beta_2 - \beta_3)D_{\varepsilon1}D_m)/$$
$$/(D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2} + D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon3} + D_{\varepsilon2}D_{\varepsilon3} + D_{\varepsilon1}(\beta_3 - \beta_2)^2 D_m + D_{\varepsilon2}(\beta_3 - \beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon3}(\beta_2 - \beta_1)^2 D_m)\,.$$

Останню формулу можна звести до вигляду, аналогічного до (3.90):

$$x_1 = (D_{\varepsilon2}D_{\varepsilon3} + \beta_3(\beta_3 - \beta_1)D_{\varepsilon2}D_m + \beta_2(\beta_2 - \beta_1)D_{\varepsilon3}D_m)/\Delta_3\,. \tag{3.91}$$

Якщо при цьому розв’язки $x_i \quad (i=\overline{1,3})$, отримані за формулами (3.89)-(3.91), задовольняють нерівності $0 < x_i < 1,\, i=\overline{1,3}$, то точка з такими координатами задовольняє необхідні умови екстремальності дисперсії *d(x)* даного портфеля. При цьому формули (3.89)-(3.91) можна узагальнити:

$$x_i = \left(\prod_{i=1,\, j\neq i}^{3} D_{\varepsilon j} + \sum_{k=1,k\neq i}^{3} (\beta_k(\beta_k - \beta_i) D_m \prod_{r=1, r\neq k, r\neq i}^{3} D_{\varepsilon r}) \right) / \Delta_3,\ (i=\overline{1,3})\,. \tag{3.92}$$

Для дослідження достатніх умов екстремальності точки з координатами (3.92) обчислимо похідні другого порядку функції (3.47):

$$\frac{\partial^2 d(x)}{\partial x_2^2} = 2(\beta_2 - \beta_1)^2 D_m + 2D_{\varepsilon 1} + 2D_{\varepsilon 2}; \tag{3.93}$$

$$\frac{\partial^2 d(x)}{\partial x_3^2} = 2(\beta_3 - \beta_1)^2 D_m + 2D_{\varepsilon 1} + 2D_{\varepsilon 3}\,. \tag{3.94}$$

Мішана частинна похідна функції $d(x)$ при n=3 знаходиться за формулою

$$\frac{\partial^2 d(x)}{\partial x_2 \partial x_3} = 2(\beta_3 - \beta_1)(\beta_2 - \beta_1) D_m + 2D_{\varepsilon 1}\,. \tag{3.95}$$

З частинних похідних (3.93)-(3.95) побудуємо матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 2(\beta_2-\beta_1)^2 D_m + 2D_{\varepsilon 1} + 2D_{\varepsilon 2} & 2(\beta_3-\beta_1)(\beta_2-\beta_1) D_m + 2D_{\varepsilon 1} \\ 2(\beta_3-\beta_1)(\beta_2-\beta_1) D_m + 2D_{\varepsilon 1} & 2(\beta_3-\beta_1)^2 D_m + 2D_{\varepsilon 1} + 2D_{\varepsilon 3} \end{pmatrix}. \tag{3.96}$$

Головний мінор першого порядку матриці (3.96) додатний:

$$A_1 = 2(\beta_2 - \beta_1)^2 D_m + 2D_{\varepsilon 1} + 2D_{\varepsilon 2} > 0\,. \tag{3.97}$$

Головний мінор другого порядку матриці A, тобто її визначник також додатний. Справді,

$$A_2 = \det A = 4\{(\beta_2-\beta_1)^2(\beta_3-\beta_1)^2 D_m^2 + D_{\varepsilon 1}^2 + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3} + (\beta_2-\beta_1)^2(D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 3})D_m +$$
$$+ (\beta_3-\beta_1)^2(D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})D_m - (\beta_3-\beta_1)^2(\beta_2-\beta_1)^2 D_m^2 - 2(\beta_3-\beta_1)(\beta_2-\beta_1)D_{\varepsilon 1}D_m\};$$

$$A_2 = 4\{D_{\varepsilon 1}^2 + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 1}D_m(\beta_2-\beta_3)^2 + D_{\varepsilon 2}(\beta_3-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 3}(\beta_2-\beta_1)^2 D_m\} > 0\,. \tag{3.98}$$

Додатність головних мінорів матриці A є достатньою умовою того, що частки вкладів $x_i \quad (i=\overline{1,3})$, обчислені за формулою (3.92) забезпечують мінімальне значення дисперсії портфеля.

Це мінімальне значення можна отримати на основі формул (3.46), (3.88) та (3.92):

$$\min d(x)=\left[\left(\sum_{i=1}^{3}\left(\beta_i\left(\prod_{j=1,\,j\neq i}^{3}D_{\varepsilon j}+\sum_{k=1,k\neq i}^{3}(\beta_k(\beta_k-\beta_i)D_m\prod_{r=1,r\neq k,r\neq i}^{3}D_{\varepsilon r}\right)\right)\right)^2+\sum_{i=1}^{3}D_{\varepsilon i}\left(\prod_{j=1,\,j\neq i}^{3}D_{\varepsilon j}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=1,k\neq i}^{3}(\beta_k(\beta_k-\beta_i)D_m\prod_{r=1,r\neq k,r\neq i}^{3}D_{\varepsilon r})\right)^2\right]\Bigg/\left(\sum_{i=1}^{3}\prod_{j=1,\,j\neq i}^{3}D_{\varepsilon j}+D_m(D_{\varepsilon 1}(\beta_3-\beta_2)^2+D_{\varepsilon 2}(\beta_3-\beta_1)^2+D_{\varepsilon 3}(\beta_3-\beta_1)^2)\right)^2.$$

(3.99)

Якщо хоча би одне зі значень (3.92) не задовольняє нерівності $0 < x_i < 1$, це означає, що мінімум дисперсії портфеля може бути досягнутим за умови вилучення з портфеля одного з активів, а тоді задача зводиться до вже розгляненої раніше задачі портфеля з двох активів.

Починаючи з n =4 модель Шарпа стає простішою, ніж модель Марковіца. Справді, якщо n=4, то в моделі Шарпа розглядається 9 параметрів $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,D_{\varepsilon 1},D_{\varepsilon 2},D_{\varepsilon 3},D_{\varepsilon 4},D_m)$, а в моделі Марковіца 10 параметрів $(D_1,D_2,D_3,D_4,\rho_{12},\rho_{13},\rho_{14},\rho_{23},\rho_{24},\rho_{34})$.

Система (3.50) складається в цьому випадку з трьох рівнянь:

$$\begin{cases}((\beta_2-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon 2}+D_{\varepsilon 1})x_2+((\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1})x_3+((\beta_2-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1})x_4=\\ \quad =D_{\varepsilon 1}-\beta_1D_m(\beta_2-\beta_1);\\ ((\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1})x_2+((\beta_3-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon 3}+D_{\varepsilon 1})x_3+((\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1})x_4=\\ \quad =D_{\varepsilon 1}-\beta_1D_m(\beta_3-\beta_1);\\ ((\beta_2-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1})x_2+((\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1})x_3+((\beta_4-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon 4}+D_{\varepsilon 1})x_4=\\ \quad =D_{\varepsilon 1}-\beta_1D_m(\beta_4-\beta_1).\end{cases}$$

(3.100)

Головний визначник системи (3.100) має вигляд:

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}(\beta_2-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon 2}+D_{\varepsilon 1} & (\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1} & (\beta_2-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1}\\ (\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1} & (\beta_3-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon 3}+D_{\varepsilon 1} & (\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1}\\ (\beta_2-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1} & (\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1} & (\beta_4-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon 4}+D_{\varepsilon 1}\end{vmatrix}.$$

(3.101)

Обчислимо його

$$\Delta_4 = ((\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1})(\,(\beta_3-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 1})((\beta_4-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 4} + D_{\varepsilon 1}) + 2((\beta_2-\beta_1)\times$$
$$\times(\beta_3-\beta_1)D_m + D_{\varepsilon 1})((\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)D_m + D_{\varepsilon 1})((\beta_2-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)D_m + D_{\varepsilon 1}) - (\,(\beta_2-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)\times$$
$$\times D_m + D_{\varepsilon 1})^2((\beta_3-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 1}) - (\,(\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_m + D_{\varepsilon 1})^2((\beta_4-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 4} + D_{\varepsilon 1}) -$$
$$-(\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)D_m + D_{\varepsilon 1})^2((\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1})\,.$$

Частково розкриваючи дужки, отримаємо:

$$\Delta_4 = (\beta_2-\beta_1)^2(\beta_3-\beta_1)^2 D_m^2(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) + (\beta_2-\beta_1)^2(\beta_4-\beta_1)^2 D_m^2(D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 1}) + (\beta_3-\beta_1)^2(\beta_4-\beta_1)^2 D_m^2\times$$
$$\times(D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1}) + (\beta_2-\beta_1)^2 D_m(D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 1})(D_{\varepsilon 4} + D_{\varepsilon 1}) + (\beta_3-\beta_1)^2 D_m(D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1})(D_{\varepsilon 4} + D_{\varepsilon 1}) +$$
$$+(\beta_4-\beta_1)^2 D_m(D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1})(D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 1}) + (D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1})(D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 1})(D_{\varepsilon 4} + D_{\varepsilon 1}) + 2[(\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)^2\times$$
$$\times(\beta_4-\beta_1) + (\beta_3-\beta_1)(\beta_2-\beta_1)^2(\beta_4-\beta_1) + (\beta_2-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)^2(\beta_3-\beta_1)]D_m^2 D_{\varepsilon 1} + 2[(\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1) +$$
$$+(\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) + (\beta_2-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)]D_m D_{\varepsilon 1}^2 + 2D_{\varepsilon 1}^3 - (\beta_2-\beta_1)^2(\beta_4-\beta_1)^2 D_m^2(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 3}) - 2(\beta_2-\beta_1)\times$$
$$\times(\beta_3-\beta_1)^2(\beta_4-\beta_1)D_m^2 D_{\varepsilon 1} - 2(\beta_2-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)D_m D_{\varepsilon 3}(D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 1}) - (\beta_3-\beta_1)^2 D_m D_{\varepsilon 1}^2 - D_{\varepsilon 1}^2(D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 1}) -$$
$$-(\beta_2-\beta_1)^2(\beta_3-\beta_1)^2 D_m^2(D_{\varepsilon 4} + D_{\varepsilon 1}) - 2(\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)^2 D_m^2 D_{\varepsilon 1} - 2(\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_m\times$$
$$\times D_{\varepsilon 1}(D_{\varepsilon 4} + D_{\varepsilon 1}) - (\beta_4-\beta_1)^2 D_{\varepsilon 1}^2 D_m - D_{\varepsilon 1}^2(D_{\varepsilon 4} + D_{\varepsilon 1}) - (\beta_3-\beta_1)^2(\beta_4-\beta_1)^2 D_m(D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1}) - 2(\beta_3-\beta_1)\times$$
$$\times(\beta_2-\beta_1)^2(\beta_4-\beta_1)D_m^2 D_{\varepsilon 1} - 2(\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)D_m D_{\varepsilon 1}(D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1}) - (\beta_2-\beta_1)^2 D_m D_{\varepsilon 1}^2 - D_{\varepsilon 1}^2(D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1}).$$

З'ясуємо спочатку, чому дорівнює Δ_4 за умови

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4\,. \tag{3.102}$$

Легко переконатися, що при рівності всіх бета-коефіцієнтів визначник Δ_4 залежить тільки від залишкових дисперсій дохідностей активів:

$$\Delta_4 = (D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1})(D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 1})(D_{\varepsilon 4} + D_{\varepsilon 1}) + 2D_{\varepsilon 1}^3 - D_{\varepsilon 1}^2(D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 1}) - D_{\varepsilon 1}^2(D_{\varepsilon 4} + D_{\varepsilon 1}) - D_{\varepsilon 1}^2(D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1})$$
.

Розкриваючи дужки, отримаємо

$$\Delta_4 = \sum_{i=1}^{4}\prod_{k=1,k\neq i}^{4} D_{\varepsilon k}\,. \tag{3.103}$$

Якщо умова (3.102) не виконується, то визначник Δ_4 можна зобразити у вигляді лінійної функції від дисперсії ринкового портфеля D_m

$$\Delta_4 = kD_m + \sum_{i=1}^{4}\prod_{k=1,k\neq i}^{4} D_{\varepsilon k}\,. \tag{3.104}$$

Обчислимо коефіцієнт k у формулі (3.104):

$$k=(\beta_2-\beta_1)^2(D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon4}+D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon3}+D_{\varepsilon3}D_{\varepsilon4})+(\beta_3-\beta_1)^2(D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}+D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon4}+D_{\varepsilon2}D_{\varepsilon4})+(\beta_4-\beta_1)^2(D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}+$$
$$+D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon3}+D_{\varepsilon2}D_{\varepsilon3})-2(\beta_2-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon3}-2(\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon4}-2(\beta_3-\beta_1)\times$$
$$\times(\beta_4-\beta_1)D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}\,.$$

Звідси,

$$k=(\beta_3-\beta_2)^2D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon4}+(\beta_4-\beta_2)^2D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon3}+(\beta_2-\beta_1)^2D_{\varepsilon3}D_{\varepsilon4}+(\beta_4-\beta_3)^2D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}+(\beta_3-\beta_1)^2D_{\varepsilon2}D_{\varepsilon4}+$$
$$+(\beta_4-\beta_1)^2D_{\varepsilon2}D_{\varepsilon3}\,.$$

Підставивши цей коефіцієнт у формулу (3.99), отримаємо визначник

$$\Delta_4=\sum_{i>j=1}^{4}(\beta_i-\beta_j)^2D_m\prod_{k=1,k\neq i,k\neq j}^{4}D_{\varepsilon k}+\sum_{i=1}^{4}\prod_{k=1,k\neq i}^{4}D_{\varepsilon k}\,. \qquad (3.105)$$

Як видно з формули (3.105), отриманий визначник додатний, а, отже, система (3.100) сумісна і має єдиний розв'язок. Для його знаходження обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} D_{\varepsilon1}-\beta_1(\beta_2-\beta_1)D_m & (\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon1} & (\beta_2-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon1} \\ D_{\varepsilon1}-\beta_1(\beta_3-\beta_1)D_m & (\beta_3-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon3}+D_{\varepsilon1} & (\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon1} \\ D_{\varepsilon1}-\beta_1(\beta_4-\beta_1)D_m & (\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon1} & (\beta_4-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon4}+D_{\varepsilon1} \end{vmatrix}$$

Розглядаючи визначник Δ_{x_2} як многочлен третього степеня від D_m:

$$\Delta_{x_2}=C_1D_m^3+C_2D_m^2+C_3D_m+C_4\,, \qquad (3.106)$$

обчислимо коефіцієнти цього многочлена

$$C_1=\begin{vmatrix} -\beta_1(\beta_2-\beta_1) & (\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1) & (\beta_2-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) \\ -\beta_1(\beta_3-\beta_1) & (\beta_3-\beta_1)^2 & (\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) \\ -\beta_1(\beta_4-\beta_1) & (\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) & (\beta_4-\beta_1)^2 \end{vmatrix};$$

$$C_1=-\beta_1(\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)\begin{vmatrix} 1 & \beta_3-\beta_1 & \beta_4-\beta_1 \\ 1 & \beta_3-\beta_1 & \beta_4-\beta_1 \\ 1 & \beta_3-\beta_1 & \beta_4-\beta_1 \end{vmatrix}.$$

Останній визначник має всі однакові рядки, а, отже, дорівнює нулеві: $C_1=0$.

Коефіцієнт біля D_m^2 можна зобразити у вигляді суми трьох детермінантів:

$$C_2=\begin{vmatrix} D_{\varepsilon1} & (\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1) & (\beta_2-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) \\ D_{\varepsilon1} & (\beta_3-\beta_1)^2 & (\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) \\ D_{\varepsilon1} & (\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) & (\beta_4-\beta_1)^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -\beta_1(\beta_2-\beta_1) & D_{\varepsilon1} & (\beta_2-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) \\ -\beta_1(\beta_3-\beta_1) & D_{\varepsilon3}+D_{\varepsilon1} & (\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) \\ -\beta_1(\beta_4-\beta_1) & D_{\varepsilon1} & (\beta_4-\beta_1)^2 \end{vmatrix}+$$
$$+\begin{vmatrix} -\beta_1(\beta_2-\beta_1) & (\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1) & D_{\varepsilon1} \\ -\beta_1(\beta_3-\beta_1) & (\beta_3-\beta_1)^2 & D_{\varepsilon1} \\ -\beta_1(\beta_4-\beta_1) & (\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) & D_{\varepsilon4}+D_{\varepsilon1} \end{vmatrix};$$

$$C_2=(\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)D_{\varepsilon1}\begin{vmatrix} 1 & \beta_2-\beta_1 & \beta_2-\beta_1 \\ 1 & \beta_3-\beta_1 & \beta_3-\beta_1 \\ 1 & \beta_4-\beta_1 & \beta_4-\beta_1 \end{vmatrix}+\beta_1(\beta_1-\beta_4)\begin{vmatrix} \beta_2-\beta_1 & D_{\varepsilon1} & \beta_2-\beta_1 \\ \beta_3-\beta_1 & D_{\varepsilon3}+D_{\varepsilon1} & \beta_3-\beta_1 \\ \beta_4-\beta_1 & D_{\varepsilon1} & \beta_4-\beta_1 \end{vmatrix}+$$
$$+\beta_1(\beta_1-\beta_3)\begin{vmatrix} \beta_2-\beta_1 & \beta_2-\beta_1 & D_{\varepsilon1} \\ \beta_3-\beta_1 & \beta_3-\beta_1 & D_{\varepsilon1} \\ \beta_4-\beta_1 & \beta_4-\beta_1 & D_{\varepsilon4}+D_{\varepsilon1} \end{vmatrix}.$$

Кожен з визначників в останній формулі має по два однакові стовпчики, а, отже, коефіцієнт C_2=0.

Коефіцієнт C_3 також можна подати у вигляді суми трьох визначників:

$$C_3=\begin{vmatrix} -\beta_1(\beta_2-\beta_1) & D_{\varepsilon1} & D_{\varepsilon1} \\ -\beta_1(\beta_3-\beta_1) & D_{\varepsilon3}+D_{\varepsilon1} & D_{\varepsilon1} \\ -\beta_1(\beta_4-\beta_1) & D_{\varepsilon1} & D_{\varepsilon4}+D_{\varepsilon1} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} D_{\varepsilon1} & (\beta_2-\beta_1(\beta_3-\beta_1) & D_{\varepsilon1} \\ D_{\varepsilon1} & (\beta_3-\beta_1)^2 & D_{\varepsilon1} \\ D_{\varepsilon1} & (\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) & D_{\varepsilon4}+D_{\varepsilon1} \end{vmatrix}+$$
$$+;\begin{vmatrix} D_{\varepsilon1} & D_{\varepsilon1} & (\beta_2-\beta_1(\beta_4-\beta_1) \\ D_{\varepsilon1} & D_{\varepsilon3}+D_{\varepsilon1} & (\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) \\ D_{\varepsilon1} & D_{\varepsilon1} & (\beta_4-\beta_1)^2 \end{vmatrix}.$$

Кожен з визначників у цій системі зводиться до визначника другого порядку, якщо в першому з них від другого стовпчика відняти третій, в другому від третього відняти перший, а в третьому від другого стовпчика відняти перший.

$$C_3=-\beta_1D_{\varepsilon3}\begin{vmatrix} \beta_2-\beta_1 & D_{\varepsilon1} \\ \beta_4-\beta_1 & D_{\varepsilon1} \end{vmatrix}+(\beta_3-\beta_1)D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon4}\begin{vmatrix} 1 & \beta_2-\beta_1 \\ 1 & \beta_3-\beta_1 \end{vmatrix}+(\beta_4-\beta_1)D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon3}\begin{vmatrix} 1 & \beta_2-\beta_1 \\ 1 & \beta_4-\beta_1 \end{vmatrix}-$$
$$-D_{\varepsilon4}D_{\varepsilon3}\beta_1(\beta_2-\beta_1)+\beta_1(\beta_3-\beta_2)D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon4};$$

$$C_3=(\beta_4-\beta_2)D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon3}+\beta_3(\beta_3-\beta_2)D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon4}+\beta_1(\beta_1-\beta_2)D_{\varepsilon3}D_{\varepsilon4}.$$

І, нарешті, доданок C_4 у формулі (3.106) обчислюється за наступною формулою:

$$C_4 = \begin{vmatrix} D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} \\ D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 3} & D_{\varepsilon 1} \\ D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 4} \end{vmatrix}.$$

Спростимо цей визначник:

$$C_4 = D_{\varepsilon 1} \begin{vmatrix} 1 & D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} \\ 0 & D_{\varepsilon 3} & 0 \\ 0 & 0 & D_{\varepsilon 4} \end{vmatrix}.$$

Звідси $C_4 = D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 3} D_{\varepsilon 4}$. Отже,

$$\Delta_{x_2} = (\beta_4(\beta_4 - \beta_1) D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 3} + \beta_3(\beta_3 - \beta_2) D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 4} + \beta_1(\beta_1 - \beta_2) D_{\varepsilon 3} D_{\varepsilon 4}) D_m + D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 3} D_{\varepsilon 4}. \quad (3.107)$$

Визначник Δ_{x_3} знайдемо за формулою:

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} (\beta_2 - \beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} - \beta_1(\beta_2 - \beta_1) D_m & (\beta_2 - \beta_1)(\beta_4 - \beta_1) D_m + D_{\varepsilon 1} \\ (\beta_2 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_1) D_m + D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} - \beta_1(\beta_3 - \beta_1) D_m & (\beta_3 - \beta_1)(\beta_4 - \beta_1) D_m + D_{\varepsilon 1} \\ (\beta_2 - \beta_1)(\beta_4 - \beta_1) D_m + D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} - \beta_1(\beta_4 - \beta_1) D_m & (\beta_4 - \beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 4} + D_{\varepsilon 1} \end{vmatrix}.$$

Аналогічно як і для Δ_{x_2} обчислимо цей визначник у вигляді полінома за степенями D_m:

$$\Delta_{x_3} = a_1 D_m^3 + a_2 D_m^2 + a_3 D_m + a_4.$$

Знайдемо коефіцієнт a_1:

$$a_1 = \begin{vmatrix} (\beta_2 - \beta_1)^2 & -\beta_1(\beta_2 - \beta_1) & (\beta_2 - \beta_1)(\beta_4 - \beta_1) \\ (\beta_2 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_1) & -\beta_1(\beta_3 - \beta_1) & (\beta_3 - \beta_1)(\beta_4 - \beta_1) \\ (\beta_2 - \beta_1)(\beta_4 - \beta_1) & -\beta_1(\beta_4 - \beta_1) & (\beta_4 - \beta_1)^2 \end{vmatrix};$$

$$a_1 = (\beta_2 - \beta_1)(-\beta_1)(\beta_4 - \beta_1) \begin{vmatrix} \beta_2 - \beta_1 & \beta_2 - \beta_1 & \beta_2 - \beta_1 \\ \beta_3 - \beta_1 & \beta_3 - \beta_1 & \beta_3 - \beta_1 \\ \beta_4 - \beta_1 & \beta_4 - \beta_1 & \beta_4 - \beta_1 \end{vmatrix}.$$

Отже, a_1=0.

$$a_2 = \begin{vmatrix} (\beta_2-\beta_1)^2 & -\beta_1(\beta_2-\beta_1) & D_{\varepsilon 1} \\ (\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1) & -\beta_1(\beta_3-\beta_1) & D_{\varepsilon 1} \\ (\beta_2-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) & -\beta_1(\beta_4-\beta_1) & D_{\varepsilon 4}+D_{\varepsilon 1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\beta_2-\beta_1)^2 & D_{\varepsilon 1} & (\beta_2-\beta_1(\beta_2-\beta_1) \\ (\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1) & D_{\varepsilon 1} & (\beta_3-\beta_1(\beta_3-\beta_1) \\ (\beta_2-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) & D_{\varepsilon 1} & (\beta_4-\beta_1)^2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} D_{\varepsilon 2}+D_{\varepsilon 1} & -\beta_1(\beta_2-\beta_1) & (\beta_2-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) \\ D_{\varepsilon 1} & -\beta_1(\beta_3-\beta_1) & (\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) \\ D_{\varepsilon 1} & -\beta_1(\beta_4-\beta_1) & (\beta_4-\beta_1)^2 \end{vmatrix}.$$

Доведемо, що кожен з визначників у цій сумі перетворюється в нуль. Справді,

$$a_2 = -\beta_1(\beta_2-\beta_1)\begin{vmatrix} \beta_2-\beta_1 & \beta_2-\beta_1 & D_{\varepsilon 1} \\ \beta_3-\beta_1 & \beta_3-\beta_1 & D_{\varepsilon 1} \\ \beta_4-\beta_1 & \beta_4-\beta_1 & D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 4} \end{vmatrix} + (\beta_2-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)\begin{vmatrix} \beta_2-\beta_1 & D_{\varepsilon 1} & \beta_2-\beta_1 \\ \beta_3-\beta_1 & D_{\varepsilon 1} & \beta_3-\beta_1 \\ \beta_4-\beta_1 & D_{\varepsilon 1} & \beta_4-\beta_1 \end{vmatrix} -$$

$$-\beta_1(\beta_4-\beta_1)\begin{vmatrix} D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2} & \beta_2-\beta_1 & \beta_2-\beta_1 \\ D_{\varepsilon 1} & \beta_3-\beta_1 & \beta_3-\beta_1 \\ D_{\varepsilon 1} & \beta_4-\beta_1 & \beta_4-\beta_1 \end{vmatrix},$$

тобто в першому визначнику перший та другий стовпчик однакові, в другому всі рядки рівні між собою, а в третьому другий та третій стовпчики рівні між собою. Отже, a_2=0.

Обчислимо a_3:

$$a_3 = \begin{vmatrix} (\beta_2-\beta_1)^2 & D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} \\ (\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1) & D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} \\ (\beta_2-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) & D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2} & -\beta_1(\beta_2-\beta_1) & D_{\varepsilon 1} \\ D_{\varepsilon 1} & -\beta_1(\beta_3-\beta_1) & D_{\varepsilon 1} \\ D_{\varepsilon 1} & -\beta_1)(\beta_4-\beta_1) & D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 4} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2} & D_{\varepsilon 1} & (\beta_2-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) \\ D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} & (\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) \\ D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} & (\beta_4-\beta_1)^2 \end{vmatrix}.$$

Звідси

$$a_3 = D_{\varepsilon 4}\begin{vmatrix} (\beta_2-\beta_1)^2 & D_{\varepsilon 1} \\ (\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1) & D_{\varepsilon 1}\end{vmatrix} + D_{\varepsilon 2}\begin{vmatrix} -\beta_1(\beta_3-\beta_1) & D_{\varepsilon 1} \\ -\beta_1(\beta_4-\beta_1) & D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 4}\end{vmatrix} - D_{\varepsilon 4}\begin{vmatrix} -\beta_1(\beta_2-\beta_1) & D_{\varepsilon 1} \\ -\beta_1(\beta_3-\beta_1) & D_{\varepsilon 1}\end{vmatrix} +$$

$$+ D_{\varepsilon 2}\begin{vmatrix} D_{\varepsilon 1} & (\beta_4-\beta_1)(\beta_3-\beta_1) \\ D_{\varepsilon 1} & (\beta_4-\beta_1)^2\end{vmatrix}.$$

$$a_3 = (\beta_2-\beta_1)(\beta_2-\beta_3)D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 4} - \beta_1(\beta_3-\beta_4)D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + \beta_1(\beta_2-\beta_3)D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 4} + (\beta_4-\beta_1)(\beta_4-\beta_3)D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} -$$

$$-\beta_1(\beta_3-\beta_1)D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 4};$$

$$a_3 = \beta_2(\beta_2-\beta_3)D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 4} - \beta_1(\beta_3-\beta_4)D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + (\beta_4-\beta_1)(\beta_4-\beta_3)D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + \beta_1(\beta_1-\beta_2)D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 4};$$

$$a_3 = \beta_2(\beta_2-\beta_3)D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 4} + \beta_4(\beta_4-\beta_3)D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + \beta_1(\beta_1-\beta_3)D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 4}.$$

Доданок, що не залежить від дисперсії ринкового портфеля, D_m має вигляд:

$$a_4 = \begin{vmatrix} D_{\varepsilon 2}+D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} \\ D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} \\ D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 4}+D_{\varepsilon 1}\end{vmatrix}.$$

Віднявши від першого і третього стовпчика другий, отримаємо:

$$a_4 = \begin{vmatrix} D_{\varepsilon 2} & D_{\varepsilon 1} & 0 \\ 0 & D_{\varepsilon 1} & 0 \\ 0 & D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 4}\end{vmatrix}.$$

Звідси $a_4 = D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 4}$.

Отже,

$$\Delta_{x_3} = (\beta_2(\beta_2-\beta_3)D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 4} + \beta_4(\beta_4-\beta_3)D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + \beta_1(\beta_1-\beta_3)D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 4})D_m + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 4}.$$

(3.108)

Останній допоміжний визначник Δ_{x_4} обчислюємо аналогічно:

$$\Delta_{x_4} = \begin{vmatrix} (\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2} & (\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_m + D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} - \beta_1(\beta_2-\beta_1)D_m \\ (\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_m + D_{\varepsilon 1} & (\beta_3-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 3} & D_{\varepsilon 1} - \beta_1(\beta_3-\beta_1)D_m \\ (\beta_2-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)D_m + D_{\varepsilon 1} & (\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)D_m + D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} - \beta_1(\beta_4-\beta_1)D_m \end{vmatrix}.$$

Коефіцієнт біля третього степеня D_m обчислюється як визначник

$$\begin{vmatrix} (\beta_2-\beta_1)^2 & (\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1) & -\beta_1(\beta_2-\beta_1) \\ (\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1) & (\beta_3-\beta_1)^2 & -\beta_1(\beta_3-\beta_1) \\ (\beta_2-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) & (\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) & -\beta_1(\beta_4-\beta_1) \end{vmatrix} =$$

$$= -\beta_1(\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)\begin{vmatrix} \beta_2-\beta_1 & \beta_2-\beta_1 & \beta_2-\beta_1 \\ \beta_3-\beta_1 & \beta_3-\beta_1 & \beta_3-\beta_1 \\ \beta_4-\beta_1 & \beta_4-\beta_1 & \beta_4-\beta_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Коефіцієнт біля другого степеня D_m теж нульовий:

$$\begin{vmatrix} (\beta_2-\beta_1)^2 & (\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1) & D_{\varepsilon 1} \\ (\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1) & (\beta_3-\beta_1)^2 & D_{\varepsilon 1} \\ (\beta_2-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) & (\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) & D_{\varepsilon 1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\beta_2-\beta_1)^2 & D_{\varepsilon 1} & -\beta_1(\beta_2-\beta_1) \\ (\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1) & D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 3} & -\beta_1(\beta_3-\beta_1) \\ (\beta_2-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) & D_{\varepsilon 1} & -\beta_1(\beta_4-\beta_1) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 3} & (\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1) & -\beta_1(\beta_2-\beta_1) \\ D_{\varepsilon 1} & (\beta_3-\beta_1)^2 & -\beta_1(\beta_3-\beta_1) \\ D_{\varepsilon 1} & (\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) & -\beta_1(\beta_4-\beta_1) \end{vmatrix} = (\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)\begin{vmatrix} \beta_2-\beta_1 & \beta_2-\beta_1 & D_{\varepsilon 1} \\ \beta_3-\beta_1 & \beta_3-\beta_1 & D_{\varepsilon 1} \\ \beta_4-\beta_1 & \beta_4-\beta_1 & D_{\varepsilon 1} \end{vmatrix} +$$

$$+(\beta_2-\beta_1)(-\beta_1)\begin{vmatrix} \beta_2-\beta_1 & D_{\varepsilon 1} & \beta_2-\beta_1 \\ \beta_3-\beta_1 & D_{\varepsilon 11}+D_{\varepsilon 3} & \beta_3-\beta_1 \\ \beta_4-\beta_1 & D_{\varepsilon 1} & \beta_4-\beta_1 \end{vmatrix} + (\beta_3-\beta_1)(-\beta_1)\begin{vmatrix} D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2} & \beta_2-\beta_1 & \beta_2-\beta_1 \\ D_{\varepsilon 1} & \beta_3-\beta_1 & \beta_3-\beta_1 \\ D_{\varepsilon 1} & \beta_4-\beta_1 & \beta_4-\beta_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Знайдемо коефіцієнт біля першого степеня D_m:

$$\begin{vmatrix} (\beta_2-\beta_1)^2 & D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} \\ (\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1) & D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 3} & D_{\varepsilon 1} \\ (\beta_2-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) & D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 3} & (\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1) & D_{\varepsilon 1} \\ D_{\varepsilon 1} & (\beta_3-\beta_1)^2 & D_{\varepsilon 1} \\ D_{\varepsilon 1} & (\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) & D_{\varepsilon 1} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2} & D_{\varepsilon 1} & -\beta_1)(\beta_2-\beta_1) \\ D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 3} & -\beta_1(\beta_3-\beta_1) \\ D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} & -\beta_1(\beta_4-\beta_1) \end{vmatrix} = D_{\varepsilon 3}\begin{vmatrix} (\beta_2-\beta_1)^2 & D_{\varepsilon 1} \\ (\beta_2-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) & D_{\varepsilon 1} \end{vmatrix} + D_{\varepsilon 2}\begin{vmatrix} (\beta_3-\beta_1)^2 & D_{\varepsilon 1} \\ (\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) & D_{\varepsilon 1} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} D_{\varepsilon 2} & D_{\varepsilon 1} & -\beta_1(\beta_2-\beta_1) \\ -D_{\varepsilon 3} & D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 3} & -\beta_1(\beta_3-\beta_1) \\ 0 & D_{\varepsilon 1} & -\beta_1(\beta_4-\beta_1) \end{vmatrix} = (\beta_2-\beta_1)(\beta_2-\beta_4)D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + (\beta_3-\beta_1)(\beta_3-\beta_4)D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} - \beta_1 D_{\varepsilon 2} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 3} & \beta_3-\beta_1 \\ D_{\varepsilon 1} & \beta_4-\beta_1 \end{vmatrix} - \beta_1 D_{\varepsilon 3}\begin{vmatrix} D_{\varepsilon 1} & \beta_2-\beta_1 \\ D_{\varepsilon 1} & \beta_4-\beta_1 \end{vmatrix} = \beta_2(\beta_2-\beta_4)D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + \beta_3(\beta_3-\beta_4)D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + \beta_1(\beta_1-\beta_4)D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3}.$$

Доданок, що не залежить від D_m :

$$\begin{vmatrix} D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2} & D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} \\ D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 3} & D_{\varepsilon 1} \\ D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2} & D_{\varepsilon 1} & D_{\varepsilon 1} \\ -D_{\varepsilon 2} & D_{\varepsilon 3} & 0 \\ -D_{\varepsilon 2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3}.$$

Таким чином,

$$\Delta_{x_4} = (\beta_2(\beta_2 - \beta_4)D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + \beta_3(\beta_3 - \beta_4)D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + \beta_1(\beta_1 - \beta_4)D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3})D_m + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3}. \quad (3.109)$$

Узагальнюючи формули (3.107)-(3.109), отримаємо:

$$\Delta_{x_i} = \prod_{j=1,\, j\neq i}^{4} D_{\varepsilon j} + D_m \sum_{j=1,\, j\neq i}^{4} \left(\beta_j (\beta_j - \beta_i) \prod_{k=1, k\neq i, k\neq j}^{4} D_{\varepsilon k} \right),\ (i = \overline{2,4}). \quad (3.110)$$

Враховуючи формулу (3.105) за правилом Крамера знайдемо розв’язок системи (3.100).

$$x_i = \frac{\prod\limits_{j=1,\, j\neq i}^{4} D_{\varepsilon j} + D_m \sum\limits_{j=1,\, j\neq i}^{4} \left(\beta_j (\beta_j - \beta_i) \prod\limits_{k=1, k\neq i, k\neq j}^{4} D_{\varepsilon k} \right)}{\sum\limits_{r>j=1}^{4} (\beta_r - \beta_j)^2 D_m \prod\limits_{k=1, k\neq r, k\neq j}^{4} D_{\varepsilon k} + \sum\limits_{r=1}^{4} \prod\limits_{k=1, k\neq r}^{4} D_{\varepsilon k}}. \quad (3.111)$$

Проведене в цьому підрозділі дослідження дозволяє визначити частки вкладень (3.111) в активи портфеля, які забезпечують його мінімально можливий ризик (згідно з моделлю Шарпа), абстрагуючись від рівня його дохідності. Слід наголосити, що особливої ваги дана модель набуває у тих випадках, коли особа, що приймає управлінські рішення, щодо формування інвестиційного портфеля не схильна до ризику і зменшення ризику для неї є більш привабливим, ніж максимізація дохідності, тобто ОПР готова піти навіть на зменшення дохідності заради зменшення ризику.

3.2.2. Максимізація дохідності портфеля при заданому рівні ризику.

Дисперсія портфеля згідно з моделлю Шарпа [183] обчислюється за формулою:

$$D_p = \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \right)^2 D_m + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 D_{\varepsilon i}\,, \tag{3.112}$$

або виходячи з того, що

$$x_1 = 1 - \sum_{k=2}^{n} x_k \tag{3.113}$$

співвідношення (3.112) можна записати так:

$$D_p = \left(\beta_1 + \sum_{j=2}^{n} (\beta_j - \beta_1) x_j \right)^2 D_m + \left(1 - \sum_{k=2}^{n} x_k \right)^2 D_{\varepsilon 1} + \sum_{i=2}^{n} x_i^2 D_{\varepsilon i}\,. \tag{3.114}$$

При заданому рівні дохідності

$$\mu_p = \mu_1 + \sum_{j=2}^{n} (\mu_j - \mu_1) x_j \tag{3.115}$$

співвідношення (3.115) можна записати, виключивши частку x_2 вкладення коштів у другий актив

$$D_p = \left(\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) \frac{\mu_p - \mu_1 - \sum_{j=3}^{n} (\mu_j - \mu_1) x_j}{\mu_2 - \mu_1} - \sum_{j=3}^{n} (\beta_j - \beta_1) x_j \right)^2 D_m + \left(1 - \frac{\mu_p - \mu_1 - \sum_{j=3}^{n} (\mu_j - \mu_1) x_j}{\mu_2 - \mu_1} - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=3}^{n} x_i \right)^2 D_{\varepsilon 1} + \left(\frac{\mu_p - \mu_1 - \sum_{j=3}^{n} (\mu_j - \mu_1) x_j}{\mu_2 - \mu_1} \right)^2 D_{\varepsilon 2} + \sum_{j=3}^{n} x_j^2 D_{\varepsilon j}\,.$$

(3.116)

Обчислимо частинні похідні функції D_p за змінними $x_i \quad (i = \overline{3, n})$:

$$\frac{\partial D_p}{\partial x_i}=2\left(\beta_1+(\beta_2-\beta_1)\frac{\mu_p-\mu_1-\sum_{j=3}^{n}(\mu_j-\mu_1)x_i}{\mu_2-\mu_1}+\sum_{j=3}^{n}(\beta_j-\beta_1)x_j\right)\left(\beta_i-\beta_1-(\beta_2-\beta_1)\frac{\mu_i-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}\right)D_m+$$

$$+2\left(1-\frac{\mu_p-\mu_1-\sum_{j=3}^{n}(\mu_j-\mu_1)x_j}{\mu_2-\mu_1}-\sum_{j=3}^{n}x_j\right)\frac{\mu_i-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}D_{\varepsilon 1}-2\left(\mu_p-\mu_1-\sum_{j=3}^{n}(\mu_j-\mu_1)x_j\right)\frac{\mu_i-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}D_{\varepsilon 2}+2x_iD_{\varepsilon i}.$$

(3.117)

Прирівнявши отримані похідні до нуля і розв’язавши отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь, можна знайти частки коштів $x_i \quad (i=\overline{3,n})$, які мінімізують ризик портфеля при заданій дохідності (3.115). Обернена задача полягає в максимізації дохідності портфеля (3.115) при заданому рівні ризику (3.114). Для того щоб виразити величину x_2 з рівняння (3.114), запишемо його в такому вигляді:

$$((\beta_2-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})x_2^2+2[(\beta_2-\beta_1)(\beta_1+\sum_{j=3}^{n}(\beta_j-\beta_1)x_j)D_m-(1-\sum_{j=3}^{n}x_j)D_{\varepsilon 1}]x_2+$$

$$+(\beta_1+\sum_{j=3}^{n}(\beta_j-\beta_1)x_j)^2D_m+(1-\sum_{j=3}^{n}x_j)^2D_{\varepsilon 1}+\sum_{j=3}^{n}x_j^2D_{\varepsilon j}-D_p=0.$$

(3.118)

Отримане рівняння (3.118) має дійсні розв’язки, якщо виконується нерівність:

$$D=[(\beta_2-\beta_1)(\beta_1+\sum_{j=3}^{n}(\beta_j-\beta_1)x_j)D_m-(1-\sum_{j=3}^{n}x_j)D_{\varepsilon 1}]^2-((\beta_2-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})[(\beta_1+$$

$$+\sum_{j=3}^{n}(\beta_j-\beta_1)x_j)^2D_m+(1-\sum_{j=3}^{n}x_j)^2D_{\varepsilon 1}+\sum_{j=3}^{n}x_j^2D_{\varepsilon j}-D_p]\geq 0.$$

(3.119)

За умови (3.119) рівняння (3.118) має розв’язок:

$$x_2 = \Bigg(-[(\beta_2-\beta_1)(\beta_1+\sum_{j=3}^{n}(\beta_j-\beta_1)x_j)D_m-(1-\sum_{j=3}^{n}x_j)D_{\varepsilon 1}]+([(\beta_2-\beta_1)(\beta_1+\sum_{j=3}^{n}(\beta_j-\beta_1)x_j)D_m-$$

$$-(1-\sum_{j=3}^{n}x_j)D_{\varepsilon 1}]^2-((\beta_2-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})[(\beta_1+\sum_{j=3}^{n}(\beta_j-\beta_1)x_j)^2D_m+(1-\sum_{j=3}^{n}x_j)^2D_{\varepsilon 1}+$$

$$+\sum_{j=3}^{n}x_j^2D_{\varepsilon j}-D_p])^{\frac{1}{2}}\Bigg)/\left((\beta_2-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2}\right)$$

(3.120)

Якщо розв’язок (3.120) є числом в межах від 0 до 1, то дохідність портфеля можна виразити формулою:

$$\mu_p=\mu_1+\sum_{j=3}^{n}(\mu_j-\mu_1)x_j+(\mu_2-\mu_1)(-[(\beta_2-\beta_1)(\beta_1+\sum_{j=3}^{n}(\beta_j-\beta_1)x_j)D_m-(1-\sum_{j=3}^{n}x_j)D_{\varepsilon 1}]+$$

$$+([(\beta_2-\beta_1)(\beta_1+\sum_{j=3}^{n}(\beta_j-\beta_1)x_j)D_m-(1-\sum_{j=3}^{n}x_j)D_{\varepsilon 1}]^2-((\beta_2-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})\times$$

$$\times[(\beta_1+\sum_{j=3}^{n}(\beta_j-\beta_1)x_j)^2D_m-(1-\sum_{j=3}^{n}x_j)^2D_{\varepsilon 1}+\sum_{j=3}^{n}x_j^2D_{\varepsilon 1}-D_p])^{\frac{1}{2}})/((\beta_2-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})\,.$$

(3.121)

Функція (3.121) має (n-2) незалежні змінні $x_i \quad (i=\overline{3,n})$ та (3n+2) параметри: $\mu_i,\,\beta_i\ (i=\overline{1,n}),\,D_{\varepsilon i}\ (i=\overline{1,n}),\,D_m,\,D_p$. Для дослідження критичних точок функції (3.121) обчислимо її частинні похідні за змінними $x_i \quad (i=\overline{3,n})$:

$$\frac{\partial\mu_p}{\partial x_i}=\mu_i-\mu_1+\frac{(\mu_2-\mu_1)}{(\beta_2-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2}}(-(\beta_2-\beta_1)(\beta_i-\beta_1)D_m-D_{\varepsilon 1}+([(\beta_2-\beta_1)(\beta_1+\sum_{j=3}^{n}(\beta_j-\beta_1)x_j\times$$

$$\times D_m-(1-\sum_{j=3}^{n}x_j)D_{\varepsilon 1}]^2-((\beta_2-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})[(\beta_1+\sum_{j=3}^{n}(\beta_j-\beta_1)x_j)^2D_m+(1-\sum_{j=3}^{n}x_j)^2D_{\varepsilon 1}+$$

$$+\sum_{j=3}^{n}x_j^2D_{\varepsilon j}-D_p])^{-\frac{1}{2}}(((\beta_2-\beta_1)(\beta_i-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1})[(\beta_2-\beta_1)(\beta_1+\sum_{j=3}^{n}(\beta_j-\beta_1)x_j)D_m-(1-\sum_{j=3}^{n}x_j)D_{\varepsilon 1}]-$$

$$-((\beta_2-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})[(\beta_j-\beta_1)(\beta_1+\sum_{j=3}^{n}(\beta_j-\beta_1)x_j)D_m-(1-\sum_{j=3}^{n}x_j)D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon i}x_i])),$$

(3.122)

якщо дискримінант (3.119) додатний.

Прирівнявши отримані похідні до нуля, отримаємо систему з (n-2)-х ірраціональних рівнянь

$$
\begin{aligned}
&(\mu_i-\mu_1)((\beta_2-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})+(\mu_2-\mu_1)((((\beta_2-\beta_1)(\beta_i-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1})[(\beta_2-\beta_1)(\beta_1+\\
&\quad+\sum_{j=3}^{n}(\beta_j-\beta_1)x_j)D_m-(1-\sum_{j=3}^{n}x_j)D_{\varepsilon 1}]-((\beta_2-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})[(\beta_j-\beta_1)(\beta_1+\sum_{j=3}^{n}(\beta_j-\beta_1)x_j)\times\\
&\quad\times D_m-(1-\sum_{j=3}^{n}x_j)D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon i}x_i])([[(\beta_2-\beta_1)(\beta_1+\sum_{j=3}^{n}(\beta_j-\beta_1)x_j)D_m-(1-\sum_{j=3}^{n}x_j)D_{\varepsilon 1}]^2-((\beta_2-\beta_1)^2 D_m+\\
&\quad+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})[(\beta_1+\sum_{j=3}^{n}(\beta_j-\beta_1)x_j)^2 D_m+(1-\sum_{j=3}^{n}x_j)^2 D_{\varepsilon 1}+\sum_{j=3}^{n}x_j^2 D_{\varepsilon j}-D_p])^{-\frac{1}{2}}-(\beta_2-\beta_1)(\beta_i-\beta_1)D_m-\\
&\quad-D_{\varepsilon 1})=0,\qquad (i=\overline{3,n}).
\end{aligned}
\tag{3.123}
$$

Розглянемо спочатку випадок портфеля з *n*=3 активів. Система (3.123) складається тепер з одного рівняння:

$$
\begin{aligned}
&(\mu_i-\mu_1)((\beta_2-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})+(\mu_2-\mu_1)((((\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1})[(\beta_2-\beta_1)(\beta_1+(\beta_3-\beta_1)\times\\
&\quad\times x_3)D_m-(1-x_3)D_{\varepsilon 1}]-((\beta_2-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})[(\beta_3-\beta_1)(\beta_1+(\beta_3-\beta_1)x_3)D_m-(1-x_3)D_{\varepsilon 1}+\\
&\quad+D_{\varepsilon 3}x_3])([[(\beta_2-\beta_1)(\beta_1+(\beta_3-\beta_1)x_3)D_m-(1-x_3)D_{\varepsilon 1}]^2-((\beta_2-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})[(\beta_1+(\beta_3-\beta_1)\times\\
&\quad\times x_3)^2 D_m+(1-x_3)^2 D_{\varepsilon 1}+x_3^2 D_{\varepsilon 3}-D_p])^{-\frac{1}{2}}-(\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_m-D_{\varepsilon 1})=0,\qquad (i=\overline{3,n}).
\end{aligned}
\tag{3.124}
$$

Як видно з рівняння (3.124) функція від x_3 в його лівій частині є константою лише у випадку, коли дохідності першого та другого активів рівні між собою: $\mu_1=\mu_2$. Для того, щоб ця константа була нульовою, потрібно, щоб і третій актив мав таку ж саму сподівану дохідність $\mu_1=\mu_3$. Тоді, очевидно, інвестор вибере той актив, в якого найменший ризик: $\min\limits_{i=\overline{1,3}} \{\beta_i^2 D_m+D_{\varepsilon i}\}$.

Розглянемо більш загальний випадок $\mu_1\neq\mu_2$. Тоді рівняння (3.124) можна перетворити так:

$$
\begin{aligned}
&[((\beta_2-\beta_1)^2(\beta_3-\beta_1)^2 D_m^2+2(\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_m D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 1}^2)x_3+((\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1})(\beta_1\times\\
&\quad\times(\beta_2-\beta_1)D_m-D_{\varepsilon 1})-(\beta_2-\beta_1)^2(\beta_3-\beta_1)^2 D_m^2 x_3-(\beta_2-\beta_1)^2 D_m(D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 3})x_3-D_{\varepsilon 1}^2 x_3-D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3}x_3-\\
&\quad-D_{\varepsilon 2}(D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 3})x_3-(\beta_2-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})(\beta_1(\beta_3-\beta_1)D_m-D_{\varepsilon 1})]/\sqrt{D}-(\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)\times\\
&\quad\times D_m-D_{\varepsilon 1}=-\frac{\mu_3-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}((\beta_2-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2}).
\end{aligned}
\tag{3.125}
$$

У рівнянні (3.125) зведемо подібні доданки:

$$[2(\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_m D_{\varepsilon 1}-(\beta_2-\beta_1)^2 D_m(D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 3})-D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}-D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3}-D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3})x_3+((\beta_2-\beta_1)\times$$
$$\times(\beta_3-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1})(\beta_1(\beta_2-\beta_1)D_m-(\beta_2-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})(\beta_1(\beta_3-\beta_1)D_m-D_{\varepsilon 1})]/$$
$$/\sqrt{D}-(\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_m-D_{\varepsilon 1}=-\frac{\mu_3-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}((\beta_2-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2}).$$

Останнє рівняння має таку структуру:

$$(Ax_3+B)/\sqrt{D}=(\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1}-\frac{\mu_3-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}((\beta_2-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2}),$$

де

$$A=2(\beta_2-\beta_1)(2\beta_3-\beta_1-\beta_2)D_m D_{\varepsilon 1}-(\beta_2-\beta_1)^2 D_m D_{\varepsilon 3}-D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}-D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3}-D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3},$$

$$B=(\beta_1(\beta_2-\beta_1)-(\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)+(\beta_2-\beta_1)^2-(\beta_1(\beta_3-\beta_1))D_m D_{\varepsilon 1}-(\beta_1(\beta_3-\beta_1))D_m D_{\varepsilon 2}+D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}=$$
$$=\beta_2(\beta_2-\beta_3)D_m D_{\varepsilon 1}+\beta_1(\beta_1-\beta_3)D_{\varepsilon 2}D_m+D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}.$$

Якщо права частина рівняння (3.125) нульова, тобто виконується рівність:

$$(\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1}=\frac{\mu_3-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}((\beta_2-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2}), \qquad (3.126)$$

то дане рівняння стає лінійним

$$((\beta_2-\beta_1)(2\beta_3-\beta_1-\beta_2)D_m D_{\varepsilon 1}-(\beta_2-\beta_1)^2 D_m D_{\varepsilon 3}-D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}-D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3}-D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 2})x_3+$$
$$+\beta_2(\beta_2-\beta_3)D_{\varepsilon 1}D_m+\beta_1(\beta_1-\beta_3)D_{\varepsilon 2}D_m+D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}=0. \qquad (3.127)$$

Якщо коефіцієнт біля x_3 в рівнянні (3.127) відмінний від нуля

$(\beta_2-\beta_1)(2\beta_3-\beta_1-\beta_2)D_m D_{\varepsilon 1}-(\beta_2-\beta_1)^2 D_m D_{\varepsilon 3}-D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}-D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3}-D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 2}\neq 0$, то рівняння (3.127) має розв'язок:

$$x_3=\frac{\beta_2(\beta_2-\beta_3)D_{\varepsilon 1}D_m+\beta_1(\beta_1-\beta_3)D_{\varepsilon 2}D_m+D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}}{D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}+D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3}+D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3}+(\beta_2-\beta_1)^2 D_m D_{\varepsilon 3}-(\beta_2-\beta_1)(2\beta_3-\beta_1-\beta_2)D_m D_{\varepsilon 1}}. \qquad (3.128)$$

Розв'язок (3.128) повинен задовольняти нерівність

$$0<x_3<1. \qquad (3.129)$$

Можна переконатися, що умова (3.129) не накладає надто жорстких обмежень на фінансові показники активів портфеля. Справді, якщо розглянути хоч і частковий, але економічно можливий випадок рівності між собою бета-коефіцієнтів всіх активів $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$, то розв'язок (3.128) значно спроститься:

$$x_3 = \frac{D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2}}{D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 2} D_{\varepsilon 3}} \tag{3.130}$$

і вираз (3.130) очевидно задовольнятиме умову (3.129):

$$0 < \frac{D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2}}{D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 2} D_{\varepsilon 3}} < 1. \tag{3.131}$$

Рівність (3.126) в цьому випадку також набирає простішого вигляду

$$(\mu_2 - \mu_1) D_{\varepsilon 1} = (\mu_3 - \mu_1)(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})$$

$$\text{або} \quad (\mu_2 - \mu_3) D_{\varepsilon 1} = (\mu_3 - \mu_1) D_{\varepsilon 2}.$$

У даному випадку величина x_3 не залежить ні від бета-коефіцієнтів, ні від ризику ринкового портфеля D_m, ні навіть від допустимого ризику портфеля D_p , а лише від залишкових дисперсій активів даного портфеля. Однак, це не означає, що й інші частки x_2 чи x_1 також не залежать від багатьох параметрів. Справді, якщо підставити формулу (3.130) та умови $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$ у розв'язок (3.120), то отримаємо:

$$\begin{aligned} x_2 = {} & (D_{\varepsilon 1}(D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 2} D_{\varepsilon 3}) / (D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 2} D_{\varepsilon 3}) + (D_{\varepsilon 1}^2 (D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 2} D_{\varepsilon 3})^2 / (D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2} + \\ & + D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 2} D_{\varepsilon 3})^2 - (D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})[\beta_1^2 D_m + D_{\varepsilon 1}(D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 2} D_{\varepsilon 3})^2 / (D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 3} + \\ & + D_{\varepsilon 2} D_{\varepsilon 3})^2 + D_{\varepsilon 3} D_{\varepsilon 1}^2 D_{\varepsilon 2}^2 / (D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 2} D_{\varepsilon 3})^2 - D_p])^{\frac{1}{2}}) / (D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}). \end{aligned} \tag{3.132}$$

Зважаючи на нерівність (3.131) розв'язок (3.128) можна розглядати як неперервну функцію величин $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ в деякому околі $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$. Отже, існує додатне $\delta = \delta(D_{\varepsilon 1}, D_{\varepsilon 2}, D_{\varepsilon 3}, D_m) > 0$ таке, що в околі

$$\sqrt{(\beta_2 - \beta_1)^2 + (\beta_3 - \beta_1)^2} < \delta \tag{3.133}$$

функція (3.128) також задовольняє умову (3.129).

Отже, зважаючи на те, що бета-коефіцієнти значної кількості активів, які можуть бути в розпорядженні інвестора, приблизно рівні між собою, то можна зробити висновок, що умова (3.129) для розв'язку (3.128) здебільшого виконується.

Якщо умова (3.126) порушується, тобто виконується нерівність

$$\left|(\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1}-\frac{\mu_3-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}((\beta_2-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})\right|>0, \qquad (3.134)$$

то рівняння (3.125) можна перетворити так

$$\sqrt{D}=(Ax_3+B)/[(\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1}-\frac{\mu_3-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}((\beta_2-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})]. \qquad (3.135)$$

Якщо права частина рівняння додатна

$$(Ax_3+B)/[(\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1}-\frac{\mu_3-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}((\beta_2-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})]>0,$$

то рівняння (3.135) можна піднести до другого степеня:

$$[(\beta_2-\beta_1)(\beta_1+(\beta_3-\beta_1)x_3)D_m-(1-x_3)D_{\varepsilon 1}]^2-((\beta_2-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})\times$$
$$\times[(\beta_1+(\beta_3-\beta_1)x_3)^2 D_m+(1-x_3)^2 D_{\varepsilon 1}+x_3^2 D_{\varepsilon 3}-D_p]=(Ax_3+B)^2/[(\beta_2-\beta_1)\times$$
$$\times(\beta_3-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon 1}-\frac{\mu_3-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}((\beta_2-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})]^2. \qquad (3.136)$$

Спростимо рівняння (3.136):

$$(\beta_2-\beta_1)^2(\beta_1+(\beta_3-\beta_1)x_3)^2 D_m^2+(1-x_3)^2 D_{\varepsilon 1}^2-2(\beta_2-\beta_1)(\beta_1+(\beta_3-\beta_1)x_3)(1-x_3)D_m D_{\varepsilon 1}-(\beta_2-\beta_1)^2\times$$
$$\times(\beta_1+(\beta_3-\beta_1)x_3)^2 D_m^2(1-x_3)^2 D_{\varepsilon 1}^2+D_p((\beta_2-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})-((\beta_2-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})D_{\varepsilon 3}x_3^2-$$
$$-(D_{\varepsilon 2}+(\beta_2-\beta_1)^2 D_m)D_{\varepsilon 1}(1-x_3)^2-(D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})D_m(\beta_1+(\beta_3-\beta_1)x_3)^2=(Ax_3+B)^2/[(\beta_2-\beta_1)(\beta_3-\beta_1)\times$$
$$\times D_m+D_{\varepsilon 1}-\frac{\mu_3-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}((\beta_2-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})]^2.$$

Останнє рівняння має вигляд

$$ax_3^2+bx_3+c=0, \qquad (3.137)$$

при цьому коефіцієнт *a* приймає тільки від'ємні значення для будь-яких фінансових характеристик активів портфеля.

Справді,

$$a = -(D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3} + D_m(D_{\varepsilon 1}(\beta_3 - \beta_2)^2 + D_{\varepsilon 2}(\beta_3 - \beta_1)^2 + D_{\varepsilon 3}(\beta_2 - \beta_1)^2) -$$
$$-(\mu_2 - \mu_1)^2[(\beta_2 - \beta_1)(2\beta_3 - \beta_1 - \beta_2)D_m D_{\varepsilon 1} - (\beta_2 - \beta_1)^2 D_m D_{\varepsilon 3} - D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} - D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} - -D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3}]^2 /$$
$$/[(\mu_2 - \mu_1)((\beta_2 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_1)D_m + D_{\varepsilon 1}) - (\mu_3 - \mu_1)((\beta_2 - \beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})]^2 < 0\,. \tag{3.138}$$

Коефіцієнт біля x_3 у рівнянні (3.137) обчислюється за формулою:

$$b = 2(\beta_2(\beta_2 - \beta_3)D_{\varepsilon 1}D_m + (\beta_1(\beta_1 - \beta_3)D_{\varepsilon 2}D_m + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} - [(\beta_2 - \beta_1)(2\beta_3 - \beta_1 - \beta_2)D_m D_{\varepsilon 1} - (\beta_2 - \beta_1)^2 \times$$
$$\times D_m D_{\varepsilon 3} - D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} - D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} - D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3}][\beta_2(\beta_2 - \beta_3)D_{\varepsilon 1}D_m + (\beta_1(\beta_1 - \beta_3)D_{\varepsilon 2}D_m + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}](\mu_2 -$$
$$-\mu_1)^2 /[(\mu_2 - \mu_1)(\beta_2 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_1)D_m - (\mu_3 - \mu_1)(\beta_2 - \beta_1)^2 D_m + (\mu_2 - \mu_3)D_{\varepsilon 1} + (\mu_1 - \mu_3)D_{\varepsilon 2}]^2)\,. \tag{3.139}$$

Як бачимо, коефіцієнти біля шуканої величини x_3 не залежать від дисперсії даного портфеля D_p. Від неї залежить тільки вільний член рівняння (3.137):

$$c = D_p((\beta_2 - \beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) - 2\beta_1(\beta_2 - \beta_1)D_m)D_{\varepsilon 1} - (D_{\varepsilon 2} + (\beta_2 - \beta_1)^2 D_m D_{\varepsilon 1} -$$
$$-\beta_1^2 D_m(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) - (\mu_2 - \mu_1)^2[\beta_2(\beta_2 - \beta_3)D_{\varepsilon 1}D_m + \beta_1(\beta_1 - \beta_3)D_{\varepsilon 2}D_m + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}]^2 /$$
$$-(\mu_2 - \mu_1)(\beta_2 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_1)D_m - (\mu_3 - \mu_1)(\beta_2 - \beta_1)^2 D_m + (\mu_2 - \mu_3)D_{\varepsilon 1} + (\mu_1 - \mu_3)D_{\varepsilon 2}]^2. \tag{3.140}$$

Для того, щоб рівняння (3.137) мало дійсні корені, потрібно, щоб виконувалася умова

$$\frac{b^2}{4} - ac \geq 0\,. \tag{3.141}$$

Дослідимо умову (3.141) у випадку, коли бета-коефіцієнти всіх активів рівні між собою:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3\,. \tag{3.142}$$

За умови (3.142) формули (3.138)-(3.140) значно спростяться:

$$a = -\frac{(D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3}) - (D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3})^2}{[(\mu_2 - \mu_3)D_{\varepsilon 1} + (\mu_1 - \mu_3)D_{\varepsilon 2}]^2(\mu_2 - \mu_1)^2}; \tag{3.143}$$

$$b = 2\frac{D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + (\mu_2 - \mu_1)^2 D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}(D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3})}{[(\mu_2 - \mu_3)D_{\varepsilon 1} + (\mu_1 - \mu_3)D_{\varepsilon 2}]^2}. \tag{3.144}$$

Як видно з формули (3.144), коефіцієнт b додатний: $b > 0$. Останній коефіцієнт:

$$c = D_p(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) - D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} - \beta_1^2 D_m(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) - (\mu_2 - \mu_1)^2 / [(\mu_2 - \mu_3)D_{\varepsilon 1} + (\mu_1 - \mu_3)D_{\varepsilon 2}]^2 D_{\varepsilon 1}^2 D_{\varepsilon 2}^2 .$$

(3.145)

Підставивши в умову (3.141) формули (3.143)-(3.145), отримаємо таку нерівність:

$$d = D_{\varepsilon 1}^2 D_{\varepsilon 2}^2([(\mu_2 - \mu_3)D_{\varepsilon 1} + (\mu_1 - \mu_3)D_{\varepsilon 2}]^2 + (\mu_2 - \mu_1)^2(D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3}))^2 + (D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + \\ + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3})([(\mu_2 - \mu_3)D_{\varepsilon 1} + (\mu_1 - \mu_3)D_{\varepsilon 2}]^2(D_p(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) - D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} - \beta_1^2 D_m(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})) - \\ - (\mu_2 - \mu_1)^2 D_{\varepsilon 1}^2 D_{\varepsilon 2}^2) \ge 0 .$$

(3.146)

Отриману нерівність (3.146) можна розглядати як обмеження знизу на дисперсію портфеля D_p. За умов (3.142) та (3.146) рівняння (3.137) має додатний розв’язок

$$x_3 = \frac{-b/2 - \sqrt{d}}{a} . \qquad (3.147)$$

За аналогічною формулою можна обчислити x_3 і у випадку різних бета-коефіцієнтів.

Повертаючись до системи (3.123) ірраціональних рівнянь, введемо в ній додаткову невідому величину:

$$d_n = ([(\beta_2 - \beta_1)(\beta_1 + \sum_{j=3}^{n}(\beta_j - \beta_1)x_j)D_m - (1 - \sum_{j=3}^{n}x_j)D_{\varepsilon 1}]^2 - ((\beta_2 - \beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})[(\beta_1 + \\ + \sum_{j=3}^{n}(\beta_j - \beta_1)x_j)^2 D_m - (1 - \sum_{j=3}^{n}x_j)^2 D_{\varepsilon 1} + \sum_{j=3}^{n}x_j^2 D_{\varepsilon j} - D_p])^{-\frac{1}{2}} .$$

(3.148)

Тоді система (3.123) стане системою з одного нелінійного рівняння (3.148) та системи з (n-2)-х лінійних рівнянь щодо невідомих $x_i, \quad (i = \overline{3,n})$.

$$(\mu_i - \mu_1)((\beta_2 - \beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) + (\mu_2 - \mu_1)((((\beta_2 - \beta_1)(\beta_i - \beta_1)D_m + D_{\varepsilon 1})[(\beta_2 - \beta_1)(\beta_1 + \\ + \sum_{j=3}^{n}(\beta_j - \beta_1)x_j)D_m - (1 - \sum_{j=3}^{n}x_j)D_{\varepsilon 1}] - ((\beta_2 - \beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})[(\beta_i - \beta_1)(\beta_1 + \sum_{j=3}^{n}(\beta_j - \beta_1)x_j) \times \\ \times D_m - (1 - \sum_{j=3}^{n}x_j)D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon i}x_i])d_n - (\beta_2 - \beta_1)(\beta_i - \beta_1)D_m - D_{\varepsilon 1}) = 0, (i = \overline{3,n}).$$

(3.149)

У системі (3.149) відомі величини перенесемо в праві частини рівнянь

$$(\mu_2-\mu_1)d_n\sum_{j=3}^{n}(((\beta_2-\beta_1)(\beta_i-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon1})(\beta_2-\beta_1)(\beta_j-\beta_1)D_m+((\beta_2-\beta_1)(\beta_i-\beta_1)D_m+$$
$$+D_{\varepsilon1})D_{\varepsilon1}-((\beta_2-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon1}+D_{\varepsilon2})((\beta_j-\beta_1)(\beta_i-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon1}))x_j-(\mu_2-\mu_1)d_n\times$$
$$\times((\beta_2-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon1}+D_{\varepsilon2})D_{\varepsilon i}x_i=b_i\ ,\quad (i=\overline{3,n}),$$

(3.150)

де

$$b_i=(\mu_2-\mu_1)(D_{\varepsilon1}+(\beta_2-\beta_1)(\beta_i-\beta_1)D_m)-d_n(\mu_2-\mu_1)(((\beta_2-\beta_1)(\beta_i-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon1})((\beta_2-\beta_1)\beta_1\times$$
$$\times D_m-D_{\varepsilon1})-((\beta_2-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon1}+D_{\varepsilon2})((\beta_i-\beta_1)\beta_1D_m-D_{\varepsilon1}))-(\mu_i-\mu_1)((\beta_2-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon1}+D_{\varepsilon2}),$$
$$(i=\overline{3,n}).$$

(3.151)

Систему (3.150) можна записати у матричній формі

$$-(\mu_2-\mu_1)d_nAx=b, \tag{3.152}$$

де b – вектор-стовпчик величин b_I, що виражаються формулою (3.151):

$$b=col(b_3\,,b_4\,,...,b_n)\,; \tag{3.153}$$

x – вектор-стовпчик невідомих:

$$x=col(x_3\,,x_4\,,...,x_n)\,; \tag{3.154}$$

A – матриця (n-2)-го порядку:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,(n-2)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,(n-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(n-2),1} & a_{(n-2),2} & \cdots & a_{(n-2),(n-2)} \end{pmatrix}. \tag{3.155}$$

Компоненти головної діагоналі матриці (3.155) обчислюються за формулою:

$$a_{(i-2),(i-2)}=((\beta_2-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon1}+D_{\varepsilon2})D_{\varepsilon i}+((\beta_2-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon1}+D_{\varepsilon2})((\beta_i-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon1})-$$
$$-((\beta_2-\beta_1)(\beta_i-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon1})(\beta_2-\beta_1)(\beta_i-\beta_1)D_m-((\beta_2-\beta_1(\beta_i-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon1})D_{\varepsilon1}\,,(i=\overline{3,n}).$$

(3.156)

Елементи матриці поза головною діагоналлю:

$$a_{(i-2),(j-2)}=((\beta_2-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon1}+D_{\varepsilon2})(\beta_i-\beta_1)(\beta_j-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon1})-((\beta_2-\beta_1)(\beta_i-\beta_1)D_m+$$
$$+D_{\varepsilon1})(\beta_2-\beta_1)(\beta_j-\beta_1)D_m-((\beta_2-\beta_1)(\beta_i-\beta_1)D_m+D_{\varepsilon1})D_{\varepsilon1}\,,(i=\overline{3,n};\ j=\overline{3,n};\ i\neq j).$$

(3.157)

У випадку, коли всі бета-коефіцієнти активів портфеля рівні між собою ($\beta_i = \beta_j$, $i, j = \overline{3,n}$), структура матриці A значно спрощується:

$$A = \begin{pmatrix} D_{\varepsilon 3}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} & D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} & D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} & \cdots & D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} \\ D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} & D_{\varepsilon 4}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} & D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} & \cdots & D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} \\ D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} & D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} & D_{\varepsilon 5}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} & \cdots & D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} & D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} & D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} & \cdots & D_{\varepsilon(n-2)}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} \end{pmatrix}.$$

(3.158)

Щоб обчислити визначник матриці (3.158), віднімемо від кожного її стовпчика, починаючи з другого, перший стовпчик:

$$\det A = \begin{vmatrix} D_{\varepsilon 3}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} & -D_{\varepsilon 3}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) & -D_{\varepsilon 3}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) & \cdots & -D_{\varepsilon 3}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) \\ D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} & D_{\varepsilon 4}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) & 0 & \cdots & 0 \\ D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} & 0 & D_{\varepsilon 5}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} & 0 & 0 & \cdots & D_{\varepsilon(n-2)}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) \end{vmatrix}.$$

(3.159)

Згідно правила Лапласа, застосованого до 1-го стовпчика визначника (3.159), отримуємо формулу:

$$\det A = (D_{\varepsilon 3}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2})D_{\varepsilon 4}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})D_{\varepsilon 5}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) \times \cdots \times D_{\varepsilon(n-2)}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} \times$$
$$\times D_{\varepsilon 3}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})D_{\varepsilon 5}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})D_{\varepsilon 6}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) \times \cdots \times D_{\varepsilon(n-2)}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) \times$$
$$\times D_{\varepsilon 4}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})D_{\varepsilon 6}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) \times \cdots \times D_{\varepsilon(n-2)}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) + \cdots + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})D_{\varepsilon 4}(D_{\varepsilon 1} +$$
$$+ D_{\varepsilon 2}) \times \cdots \times D_{\varepsilon(n-3)}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}).$$

Отриману формулу можна записати в загальній формі:

$$\det A = (D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})^{n-2} \prod_{i=3}^{n} D_{\varepsilon i} + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})^{n-3} \sum_{i=3}^{n} \prod_{j=3, i \neq j}^{n} D_{\varepsilon j} > 0; \qquad (3.160)$$

$$\det A = (D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})^{n-3} \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1, i \neq j}^{n} D_{\varepsilon j} > 0.$$

Отже, система (3.150) сумісна, якщо

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n, \qquad (3.161)$$

тобто дохідності активів портфеля однаково корельовані з дохідністю ринкового портфеля.

Оскільки головний визначник системи (3.150) є неперервною функцією бета-коефіцієнтів β_i, $(i=\overline{1,n})$, тобто дохідності активів портфеля однаково корельовані з дохідністю ринкового портфеля, то існує таке $\delta_n > 0$, що і при

$$\sqrt{(\beta_2-\beta_1)^2+(\beta_3-\beta_1)^2+\ldots+(\beta_n-\beta_1)^2} < \delta_n \qquad (3.162)$$

виконується нерівність

$$\det A > 0. \qquad (3.163)$$

Отже, і в значній частині випадків нерівних між собою бета-коефіцієнтів система (3.150) сумісна і має єдиний розв’язок.

Щоб обчислити $\det A$ для довільних $\beta_i\,(i=\overline{1,n})$, запишемо елементи його головної діагоналі в іншому вигляді:

$$a_{(i-2),(i-2)} = ((\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})D_{\varepsilon i} + D_{\varepsilon 2}((\beta_i-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1}) +$$
$$+ D_m D_{\varepsilon 1}((\beta_2-\beta_1)^2 + (\beta_i-\beta_1)^2 - 2((\beta_2-\beta_1)(\beta_i-\beta_1));$$

$$a_{(i-2),(i-2)} = ((\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})D_{\varepsilon i} + (\beta_i-\beta_1)^2 D_m D_{\varepsilon 1} + (\beta_i-\beta_1)^2 D_m D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2}. \qquad (3.164)$$

Формулу (3.157), яка виражає елементи матриці A поза головною діагоналлю, також можна перетворити:

$$a_{(i-2),(j-2)} = (\beta_i-\beta_1)(\beta_j-\beta_1)D_{\varepsilon 2}D_m + ((\beta_2-\beta_1)^2 + (\beta_i-\beta_1)(\beta_j-\beta_1) -$$
$$-(\beta_2-\beta_1)(\beta_j-\beta_1) - (\beta_i-\beta_1)(\beta_2-\beta_1))D_{\varepsilon 1}D_m + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2};$$

$$a_{(i-2),(j-2)} = (\beta_i-\beta_1)(\beta_j-\beta_1)D_{\varepsilon 2}D_m + ((\beta_2-\beta_1)(\beta_2-\beta_j) - (\beta_i-\beta_1)(\beta_2-\beta_j))D_{\varepsilon 1}D_m + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2};$$

$$a_{(i-2),(j-2)} = (\beta_i-\beta_1)(\beta_j-\beta_1)D_{\varepsilon 2}D_m + (\beta_i-\beta_2)(\beta_j-\beta_2)D_{\varepsilon 1}D_m + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}. \qquad (3.165)$$

Як видно з формули (3.165), матриця A симетрична і у випадку різних $\beta_i\,(i=\overline{1,n})$.

Справді,

$$a_{(i-2),(j-2)} = a_{(j-2),(i-2)}, \quad (i=\overline{3,n},\ j=\overline{3,n},\ i\neq j). \qquad (3.166)$$

Обчислення визначника у випадку n=3 зводиться до одного елемента за формулою (3.164) при i=3:

$$\det A\big|_{n=3} = (\beta_2-\beta_1)^2 D_m D_{\varepsilon 3} + (\beta_3-\beta_2)^2 D_m D_{\varepsilon 1} + (\beta_3-\beta_1)^2 D_m D_{\varepsilon 2} +$$
$$D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3}. \qquad (3.167)$$

Легко бачити, що при n=3 за умови (3.161) рівності між собою бета-коефіцієнтів формула (3.167) зводиться до формули (3.160).

Якщо портфель складається з n=4-х активів, то доведеться обчислювати визначник другого порядку:

$$\begin{aligned}\det A\big|_{n=4} = {} & (((\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) D_{\varepsilon 3} + (\beta_3-\beta_2)^2 D_{\varepsilon 1} D_m + (\beta_3-\beta_1)^2 D_{\varepsilon 2} D_m + \\ & + D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2})(((\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) D_{\varepsilon 4} + (\beta_4-\beta_2)^2 D_{\varepsilon 1} D_m + (\beta_4-\beta_1)^2 D_{\varepsilon 2} D_m + \\ & + D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2}) - ((\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) D_{\varepsilon 2} D_m + (\beta_3-\beta_2)(\beta_4-\beta_2) D_{\varepsilon 1} D_m + D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2})^2 .\end{aligned} \quad (3.168)$$

Перетворимо формулу (3.168)

$$\begin{aligned}\det A_4 = {} & ((\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})^2 D_{\varepsilon 3} D_{\varepsilon 4} + (\beta_4-\beta_2)^2 ((\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 3} D_m + \\ & + (\beta_4-\beta_1)^2 ((\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) D_{\varepsilon 2} D_{\varepsilon 3} D_m + ((\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})(D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2} D_{\varepsilon 3} + \\ & + D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2} D_{\varepsilon 4}) + (\beta_3-\beta_2)^2 D_m D_{\varepsilon 1} ((\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) D_{\varepsilon 4} + (\beta_3-\beta_2)^2 (\beta_4-\beta_1)^2 D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2} D_m^2 + \\ & + (\beta_3-\beta_2)^2 D_{\varepsilon 1}^2 D_{\varepsilon 2} D_m + (\beta_3-\beta_1)^2 ((\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) D_{\varepsilon 2} D_{\varepsilon 4} D_m + (\beta_3-\beta_1)^2 (\beta_4-\beta_2)^2 D_{\varepsilon 1} \times \\ & \times D_{\varepsilon 2} D_m^2 + (\beta_3-\beta_1)^2 D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2}^2 D_m + ((\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2} D_{\varepsilon 4} + (\beta_4-\beta_2)^2 D_{\varepsilon 1}^2 D_{\varepsilon 2} D_m + \\ & + (\beta_4-\beta_1)^2 D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2}^2 D_m - 2(\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)(\beta_3-\beta_2)(\beta_4-\beta_2) D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2} D_m^2 - 2(\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1) \times \\ & \times D_{\varepsilon 1}^2 D_{\varepsilon 2} D_m - 2(\beta_3-\beta_2)(\beta_4-\beta_2) D_{\varepsilon 1}^2 D_{\varepsilon 2} D_m ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det A_4 = {} & D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2} D_m^2 ((\beta_3-\beta_2)(\beta_4-\beta_1) - (\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_2))^2 + D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2}^2 D_m (\beta_4-\beta_3)^2 + \\ & + D_{\varepsilon 1}^2 D_{\varepsilon 2} D_m (\beta_4-\beta_3)^2 + ((\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) D_{\varepsilon 4} D_{\varepsilon 3} + (\beta_4-\beta_2)^2 ((\beta_2-\beta_1)^2 \times \\ & \times D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 3} D_m + (\beta_4-\beta_1)^2 ((\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) D_{\varepsilon 2} D_{\varepsilon 3} D_m + \\ & + ((\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})(D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2} D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2} D_{\varepsilon 4}) + (\beta_3-\beta_2)^2 D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 4} D_m ((\beta_2-\beta_1)^2 \times \\ & \times D_m + + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) + (\beta_3-\beta_1)^2 ((\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) D_{\varepsilon 2} D_{\varepsilon 4} D_m .\end{aligned} \quad (3.169)$$

Усі доданки у формулі (3.169) невід'ємні, отже, визначник другого порядку додатний для довільних бета-коефіцієнтів, а не тільки для тих, що визначаються умовою (3.162). Формулу (3.169) можна записати у вигляді суми, один з доданків якої залежить тільки від залишкових дисперсій $D_{\varepsilon i}\ (i = \overline{1,4})$ активів:

$$\det A_4 = (D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})\sum_{i=1}^{4}\prod_{j=1,\, j\neq i}^{n} D_{\varepsilon j} + (\beta_2-\beta_1)^2 D_m^2((\beta_4-\beta_3)^2 D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + (\beta_4-\beta_2)^2 D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + (\beta_4-\beta_1)^2 \times$$
$$\times D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3} + (\beta_3-\beta_2)^2 D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 4} + (\beta_2-\beta_1)^2 D_{\varepsilon 3}D_{\varepsilon 4} + (\beta_3-\beta_1)^2 D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 4}) + (D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})D_m((\beta_4-\beta_3)^2 \times$$
$$\times D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + (\beta_2-\beta_1)^2 D_{\varepsilon 3}D_{\varepsilon 4} + (\beta_4-\beta_2)^2 D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + (\beta_4-\beta_1)^2 D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3} + (\beta_3-\beta_2)^2 D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 4} +$$
$$+ (\beta_3-\beta_1)^2 D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 4}) + (\beta_2-\beta_1)^2 D_m(D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3}D_{\varepsilon 4} + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3}D_{\varepsilon 4} + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 4} + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3}).$$

Останню формулу можна узагальнити так

$$\det A_4 = ((\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})\left(\sum_{i=1}^{4}\prod_{j=1,\, j\neq i}^{4} D_{\varepsilon j} + D_m \sum_{i,j=1, i\neq j}^{4}\left((\beta_i-\beta_j)^2 \prod_{k=1,k\neq i,k\neq j}^{4} D_{\varepsilon k}\right)\right). \quad (3.170)$$

У випадку портфеля з 5-х активів потрібно обчислити визначник третього порядку

$$\det A_5 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\det A_5 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Враховуючи симетричність матриці *A*, отримаємо формулу:

$$\det A_5 = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{23}a_{13} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2;$$

$$\det A_5 = a_{33}\det A_4 + 2a_{12}a_{23}a_{13} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2. \quad (3.171)$$

Підставимо у формулу (3.171) вирази (3.164) та (3.165) при відповідних значеннях i та j:

$$\det A_5 = \det A_4(((\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})D_{\varepsilon 5} + (\beta_5-\beta_2)^2 D_{\varepsilon 1}D_m + (\beta_5-\beta_1)^2 D_{\varepsilon 2}D_m + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}) +$$
$$+ 2((\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)D_{\varepsilon 2}D_m + (\beta_3-\beta_2)(\beta_4-\beta_2)D_{\varepsilon 1}D_m + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2})((\beta_4-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon 2}D_m +$$
$$+ (\beta_4-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon 1}D_m + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2})((\beta_3-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon 2}D_m + (\beta_3-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon 1}D_m + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}) -$$
$$- (((\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})D_{\varepsilon 3} + (\beta_3-\beta_2)^2 D_{\varepsilon 1}D_m + (\beta_3-\beta_1)^2 D_{\varepsilon 2}D_m + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2})((\beta_4-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)\times$$
$$\times D_{\varepsilon 2}D_m + (\beta_4-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon 1}D_m + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2})^2 - (((\beta_2-\beta_1)^2 D_m + D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})D_{\varepsilon 4} + (\beta_4-\beta_2)^2 D_{\varepsilon 1}D_m +$$
$$+ (\beta_4-\beta_1)^2 D_{\varepsilon 2}D_m + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2})((\beta_3-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon 2}D_m + (\beta_3-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon 1}D_m + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2})^2.$$

(3.172)

Якщо бета-коефіцієнти активів портфеля рівні, тобто виконується:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5, \quad (3.173)$$

то отримаємо

$$\det A_5 = \det A_4(D_{\varepsilon 5}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}) - (D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})(D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 4})D_{\varepsilon 1}^2 D_{\varepsilon 2}^2. \quad (3.174)$$

Підставимо у формулу (3.174) вираз (3.170) за умови (3.173):

$$\det A_5 = (D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})[(D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3}D_{\varepsilon 4} + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3}D_{\varepsilon 4} + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3})(D_{\varepsilon 5}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}) + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}) - (D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 4})D_{\varepsilon 1}^2 D_{\varepsilon 2}^2]$$

тобто отримуємо формулу (3.160) при n=5:

$$\det A_5 = (D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})^2 \sum_{i=1}^{5} \prod_{j=1,\, j\neq i}^{5} D_{\varepsilon j} \,. \tag{3.175}$$

Якщо бета-коефіцієнти активів портфеля різні, тобто умова (3.173) не виконується, то визначник (3.172) матиме дещо складнішу форму. Щоби спростити його, зобразимо його у такій формі:

$$\det A_5 = k_3 D_m^3 + k_2 D_m^2 + k_1 D_m + k_0 \,, \tag{3.176}$$

де k_0 обчислюється за формулою (3.175).

Обчислимо тепер k_3 – коефіцієнт при дисперсії в третьому степені ринкового портфеля:

$$\begin{aligned} k_3 = {} & 2((\beta_3 - \beta_1)(\beta_4 - \beta_1)D_{\varepsilon 2} + (\beta_3 - \beta_2)(\beta_4 - \beta_2)D_{\varepsilon 1})((\beta_4 - \beta_1)(\beta_5 - \beta_1)D_{\varepsilon 2} + (\beta_4 - \beta_2)(\beta_5 - \beta_2)D_{\varepsilon 1}) \times \\ & \times ((\beta_3 - \beta_1)(\beta_5 - \beta_1)D_{\varepsilon 2} + (\beta_3 - \beta_2)(\beta_5 - \beta_2)D_{\varepsilon 1}) - ((\beta_2 - \beta_1)^2 D_{\varepsilon 3} + (\beta_3 - \beta_2)^2 D_{\varepsilon 1} + (\beta_3 - \beta_1)^2 D_{\varepsilon 2}) \times \\ & \times ((\beta_4 - \beta_1)(\beta_5 - \beta_1)D_{\varepsilon 2} + (\beta_4 - \beta_2)(\beta_5 - \beta_2)D_{\varepsilon 1})^2 - ((\beta_2 - \beta_1)^2 D_{\varepsilon 4} + (\beta_4 - \beta_2)^2 D_{\varepsilon 1} + (\beta_4 - \beta_1)^2 D_{\varepsilon 2}) \times \\ & \times ((\beta_3 - \beta_1)(\beta_5 - \beta_1)D_{\varepsilon 2} + (\beta_3 - \beta_2)(\beta_5 - \beta_2)D_{\varepsilon 1})^2 + (\beta_2 - \beta_1)^2 \sum_{i>j=1}^{4} ((\beta_i - \beta_j)^2 \prod_{\substack{k=1,\, k\neq i \\ k\neq j}}^{4} D_{\varepsilon k})((\beta_2 - \beta_1)^2 D_{\varepsilon 5} + \\ & + (\beta_5 - \beta_2)^2 D_{\varepsilon 1} + (\beta_5 - \beta_1)^2 D_{\varepsilon 2}). \end{aligned}$$

Розкриваючи дужки, отримаємо:

$$\begin{aligned} k_3 = {} & 2(\beta_3 - \beta_1)^2(\beta_4 - \beta_1)(\beta_4 - \beta_2)(\beta_5 - \beta_2)(\beta_5 - \beta_1)D_{\varepsilon 2}^2 D_{\varepsilon 1} + 2(\beta_3 - \beta_1)(\beta_4 - \beta_1)^2(\beta_5 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_2) \times \\ & \times (\beta_5 - \beta_2)D_{\varepsilon 2}^2 D_{\varepsilon 1} + 2(\beta_3 - \beta_1)(\beta_4 - \beta_1)(\beta_4 - \beta_2)(\beta_5 - \beta_2)^2(\beta_3 - \beta_2)D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 1}^2 + 2(\beta_3 - \beta_2)(\beta_4 - \beta_2) \times \\ & \times (\beta_4 - \beta_1)(\beta_5 - \beta_1)^2(\beta_3 - \beta_1)D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}^2 + 2(\beta_3 - \beta_2)(\beta_4 - \beta_2)^2(\beta_5 - \beta_2)(\beta_3 - \beta_1)(\beta_5 - \beta_1)D_{\varepsilon 1}^2 D_{\varepsilon 2} + \end{aligned}$$

$$+2(\beta_3-\beta_2)^2(\beta_4-\beta_2)(\beta_4-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon1}^2D_{\varepsilon2}-((\beta_2-\beta_1)^2D_{\varepsilon3}+(\beta_3-\beta_1)^2D_{\varepsilon1}+(\beta_3-\beta_1)^2\times$$
$$\times D_{\varepsilon2})((\beta_4-\beta_1)^2(\beta_5-\beta_1)^2D_{\varepsilon2}^2-2((\beta_2-\beta_1)^2D_{\varepsilon3}+(\beta_3-\beta_2)^2D_{\varepsilon1}+(\beta_3-\beta_1)^2D_{\varepsilon2})(\beta_4-\beta_2)(\beta_4-\beta_1)\times$$
$$\times(\beta_5-\beta_1)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}-((\beta_2-\beta_1)^2D_{\varepsilon3}+(\beta_3-\beta_2)^2D_{\varepsilon1}+(\beta_3-\beta_1)^2D_{\varepsilon2})(\beta_4-\beta_2)^2(\beta_5-\beta_2)^2D_{\varepsilon1}^2+$$
$$+2(\beta_3-\beta_1)^2(\beta_4-\beta_1)^2(\beta_5-\beta_1)^2D_{\varepsilon2}^3+2(\beta_3-\beta_2)^2(\beta_4-\beta_2)^2(\beta_5-\beta_2)^2D_{\varepsilon1}^3-(\beta_2-\beta_1)^2(\beta_3-\beta_1)^2\times$$
$$\times(\beta_5-\beta_1)^2D_{\varepsilon4}D_{\varepsilon2}^2-(\beta_4-\beta_2)^2(\beta_3-\beta_1)^2(\beta_5-\beta_1)^2D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}^2-(\beta_4-\beta_1)^2(\beta_3-\beta_1)^2(\beta_5-\beta_1)^2D_{\varepsilon2}^3-$$
$$-(\beta_2-\beta_1)^2(\beta_3-\beta_2)^2(\beta_5-\beta_2)^2D_{\varepsilon4}D_{\varepsilon1}^2-(\beta_4-\beta_2)^2(\beta_3-\beta_2)^2(\beta_5-\beta_2)^2D_{\varepsilon1}^3-(\beta_4-\beta_1)^2(\beta_3-\beta_2)^2\times$$
$$\times(\beta_5-\beta_2)^2D_{\varepsilon2}D_{\varepsilon1}^2-2(\beta_2-\beta_1)^2(\beta_3-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)(\beta_3-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon4}D_{\varepsilon2}D_{\varepsilon1}-2(\beta_4-\beta_2)^2(\beta_3-\beta_1)\times$$
$$\times(\beta_5-\beta_1)(\beta_3-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon2}D_{\varepsilon1}^2-2(\beta_4-\beta_1)^2(\beta_3-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)(\beta_3-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}^2+$$
$$+\sum_{i>j=1}^{4}((\beta_i-\beta_j)^2\prod_{\substack{k=1,k\neq i,\\k\neq j}}^{4}D_{\varepsilon k})((\beta_2-\beta_1)^4D_{\varepsilon5}+(\beta_5-\beta_2)^2D_{\varepsilon1}(\beta_2-\beta_1)^2+(\beta_5-\beta_1)^2D_{\varepsilon2})(\beta_2-\beta_1)^2).$$

Легко бачити, що в отриманій формулі доданки, які містять множники $D_{\varepsilon1}^3$ та $D_{\varepsilon2}^3$ взаємно знищуються. Доданки, що мають множники $D_{\varepsilon1}^2D_{\varepsilon2}$,позначимо через $k_{3,1}$:

$$k_{3,1}=2(\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)(\beta_4-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)^2(\beta_3-\beta_2)D_{\varepsilon1}^2D_{\varepsilon2}+2(\beta_3-\beta_2)(\beta_4-\beta_2)^2(\beta_5-\beta_2)(\beta_3-\beta_1)\times$$
$$\times(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon1}^2D_{\varepsilon2}+2(\beta_3-\beta_2)^2(\beta_4-\beta_2)(\beta_4-\beta_1)(\beta_5-\beta_2)(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon1}^2D_{\varepsilon2}-2(\beta_3-\beta_2)^2(\beta_4-\beta_1)\times$$
$$\times(\beta_4-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon1}^2D_{\varepsilon2}-(\beta_3-\beta_1)^2(\beta_4-\beta_2)^2(\beta_5-\beta_2)^2D_{\varepsilon1}^2D_{\varepsilon2}-(\beta_4-\beta_1)^2(\beta_5-\beta_2)^2\times$$
$$\times(\beta_3-\beta_2)^2D_{\varepsilon1}^2D_{\varepsilon2}-2(\beta_4-\beta_2)^2(\beta_3-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)(\beta_5-\beta_2)(\beta_3-\beta_2)D_{\varepsilon1}^2D_{\varepsilon2}+(\beta_4-\beta_3)^2(\beta_5-\beta_2)^2\times$$
$$\times D_{\varepsilon1}^2D_{\varepsilon2}(\beta_2-\beta_1)^2;$$

$$k_{3,1}=(\beta_5-\beta_2)^2((\beta_4-\beta_3)^2(\beta_2-\beta_1)^2-(((\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_2)-(\beta_4-\beta_1)(\beta_3-\beta_2))^2)D_{\varepsilon1}^2D_{\varepsilon2};$$
$$k_{3,1}=(\beta_5-\beta_2)^2((\beta_4-\beta_3)^2(\beta_2-\beta_1)^2-(-\beta_3\beta_2-\beta_1\beta_4+\beta_4\beta_2+\beta_3\beta_1)^2)D_{\varepsilon1}^2D_{\varepsilon2};$$
$$k_{3,1}=(\beta_5-\beta_2)^2((\beta_4-\beta_3)^2(\beta_2-\beta_1)^2-((\beta_4-\beta_3)(\beta_2-\beta_1))^2)D_{\varepsilon1}^2D_{\varepsilon2}=0.$$

Аналогічно доводиться, що і доданки, які мають множники $D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}^2$, також взаємно знищуються. Справді,

$$k_{3,2}=2(\beta_3-\beta_1)^2(\beta_4-\beta_1)(\beta_4-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}^2+2(\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)^2(\beta_3-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)\times$$
$$\times(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}^2+2(\beta_3-\beta_2)(\beta_4-\beta_1)(\beta_4-\beta_2)(\beta_3-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)^2D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}^2-2(\beta_3-\beta_1)^2(\beta_4-\beta_1)\times$$
$$\times(\beta_4-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}^2-(\beta_3-\beta_1)^2(\beta_4-\beta_1)^2(\beta_5-\beta_1)^2D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}^2-(\beta_3-\beta_1)^2(\beta_4-\beta_2)^2\times$$
$$\times(\beta_5-\beta_1)^2D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}^2-2(\beta_4-\beta_1)^2(\beta_3-\beta_1)(\beta_3-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}^2+(\beta_2-\beta_1)^2(\beta_4-\beta_3)^2\times$$
$$\times(\beta_5-\beta_1)^2D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}^2;$$
$$k_{3,2}=0.$$

Отже,

$$k_3 = -(\beta_2-\beta_1)^2(\beta_4-\beta_1)^2(\beta_5-\beta_1)^2 D_{\varepsilon 3}D_{\varepsilon 2}^2 - 2(\beta_2-\beta_1)^2(\beta_4-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)(\beta_4-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3} -$$
$$-(\beta_2-\beta_1)^2(\beta_4-\beta_2)^2(\beta_5-\beta_2)^2 D_{\varepsilon 1}^2 D_{\varepsilon 3} - (\beta_2-\beta_1)^2(\beta_3-\beta_1)^2(\beta_5-\beta_1)^2 D_{\varepsilon 2}^2 D_{\varepsilon 4} - (\beta_2-\beta_1)^2(\beta_3-\beta_2)^2 \times$$
$$\times(\beta_5-\beta_2)^2 D_{\varepsilon 1}^2 D_{\varepsilon 4} - 2(\beta_2-\beta_1)^2(\beta_3-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)(\beta_3-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 4} + (\beta_2-\beta_1)^4 \times$$
$$\times \sum_{i>j=1}^{4}((\beta_i-\beta_j)^2 \prod_{\substack{k=1,\,k\neq i\\ k\neq j}}^{4} D_{\varepsilon k})D_{\varepsilon 5} + (\beta_2-\beta_1)^2(\beta_4-\beta_1)^2(\beta_5-\beta_2)^2 D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3} + (\beta_2-\beta_1)^2(\beta_3-\beta_1)^2(\beta_5-\beta_2)^2 \times$$
$$\times D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 4} + (\beta_2-\beta_1)^4(\beta_5-\beta_2)^2 D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3}D_{\varepsilon 4} + (\beta_2-\beta_1)^2(\beta_3-\beta_2)^2(\beta_5-\beta_2)^2 D_{\varepsilon 1}^2 D_{\varepsilon 4} + (\beta_2-\beta_1)^2 \times$$
$$\times(\beta_4-\beta_2)^2(\beta_5-\beta_2)^2 D_{\varepsilon 1}^2 D_{\varepsilon 3} + (\beta_2-\beta_1)^2(\beta_4-\beta_1)^2(\beta_5-\beta_1)^2 D_{\varepsilon 2}^2 D_{\varepsilon 3} + (\beta_2-\beta_1)^2(\beta_3-\beta_1)^2(\beta_5-\beta_1)^2 \times$$
$$\times D_{\varepsilon 2}^2 D_{\varepsilon 4} + (\beta_2-\beta_1)^2(\beta_3-\beta_2)^2(\beta_5-\beta_1)^2 D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 4} + (\beta_2-\beta_1)^2(\beta_5-\beta_1)^2(\beta_4-\beta_2)^2 D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3} +$$
$$+(\beta_2-\beta_1)^4(\beta_5-\beta_1)^2 D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3}D_{\varepsilon 4};$$

$$k_3 = (\beta_2-\beta_1)^2 D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3}((\beta_4-\beta_1)^2(\beta_5-\beta_2)^2 - 2(\beta_4-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)(\beta_4-\beta_2)(\beta_5-\beta_2) + (\beta_5-\beta_1)^2 \times$$
$$\times(\beta_4-\beta_2)^2) + (\beta_2-\beta_1)D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 4}((\beta_3-\beta_1)^2(\beta_5-\beta_2)^2 - 2(\beta_3-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)(\beta_3-\beta_2)(\beta_5-\beta_2) +$$
$$+(\beta_3-\beta_2)^2(\beta_5-\beta_1)^2) + (\beta_2-\beta_1)^4(\beta_5-\beta_1)^2 D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3}D_{\varepsilon 4} + (\beta_2-\beta_1)^4 D_{\varepsilon 5}\sum_{i>j=1}^{4}((\beta_i-\beta_j)^2 \prod_{\substack{k=1,\,k\neq i,\\ k\neq j}}^{4} D_{\varepsilon k});$$

$$k_3 = (\beta_2-\beta_1)^2 D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3}((\beta_4-\beta_1)(\beta_5-\beta_2) - (\beta_4-\beta_2)(\beta_5-\beta_1))^2 + (\beta_2-\beta_1)^2 D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 4}((\beta_3-\beta_1)\times$$
$$\times(\beta_5-\beta_2) - (\beta_5-\beta_1)(\beta_3-\beta_2))^2 + (\beta_2-\beta_1)^4(\beta_5-\beta_1)^2 D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3}D_{\varepsilon 4} + (\beta_2-\beta_1)^4 D_{\varepsilon 5}\sum_{i>j=1}^{4}((\beta_i-\beta_j)^2 \prod_{\substack{k=1,\,k\neq i,\\ k\neq j}}^{4} D_{\varepsilon k});$$

$$k_3 = (\beta_2-\beta_1)^4(\beta_5-\beta_4)^2 D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3} + (\beta_2-\beta_1)^4(\beta_5-\beta_3)^2 D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 4} + (\beta_2-\beta_1)^4(\beta_5-\beta_1)^2 D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3}D_{\varepsilon 4} +$$
$$+(\beta_2-\beta_1)^4 D_{\varepsilon 5}\sum_{i>j=1}^{4}((\beta_i-\beta_j)^2 \prod_{\substack{k=1,\,k\neq i,\\ k\neq j}}^{4} D_{\varepsilon k}).$$

І, нарешті, $k_3 = (\beta_2-\beta_1)^4 \sum_{i>j=1}^{4}((\beta_i-\beta_j)^2 \prod_{\substack{k=1,\,k\neq i,\\ k\neq j}}^{4} D_{\varepsilon k}).$

Обчислимо тепер k_2 у формулі (3.176), використовуючи формули (3.170) та (3.172):

$$k_2 = 2[((\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)D_{\varepsilon 2}+(\beta_3-\beta_2)(\beta_4-\beta_2)D_{\varepsilon 1})((\beta_4-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon 2}+(\beta_4-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon 1})\times$$
$$\times D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}+((\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)D_{\varepsilon 2}+(\beta_3-\beta_2)(\beta_4-\beta_2)D_{\varepsilon 1})D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}(\beta_3-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon 2}+(\beta_3-\beta_2)\times$$
$$\times(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon 1})+D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}(\beta_4-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon 2}+(\beta_4-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon 1})((\beta_3-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon 2}+$$
$$+(\beta_3-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon 1})]-2[((\beta_2-\beta_1)^2D_{\varepsilon 3}+(\beta_3-\beta_2)^2D_{\varepsilon 1}+(\beta_3-\beta_1)^2D_{\varepsilon 2})((\beta_4-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon 2}+$$
$$+(\beta_4-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon 1})D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}+((\beta_2-\beta_1)^2D_{\varepsilon 4}+(\beta_4-\beta_2)^2D_{\varepsilon 1}+(\beta_4-\beta_1)^2D_{\varepsilon 2})((\beta_3-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)\times$$
$$\times D_{\varepsilon 2}+(\beta_3-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon 1})D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}]-(D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3}+D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3}+D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2})((\beta_4-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon 2}+(\beta_4-\beta_2)\times$$
$$\times(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon 1})^2-(D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 4}+D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 4}+D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2})((\beta_3-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon 2}+(\beta_3-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon 1})^2+$$
$$+((\beta_2-\beta_1)^2\sum_{i=1}^{4}\prod_{j=1,\ j\neq i}D_{\varepsilon j}+(D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})\sum_{i,j=1,i>j}^{4}((\beta_i-\beta_j)^2\prod_{\substack{k=1,\,k\neq i,\\ k\neq j}}^{4}D_{\varepsilon k}))((\beta_2-\beta_1)^2D_{\varepsilon 5}+(\beta_5-\beta_2)^2D_{\varepsilon 1}+$$
$$+(\beta_5-\beta_1)^2D_{\varepsilon 2})+(\beta_2-\beta_1)^2\sum_{i,j=1,i>j}^{4}((\beta_i-\beta_j)^2\prod_{\substack{k=1,\,k\neq i,\\ k\neq j}}^{4}D_{\varepsilon k})(D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 5}+D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 5}+D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}).$$

Спростимо отриманий коефіцієнт k_2. Для цього обчислимо спочатку суму доданків, що мають множники $D_{\varepsilon 1}^3 D_{\varepsilon 2}$:

$$k_{2,1}=2(\beta_3-\beta_2)(\beta_4-\beta_2)^2(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon 1}^3D_{\varepsilon 2}+2(\beta_3-\beta_2)^2(\beta_4-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon 1}^3D_{\varepsilon 2}+2(\beta_3-\beta_2)(\beta_4-\beta_2)\times$$
$$\times(\beta_5-\beta_2)^2D_{\varepsilon 1}^3D_{\varepsilon 2}-2(\beta_3-\beta_2)^2(\beta_4-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon 1}^3D_{\varepsilon 2}-2(\beta_3-\beta_2)(\beta_4-\beta_2)^2(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon 1}^3D_{\varepsilon 2}-$$
$$-(\beta_4-\beta_2)^2(\beta_5-\beta_2)^2D_{\varepsilon 1}^3D_{\varepsilon 2}-(\beta_3-\beta_2)^2(\beta_5-\beta_2)^2D_{\varepsilon 1}^3D_{\varepsilon 2}+(\beta_4-\beta_3)^2(\beta_5-\beta_2)^2D_{\varepsilon 1}^3D_{\varepsilon 2};$$
$$k_{21}=(\beta_5-\beta_2)^2D_{\varepsilon 1}^3D_{\varepsilon 2}((\beta_4-\beta_3)^2-(\beta_3-\beta_2)^2-(\beta_4-\beta_2)^2+2(\beta_3-\beta_2)(\beta_4-\beta_2)).$$

Отже, $k_{2,1}=0$.

Згрупуємо тепер доданки з множником $D_{\varepsilon 1}^2 D_{\varepsilon 2}^2$.

$$k_{2,2}=2(\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)(\beta_4-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon 1}^2D_{\varepsilon 2}^2+2(\beta_3-\beta_2)(\beta_4-\beta_2)(\beta_4-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon 1}^2D_{\varepsilon 2}^2+$$
$$+2(\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)(\beta_3-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon 1}^2D_{\varepsilon 2}^2+2(\beta_3-\beta_2)(\beta_4-\beta_2)(\beta_3-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon 1}^2D_{\varepsilon 2}^2+$$
$$+2(\beta_4-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)(\beta_3-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon 1}^2D_{\varepsilon 2}^2+2(\beta_4-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)(\beta_3-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon 1}^2D_{\varepsilon 2}^2-$$
$$-2(\beta_3-\beta_2)^2(\beta_4-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon 1}^2D_{\varepsilon 2}^2-2(\beta_3-\beta_1)^2(\beta_4-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon 1}^2D_{\varepsilon 2}^2-2(\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_2)^2\times$$
$$\times(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon 1}^2D_{\varepsilon 2}^2-2(\beta_3-\beta_2)(\beta_4-\beta_1)^2(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon 1}^2D_{\varepsilon 2}^2-2(\beta_5-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)(\beta_4-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon 1}^2D_{\varepsilon 2}^2+$$
$$+(\beta_4-\beta_3)^2(\beta_5-\beta_2)^2D_{\varepsilon 1}^2D_{\varepsilon 2}^2+(\beta_4-\beta_3)^2(\beta_5-\beta_1)^2D_{\varepsilon 1}^2D_{\varepsilon 2}^2+(\beta_2-\beta_1)^2(\beta_4-\beta_3)^2D_{\varepsilon 1}^2D_{\varepsilon 2}^2. \tag{3.177}$$

Коефіцієнт $k_{2,2}$, обчислений за формулою (3.177), на відміну від коефіцієнта $k_{2,1}$, взагалі кажучи, ненульовий. Знайдемо тепер в k_2 доданки з множником $D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}^3$:

$$k_{2,3}=2(\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)^2(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}^3+2(\beta_3-\beta_1)^2(\beta_4-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}^3+2(\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)\times$$
$$\times(\beta_5-\beta_1)^2D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}^3-2(\beta_3-\beta_1)^2(\beta_4-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}^3-2(\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)^2(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}^3-$$
$$-(\beta_4-\beta_1)^2(\beta_5-\beta_1)^2D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}^3-(\beta_3-\beta_1)^2(\beta_5-\beta_1)^2D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}^3+(\beta_4-\beta_3)^2(\beta_5-\beta_1)^2D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}^3;$$
$$k_{2,3}=(\beta_5-\beta_1)^2D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}^3(2(\beta_3-\beta_1)(\beta_4-\beta_1)-(\beta_4-\beta_1)^2-(\beta_3-\beta_1)^2+(\beta_4-\beta_3)^2).$$

Отже, $k_{2,3}=0$, як і вираз $k_{2,1}$. Запишемо коефіцієнт k_2 у вигляді суми $k_2=k_{2,2}+k_{2,r}$ і обчислимо значення $k_{2,r}$. При цьому кожен доданок в $k_{2,r}$ повинен містити множник, відмінний від $D_{\varepsilon1}$ та $D_{\varepsilon2}$, тобто $D_{\varepsilon3}$, чи $D_{\varepsilon4}$, чи $D_{\varepsilon5}$:

$$k_{2,r}=-2(\beta_2-\beta_1)^2(\beta_4-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon1}^2D_{\varepsilon2}D_{\varepsilon3}-2(\beta_2-\beta_1)^2(\beta_4-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon2}^2D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon3}-2(\beta_2-\beta_1)^2\times$$
$$\times(\beta_3-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon1}^2D_{\varepsilon2}D_{\varepsilon4}-2(\beta_2-\beta_1)^2(\beta_3-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon2}^2D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon4}-(D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon3}+D_{\varepsilon2}D_{\varepsilon3})\times$$
$$\times((\beta_4-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon2}+(\beta_4-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon1})^2-(D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon4}+D_{\varepsilon2}D_{\varepsilon4})((\beta_3-\beta_1)(\beta_5-\beta_1)D_{\varepsilon2}+$$
$$+(\beta_3-\beta_2)(\beta_5-\beta_2)D_{\varepsilon1})^2+(\beta_2-\beta_1)^2\sum_{i=1}^{4}\prod_{j=1,\,j\neq i}^{4}D_{\varepsilon j}((\beta_2-\beta_1)^2D_{\varepsilon5}+(\beta_5-\beta_2)^2D_{\varepsilon1}+(\beta_5-\beta_1)^2D_{\varepsilon2})+$$
$$+(D_{\varepsilon1}+D_{\varepsilon2})\sum_{i,j=1,\,i>j}^{4}((\beta_i-\beta_j)^2\prod_{\substack{k=1,\,k\neq i,\\k\neq j}}^{4}D_{\varepsilon k}(\beta_2-\beta_1)^2D_{\varepsilon5}+(D_{\varepsilon1}+D_{\varepsilon2})((\beta_2-\beta_1)^2D_{\varepsilon3}D_{\varepsilon4}+(\beta_3-\beta_1)^2D_{\varepsilon2}D_{\varepsilon4}+$$
$$+(\beta_4-\beta_1)^2D_{\varepsilon2}D_{\varepsilon3}+(\beta_3-\beta_2)^2D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon4}+(\beta_4-\beta_2)^2D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon3})((\beta_5-\beta_2)^2D_{\varepsilon1}+(\beta_5-\beta_1)^2D_{\varepsilon2}+(\beta_2-\beta_1)^2\times$$
$$\times\sum_{i,j=1,\,i>j}^{4}((\beta_i-\beta_j)^2\prod_{\substack{k=1,\,k\neq i,\\k\neq j}}^{4}D_{\varepsilon k})(D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon5}+D_{\varepsilon2}D_{\varepsilon5})+(\beta_2-\beta_1)^2D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon2}((\beta_2-\beta_1)^2D_{\varepsilon3}D_{\varepsilon4}+(\beta_3-\beta_1)^2D_{\varepsilon2}D_{\varepsilon4}+$$
$$+(\beta_4-\beta_1)^2D_{\varepsilon2}D_{\varepsilon3}+(\beta_3-\beta_2)^2D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon4}+(\beta_4-\beta_2)^2D_{\varepsilon1}D_{\varepsilon3}).$$

Враховуючи отримані формули, а також обчисливши значення k_1 у формулі (3.176), отримаємо таку формулу:

$$\det A_5=((\beta_2-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon1}+D_{\varepsilon2})^2\sum_{i=1}^{5}\prod_{j=1,\,j\neq i}^{5}D_{\varepsilon j}\,. \qquad (3.178)$$

Як видно з виразу (3.178), визначник $\det A_5$ відмінний від нуля. Отже, система (3.150) має єдиний розв'язок, який можна обчислити згідно правила Крамера. Застосовуючи метод математичної індукції, можна довести, що у випадку портфеля з n активів визначник відповідної системи (n-2)-го порядку обчислюється за формулою:

$$\det A_5=((\beta_2-\beta_1)^2D_m+D_{\varepsilon1}+D_{\varepsilon2})^{n-3}\sum_{i=1}^{5}\prod_{j=1,\,j\neq i}^{5}D_{\varepsilon j}\,, \qquad (3.179)$$

а отже, система (3.150) має єдиний розв'язок для довільних значень n. Отриманий розв'язок системи (3.150) можна записати у вигляді:

$$x_j = B_j / d_n + c_j, \; j = \overline{3,n}, \tag{3.180}$$

де обчислені величини B_j, c_j залежать від параметрів портфеля $(\mu_1,...,\mu_n,\beta_1,...,\beta_n,D_m,D_{\varepsilon 1},...D_{\varepsilon n})$, але не від допустимого ризику портфеля D_p. Від D_p залежить поки що невідома величина d_n, яку можна знайти з рівняння (3.148), підставивши в нього формулу (3.180):

$$d_n = ([(\beta_2-\beta_1)(\beta_1+\sum_{j=3}^{n}(\beta_j-\beta_1)(B_j/d_n+c_j)D_m-(1-\sum_{j=3}^{n}(B_j/d_n+c_j))D_{\varepsilon 1}]^2-(\beta_2-\beta_1)^2 D_m+D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})\times$$
$$\times((\beta_1+\sum_{j=3}^{n}(\beta_j-\beta_1)(B_j/d_n+c_j))^2 D_m+(1-\sum_{j=3}^{n}(B_j/d_n+c_j))^2 D_{\varepsilon 1}+\sum_{j=3}^{n}(B_j/d_n+c_j)^2 D_{\varepsilon j}-D_p)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.181}$$

Після піднесення до квадрату і зведення до спільного знаменника рівняння (3.181) зводиться до квадратного, з якого при додатності дискримінанта можна знайти невідоме значення d_n.

Для портфеля, що не містить безризикового активу, при заданому рівні його дисперсії згідно з моделлю Шарпа, знайдено частки вкладень (3.180) в його активи, які дають змогу максимізувати дохідність інвестиційного портфеля. Модель дає можливість прийняти рішення про формування інвестиційного портфеля, всі активи якого є ризикові, враховуючи заданий рівень дисперсії самого портфеля, і одночасно досягнути максимальної дохідності.

3.3. Формування інвестиційного портфеля на основі мінімізації його коефіцієнта варіації

Здебільшого інвестиційний портфель будують на основі одного з двох принципів: або мінімізують ризик портфеля при заданому рівні дохідності, або максимізують дохідність портфеля при фіксованому рівні ризику.

Однак цілком можлива ситуація, в якій особа, що приймає рішення про формування портфеля, вагається у виборі цих принципів. У такому випадку доцільно запропонувати інший принцип, який не передбачає фіксації ні сподіваного рівня дохідності, ні сподіваного рівня ризику. В якості такого принципу можна вибрати принцип мінімізації коефіцієнта варіації. Оскільки коефіцієнт варіації є відношенням середнього квадратичного відхилення дохідності до математичного сподівання дохідності портфеля, то, очевидно, чим менше це відношення, тим меншим повинен бути його чисельник, тобто ризик, і тим більшим знаменник, тобто дохідність портфеля.

Отже, нехай у портфель повинно ввійти *n* активів, кожен з яких характеризується своєю сподіваною дохідністю μ_i, де *i* змінюється від 1 до *n* і своїм середнім квадратичним відхиленням $\sigma_i\,(i=\overline{1,n})$. Потрібно визначити частки вкладень в ці активи $x_i\,(i=\overline{1,n})$ таким чином, щоб коефіцієнт варіації портфеля $k=\dfrac{\sigma}{\mu}$ був мінімальний, при цьому повинна виконуватися умова $x_1+\cdots+x_n=1$.

Якщо активи порфеля є незалежними величинами, то середнє квадратичне відхилення портфеля обчислюється за формулою:

$$\sigma=\sqrt{\sigma_1^2x_1^2+\cdots+\sigma_n^2x_n^2}\,.$$

Відповідно коефіцієнт варіації портфеля виражається такою формулою:

$$k=\frac{\sqrt{\sigma_1^2x_1^2+\cdots+\sigma_n^2x_n^2}}{\mu_1x_1+\cdots\mu_nx_n}\,. \qquad (3.182)$$

Очевидно, що точка мінімуму величини (3.182) збігається з точкою мінімуму її квадрату:

$$k^2 = K = \frac{\sigma_1^2 x_1^2 + \cdots + \sigma_n^2 x_n^2}{(\mu_1 x_1 + \cdots \mu_n x_n)^2}. \tag{3.183}$$

Підставимо у формулу (3.183) значення

$$x_n = 1 - x_1 - \cdots - x_{n-1}. \tag{3.184}$$

Отримаємо наступну формулу:

$$K = \frac{\sigma_1^2 x_1^2 + \cdots + \sigma_{n-1}^2 x_{n-1}^2 + \sigma_n^2 (1 - x_1 - \cdots - x_{n-1})^2}{(\mu_1 x_1 + \cdots \mu_{n-1} x_{n-1} + \mu_n (1 - x_1 - \cdots - x_{n-1}))^2}, \tag{3.185}$$

де $x_1 \ge 0, \cdots, x_{n-1} \ge 0; \quad x_1 + \cdots + x_{n-1} \le 1.$

Враховуючи те, що $\sigma_1^2 = D_1, \cdots, \sigma_n^2 = D_n$ перепишемо формулу (3.185) в зручнішому вигляді:

$$K = \frac{D_1 x_1^2 + \cdots + D_{n-1} x_{n-1}^2 + D_n (1 - x_1 - \cdots - x_{n-1})^2}{(\mu_1 x_1 + \cdots \mu_{n-1} x_{n-1} + \mu_n (1 - x_1 - \cdots - x_{n-1}))^2}. \tag{3.186}$$

Знайдемо тепер частинні похідні величини *K* за величинами $x_1, \cdots, x_{n-1}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K}{\partial x_1} = & \left[2D_1 x_1 - 2D_n (1 - x_1 - \cdots - x_{n-1}))(\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_{n-1} x_{n-1} + \mu_n (1 - x_1 - \cdots - x_{n-1})) - \right. \\
& \left. - 2(\mu_1 - \mu_n)(D_1 x_1^2 + \cdots + D_{n-1} x_{n-1}^2 + D_n (1 - x_1 - \cdots - x_{n-1})^2 \right] / \\
& /(\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_{n-1} x_{n-1} + \mu_n (1 - x_1 - \cdots - x_{n-1}))^3; \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial K}{\partial x_{n-1}} = 2 & \left[D_{n-1} x_{n-1} - D_n (1 - x_1 - \cdots - x_{n-1}))(\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_{n-1} x_{n-1} + \mu_n (1 - x_1 - \cdots - x_{n-1})) - \right. \\
& \left. - (\mu_{n-1} - \mu_n)(D_1 x_1^2 + \cdots + D_{n-1} x_{n-1}^2 + D_n (1 - x_1 - \cdots - x_{n-1})^2 \right] / \\
& /(\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_{n-1} x_{n-1} + \mu_n (1 - x_1 - \cdots - x_{n-1}))^3.
\end{aligned} \tag{3.187}$$

Прирівнявши частинні похідні (3.187) до нуля, отримаємо ситему рівнянь:

$$
\begin{cases}
(D_1 x_1 - D_n(1 - x_1 - \cdots - x_{n-1}))(\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_{n-1} x_{n-1} + \mu_n(1 - x_1 - \cdots - x_{n-1})) - \\
\quad - (\mu_1 - \mu_n)(D_1 x_1^2 + \cdots + D_{n-1} x_{n-1}^2 + D_n(1 - x_1 - \cdots - x_{n-1})^2) = 0; \\
\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(D_{n-1} x_{n-1} - D_n(1 - x_1 - \cdots - x_{n-1}))(\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_{n-1} x_{n-1} + \mu_n(1 - x_1 - \cdots - x_{n-1})) - \\
\quad - (\mu_{n-1} - \mu_n)(D_1 x_1^2 + \cdots + D_{n-1} x_{n-1}^2 + D_n(1 - x_1 - \cdots - x_{n-1})^2) = 0.
\end{cases}
\tag{3.188}
$$

Як бачимо, система (3.188) нелінійна і знайти її аналітичний розв'язок в загальному випадку досить складно. Тому для її розв'язання при конкретних числових параметрах D_i та $\mu_i (i = \overline{1,n})$ доцільно застосувати наближені методи.

Але в окремих випадках систему (3.188) можна розв'язати явно.

Наприклад, якщо портфель складається з двох активів, тобто n=2, то система (3.188) зведеться до одного рівняння:

$$(D_1 x_1 - D_2(1 - x_1))(\mu_1 x_1 + \mu_2(1 - x_1))(\mu_1 - \mu_2)(D_1 x_1^2 + D_2(1 - x_1)^2) = 0 \tag{3.189}$$

або після зведення однорідних членів:

$$(D_1 x_1 - D_2(1 - x_1))\mu_2 - D_2(\mu_1 - \mu_2)x_1 + 2D_2(\mu_1 - \mu_2)x_1 - D_2(\mu_1 - \mu_2) = 0;$$

$$(D_1 \mu_2 + D_2 \mu_1)x_1 = D_2 \mu_1;$$

$$x_1 = \frac{D_2 \mu_1}{D_1 \mu_2 + D_2 \mu_1}. \tag{3.190}$$

Відповідно

$$x_2 = 1 - x_1 = 1 - \frac{D_2 \mu_1}{D_1 \mu_2 + D_2 \mu_1} = \frac{D_1 \mu_2}{D_1 \mu_2 + D_2 \mu_1}. \tag{3.191}$$

Підставимо значення x_1 згідно формули (3.190) у формулу (3.186) при n=2:

$$K = \frac{D_1 \left(\dfrac{D_2 \mu_1}{D_1 \mu_2 + D_2 \mu_1} \right)^2 + D_2 \left(\dfrac{D_1 \mu_2}{D_1 \mu_2 + D_2 \mu_1} \right)^2}{\left(\dfrac{D_2 \mu_1^2}{D_1 \mu_2 + D_2 \mu_1} + \dfrac{D_1 \mu_2^2}{D_1 \mu_2 + D_2 \mu_1} \right)^2};$$

$$K = \frac{D_1 D_2^2 \mu_1^2 + D_2 D_1^2 \mu_2^2}{(D_2^2 \mu_1^2 + D_1^2 \mu_2^2)^2}, \tag{3.192}$$

а, отже, мінімальне значення коефіцієнта варіації портфеля виразиться формулою:

$$k = \frac{\sqrt{D_1 D_2^2 \mu_1^2 + D_2 D_1^2 \mu_2^2}}{D_2^2 \mu_1^2 + D_1^2 \mu_2^2}, \tag{3.193}$$

якщо при цьому частки вкладень в активи портфеля визначаються формулами (3.190) та (3.191).

Розглянемо ще один випадок, коли система (3.188) розв'язується в явному вигляді.

Якщо сподівані дохідності всіх активів портфеля рівні між собою:

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n, \tag{3.194}$$

то система (3.188) стає лінійною:

$$\begin{cases} (D_1 + D_n)x_1 + D_n x_2 + \cdots + D_n x_{n-1} = D_n; \\ D_n x_1 + (D_2 + D_n)x_2 + \cdots + D_n x_{n-1} = D_n; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D_n x_1 + D_n x_2 + \cdots + (D_{n-1} + D_n)x_{n-1} = D_n. \end{cases} \tag{3.195}$$

Система (3.195) легко розв'язується методом Гауса; теоретично її розв'язок можна також подати формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \cdots; x_{n-1} = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta}.. \tag{3.196}$$

де Δ – головний визначник системи (3,195), а $\Delta_i (i = \overline{1, n-1})$ – її допоміжні визначники.

Неважко також переконатися, що до системи (3.195) зводиться також задача мінімізації ризику портфеля.

Справді, якщо потрібно мінімізувати ризик портфеля:

$$D = D_1 x_1^2 + \cdots + D_{n-1} x_{n-1}^2 + D_n (1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1})^2, \tag{3.197}$$

то прирівнявши до нуля частинні похідні $\frac{\partial D}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial D}{\partial x_{n-1}}$, отримаємо систему (3.195).

Повертаючись до портфеля з двох активів, дослідимо його також у випадку, коли ці активи не є незалежними між собою, а пов'язані певною кореляцією $\rho \neq 0$. Тоді квадрат коефіцієнта варіації такого портфеля виражається формулою:

$$K = \frac{D_1 x_1^2 + 2\rho\sqrt{D_1 D_2}\, x_1 x_2 + D_2 x_2^2}{(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2)^2}$$

або з урахуванням умови $x_2 = 1 - x_1$, формулою:

$$K = \frac{D_1 x_1^2 + 2\rho\sqrt{D_1 D_2}\, x_1 (1 - x_1) + D_2 (1 - x_1)^2}{(\mu_1 x_1 + \mu_2 (1 - x_1))^2}. \qquad (3.198)$$

Обчислимо похідну

$$\frac{dK}{dx_1} = \Big[(2D_1 x_1 + 2\rho\sqrt{D_1 D_2} - 4\rho\sqrt{D_1 D_2}\, x_1 - 2D_2 (1 - x_1))(\mu_1 x_1 + \mu_2 (1 - x_1)) - (\mu_1 - \mu_2) \times$$
$$\times (D_1 x_1^2 + 2\rho\sqrt{D_1 D_2}\,(1 - x_1) x_1 + D_2 (1 - x_1)^2)\Big] / (\mu_1 x_1 + \mu_2 (1 - x_1))^3.$$

(3.199)

Прирівнявши до нуля похідну (3.199), отримаємо рівняння:

$$(D_1 x_1 + \rho\sqrt{D_1 D_2} - 2\rho\sqrt{D_1 D_2}\, x_1 - 2D_2 (1 - x_1))(\mu_1 x_1 + \mu_2 (1 - x_1)) - (\mu_1 - \mu_2) \times$$
$$\times (D_1 x_1^2 + 2\rho\sqrt{D_1 D_2}\,(1 - x_1) x_1 + D_2 (1 - x_1)^2) = 0. \qquad (3.200)$$

Спростимо рівняння (3.200):

$$(\mu_1 D_2 + \mu_2 D_1 + \mu_1 \rho\sqrt{D_1 D_2} - 2\mu_2 \rho\sqrt{D_1 D_2} - 2\mu_1 \rho\sqrt{D_1 D_2} + 2\mu_2 \rho\sqrt{D_1 D_2} -$$
$$- \mu_1 \rho\sqrt{D_1 D_2})x_1 - D_2 \mu_1 + \mu_2 \rho\sqrt{D_1 D_2} = 0.$$

Розв’язок рівняння отримаємо за формулою:

$$x_1 = \frac{D_2 \mu_1 - \mu_2 \rho\sqrt{D_1 D_2}}{\mu_1 D_2 + \mu_2 D_1 - (\mu_1 + \mu_2)\rho\sqrt{D_1 D_2}}. \qquad (3.201)$$

Частка вкладень у другий актив виразиться аналогічною формулою

$$x_2 = \frac{D_1 \mu_2 - \mu_1 \rho\sqrt{D_1 D_2}}{\mu_1 D_2 + \mu_2 D_1 - (\mu_1 + \mu_2)\rho\sqrt{D_1 D_2}}. \qquad (3.202)$$

Формулами (3.201) та (3.202) можна беззастережно користуватися у випадку, коли кореляція між ними від’ємна: $\rho < 0$, тобто коли збільшення дохідності одного активу здебільшого призводить до зменшення дохідності іншого.

Справді, якщо $\rho < 0$, то легко бачити, що формули (3.201) та (3.202) задовольняють умови

$$x_1 > 0; \quad x_2 > 0 \text{ та } x_1 < 1; \quad x_2 < 1. \qquad (3.203)$$

Однак у випадку прямої кореляційної залежності ($\rho > 0$) між активами, виконання умови (3.203) потрібно перевіряти.

Мінімізація коефіцієнта варіації інвестиційного портфеля на основі формул (3.198), (3.201), (3.202) наведено в таблиці 3.4.

Таблиця 3.4

Формування інвесиційного портфеля з двох активів на основі мінімізації коефіцієнта варіації портфеля

Параметр	**Назва параметру**	**Значення**
μ_1	Сподівана дохідність 1-го активу	0,6
μ_2	Сподівана дохідність 2-го активу	0,8
D_1	Дисперсія дохідності 1-го активу	0,10
D_2	Дисперсія дохідності 2-го активу	0,15
ρ	Коефіцієнт кореляції	0,2
k	Мінімальний коефіцієнт варіації	0,39
x_1	Частка вкладень в 1-ий актив	0,519
x_2	Частка вкладень в 2-ий актив	0,481

При сподіваній дохідності 60% та 80% для першого та другого активів відповідно та коефіцієнтом кореляції між активами 0,2 отримано відповідні частки вкладень в активи: 51,9% - для першого активу та 48,1% – для другого. Розрахунки здійснено засобами MS Excel, які подано в додатку Б.4.

Висновки до третього розділу

1. Досліджено сподівану дохідність інвестиційного портфеля, що складається з трьох активів, між випадковими дохідностями двох з яких існує прямий кореляційний зв'язок, а випадкова дохідність третього активу є незалежною величиною від двох інших. Отримано модель (3.9) сподіваної дохідності такого інвестиційного портфеля, яка лінійно залежить від дохідностей кожного з активів і нелінійно залежить від дисперсій активів, фіксованої дисперсії всього портфеля та частки вкладень в незалежний актив. Виведено формули (3.18) і (3.23), які за умов (3.24) і (3.19) виражають оптимальні частки вкладень в третій та другий актив інвестиційного портфеля відповідно.

2. У випадку оберненої кореляційної залежності між випадковими дохідностями першого та другого активів отримано модель сподіваної дохідності (3.32) інвестиційного портфеля і формули для оптимальних часток вкладень (3.38), (3.39).

3. Досліджено мінімізацію можливого ризику інвестиційного портфеля з кількох активів, що залежать від систематичного ризику ринкового портфеля, мір чутливості дохідності кожного з активів до дохідності ринкового портфеля, залишкових дисперсій кожного з активів і часток вкладень в кожен з активів портфеля. Побудовано моделі (3.82) та (3.99), які виражають мінімальний ризик портфеля, що складається з двох і трьох активів відповідно. Для портфеля з чотирьох активів отримано формули для часток вкладень, що мінімізують ризик інвестиційного портфеля. Отримані формули легко узагальнюються і на випадок портфеля з довільною кількістю активів. Запропоновані моделі дозволяють особі, що приймає рішення про формування портфеля, визначити межі допустимого ризику портфеля.

4. Досліджено питання максимізації дохідності інвестиційного портфеля при фіксованому рівні ризику, який визначається згідно моделі Шарпа. Побудовано модель (3.121) сподіваної дохідності портфеля та модель (3.122) залежності змін дохідності портфеля від змін часток вкладень в

активи портфеля. Окремо проаналізовано випадок рівності між собою бета-коефіцієнтів активів портфеля.

5. Для випадку, коли особа, що формує інвестиційний портфель, вагається у виборі одного з двох існуючих підходів – чи мінімізувати ризик при заданій дохідності, чи максимізувати сподівану дохідність при фіксованому рівні ризику, пропонується підхід на основі мінімізації коефіцієнта варіації портфеля.

6. Виведено ряд розрахункових формул для побудови інвестиційного портфеля з мінімальним коефіцієнтом варіації для активів, випадкові величини дохідностей яких є незалежні між собою та для активів, що пов'язані певною кореляцією між собою як додатною так і від'ємною. Зокрема виведено систему алгебраїчних рівнянь (3.188) для знаходження оптимальних часток вкладень на основі критерію мінімізації коефіцієнта варіації.

РОЗДІЛ 4
ФОРМУВАННЯ ПОРТФЕЛЯ ЦІННИХ ПАПЕРІВ З РІЗНИМИ ТЕРМІНАМИ ДОХІДНОСТІ В УМОВАХ РИЗИКУ

4.1. Модель портфеля цінних паперів з різними термінами дохідності і випадковою ставкою дисконту

У попередніх параграфах досліджувалися питання з одноперіодними активами. Таке ж обмеження припускається і в усіх відомих нам літературних джерелах з портфельних інвестицій. Однак, в реальній економічній діяльності доволі часто зустрічаються ситуації, коли фінансові активи, наприклад, комерційної фірми, можуть дати дохід в близькому майбутньому, а інші, скажімо, будівельної компанії, приносять доходи суттєво пізніше, хоч, можливо, і більші. Тому для більш точної оцінки інвестицій, що можуть давати доходи в різні касові періоди, застосовують техніку дисконтування майбутніх надходжень. Але, оскільки ставка дисконту r є випадковою величиною, то і теперішня вартість майбутніх доходів теж буде випадковою, навіть якщо їх номінальна вартість буде фіксованою, попередньо обумовленою.

Отже, припустимо, що інвестору потрібно розподілити свої вкладення I_0 між цінними паперами одного виду, які можуть дати дохід I_1 (на всю суму I_0) через певний період T і другого виду, що принесуть дохід I_k через період kT, де $k > 1$.

При ставці дисконту r за період T теперішня вартість цих надходжень становитиме $i_1 = \dfrac{I_1}{1+r}$ та $i_k = \dfrac{I_k}{(1+r)^k}$ відповідно.

Припустимо, що ставка дисконту є випадковою рівномірно розподіленою величиною з функцією розподілу [50]:

$$F(r)=\begin{cases}\dfrac{r-a}{b-a}, & a<r\le b;\\ 0, & r\le a;\\ 1, & r>b,\end{cases} \qquad (4.1)$$

де a, b – відповідно нижня і верхня межі ставки дисконту.

Відповідно щільність розподілу норми дисконту виражається формулою:

$$f(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & b\ge r>a;\\ 0, & r\le a;\\ 0, & r>b.\end{cases} \qquad (4.2)$$

Для того щоб обчислити математичне сподівання доходу від активів обох видів, потрібно побудувати їх функції розподілу випадкових теперішніх вартостей доходів.

Для одноперіодних активів функція розподілу теперішньої вартості доходу матиме вигляд:

$$F(r)=\begin{cases}0, & i_1\le\dfrac{I_1}{1+b};\\ 1, & i_1>\dfrac{I_1}{1+a};\\ \dfrac{b+1-I_1/i_1}{b-a}, & \dfrac{I_1}{1+b}<i_1\le\dfrac{I_1}{1+a}.\end{cases} \qquad (4.3)$$

Щільність розподілу теперішньої вартості доходу знайдемо шляхом диференціювання формули (4.3).

$$f(i_1)=\begin{cases}0, & i_1\le\dfrac{I_1}{1+b};\, i_1>\dfrac{I_1}{1+a};\\ \dfrac{I_1}{(b-a)i_1^2}, & \dfrac{I_1}{1+b}<i_1\le\dfrac{I_1}{1+a}.\end{cases} \qquad (4.4)$$

На основі формули (4.4) можна обчислити математичне сподівання теперішньої вартості доходу I_1: $M(i_1)=\int\limits_{\frac{I_1}{1+b}}^{\frac{I_1}{1+a}} i_1\cdot f(i_1)di_1$; $M(i_1)=\int\limits_{\frac{I_1}{1+b}}^{\frac{I_1}{1+a}} \dfrac{I_1}{(b-a)i_1}di_1$;

$$M(i_1)=\frac{I_1}{(b-a)}\ln\frac{1+b}{1+a}. \tag{4.5}$$

Знайдемо ризик оцінки (4.5), тобто дисперсію теперішньої вартості надходження I_1:

$$D(i_1)=\int\limits_{\frac{I_1}{1+b}}^{\frac{I_1}{1+a}}\frac{I_1 di_1}{b-a}-\frac{I_1^2}{(b-a)^2}\ln^2\frac{1+b}{1+a};$$

$$D(i_1)=\frac{I_1^2}{(1+a)(1+b)}-\frac{I_1^2\ln^2\frac{1+b}{1+a}}{(b-a)^2}. \tag{4.6}$$

Для активів з тривалістю kT очікування надходжень функція розподілу виражається так:

$$F_k(i_k)=\begin{cases} 0, & i_k\le\frac{I_k}{(1+b)^k};\\ 1, & i_k>\frac{I_k}{(1+a)^k};\\ \left(b+1-\left(\frac{i_k}{I_k}\right)^{-\frac{1}{k}}\right)/(b-a), & i_k\in\left(\frac{I_k}{(1+b)^k};\frac{I_k}{(1+a)^k}\right].\end{cases} \tag{4.7}$$

Відповідно, щільність розподілу має вигляд:

$$f_k(i_k)=\begin{cases} 0, & i_k\le\frac{I_k}{(1+b)^k};\, i_k>\frac{I_k}{(1+a)^k};\\ \frac{1}{I_k k(b-a)}\left(\frac{i_k}{I_k}\right)^{-\frac{1}{k}-1}, & \frac{I_k}{(1+b)^k}<i_k\le\frac{I_k}{(1+a)^k}.\end{cases} \tag{4.8}$$

Знайдемо математичне сподівання теперішньої вартості майбутнього надходження I_k:

$$M(i_k)=\int\limits_{\frac{I_k}{(1+b)^k}}^{\frac{I_k}{(1+a)^k}}\frac{i_k(i_k/I_k)^{-1/k-1}}{I_k k(b-a)}di_k;\, M(i_k)=\frac{I_k^{1/k}}{k(b-a)}\left(\frac{I_k^{1-\frac{1}{k}}}{(1+a)^{k-1}}-\frac{I_k^{1-\frac{1}{k}}}{(1+b)^{k-1}}\right)\cdot\frac{1}{-\frac{1}{k}+1};$$

$$M(i_k)=\frac{I_k}{(k-1)(b-a)}\left(\frac{1}{(1+a)^{k-1}}-\frac{1}{(1+b)^{k-1}}\right). \tag{4.9}$$

Зокрема при k=2 математичне сподівання дорівнює

$$M(i_2)=\frac{I_2}{(b-a)}\frac{(b-a)}{(1+a)(1+b)};$$

$$M(i_2)=\frac{I_2}{(1+a)(1+b)}. \tag{4.10}$$

Формула (4.10) дозволяє сформулювати досить просте правило для обчислення математичного сподівання теперішньої вартості доходу від вкладення за другий період, а саме: номінальну вартість надходження за подвійний період потрібно продисконтувати за мінімальною можливою ставкою дисконту, а отриманий результат продисконтувати за максимальною ставкою дисконту (при рівномірному її розподілі).

Знайдемо міру ризику оцінки (4.9):

$$D(i_k)=\int_{\frac{I_k}{(1+b)^k}}^{\frac{I_k}{(1+a)^k}}\frac{i_k^2(i_k/I_k)^{-1-1/k}}{I_k k(b-a)}di_k-(M(i_k))^2. \tag{4.11}$$

Обчислимо інтеграл (4.11):

$$D(i_k)=\frac{I_k^{1/k}}{(2k-1)(b-a)}\left(\frac{I_k^{2-1/k}}{(1+a)^{2k-1}}-\frac{I_k^{2-1/k}}{(1+b)^{2k-1}}\right)-(M(i_k))^2.$$

Спростивши цей вираз і підставивши в нього формулу (4.9), отримаємо:

$$D(i_k)=\frac{I_k^2}{(2k-1)(b-a)}\left(\frac{1}{(1+a)^{2k-1}}-\frac{1}{(1+b)^{2k-1}}\right)-\frac{I_k^2}{(k-1)^2(b-a)^2}\left(\frac{1}{(1+a)^{2k-1}}-\frac{1}{(1+b)^{2k-1}}\right)^2. \tag{4.12}$$

Для другого періоду ризик, тобто дисперсія теперішньої вартості доходу становить:

$$D(i_2)=\frac{I_2^2}{3(b-a)}\left(\frac{1}{(1+a)^3}-\frac{1}{(1+b)^3}\right)-\frac{I_2^2}{(1+a)^2(1+b)^2};$$

$$D(i_2)=I_2^2\left(\frac{1}{3(b-a)}\left(\frac{(1+b)^3-(1+a)^3}{(1+a)^3(1+b)^3}\right)-\frac{1}{(1+a)^2(1+b)^2}\right);$$

$$D(i_2)=I_2^2\left(\frac{1}{3}\frac{(1+b)^2+(1+b)(1+a)+(1+a)^2}{(1+a)^3(1+b)^3}-\frac{1}{(1+a)^2(1+b)^2}\right);$$

$$D(i_2)=\frac{1}{3}I_2^2\frac{(b-a)^2}{(1+a)^3(1+b)^3}. \tag{4.13}$$

Маючи дисперсію (4.13), можна знайти середнє квадратичне відхилення теперішньої вартості другого надходження:

$$\sigma(i_2) = \frac{I_2(b-a)}{\sqrt{3}(1+a)^{3/2}(1+b)^{3/2}}\,. \tag{4.14}$$

Отже, з великою долею ймовірності можна вважати, що теперішня вартість *pv (present value)* доходу I_2 знаходиться в межах

$$\frac{I_2}{(1+a)(1+b)} - \frac{I_2(b-a)}{\sqrt{3}(1+a)^{3/2}(1+b)^{3/2}} \le pv(I_2) \le \frac{I_2}{(1+a)(1+b)} + \frac{I_2(b-a)}{\sqrt{3}(1+a)^{3/2}(1+b)^{3/2}}\,. \tag{4.15}$$

Припустимо тепер, що інвестор вирішив вкласти частину x своїх коштів в короткотерміновий актив з тим, щоб через один період отримати номінальний дохід xI_1, а решту (1-x) – в більш тривалий актив з тим, щоб отримати через k періодів номінальний дохід $I_k(1-x)$. На основі формули (4.5) та (4.9) можна знайти математичне сподівання теперішньої вартості доходу такого портфеля:

$$M(i) = \frac{xI_1}{b-a}\ln\frac{1+b}{1+a} + \frac{(1-x)I_k}{(k-1)(b-a)}\left(\frac{1}{(1+a)^{k-1}} - \frac{1}{(1+b)^{k-1}}\right). \tag{4.16}$$

Обчислення математичного сподівання теперішньої вартості доходу інвестиційного портфеля з різнотерміновими активами (формула (4.16)) подано у таблиці 4.1. Обрахунки виконано засобами MS Excel і наведено в додатку В.1.

Для того щоб знайти ризик, тобто дисперсію теперішньої вартості доходів такого портфеля, потрібно побудувати її функцію розподілу.

Мінімальне значення теперішньої вартості доходу портфеля досягається при найбільшій дисконтній ставці $r = b$.

$$i_{\min} = \frac{xI_1}{1+b} + \frac{(1-x)I_k}{(1+b)^k} = i_b\,, \tag{4.17}$$

а максимальне – при найменшій дисконтній ставці $r = a$:

$$i_{\max} = \frac{xI_1}{1+a} + \frac{(1-x)I_k}{(1+a)^k} = i_a\,. \tag{4.18}$$

Таблиця 4.1

Математичне сподівання теперішньої вартості доходу портфеля з різнотерміновими активами, які мають сталі доходності

Параметр	Назва параметра	Значення
I_1	Дохід від вкладень в короткотерміновий актив через період *T* (тис. грн.)	500
I_k	Дохід від вкладень в довготерміновий актив через період *kT* (тис. грн.)	1000
k	Відношення періодів між різнотерміновими активами	3
a	Нижня межа ставки дисконту	0,3
b	Верхня межа ставки дисконту	0,4
x	Частка коштів вкладена в короткотерміновий актив	0,4
$M(i)$	Математичне сподівання теперішньої вартості доходу портфеля (тис. грн.)	392,75

На основі формул (4.17) та (4.18) отримуємо:

$$F(i)=\begin{cases} 0, & i<i_b; \\ 1, & i\ge i_a. \end{cases} \tag{4.19}$$

Щоб обчислити значення функції розподілу на проміжку $i_b \le i < i_a$, потрібно розв’язати рівняння:

$$\frac{xI_1}{1+r}+\frac{(1-x)I_k}{(1+r)^k}=i. \tag{4.20}$$

Отже, якщо $r(i)$ - корінь рівняння (4.20), то

$$F(i)=\frac{b-r(i)}{b-a}, \quad i_b \le i < i_a. \tag{4.21}$$

Розв’яжемо рівняння (4.20) при *k* =2:

$$\frac{xI_1}{1+r}+\frac{(1-x)I_2}{(1+r)^2}=i; \quad \frac{1}{1+r}=\frac{-xI_1 \pm \sqrt{x^2I_1^2+4(1-x)I_2 i}}{2(1-x)I_2}.$$

Додатний корінь отримаємо при виборі знаку “+” перед радикалом в останній формулі:

$$r = \frac{2(1-x)I_2}{xI_1 + \sqrt{x^2 I_1^2 + 4(1-x)I_2 i}} - 1. \qquad (4.22)$$

Підставивши формулу (4.22) в рівність (4.21), отримаємо:

$$F(i) = \frac{b+1}{b-a} - \frac{2(1-x)I_2}{(b-a)(xI_1 + \sqrt{x^2 I_1^2 + 4(1-x)I_2 i})}, \qquad (4.23)$$

де $i_b \le i < i_a$.

Побудована функція нелінійно залежить від верхньої та нижньої межі ставки дисконту, а також від доходів кожного з активів.

Продиференціювавши вираз (4.23) за змінною *i*, отримаємо функцію щільності розподілу теперішньої вартості доходу портфеля:

$$f(i) = \frac{2(1-x)I_2}{(b-a)(xI_1 + \sqrt{x^2 I_1^2 + 4(1-x)I_2 i})^2} \frac{2(1-x)I_2}{\sqrt{x^2 I_1^2 + 4(1-x)I_2 i}}, \qquad (4.24)$$

$$i_b \le i < i_a.$$

Маючи функцію (4.24), можна знайти дисперсію випадкової величини – теперішньої вартості доходу портфеля:

$$D(i) = \int_{i_b}^{i_a} f(i) i^2 di - (M(i))^2 . \qquad (4.25)$$

$$D(i) = \frac{4(1-x)^2 I_2^2}{(b-a)} \int_{i_b}^{i_a} \frac{i^2 di}{(xI_1 + \sqrt{x^2 I_1^2 + 4(1-x)I_2 i})^2 \sqrt{x^2 I_1^2 + 4(1-x)I_2 i}} - (M(i))^2 .$$

Для зручності обчислення останнього інтегралу зробимо заміну :

$$\sqrt{x^2 I_1^2 + 4(1-x)I_2 i} = t; \quad i = \frac{t^2 - x^2 I_1^2}{4(1-x)I_2}; \quad di = \frac{tdt}{2(1-x)I_2}.$$

Тоді

$$D(i) = \frac{4(1-x)^2 I_2^2}{(b-a)} \int_{t_b}^{t_a} \frac{(t^2 - x^2 I_1^2)^2 dt}{32(1-x)^3 I_2^3 (xI_1 + t)^2} - (M(i))^2, \qquad (4.26)$$

де $t_a = \sqrt{x^2 I_1^2 + 4(1-x)I_2 i_a}$, $\quad t_b = \sqrt{x^2 I_1^2 + 4(1-x)I_2 i_b}$.

Обчислимо вираз (4.26):

$$D(i)=\frac{1}{8(b-a)(1-x)I_2}\int_{t_b}^{t_a}(t-xI_1)(t-xI_1)dt-(M(i))^2;$$

$$D(i)=\frac{1}{8(b-a)(1-x)I_2}\int_{t_b}^{t_a}(t^2-2xI_1t+x^2I_1^2)dt-(M(i))^2;$$

$$D(i)=\frac{1}{8(b-a)(1-x)I_2}\left[\frac{1}{3}(x^2I_1^2+4(1-x)I_2i_a)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(x^2I_1^2+4(1-x)I_2i_b)^{\frac{3}{2}}-xI_1\times\right.$$
$$\left.\times 4(1-x)I_2(i_a-i_b)+x^2I_1^2\left(\sqrt{x^2I_1^2+4(1-x)I_2i_a}-\sqrt{x^2I_1^2+4(1-x)I_2i_b}\right)\right]-(M(i))^2.$$

Підставивши в останню формулу вирази (4.16), (4.17) та (4.18) при k=2, отримаємо:

$$D(i)=\frac{1}{8(b-a)(1-x)I_2}\left[\frac{1}{3}\left(x^2I_1^2+4(1-x)I_2\left(\frac{xI_1}{1+a}+\frac{(1-x)I_2}{(1+a)^2}\right)\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\left(x^2I_1^2+4(1-x)I_2\times\right.\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{xI_1}{1+b}+\frac{(1-x)I_2}{(1+b)^2}\right)\right)^{\frac{3}{2}}-4I_1I_2x(1-x)\left(\frac{xI_1}{1+a}+\frac{(1-x)I_2}{(1+a)^2}-\frac{xI_1}{1+b}-\frac{(1-x)I_2}{(1+b)^2}\right)+x^2I_1^2\times$$
$$\left.\times\left(\sqrt{x^2I_1^2+4(1-x)I_2\left(\frac{xI_1}{1+a}+\frac{(1-x)I_2}{(1+a)^2}\right)}-\sqrt{x^2I_1^2+4(1-x)I_2\left(\frac{xI_1}{1+b}+\frac{(1-x)I_2}{(1+b)^2}\right)}\right)\right]-$$
$$-\left(\frac{xI_1}{b-a}\ln\frac{1+b}{1+a}+\frac{(1-x)I_2}{(1+a)(1+b)}\right)^2.$$

(4.27)

Знаючи математичне сподівання (4.16) та дисперсію (4.27) теперішньої вартості доходу інвестиційного портфеля, можна вибрати оптимальне для інвестора значення частки коштів x та (1-x) вкладення коштів в активи.

Отримані формули дають змогу приймати рішення про розподіл коштів між активами портфеля з різними термінами дохідності, з випадковою рівномірно розподіленою дисконтною ставкою, однак з фіксованими майбутніми вартостями доходів. Запропонований підхід можна використовувати для формування інвестиційного портфеля з більшою кількістю активів, що мають різні періоди дохідності.

4.2. Модель інвестиційного портфеля з різнотерміновими активами, що можуть приносити випадкові номінальні доходи

Припустимо, що номінальний дохід I_k розрахованої на k періодів активу, є нефіксованою, а випадковою величиною. Нехай ця випадкова величина є рівномірно розподіленою в межах від A_k до B_k. Зокрема, при $k=1$ номінальний дохід I_1 рівномірно розподілений від A_1 до B_1. Теперішня вартість доходу i_1 виражається формулою:

$$i_1 = \frac{I_1}{1+r}, \tag{4.28}$$

де r – ставка дисконту, I_1 та r – випадкові величини.

Отже, реально теперішня вартість доходу може мати будь-яке значення (згідно формули (4.28)), яке відповідає довільній точці прямокутника: $[A_1, B_1] \times [a; b]$ (рис. 4.1).

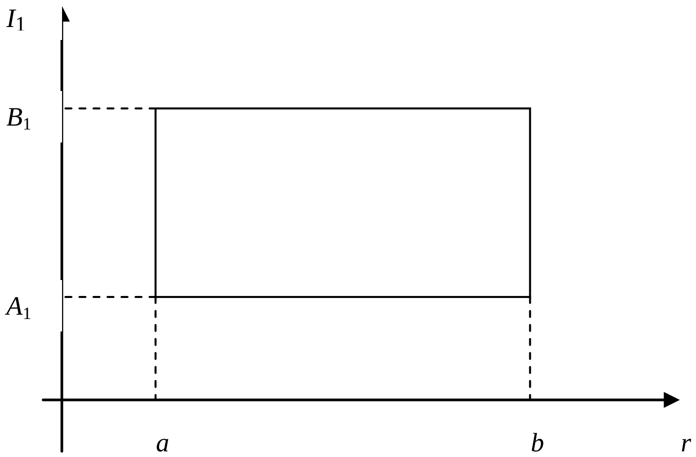

Рис.4.1. Область визначення теперішньої вартості доходу при рівномірно розподілених номінальному доході і ставці дисконту.

Щоб обчислити математичне сподівання теперішньої вартості $M(i_1)$ доходу, потрібно побудувати спочатку її функцію розподілу $F(i_1)$.

Для цього знайдемо мінімальну теперішню вартість доходу. Очевидно, вона отримається при мінімальній номінальній вартості A_1 та максимальній ставці дисконту b, тобто в правій нижній точці прямокутника на рис. 4.1:

$$i_{\min} = \frac{A_1}{1+b}. \tag{4.29}$$

Максимальне значення теперішньої вартості доходу досягається в лівій верхній точці (a, B_1) цього прямокутника:

$$i_{\max} = \frac{B_1}{1+a}. \tag{4.30}$$

Отже, $F(i_1) = 1$, якщо $i > i_{\max} = \frac{B_1}{1+a}$ і $F(i_1) = 0$, якщо $i \le i_{\min} = \frac{A_1}{1+b}$.

Знайдемо тепер значення функції розподілу для значень i_1, що трохи перевищують мінімальне. Легко переконатися, що це значення дорівнює відношенню площі криволінійного трикутника, обмеженого прямими лініями $I_1 = A_1$, $r = b$ та кривою $i_1 = \frac{I_1}{1+r}$ до (рис. 4.2) площі всього прямокутника.

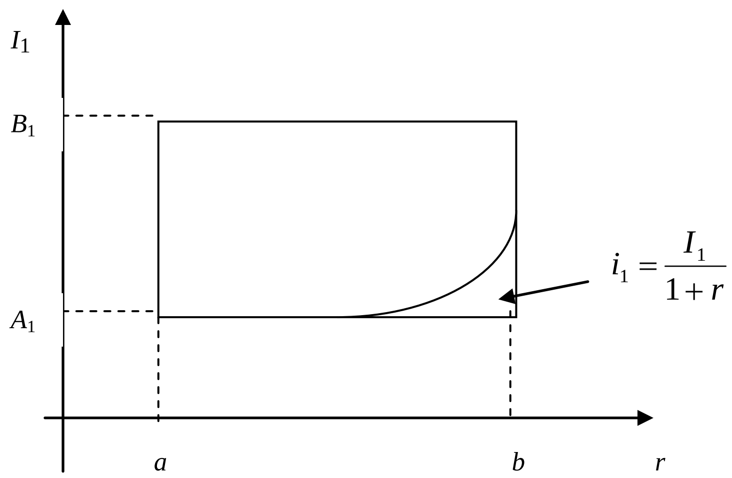

Рис. 4.2. Графік залежності випадкового доходу від ставки дисконту при невеликих i_1

Мінімальну можливу дисконтну ставку, тобто абсцису лівої нижньої вершини криволінійного трикутника знайдемо з рівняння:

$$i_1 = \frac{A_1}{1+r}. \tag{4.31}$$

Звідси

$$r = \frac{A_1}{i_1} - 1. \tag{4.32}$$

Очевидно, отримане значення (4.32) повинно задовольняти умову $r \ge a$, тобто

$$\frac{A_1}{i_1}-1\geq a;\ \frac{A_1}{i_1}\geq 1+a;\ i_1\leq\frac{A_1}{1+a}. \tag{4.33}$$

Максимально можливий номінальний дохід, тобто ордината правої верхньої точки криволінійного трикутника визначається рівнянням:

$$i_1=\frac{I_1}{1+b}. \tag{4.34}$$

Звідси $$I_1=i_1(1+b). \tag{4.35}$$

Отримане значення (4.35) не повинно перевищувати величини B_1:

$$i_1(1+b)\leq B_1. \tag{4.36}$$

За умов (4.33) та (4.36) знайдемо значення функції розподілу $F(i_1)$ у вигляді інтеграла:

$$F(i_1)=\frac{1}{(b-a)(B_1-A_1)}\int_{A_1/i_1-1}^{b}(i_1(1+r)-A_1)dr. \tag{4.37}$$

Обчислимо інтеграл (4.37):

$$F(i_1)=\frac{1}{(b-a)(B_1-A_1)}\left[(i_1-A_1)(b-A_1/i_1+1)+\frac{i_1}{2}(b^2-(A_1/i_1-1)^2)\right], \tag{4.38}$$

якщо $\frac{A_1}{1+b}<i_1\leq\min\left\{\frac{A_1}{1+a};\frac{B_1}{1+b}\right\}$.

Дослідимо тепер поведінку функції розподілу у випадку, коли теперішня вартість i_1 доходу знаходиться у межах

$$\min\left\{\frac{A_1}{1+a};\frac{B_1}{1+b}\right\}<i_1\leq\max\left\{\frac{A_1}{1+a};\frac{B_1}{1+b}\right\}. \tag{4.39}$$

Розглянемо спочатку випадок, коли $\min\left\{\frac{A_1}{1+a};\frac{B_1}{1+b}\right\}=\frac{A_1}{1+a}$. Тоді умову (4.39) можна записати в простішому вигляді:

$$\frac{A_1}{1+a}<i_1\leq\frac{B_1}{1+b}. \tag{4.40}$$

Тоді ймовірність того, що теперішня вартість доходу буде меншою, ніж i_1, виразиться відношення площі криволінійної трапеції до площі прямокутника (рис. 4.3).

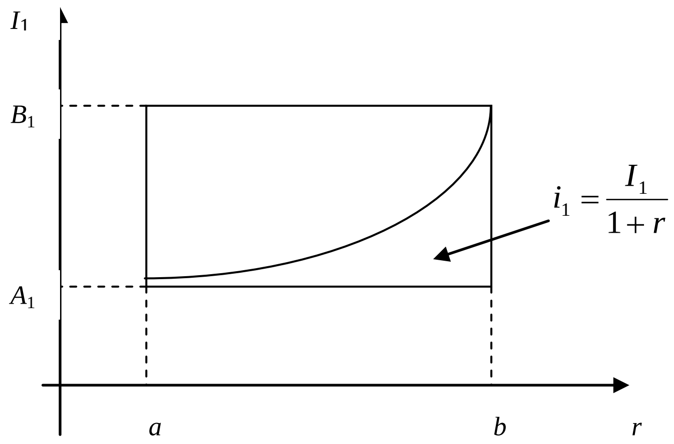

Рис. 4.3. Графік залежності доходу від дисконтної ставки для випадку, коли виконується умова $\frac{A_1}{1+a} < i_1 \le \frac{B_1}{1+b}$.

Знайдемо значення функції розподілу у вигляді такого інтегралу:

$$F(i_1) = \int_a^b \frac{i_1(1+r) - A_1}{(b-a)(B_1 - A_1)} dr, \qquad (4.41)$$

якщо $i_1 \in \left(\frac{A_1}{1+a}; \frac{B_1}{1+b} \right]$.

Обчислимо інтеграл (4.41):

$$F(i_1) = \frac{1}{(b-a)(B_1 - A_1)} \left[(i_1 - A_1)(b-a) + \frac{i_1}{2}(b^2 - a^2) \right];$$

$$F(i_1) = \frac{1}{B_1 - A_1} \left(i_1 - A_1 + \frac{i_1(b+a)}{2} \right), \qquad (4.42)$$

якщо $i_1 \in \left(\frac{A_1}{1+a}; \frac{B_1}{1+b} \right]$.

Як випливає з формули (4.42), на проміжку $i_1 \in \left(\frac{A_1}{1+a}; \frac{B_1}{1+b} \right]$ функція розподілу теперішньої вартості доходу змінюється за лінійним законом.

Якщо теперішня вартість доходу i_1 перевищує величину $\frac{B_1}{1+b}$, але менша від максимальної $\frac{B_1}{1+a}$, то криволінійна трапеція на рис. 4.3 перетворюється в криволінійний п’ятикутник (рис. 4.4).

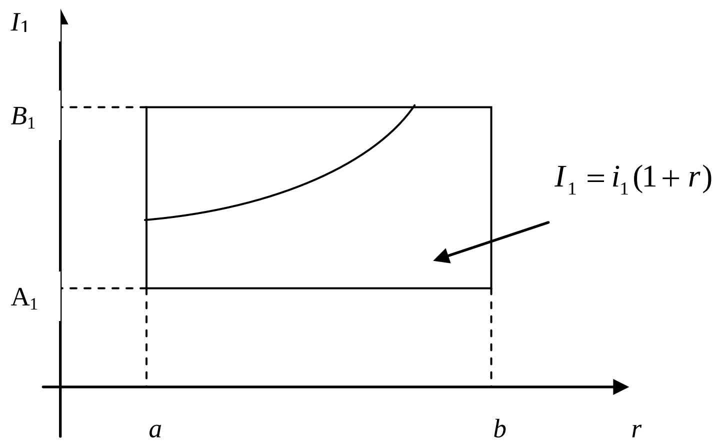

Рис. 4.4. Графік залежності доходу від дисконтної ставки при постійній теперішній вартості доходу i_1, що знаходиться в межах $\frac{B_1}{1+b} < i_1 \le \frac{B_1}{1+a}$.

Щоб знайти його площу, знайдемо спочатку дисконтну ставку, при якій максимальний номінальний дохід знеціниться до величини i_1:

$$i_1 = \frac{B_1}{1+r}. \tag{4.43}$$

З рівняння (4.43) отримаємо:

$$r = \frac{B_1}{i_1} - 1. \tag{4.44}$$

Отже, функцію F у випадку $i_1 \in \left(\frac{B_1}{1+b}; \frac{B_1}{1+a} \right]$, можна побудувати в такому вигляді:

$$F(i_1) = 1 - \frac{1}{(b-a)(B_1 - A_1)} \int_a^{B_1/i_1 - 1} (B_1 - i_1(1+r))dr. \tag{4.45}$$

Обчисливши інтеграл (4.45), отримаємо:

$$F(i_1) = 1 - \frac{i_1}{2(b-a)(B_1 - A_1)} \left(\frac{B_1}{i_1} - 1 - a \right)^2, \tag{4.46}$$

якщо $i_1 \in \left(\frac{B_1}{1+b}; \frac{B_1}{1+a} \right]$.

Отже, за умови $\frac{A_1}{1+a} < \frac{B_1}{1+b}$ функція розподілу теперішньої вартості доходу має вигляд:

$$F(i_1) = \begin{cases} 0, & i_1 \le \frac{A_1}{1+b}; \\ \frac{1}{(b-a)(B_1-A_1)}\left[(i_1 - A_1)(b - A_1/i_1 + 1) + \frac{i_1}{2}(b^2 - (A_1/i_1 - 1)^2)\right], & \frac{A_1}{1+b} < i_1 \le \frac{A_1}{1+a}; \\ \frac{1}{B_1 - A_1}\left((i_1 - A_1 + \frac{i_1(b+a)}{2}\right), & \frac{A_1}{1+a} < i_1 \le \frac{B_1}{1+b}; \\ 1 - \frac{i_1}{2(b-a)(B_1-A_1)}\left(\frac{B_1}{i_1} - 1 - a\right)^2, & i_1 \in \left(\frac{B_1}{1+b}; \frac{B_1}{1+a}\right]; \\ 1, & i_1 > \frac{B_1}{1+a}. \end{cases} \tag{4.47}$$

Для того, щоб знайти функцію щільності розподілу, продиференціюємо формулу (4.47) за змінною i_1:

$$f(i_1) = \begin{cases} 0, & i_1 \le \frac{A_1}{1+b}, i_1 > \frac{B_1}{1+a}; \\ \frac{1}{(b-a)(B_1-A_1)}\left[b - \frac{A_1}{i_1} + 1 + \frac{A_1}{i_1^2}(i_1 - A_1) + \frac{1}{2}\left(b^2 - \left(\frac{A_1}{i_1 - 1}\right)^2\right) + \frac{A_1}{i_1}\left(\frac{A_1}{i_1} - 1\right)\right], & \frac{A_1}{1+b} < i_1 \le \frac{A_1}{1+a}; \\ \frac{1 + (b+a)/2}{B_1 - A_1}, & \frac{A_1}{1+a} < i_1 \le \frac{B_1}{1+b}; \\ -\frac{(B_1/i_1 - 1 - a)^2}{2(b-a)(B_1-A_1)} + \frac{B_1}{i_1(b-a)(B_1-A_1)}(B_1/i_1 - 1 - a), & \frac{B_1}{1+b} < i_1 \le \frac{B_1}{1+a}. \end{cases}$$

Отриману формулу можна спростити:

$$f(i_1)=\begin{cases}0, & i_1\le\dfrac{A_1}{1+b},\ i_1>\dfrac{B_1}{1+a};\\ \dfrac{1}{(b-a)(B_1-A_1)}\left(b-\dfrac{A_1}{i_1}+1+\dfrac{1}{2}\left(b^2-\left(\dfrac{A_1}{i_1}-1\right)^2\right)\right), & \dfrac{A_1}{1+b}<i_1\le\dfrac{A_1}{1+a};\\ \dfrac{1+(b+a)/2}{B_1-A_1}, & \dfrac{A_1}{1+a}<i_1\le\dfrac{B_1}{1+b};\\ -\dfrac{B_1/i_1-1-a}{2(b-a)(B_1-A_1)}(B_1/i_1-1-a), & \dfrac{B_1}{1+b}<i_1\le\dfrac{B_1}{1+a}.\end{cases}\qquad(4.48)$$

Математичне сподівання теперішньої вартості доходу виражається інтегралом:

$$M(i_1)=\int\limits_{A_1/(1+b)}^{B_1/(1+a)} i_1 f(i_1)di_1\,.\qquad(4.49)$$

Підставивши в інтеграл (4.49) функцію (4.48) отримаємо:

$$M(i_1)=\int\limits_{A_1/(1+b)}^{A_1/(1+a)}\frac{(b+1)^2 i_1-A_1^2/i_1}{2(b-a)(B_1-A_1)}di_1+\int\limits_{A_1/(1+a)}^{B_1/(1+b)}\frac{1+(b+a)/2}{B_1-A_1}i_1 di_1+$$
$$+\int\limits_{B_1(1+b)}^{B_1(1+a)}\frac{B_1^2/i_1-(a+1)^2 i_1}{2(b-a)(B_1-A_1)}di_1.\qquad(4.50)$$

Проінтегрувавши вираз (4.50), отримаємо:

$$M(i_1)=\frac{A_1^2}{4(b-a)(B_1-A_1)}\left(\frac{(b+1)^2}{(a+1)^2}-1\right)+\frac{1+(b+a)/2}{2(B_1-A_1)}\left(\frac{B_1^2}{(1+b)^2}-\frac{A_1^2}{(1+a)^2}\right)-\frac{A_1^2}{4(b-a)(B_1-A_1)}\times$$
$$\times\ln\frac{1+b}{1+a}+\frac{B_1^2}{2(b-a)(B_1-A_1)}\ln\frac{1+b}{1+a}-\frac{B_1^2}{4(b-a)(B_1-A_1)}\left(1-\frac{(1+a)^2}{(1+b)^2}\right);$$

або після спрощення

$$M(i_1)=\frac{A_1^2}{4(b-a)(B_1-A_1)}\left(\frac{(b+1)^2}{(a+1)^2}-1\right)+\frac{1+(b+a)/2}{2(B_1-A_1)}\left(\frac{B_1^2}{(1+b)^2}-\frac{A_1^2}{(1+a)^2}\right)-\frac{B_1^2}{4(b-a)(B_1-A_1)}\times$$
$$\times\left(1-\frac{(1+a)^2}{(1+b)^2}\right)+\frac{B_1+A_1}{2(b-a)}\ln\frac{1+b}{1+a}.$$

і остаточно

$$M(i_1)=\frac{B_1+A_1}{2(b-a)}\ln\frac{1+b}{1+a}.\qquad(4.51)$$

Знаючи математичне сподівання (4.51) теперішньої вартості доходу, можна обчислити його дисперсію:

$$D(i_1) = \int\limits_{A_1/(1+b)}^{B_1/(1+a)} i_1^2 f(i_1) di_1 - (M(i_1))^2 . \tag{4.52}$$

Підставивши у формулу (4.52) функцію (4.48) отримаємо

$$D(i_1) = \int\limits_{A_1/(1+b)}^{A_1/(1+a)} \frac{(b+1)^2 i_1^2 - A_1^2}{2(b-a)(B_1-A_1)} di_1 + \int\limits_{A_1/(1+a)}^{B_1/(1+b)} \frac{1+(b+a)/2}{B_1-A_1} i_1^2 di_1 + \int\limits_{B_1(1+b)}^{B_1/(1+a)} \frac{B_1^2 - (a+1)^2 i_1^2}{2(b-a)(B_1-A_1)} di_1 - (M(i_1))^2$$

.

Проінтегруємо цю формулу:

$$D(i_1) = \frac{(b+1)^2 A_1^3}{6(b-a)(B_1-A_1)} \left(\frac{1}{(1+a)^3} - \frac{1}{(1+b)^3} \right) + \frac{1+(b+a)/2}{3(B_1-A_1)} \left(\frac{B_1^3}{(1+b)^3} - \frac{A_1^3}{(1+a)^3} \right) -$$

$$- \frac{A_1^3}{2(b-a)(B_1-A_1)} \left(\frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+b} \right) + \frac{B_1^3}{2(b-a)(B_1-A_1)} \left(\frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+b} \right) - \frac{(a+1)^2 B_1^3}{6(b-a)(B_1-A_1)} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{(1+a)^3} - \frac{1}{(1+b)^3} \right) - \frac{A_1^2}{4(b-a)(B_1-A_1)} \left(\frac{(b+1)^2}{(a+1)^2} - 1 \right) - \frac{B_1^2}{4(b-a)(B_1-A_1)} \left(1 - \frac{(1+a)^2}{(1+b)^2} \right) +$$

$$+ \frac{1+(b+a)/2}{2(B_1-A_1)} \left(\frac{B_1^2}{(1+b)^2} - \frac{A_1^2}{(1+a)^2} \right) + \frac{B_1+A_1}{2(b-a)} \ln \frac{1+b}{1+a} \Bigg)^2 .$$

(4.53)

Дослідимо тепер випадок, коли виконується нерівність $\frac{A_1}{1+a} > \frac{B_1}{1+b}$. Тоді залежність номінального доходу I_1 від дисконтної ставки r при фіксованій теперішній вартості доходу $i_1 \in \left(\frac{B_1}{1+b}; \frac{A_1}{1+a} \right]$зображається таким графіком (рис. 4.5).

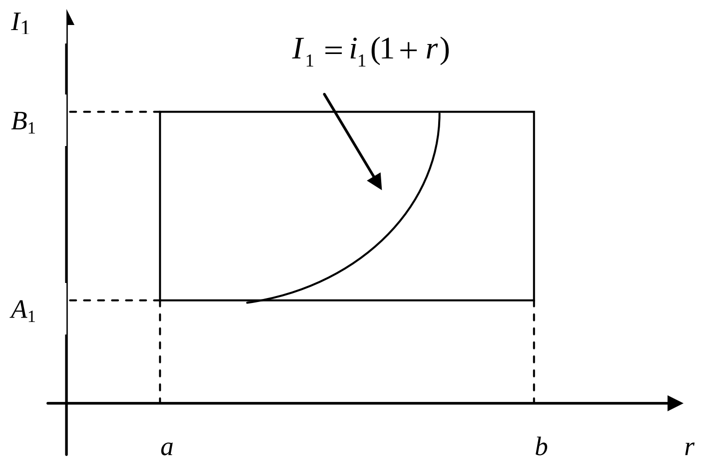

Рис. 4.5. Графік залежності доходу від дисконтної ставки при постійній теперішній вартості доходу i_1 для випадку $B_1/(1+b) < i_1 \le A_1/(1+a)$

Знайдемо норму дисконту r, при якій мінімальний дохід забезпечить теперішню вартість доходу на рівні i=1: $i_1 = \dfrac{A_1}{1+r}$; $r = \dfrac{A_1}{i_1} - 1$. Максимальний номінальний дохід теж може знецінитися до рівня i_1, але при більшій нормі дисконту $i_1 = \dfrac{B_1}{1+r}$; $r = \dfrac{B_1}{i_1} - 1$.

Враховуючи отримані формули, побудуємо функцію розподілу при $i_1 \in \left(\dfrac{B_1}{1+b}; \dfrac{A_1}{1+a} \right]$:

$$F(i_1) = \frac{1}{(b-a)(B_1 - A_1)} \left(\int\limits_{A_1/i_1 - 1}^{B_1/i_1 - 1} (i_1(1+r) - A_1)dr + (B_1 - A_1)(b + 1 - B_1/i_1 \right). \qquad (4.54)$$

Проінтегрувавши вираз (4.54), отримаємо:

$$F(i_1) = \frac{1}{(b-a)(B_1 - A_1)} \Big((i_1 - A_1)(B_1/i_1 - A_1/i_1) + \frac{i_1}{2}(B_1/i_1 - 1)^2 - \frac{i_1}{2}(A_1/i_1 - 1)^2 + $$
$$+ (B_1 - A_1)(b + 1 - B_1/i_1) \Big), \qquad (4.55)$$

якщо $i_1 \in \left(\dfrac{B_1}{1+b}; \dfrac{A_1}{1+a} \right]$.

Отже, при виконанні умови $\dfrac{A_1}{1+a} > \dfrac{B_1}{1+b}$ функція розподілу $F(i_1)$ має такий вигляд:

$$F(i_1)=\begin{cases} 0, & i_1 \le \dfrac{A_1}{1+b};\\ \dfrac{1}{(b-a)(B_1-A_1)}\left[(i_1-A_1)(b-A_1/i_1+1)+\dfrac{i_1}{2}(b^2-(A_1/i_1-1)^2)\right], & \dfrac{A_1}{1+b}<i_1\le\dfrac{B_1}{1+b};\\ \dfrac{1}{(b-a)(B_1-A_1)}\Big((i_1-A_1)(B_1/i_1-A_1/i_1)+\dfrac{i_1}{2}(B_1/i_1-1)^2-\dfrac{i_1}{2}(A_1/i_1-1)^2+ & \\ \quad +(B_1-A_1)(b+1-B_1/i_1\Big), & \dfrac{B_1}{1+b}<i_1\le\dfrac{A_1}{1+a};\\ 1-\dfrac{i_1}{2(b-a)(B_1-A_1)}(B_1/i_1-1-a)^2, & \dfrac{A_1}{1+a}<i_1\le\dfrac{B_1}{1+a};\\ 1, & i_1>\dfrac{B_1}{1+a}. \end{cases} \qquad (4.56)$$

Відповідна їй функція щільності розподілу випадкової теперішньої вартості доходу виражається аналітично:

$$F(i_1)=\begin{cases} 0, & i_1\le\dfrac{A_1}{1+b};\, i_1>\dfrac{B_1}{1+a};\\ \dfrac{(b+1)^2-A_1^2/i_1^2}{2(b-a)(B_1-A_1)}, & \dfrac{A_1}{1+b}<i_1\le\dfrac{B_1}{1+b};\\ \dfrac{1}{(b-a)(B_1-A_1)}\Big[B_1/i_1-A_1/i_1+(i_1-A_1)(A_1/i_1^2-B_1/i_1^2)+\dfrac{1}{2}(B_1/i_1-1)^2-\dfrac{B_1}{i_1}(B_1/i_1-1)- & \\ \quad -\dfrac{1}{2}(A_1/i_1-1)^2--\dfrac{A_1}{i_1}(A_1/i_1-1)+\dfrac{B_1}{i_1^2}(B_1-A_1)\Big], & \dfrac{B_1}{1+b}<i_1\le\dfrac{A_1}{1+a};\\ \dfrac{B_1^2/i_1^2-(a+1)^2}{2(b-a)(B_1-A_1)}(B_1/i_1-1-a)^2, & \dfrac{A_1}{1+a}<i_1\le\dfrac{B_1}{1+a}. \end{cases}$$

(4.57)

На основі щільності розподілу (4.57) знайдемо математичне сподівання теперішньої вартості доходу:

$$M(i_1)=\int_{\frac{A_1}{1+b}}^{\frac{B_1}{1+b}}\frac{(b+1)^2 i_1-A_1^2/i_1}{2(b-a)(B_1-A_1)}di_1+\int_{\frac{B_1}{1+b}}^{\frac{A_1}{1+a}}\frac{(B_1+A_1)di_1}{2(b-a)i_1}+\int_{\frac{A_1}{1+a}}^{\frac{B_1}{1+a}}\frac{B_1^2/i_1-(a+1)^2 i_1}{2(b-a)(B_1-A_1)}di_1\,.$$

(4.58)

Проінтегрувавши формулу (4.58), отримаємо

$$M(i_1)=\frac{B_1+A_1}{2(b-a)}\left(\ln\frac{B_1}{A_1}+\ln\frac{A_1(1+b)}{B_1(1+a)}\right);$$

$$M(i_1)=\frac{B_1+A_1}{2(b-a)}\ln\frac{1+b}{1+a}. \tag{4.59}$$

Дисперсію теперішньої вартості доходу можна знайти за формулою:

$$D(i_1)=\int_{\frac{A_1}{1+b}}^{\frac{B_1}{1+b}}\frac{(b+1)^2 i_1^2-A_1^2/i_1}{2(b-a)(B_1-A_1)}di_1+\int_{\frac{B_1}{1+b}}^{\frac{A_1}{1+a}}\frac{(B_1+A_1)di_1}{2(b-a)}+\int_{\frac{A_1}{1+a}}^{\frac{B_1}{1+a}}\frac{B_1^2-(a+1)^2 i_1^2}{2(b-a)(B_1-A_1)}di_1-\left(\frac{(B_1+A_1)}{2(b-a)}+\ln\frac{1+b}{1+a}\right)^2$$

.Звідси

$$D(i_1)=\frac{1}{6(b-a)(B_1-A_1)}\cdot\frac{B_1^3-A_1^3}{(b+1)}-\frac{B_1^3-A_1^3}{6(b-a)(B_1-A_1)(a+1)}+\frac{B_1^2}{2(1+a)(b-a)}-$$

$$-\frac{A_1^2}{2(1+b)(b-a)}+\frac{B_1+A_1}{2(b-a)}\left(\frac{A_1}{1+a}-\frac{B_1}{1+b}\right)-\left(\frac{B_1+A_1}{2(b-a)}\ln\frac{1+b}{1+a}\right)^2.$$

$$D(i_1)=-\frac{B_1^2+B_1A_1+A_1^2}{6(a+1)(b+1)}+\frac{B_1^2+A_1^2}{2(a+1)(b+1)}+\frac{B_1A_1}{2(1+a)(b-a)}-$$

$$-\frac{B_1A_1}{2(b-a)(1+b)}-\left(\frac{B_1+A_1}{2(b-a)}\ln\frac{1+b}{1+a}\right)^2.$$

$$D(i_1)=\frac{B_1^2+B_1A_1+A_1^2}{3(a+1)(b+1)}-\left(\frac{B_1+A_1}{2(b-a)}\ln\frac{1+b}{1+a}\right)^2. \tag{4.60}$$

Дослідимо тепер теперішню вартість доходу, що очікується від k-періодного цінного паперу. Її можна оцінити за формулою, аналогічною до формули (4.28):

$$i_k=\frac{I_k}{(1+r)^k}. \tag{4.61}$$

Мінімальна теперішня вартість доходу виражається формулою аналогічною до (4.29):

$$i_{\min}=\frac{A_k}{(1+b)^k}, \tag{4.62}$$

а максимальна – аналогом формули (4.30):

$$i_{\max}=\frac{B_k}{(1+a)^k}. \tag{4.63}$$

Побудуємо функцію розподілу $F(i_k)$. Аналогічно до інтеграла (4.37) знайдемо

$$F(i_k) = \frac{1}{(b-a)(B_k - A_k)} \int_{(A_k/i_k)^{1/k}-1}^{b} (i_k(1+r)^k - A_k)dr . \qquad (4.64)$$

Проінтегруємо формулу (4.64), зробивши попередню заміну $1 + r \to r$

$$F(i_k) = \frac{1}{(b-a)(B_k - A_k)} \int_{(A_k/i_k)^{1/k}}^{b+1} (i_k r^k - A_k)dr ;$$

Тоді

$$F(i_k) = \frac{1}{(b-a)(B_k - A_k)} \left[\frac{i_k}{k+1} \left((b+1)^{k+1} - \left(\frac{A_k}{i_k} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right) - A_k \left(b + 1 - \left(\frac{A_k}{i_k} \right)^{\frac{1}{k}} \right) \right], \qquad (4.65)$$

якщо $\frac{A_k}{(1+b)^k} < i_k \le \min\left\{ \frac{A_k}{(1+a)^k}; \frac{B_k}{(1+b)^k} \right\}$.

Якщо виконується умова

$$\frac{A_k}{(1+a)^k} < \frac{B_k}{(1+b)^k}, \qquad (4.66)$$

то для значень i_k з проміжку $\frac{A_k}{(1+a)^k} < i_k \le \frac{B_k}{(1+b)^k}$ функція розподілу виражається інтегралом, аналогічно до (4.41):

$$F(i_k) = \frac{1}{(b-a)(B_k - A_k)} \int_{a}^{b} (i_k(1+r)^k - A_k)dr . \qquad (4.67)$$

Обчисливши інтеграл (4.67), отримаємо:

$$F(i_k) = \frac{1}{(b-a)(B_k - A_k)} \left[\frac{i_k}{k+1} \left((b+1)^{k+1} - (a+1)^{k+1} \right) - A_k(b-a) \right], \qquad (4.68)$$

Для значень i_k з проміжку $i_k \in \left(\frac{B_k}{(1+b)^k}; \frac{B_k}{(1+a)^k} \right)$ функція розподілу $F(i_k)$ виражається формулою $F(i_k) = \frac{1}{(b-a)(B_k - A_k)} \int_{a}^{(B_k/i_k)^{1/k}-1} (B_k - i_k(1+r)^k)dr$ або після інтегрування

$$F(i_k) = 1 - \frac{1}{(b-a)(B_k - A_k)} \left[B_k \left(\left(\frac{B_k}{i_k} \right)^{1/k} - 1 - a \right) - \frac{i_k}{k+1} \left(\left(\frac{B_k}{i_k} \right)^{(k+1)/k} - (a+1)^{k+1} \right) \right].$$

(4.69)

Об'єднавши формули (4.65), (4.68) та (4.69), побудуємо функцію розподілу за умови (4.66):

$$F(i_k)=\begin{cases} 0, & i_k \le \dfrac{A_k}{(1+b)^k}; \\ \dfrac{1}{(b-a)(B_k-A_k)}\left[\dfrac{i_k}{k+1}\left((b+1)^{k+1}-\left(\dfrac{A_k}{i_k}\right)^{\frac{k+1}{k}}\right)-A_k\left(b+1-\left(\dfrac{A_k}{i_k}\right)^{\frac{1}{k}}\right)\right], & \dfrac{A_k}{(1+b)^k}<i_k\le\dfrac{A_k}{(1+a)^k}; \\ \dfrac{1}{(b-a)(B_k-A_k)}\left[\dfrac{i_k}{k+1}\left((b+1)^{k+1}-(a+1)^{\frac{k+1}{k}}\right)-A_k(b-a)\right], & \dfrac{A_k}{(1+a)^k}<i_k\le\dfrac{B_k}{(1+b)^k}; \\ 1-\dfrac{1}{(b-a)(B_k-A_k)}\left[B_k\left(\left(\dfrac{B_k}{i_k}\right)^{1/k}-1-a\right)-\dfrac{i_k}{k+1}\left(\left(\dfrac{B_k}{i_k}\right)^{k+1}-(a+1)^{k+1}\right)\right], & \\ \quad i_k\in\left(\dfrac{B_k}{(1+b)^k};\dfrac{B_k}{(1+a)^k}\right]; & \\ 1, & i_k>\dfrac{B_k}{(1+a)^k}. \end{cases}$$

(4.70)

На основі отриманої формули побудуємо функцію щільності розподілу випадкової теперішньої вартості доходу i_k:

$$f(i_k)=\begin{cases} 0, & i_k\le\dfrac{A_k}{(1+b)^k};\, i_k>\dfrac{B_k}{(1+a)^k}; \\ \dfrac{1}{(b-a)(B_k-A_k)}\left(\dfrac{(b+1)^{k+1}}{k+1}-\dfrac{A_k^{\frac{k+1}{k}}\, i_k^{-\frac{k+1}{k}}}{k+1}\right), & \dfrac{A_k}{(1+b)^k}<i_k\le\dfrac{A_k}{(1+a)^k}; \\ \dfrac{1}{(b-a)(B_k-A_k)}\dfrac{(b+1)^{k+1}-(a+1)^{k+1}}{k+1}, & \dfrac{A_k}{(1+a)^k}<i_k\le\dfrac{B_k}{(1+b)^k}; \\ \dfrac{1}{(b-a)(B_k-A_k)(k+1)}\left(B_k^{\frac{k+1}{k}}\, i_k^{-\frac{k+1}{k}}-(a+1)^{k+1}\right), & \dfrac{B_k}{(1+b)^k}<i_k\le\dfrac{B_k}{(1+a)^k}. \end{cases}$$

(4.71)

Отже, тепер можна знайти математичне сподівання теперішньої вартості доходу:

$$M(i_k) = \frac{(1+b)^{k+1}A_k^2}{(k+1)(b-a)(B_k - A_k)}\left(\frac{1}{2(1+a)^{2k}} - \frac{1}{2(1+b)^{2k}}\right) - \frac{A_k^{\frac{k+1}{k}}}{(k+1)(b-a)(B_k - A_k)} \times$$

$$\times \int\limits_{\frac{A_k}{(1+b)^k}}^{\frac{A_k}{(1+a)^k}} i_k^{-\frac{1}{k}} di_k + \frac{(b+1)^{k+1} - (a+1)^{k+1}}{2(k+1)(b-a)(B_k - A_k)}\left(\frac{B_k^2}{(1+b)^{2k}} - \frac{A_k^2}{(1+a)^{2k}}\right) - \frac{(1+a)^{k+1}B_k^2}{2(k+1)(b-a)(B_k - A_k)} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{(1+a)^{2k}} - \frac{1}{(1+b)^{2k}}\right) + \frac{B_k^{\frac{k+1}{k}}}{(k+1)(b-a)(B_k - A_k)} \int\limits_{\frac{B_k}{(1+b)^k}}^{\frac{B_k}{(1+a)^k}} i_k^{-\frac{1}{k}} di_k$$

або після інтегрування

$$M(i_k) = \frac{(1+b)^{k+1}A_k^2 - (1+a)^{k+1}B_k^2}{2(k+1)(b-a)(B_k - A_k)}\left((1+a)^{-2k} - (1+b)^{-2k}\right) + \frac{(b+1)^{k+1} - (a+1)^{k+1}}{2(k+1)(b-a)(B_k - A_k)} \times$$

$$\times \left(\frac{B_k^2}{(1+b)^{2k}} - \frac{A_k^2}{(1+a)^{2k}}\right) + \frac{B_k^2 k - A_k^2 k}{(k^2-1)(b-a)(B_k - A_k)}\left(\frac{1}{(1+a)^{k-1}} - \frac{1}{(1+b)^{k-1}}\right). \qquad (4.72)$$

Якщо сформувати інвестиційний портфель вклавши частину λ коштів в одноперіодні цінні папери, а решту (1-λ) – в *k*-періодні, то на основі формули (4.51) та (4.72) можна обчислити математичне сподівання теперішньої вартості доходу портфеля:

$$M(i) = \frac{\lambda(B_1 + A_1)}{2(b-a)} \ln\frac{1+b}{1+a} + (1-\lambda)\frac{(1+b)^{k+1}A_k^2 - (1+a)^{k+1}B_k^2}{2(k+1)(b-a)(B_k - A_k)} \times$$

$$\times \left((1+a)^{-2k} - (1+b)^{-2k}\right) + (1-\lambda)\frac{(1+b)^{k+1} - (1+a)^{k+1}}{2(k+1)(b-a)(B_k - A_k)}\left(\frac{B_k^2}{(1+b)^{2k}} - \frac{A_k^2}{(1+a)^{2k}}\right) +$$

$$+ (1-\lambda)k\frac{B_k + A_k}{(k^2-1)(b-a)}\left(\frac{1}{(1+a)^{k-1}} - \frac{1}{(1+b)^{k-1}}\right), \qquad (4.73)$$

якщо при цьому виконуються умови

$$\frac{A_1}{1+a} < \frac{B_1}{1+b} \text{ та } \frac{A_k}{(1+a)^k} < \frac{B_k}{(1+b)^k}. \qquad (4.74)$$

Обчислення математичного сподівання теперішньої вартості доходу інвестиційного портфеля з різнотерміновими активами (формули (4.73), (4.74)) наведено у таблиці 4.2. Обчислення виконано засобами MS Excel і подано в додатку В.2.

Дані моделі дозволяють приймати рішення про розподіл коштів між активами портфеля з різними термінами дохідності з випадковою дисконтною ставкою і з випадковими рівномірно розподіленими майбутніми вартостями доходів. Для випадкової ставки дисконту нижня межа дисконтної ставки – 30% і верхня – 40%, при термінах відповідно 1 і 3 роки для портфеля, що складається з двох активів отримано сподівану теперішню дохідність 239,36.

Таблиця 4.2

Математичне сподівання теперішньої вартості доходу інвестиційного портфеля з різноперіодними активами

Параметр	**Назва параметру**	**Значення**
A_1	Нижня межа доходу від одноперіодного активу (тис. грн.)	200
B_1	Верхня межа доходу від одноперіодного активу (тис. грн.)	290
A_k	Нижня межа доходу від k-періодного активу (тис. грн.)	500
B_k	Верхня межа доходу від k-періодного активу (тис. грн.)	1100
a	Нижня межа ставки дисконту	0,3
b	Верхня межа ставки дисконту	0,4
k	Відношення періодів між різнотерміновими активами	3
λ	Частина коштів, вкладена в одноперіодні цінні папери	0,6
$M(i_1)$	Математичне сподівання теперішньої вартості доходу одноперіодного активу (тис. грн.)	181,56
$M(i_k)$	Математичне сподівання теперішньої вартості доходу k-періодного активу (тис. грн.)	326,05
$M(i)$	Математичне сподівання теперішньої вартості доходу портфеля (тис. грн.)	239, 36

Через слабку прогнозованість майбутніх доходів, що є характерним для фінансових ринків трансформаційних економік дана модель набуває особливого значення, оскільки враховує випадковість майбутніх доходів, і повинна обов’язково входити в базу моделей інвестиційного портфеля для систем підтримки прийняття інвестиційних рішень.

Висновки до четвертого розділу

1. Показано, що при наявності в портфелі активів з різними термінами дохідності цей фактор потрібно враховувати у формуванні інвестиційного портфеля.

2. Для випадку, коли випадкова ставка дисконту розподілена за рівномірним законом побудовано функцію розподілу (4.23) теперішньої вартості доходу портфеля, що складається з двох різнотермінових активів. Побудована функція нелінійно залежить від верхньої та нижньої межі ставки дисконту, а також від доходів кожного з активів.

3. Отримано моделі для математичного сподівання теперішньої вартості доходу інвестиційного портфеля (4.16) та для його ризику, тобто дисперсії (4.27). Знаючи математичне сподівання (4.16) та дисперсію (4.27) теперішньої вартості доходу інвестиційного портфеля, можна вибрати оптимальні для інвестора значення частки коштів вкладень в короткотермінові та довготермінові активи.

4. Запропоновані моделі дають змогу приймати рішення про розподіл коштів між активами портфеля з різними термінами дохідності, з випадковою рівномірно розподіленою дисконтною ставкою, однак з фіксованими майбутніми вартостями доходів.

5. Для випадку, коли ще й номінальні доходи від активів портфеля є випадковими рівномірно розподіленими величинами, виведено формулу (4.73) для математичного сподівання теперішньої вартості доходу портфеля. Складено Excel-програму для обчислення математичного сподівання теперішньої вартості доходу інвестиційного портфеля з різнотерміновими активами та рівномірно розподіленими номінальних доходів

короткотермінових та довготермінових активів. Це дає змогу інвесторам на її основі оптимально розподіляти кошти між активами портфеля з різними термінами дохідності.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

1. Проблематика формування інвестиційного портфеля є важливою складовою частиною економічної науки взагалі і фінансової теорії зокрема, що підтверджується актуальністю досліджень з даної проблематики. Як показує аналіз літературних джерел, теорії і практиці портфельних інвестицій в українській економічній науці приділялося недостатньо уваги. Сучасна портфельна теорія базується на застосуванні досить таки складних економіко-математичних моделей, розвиток яких потребуватиме праці ще багатьох дослідників.

2. У даному дослідженні проведено аналіз підходів щодо інвестиційної політики підприємства, розглянуто моделі формування структури інвестиційного портфеля, інвестиційної політики об’єкта управління із врахуванням наявних ресурсів і умов інвестиційного ринку, визначення пріоритетних цілей, підготовку та прийняття інвестиційних рішень.

3. Досліджено задачу формування оптимального інвестиційного портфеля, що складається з активів, дохідності яких є незалежними випадковими величинами і при цьому дохідність одного з активів є сталою величиною. Виведено формулу (2.7) сподіваної дохідності портфеля, яка враховує дохідності кожного з активів, їх дисперсії та допустиму дисперсію дохідності інвестиційного портфеля.

3.1. Методом диференціального числення функції з багатьма аргументами та теорії визначників знайдено точку екстремуму цієї дохідності, тобто значення часток вкладень в активи, при яких дохідність досягає свого екстремального значення, можливо, максимального, а, можливо, і мінімального. Доведено, що знайдені частки (2.30) надають дохідності портфеля максимального значення.

4. Дослідження дохідності інвестиційного портфеля проводилось також при заміні припущення про незалежність дохідностей активів на припущення про лінійну залежність ризику кожного з активів від дисперсії ринкового портфеля зі збереженням припущення про безризиковість одного з активів. Отримано модель (2.56) дохідності такого портфеля, з якої випливає, що сподівана дохідність портфеля лінійно залежить від дохідності кожного з активів і нелінійно: від систематичного ризику ринкового портфеля, від залишкових ризиків кожного з активів та від бета-коефіцієнтів – мір чутливості дохідності кожного з активів до дохідності ринкового портфеля.

4.1. Показано, що задача максимізації дохідності портфеля при заданому фіксованому рівні ризику зводиться до питання про існування розв’язків ірраціональних алгебраїчних рівнянь (2.60). Однак, запропонований в роботі підхід дозволив розв'язати цю систему в явній аналітичній формі.

4.2. Виведено формулу (2.104), яка виражає частки вкладень в активи портфеля, які надають його дохідності екстремального значення. Частки вкладень нелінійно залежать від показників дохідності активів портфеля, бета-коефіцієнтів, індивідуальних дисперсій дохідностей активів, дисперсій дохідності ринкового портфеля та заданого дисперсій портфеля, який оптимізуємо. Подальша перевірка критерію максимальності показала, що знайдений розв'язок (2.104) надає дохідності (2.56) інвестиційного портфеля максимального значення. Засобами електронної таблиці MS Excel складено програму обчислення оптимальних часток вкладень в активи портфеля, в якому ризик дохідності кожного з активів лінійно залежить від ризику ринкового портфеля, причому один з активів безризиковий. На основі програми обчислено контрольний приклад для інвестиційного портфеля, що складається з трьох активів і додатними бета-коефіцієнтами.

4.3. Проаналізовано випадки від'ємних та нульових бета-коефіцієнтів. У випадку від'ємного бета-коефіцієнта отримано модель сподіваної дохідності портфеля (2.119), а у випадку нульового бета-коефіцієнта – модель (2.129).

5. Досліджено дохідність інвестиційного портфеля, що складається з трьох активів, між дохідностями двох з яких існує прямий кореляційний зв'язок, а дохідність третього активу є незалежною величиною від двох інших.

5.1. Отримано формулу (3.9) дохідності цього портфеля, яка лінійно залежить від дохідностей кожного з активів і нелінійно від їх дисперсій, фіксованої дисперсії портфеля та частки вкладень в незалежний актив.

5.2. Виведено формули (3.18) і (3.23), які за умов (3.24) і (3.19) виражають оптимальні частки вкладень в третій та другий актив відповідно.

5.3. У випадку оберненої кореляційної залежності між випадковими дохідностями першого та другого активів також отримано модель сподіваної дохідності (3.32) портфеля і формули для оптимальних часток вкладень (3.38), (3.39).

6. Досліджено мінімізацію можливого ризику портфеля з кількох активів, що залежать від систематичного ризику ринкового портфеля, мір чутливості дохідності кожного з активів до дохідності ринкового портфеля, залишкових дисперсій кожного з активів і часток вкладень в кожен з активів портфеля.

6.1. У п. 3.2.1. побудовано моделі (3.82) та (3.99), які виражають мінімальний ризик портфеля з двох і трьох активів відповідно. Для портфеля з чотирьох активів отримано формули для часток вкладень, що мінімізують ризик портфеля. Отримані моделі узагальнюються і на випадок портфеля з більшою кількістю активів.

6.2. Запропоновані моделі дозволяють особі, що приймає рішення про формування портфеля, визначити межі допустимого ризику портфеля.

7. Досліджено (п.3.2.2.) питання максимізації дохідності інвестиційного портфеля при фіксованому рівні ризику, який визначається згідно моделі Шарпа. Побудовано модель (3.121) сподіваної дохідності портфеля та модель (3.122) залежності змін дохідності портфеля від змін часток вкладень в активи портфеля. Окремо проаналізовано випадок рівності між собою бета-коефіцієнтів активів портфеля.

8. Для випадку, коли особа, що формує інвестиційний портфель, вагається у виборі одного з двох існуючих підходів – чи мінімізувати ризик при заданій дохідності, чи максимізувати дохідність при фіксованому рівні ризику, пропонується підхід на основі мінімізації коефіцієнта варіації портфеля.

9. У п.3.3. виведено ряд розрахункових формул для побудови інвестиційного портфеля з мінімальним коефіцієнтом варіації.

10. Показано, що за наявності в портфелі активів з різними термінами дохідності цей фактор потрібно враховувати при формуванні інвестиційного портфеля.

11. Для випадку, коли випадкова ставка дисконту розподілена за рівномірним законом, побудовано функцію розподілу (4.23) теперішньої вартості доходу портфеля, що складається з двох різнотермінових активів.

11.1. Отримано моделі для математичного сподівання теперішньої вартості доходу інвестиційного портфеля (4.16) та для його ризику, тобто дисперсії (4.27). Знаючи математичне сподівання (4.16) та дисперсію (4.27) теперішньої вартості доходу інвестиційного портфеля, можна вибрати оптимальні для інвестора значення частки коштів вкладень в короткотермінові та довготермінові активи.

11.2. Запропоновані моделі дають можливість інвесторові вибрати найкраще співвідношення між частками вкладень в активи портфеля.

11.3. Для випадку, коли ще й номінальні доходи від активів портфеля є випадковими рівномірно розподіленими величинами, виведено формулу (4.73) для математичного сподівання теперішньої вартості доходу портфеля.

Моделі, які розроблені у даному дослідженні, належать до класу економіко-математичних, оскільки моделі побудовані з урахуванням економічного змісту та властивостей їх компонент та всі математичні перетворення, використані в процесі дослідження моделей, проведені з урахуванням їх економічного змісту. У результаті виконаних обчислень та розрахунків показано, що розроблені в даному дослідженні моделі, які доведені до практичної реалізації, дають змогу приймати ризикові рішення з формування інвестиційного портфеля суб’єктів господарювання в умовах становлення ринкової системи в Україні.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абрамов А.Е. Основы анализа финансовой, хозяйственной и инвестиционной деятельности предприятия. – М.: АКДИ “Экономика и жизнь”, 1994. – 126 с.
2. Алексеев М. Ю. Рынок ценных бумаг. – М.: Финансы и статистика, 1992. – 352 с.
3. Бабков И.А. Регулирование воспроизводства инвестиций и основного капитала в рыночной экономике. – М.: НИИ управления, 1991. – 256 с.
4. Баззел Р., Кокс Д., Браун Р. Информация и риск в маркетинге: Пер. с англ. – М.: Финстатинформ, 1993. – 96 с.
5. Балабанов И.Т. Основы финансового капитала. Как управлять капиталом? – М.: Финансы и статистика, 1994. – 384 с.
6. Балабанов И.Т. Финансовый менеджмент. – М.: Финансы и статистика, 1994. – 224 с.
7. Баласинович Б., Гордіца Т., Заволічна Т. Фондовий ринок і банківська система в інвестиційному процесі України //Банківська справа. – 1998. – № 3. – С. 55-58.
8. Барановський О. Ринок цінних паперів в України: стан, проблеми, перспективи //Банківська справа. – 1997. – № 6. – С. 14-22.
9. Бачкаи Т., Месена Д., Сеп Е., Хусти Э. Хозяйственный риск и методы его измерения. – М., 1979. – 184с.
10. Береславская Е., Лемишевская Т. Перспективы развития рынка срочных контрактов в Украине //Финансовые риски. – 1998. – № 1. – С. 43-46.
11. Бершеда Е.Р. Межотраслевые связи в инвестиционном процессе. – К.: Наукова думка, 1981. – 230 с.
12. Бирман Г., Шмидт С. Экономический анализ инвестиционных проектов: Пер. с англ. /Под ред. Л. П. Белых. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 247 с.
13. Бланк И.А. Основы финансового менеджмента. – К.: Ника-Центр, Т.2, 1999. – 512 с.

14.Бланк И.А. Инвестиционный менеджмент. – К.: МП "ИТЕМ" ЛТД, "Юнайтед Лондон Трейд Лимитед", 1995. – 448 с.
15.Блекуэлл Д., Гиршик М.А. Теория игр и статистических решений. – М.: Иностр.лит., 1958. – 318 с.
16.Богиня Д., Волынский Г. Структурная перестройка экономики и проблема инвестиций //Экономика Украины. – 1997. – № 12. – С. 41-50.
17.Боровиков В. П., Боровиков И. П. STATISTICA – Статистический анализ и обработка данных в среде Windows. – М.: Информационно-издательский дом “Филинъ”, 1997. – 608 с.
18.Бочаров В. В. Финансово-кредитные методы регулирования рынка инвестиций. – М.: Финансы и статистика, 1993. – 144 с.
19.Бромвич М. Анализ экономической эффективности капиталовложений: Пер. с англ. А.Г. Пивовар. – М.: ИНФРА-М, 1996. – 432 с.
20.Бронштейн Е., Спивак С. Как сформировать оптимальный портфель //Рынок ценных бумаг. – М., 1997. – № 14. – С. 52-54.
21.Буклемишев О. В., Малютина М. С. Анализ информационной эффективности российского фондового рынка //Экономика и математические методы. – М., 1998. – Т. 34, вып. 3. – С. 77-90.
22.Буренин А. Н. Рынки производных финансовых инструментов. – М.: Инфра-М, 1996. – 200 с.
23.Буренин А. Н. Срочный рынок как элемент системы экономической безопасности //Бизнес и политика. – М., 1998. – № 1. – С. 25-31.
24.Бюлетень економічної кон’юнктури України / НДІ Статистики Держкомстату України; під ред. В. Головко. – К.: ІВЦ Держкомстату України, 1998. – 155 с. (Фінанси, С. 84-103).
25.Ван Хорн Дж. К. Основы управления финансами: Пер. с англ. / Гл. ред. серии Я.В.Соколов. – М.: Финансы и статистика, 1997.– 800с.: ил.– (Серия по бухгалтерскому учету и аудиту).
26.Василик О.Д. Державні фінанси України: Навч. посібник. – К.: Вища школа, 1997. – 383с.

27. Вентцель Е.С. Исследования операций: задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1980. – 208 с.
28. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1994. – 576 с.
29. Вилкас Э.И., Майминас Е.З. Решения: теория, информация, моделирование. – М.: Радио и связь, 1981. – 328 с.
30. Вилкас Э.И. Оптимальность в играх и решениях. – М.: Наука, 1990. – 256 с.
31. Вітлінський В.В. Аналіз, оцінка і моделювання економічного ризику. – К.: ДЕМІУР, 1996. – 212 с.
32. Вітлінський В.В. Врахування ризику та інфляції в моделюванні та оцінюванні інвестиційних проектів. –К., 1995. – 11с. – Деп.у КДЕУ 20.02.95, N497-Ук95.
33. Вітлінський В.В. Економічний ризик: системний аналіз, менеджмент. – К., 1994. – 245с. – Деп. у КДЕУ 17.10.94, N2035-Ук94.
34. Вітлінський В.В. Моделювання раціональної структури портфеля //машинна обробка інформації. – 1996. – № 58. – 13 с.
35. Вітлінський В.В. Моделювання ризику в трансформаційному менеджменті. – К, 1995. – 14с. – Деп. у КДЕУ 5.10.95, N753-Ук95.
36. Вітлінський В.В., Наконечний С. І. Ризик у менеджменті. – К.: ТОВ Борисфен-М, 1996. – 226 с.
37. Вітлінський В.В. Економіка людини та нова парадигма оцінки базових економічних показників і міри ризику. // Фінанси України. – 1999. – № 8. – С. 12-17.
38. Владиславлев Д. Выработка оптимального плана управления портфелем инвестора гособлигаций на "достоверном" прогнозе с учетом риска //Финансовый бизнес. – 1997. – № 5. – С. 42-44.
39. Водянов А. Инвестиционный кризис: последствия и пути преодоления //Экономист. – 1998. – № 5. – С. 24-25.
40. Волкова В. Выбор акций для портфельного инвестирования //Финансовый бизнес. – 1997. – № 2. – С. 47-48.

41. Волошин И. Измерение концентрационных рисков с помощью теории портфелей //Финансовые риски. – 1998. – № 3. – С. 94-99.
42. Вопросы анализа и процедуры принятия решений / Под ред. И.Ф.Шахнова. – М.: Мир, 1976. – 230 с.
43. Воронцовский А.В. Инвестиции и финансирование. – СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 1998. – 528 с.
44. Галочкин В. Г., Кукуш А. Г. Расчет характеристик опционов методом Монте-Карло //Финансовая аналитика. – 1998. – № 1. – С. 60-64.
45. Гальчинський А., Геєць В., Семиноженко В. Україна: наука та інноваційний розвиток. – К., 1997. – 66 с.
46. Геєць В. Економіка України: моделі реформування, зміна структури та прогноз розвитку. – К.: Інс-т держ. управління і самоврядування при КМ України, 1993. – 120 с.
47. Геєць В., Степанкова Т., Кваснюк Б. та ін. Від кризи до росту. Концепції довгострокової політики та економічного співробітництва України: Методичні рекомендації. – К.: НАН України, Інс-т економіки, 1995. – 88 с.
48. Герасимчук Н., Борисенко З., Задорожна О. та ін. Структурно-інвестиційна політика. – К.: Інс-т економіки НАН України, 1996. – 139 с.
49. Герасимчук Н.С., Борисенко З.Н., Мельничук Н.А. и др. Инвестиционная сфера экономики. – К.: Наукова думка, 1992. – 244 с.
50. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К., 1979. – 408с.
51. Гойко А. Ф. Методи оцінки ефективності інвестицій та пріоритетні напрями їх реалізації. – К.: ВІРА-В, 1999. – 320 с.
52. Гойко А. Ф. Организация рынка финансового капитала и инвестиций в Украине. – К.: Будівельник, 1995. – 208 с.
53. Грабовый П.Г., Петрова С.Н., Полтавцев С.И. Риски в современном бизнесе. — М.: Аланс, 1994. — 200с.

54.Губський Б.В. Інвестиційні процеси в глобальному середовищі. – К.: Наукова думка. 1998, – 390с.
55.Дамари Р. Финансы и предпринимательство: Финансовые инструменты, используемые западными фирмами для роста и развития организаций: Пер. с англ. – Ярославль: “Елень”, 1993. – 224 с.
56.Джонс Э., Саттон Д. Office 97. Библия пользователя: Пер. с англ. – К.: Диалектика, 1997.– 848 с.
57.Долан Э.Дж., Линдсей Д.Е. Рынок: микроэкономическая модель. – СПб., 1992. – 496 с.
58.Дуглас Л. Г. Анализ рисков операций с облигациями на рынке ценных бумаг: Пер. с англ. – М.: Филинъ, 1998. – 448 с.
59.Евланов Д. Г. Основы теории принятия решений. – М.: Наука, 1979. – 212 с.
60.Евланов Д. Г. Теория и практика принятия решений. – М.: Экономика, 1984. – 176 с.
61.Едронова В. Н., Мизиковский Е. А. Учет и анализ финансовых активов: акции, облигации, векселя. – М.: Финансы и статистика, 1995. – 272 с.
62.Емельянов А.С., Беседин В.Ф., Козуб В.М. Экономика инвестирования в научно-технический прогресс. – К.: Наукова думка, 1988. – 311 с.
63.Емельянов С. В., Ларичев О. И. Многокритериальные методы принятия решений. – М.: Знание, 1985. – 32 с.
64.Ермольев Ю.М., Михалевич В.С., Ляшко И.И., Тюптя В.И. Математические методы исследования операций. – К., 1979. – 384с.
65.Ефимова О.В. Как анализировать финансовое положение предприятия. – М.: Бизнес-школа Ител-Синтез, 1994. – 120 с.
66.Ефимова О.В. Финансовый анализ. – М.: Бухгалтерский учет, 1996. – 208 с.
67.Жураховская Л., Жураховский С. Оптимизация портфеля ОВГЗ – игровой подход //Финансовые риски. – 1996. – № 2. – С. 95-98.

68.Закон України “Про інвестиційну діяльність” // Відомості Верховної Ради. – 1999. – № 31. – С. 248.

69.Закон України “Про іноземні інвестиції”. – Закони та постанови. – К., 1992. – С. 14-32.

70.Закон України “Про цінні папери і фондову біржу” // Відомості Верховної Ради. – 1999. – № 31. – С. 252.

71.Игнатьев Д. И. Портфельные инвестиции в развитии промышленных предприятий: Автореферат дис…канд. экон. наук /С-Петерб. ун-т экономики и финансов. – СПб., 1997. – 15 с.

72.Идрисов А.Б., Картышев С.В., Постников А.В. Стратегическое планирование и анализ эффективности инвестиций. – М.: “ФИЛИНЪ”, 1996. – 272с.

73.Инвестирование, финансирование, кредитование: стратегия и тактика предприятия. /Ушакова Н. Н. и др. – К.: КТЭУ, 1997. – 191 с.

74.Инвестиции и инновации: Словарь-справочник от А до Я / Под ред. Бора М.З., Денисова А.Ю. – М.: Издательство “ДИС”, 1998. – 208 с.

75.Инвестиционное проектирование: Практическое руководство по экономическому обоснованию инвестиционных проектов. – М.: Финстатинформ, 1995. – 250 с.

76.Иозайтис В.С., Львов Ю.А. Экономико-математическое моделирование производственных систем. – М.: Высш.школа, 1991. – 192 с.

77.Карагодова О., Маслюк Г. Моделювання проблеми оптимізації портфеля цінних паперів //Банківська справа. – 1995. – № 4. – С. 45-47.

78.Канторович Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. – М., 1959. – 344 с.

79.Карлберг, Конрад. Бизнес-анализ с помощью Excel: Пер. с англ. – К.: Диалектика, 1997. – 448 с.

80.Касимов Ю. Ф. Основы теории оптимального портфеля ценных бумаг. – М.:Информационно-издательский дом “Филинъ”, 1998. – 144 с.

81. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.
82. Кныш М. И., Перекатов Б. А., Тютиков Ю. П. Стратегическое планирование инвестиционной деятельности. – СПб.: Издательский дом “Бизнес-процесс”, 1998. – 315 с.
83. Ковалев А.И., Привалов В.П. Анализ финансового состояния предприятия. – М.: Центр экономики и маркетинга, 1995. – 192 с.
84. Ковалев В.В. Методы оценки инвестиционных проектов. – М: Финансы и статистика, 1998. – 144 с.
85. Ковалев В.В. Финансовый анализ: Управление капиталом. Выбор инвестиций. Анализ отчетности /2-е изд., перераб. и доп. – М: Финансы и статистика, 1997. – 512 с.
86. Ковальчук К.Ф. Интеллектуальная поддержка принятия экономических решений. – Донецк: ИЄП НАН Украины, 1996. – 224 с.
87. Колесник А.П. Компьютерные системы в управлении финансами. – М.: Финансы и статистика, 1994. – 312 с.
88. Количественные методы финансового анализа / Под ред. С.Дж. Брауна и М.П.Крицмена: Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 1996. – 336 с.
89. Коломойцев В.Е. Інвестиційна сфера економіки України: стан, проблеми та перспективи. – Луганськ: В-тво Східноукраїнського держ. ун-ту, 1997. – 30 с.
90. Комаринський Я., Яремчук І. Фінансово-інвестиційний аналіз. – К.: Українська енциклопедія, 1996. – 298 с.
91. Коммерческая оценка инвестиционных проектов: основные положения методики. – К.: ”Альт”, 1996. – 60 с.
92. Кононенко А.Ф., Холезов А.Д., Чумаков В.В. Принятие решений в условиях неопределенности // ВЦ АН СССР. – М., 1991. – 197с.
93. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1974. – 831 с.

94. Костіна Н.І., Алєксєєв А.А., Василик О.Д. Фінансове прогнозування: методи та моделі. – К.: Товариство "Знання”, КОО, 1997. – 183 с.
95. Костіна Н.І., Алєксєєв А.А., Василик О.Д. Фінанси: система моделей і прогнозів: Навчальний посібник. – К.: Четверта хвиля, 1998. – 304 с.
96. Крупка Я. Д. Облік інвестицій. – Тернопіль: Економічна думка, 2001. – 302 с.
97. Лагута В., Ясиновский С. В портфеле много инструментов. Каков план действий? //Рынок ценных бумаг. – М., 1997. – № 14. – С. 47-51.
98. Ларичев О.И. Наука и искусство принятия решений. – М.: Наука, 1979. – 200 с.
99. Лимитовский М.А. Основы оценки инвестиционных и финансовых решений. – М.: ТОО Инжирингово-консалтинговая компания “ДЕКА”, 1997. – 184 с.
100. Липсиц И.В., Коссов В.В. Инвестиционный проект: методы подготовки и анализа. – М.: БЕК, 1996. – 293 с.
101. Литвиненко С. Н., Поддубный В. И. К выбору эффективного инвестиционного портфеля //Фондовый рынок. – 1998. – № 16(74). – С. 18-20.
102. Лінніков В., Мізецька О. Становлення ринку цінних паперів в Україні //Банківська справа. – 1997. – № 3. – С. 35-46.
103. Лопатников Л.И. Экономико-математический словарь. – М.: Наука, 1987. – 510 с.
104. Лукашин Ю. П. Оптимизация структуры портфеля ценных бумаг //Экономика и математические методы. – М., 1995. – Т. 31, вып. 1. – С. 138-150.
105. Льюис К. Методы прогнозирования экономических показателей: Пер. с англ. и предис. Демиденко Е. З. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 133 с.
106. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М.Виноградов. – М.: Советская энциклопедия, т.1-т.5, 1979-1984. – 2952с.

107. Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю.В.Прохоров. – М.: Советская энциклопедия, 1988. – 874 с.
108. Макаров И.М. и др. Теория выбора и принятия решений. – М.: Наука, 1982. – 328 с.
109. Матюшко В.И., Идрисов А.Б. Компьютерная технология планирования и анализа эффективности инвестиций PROJECT EXPERT //Компьютеры + Программы: Банковские технологии. – 1995. – № 3. – С. 63-66.
110. Массе Пьер. Критерии и методы оптимального определения капиталовложений: Пер. с франц. – М.: Статистика, 1971. – 197 с.
111. Мелкумов Я.С. Экономическая оценка эффективности инвестиций и финансовых инвестиционных проектов. – М.: ИКЦ “ДИС”, 1997. – 160 с.
112. Мертенс А.В. Инвестиции: Курс лекций по современной финансовой теории. — К.: Киевское инвестиционное агентство, 1997. – 416 с.
113. Мертенс А. Хеджирование рисков с помощью фьючерсных контрактов: применение теории на практике //Финансовые риски. – 1998. – № 1. – С. 104-109.
114. Миддлотон Д. Бухгалтерский учет и принятие финансовых решений: Пер. с англ. / Под ред. И.И.Елисеевой. – М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997. – 408 с.
115. Минченкова О. Ю. Разработка модели формирования портфеля ценных бумаг комерческого банка /Гос. акад. упр. им. С. Орджокидзе. – М., 1996. – 18 с.
116. Мирзоахмедов Ф.М. Математические модели и методы управления производством с учетом случайных факторов. – К.: Наукова думка, 1991. – 224 с.
117. Мисаченко Е. Н. Экономико-статистические методы анализа ценных бумаг для формирования эффективного портфеля на финансовом рынке России: Автореф. дисс…канд. экон. наук /МГУ им. М. В. Ломоносова. – М., 1996. – 24 с.

118. Михайлов А. Управление портфелем корпоративных ценных бумаг и оцынка эффктивности инвестиционных решений //Инвестиции в России. – М., 1997. – №11/12. – С. 43-46.
119. Михеев Ю. Формирование портфеля ценных бумаг для агрессивного и неагрессивного инвестора //Рынок ценных бумаг. – М., 1995. – № 22. – С. 28-32.
120. Моделирование и анализ экономических процессов. – Новосибирск: Наука, 1985 (серия: Математический анализ экономических моделей). – 120 с.
121. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 487 с.
122. Нейман Ю. Вводный курс теории вероятностей и математической статистики: Пер. с англ. – М.: Наука, 1968. – 448 с.
123. Нікбахт Е., Гропеллі А. Фінанси: Пер. з англ. – К.: Техніка, 1993. – 383 с.
124. Норткотт Д. Принятие инвестиционных решений: Пер. с англ. / Под ред. А.Н.Шохина. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 247 с.
125. Нейман Дж., Фон Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970. – 707 с.
126. О'Брайен Дж. Финансовый анализ и торговля ценными бумагами. – М. Дело ЛТД, 1995. – 608 с.
127. Ованесов А. Клиентский спрос задает подходы к портфельному инвестированию //Рынок ценных бумаг. – М., 1995. – № 22. – С. 23-26.
128. Олексюк О. С. Методи оцінки інвестиційних проектів. – Тернопіль: "Збруч", 2000. – 200 с.
129. Олексюк О.С. Моделювання прийняття ризикованих фінансових рішень. – К.: Вища школа, 1998.– 312 с.
130. Олексюк О.С. Системи підтримки прийняття фінансових рішень на мікрорівні. – К.: Наукова думка, 1998. – 507 с.
131. Опнер С.Л. Системный анализ для решения деловых и промышленных проблем. – М.: Сов. радио, 1969. – 216 с.

132. Первозванский А.А. Математические модели в управлении производством. – М.: Наука, 1975. – 616 с.
133. Первозванский А.А., Первозванская Т.Н. Финансовый рынок: расчет и риск. – М.: Инфра, 1994. – 192 с.
134. Пересада А.А. Інвестиційний процес в Україні. – К.: ТОВ “Лібра”, 1998. – 392 с.
135. Пересада А.А. Основы инвестиционной деятельности. – К.: “Издательство Либра” 000, 1996. – 344 с.
136. Пересада А.А., Смірнова О.О., Онікієнко С.В., Ляхова О.О. Інвестування: Навчально-методичний посібник. – К.: КНЕУ, 2001. – 251 с.
137. Петраков Н.Я. Инвестиционно-финансовый портфель. – М.: Соминтек, 1993. – 52 с.
138. Питерс Т., Уотерлин Р. В поисках эффективного управления (опыт лучших компаний): Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1986. – 423 с.
139. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
140. Попков В. П., Семенов В. П. Организация и финансирование инвестиций. – Санкт-Петербург, Москва, Харьков, Минск, 2001. – 224 с.
141. Практичне бізнес-планування як інструмент для прийняття інвестиційних рішень / Мустафаєв Е. Н., Морозов В. В., Воронін П. М.. – К.: УкрІНТІ, 1998. – 100 с.
142. Принципы инвестирования. – М.: Крокус Интернешнл, 1992. – 323 с.
143. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума. – М., 1982. – 144 с.
144. Райсберг В.А. Предпринимательский риск (система оценок) // Приборы и системы управления. – 1991. – № 9. – С. 1-7.
145. Райс Т., Койли Б. Финансовие инвестиции и риск: Пер. с англ. – К.: Торгово-издат. бюро BHV, 1995. – 592 с.
146. Райфа Г. Анализ решений. – М.: Наука, 1977. – 408 с.

147. Ріппа С.П. Прийняття рішень в економіці на основі комп'ютерних баз знань. – Львів.: Каменяр, 1997.– 268 с.
148. Ріппа С. П. Пріоритети інвестування інфраструктури інформатизації бануівських систем в Україні // Вісник Тернопільської академії народного господарства. – 1999. – № 10. – С. 152-154.
149. Рэдхед К., Хьюс С. Управление финансовыми рисками: Пер. с англ. – М.: ИНФРА, 1996. – 288 с.
150. Семенкова Е. В. Ценные бумаги в системе финансовых потоков: Науч. изд. – М.: Изд-во Рос. экон. акад, 1997. – 76 с.
151. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера . – К.: Техніка, 1975. – 768 с.
152. Скрипниченко М. І. Підсумки ринкових перетворень та прогноз розвитку економіки України до 2005 року //Економіст. – 2001. – № 1. – С. 26-36.
153. Смалюк Г. Ф. Дослідження інвестиційного портфеля з двох взаємозалежних і одного незалежного активу // Науковий журнал "Вісник Тернопільської академії народного господарства" – "Економіко-математичне моделювання" – 1998. – № 2. – С. 42-48.
154. Смалюк Г. Ф. Максимізація доходності портфеля, фіксований ризик якого визначається моделлю Шарпа і один з активів якого безризиковий // Науковий журнал "Вісник Тернопільської академії народного господарства" – "Економіко-математичне моделювання" – 1998. – № 3. – С. 21-40.
155. Смалюк Г. Ф. Методика моделювання прийняття оптимальних рішень в умовах невизначеності на мікрорівні // Науковий журнал "Вісник Тернопільської академії народного господарства" – 1997. – Спец. вип. № 1. – С. 170-172.
156. Смалюк Г. Ф. Моделювання інвестиційного портфеля з різнотерміновими акціями, що можуть приносити випадкові номінальні доходи // Науковий журнал "Вісник Тернопільської академії народного

господарства" – "Економіко-математичне моделювання" – 1999. – № 5. – С. 114-127.

157. Смалюк Г. Ф. Мінімізація ризику інвестиційного портфеля // Науковий журнал "Вісник Тернопільської академії народного господарства" – 1999. – Спец. вип. № 10. – С. 162-164.

158. Смалюк Г. Ф. Оцінка ризиків при формуванні портфеля цінних паперів з різними термінами доходності: Наукове видання /Брошура. – Тернопіль: Економічна думка. – 2002. – 81с.

159. Смалюк Г. Ф. Прийняття оптимальних рішень в умовах невизначеності в концепції створення системи підтримки прийняття рішень // Науковий журнал "Вісник Тернопільської академії народного господарства" – 1998. – Спец. вип. № 5. – С. 149-157.

160. Смалюк Г. Ф. Про оптимізацію доходності інвестиційного портфеля, один з активів якого не супроводжується ризиком // Вісник Тернопільської академії народного господарства – "Економіко-математичне моделювання" – 1998. – № 1. – С. 61-74.

161. Сорос Дж. Алхимия финансов. – М.: "ИНФРА-М", 1998. – 416с.

162. Старик Д. Э. Как рассчитать эффективность инвестиций. – М.: АО "Финстатинформ", 1996. – 92 с.

163. Суторміна В.М., Федосов В.М., Рязанова Н.С. Фінанси зарубіжних корпорацій. – К.: Либідь, 1993. – 247 с.

164. Теплова Т. В. Финансовые решения: стратегия и тактика. Учебное пособие. – М.: ИЧП "Издательство Магистр", 1998. – 264 с.

165. Толковый словарь рыночной экономики / Под общ. ред. Крутикова Ф.А. – М.: Рекл.-изд. фирма "Глория", 1993. – 301 с.

166. Трухаев Р.И. Модели принятия решений в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1981. – 258 с.

167. Уотишем Дж., Паррамоу К. Количественные методы в финансах: Пер. с англ. под общ. ред. М. Р. Ефимовой. – М.: Финансы, ЮНИТИ, 1999. – 527 с.

168. Федоренко В.Г., Гойко А.Ф. Інвестознавство: Підручник / За наук. ред. В.Г. Федоренка. – К.: МАУП, 2000. – 408 с.
169. Финансовое планирование деятельности малых предприятий США. – М.: СП ”Crocus International”, 1993. – 240 с.
170. Финансовое управление компанией / Общ. ред. Кузнецовой Е.В. – М.: Фонд “Правовая культура”, 1995. – 384 с.
171. Финансовые и инвестиционные показатели деятельности американской фирмы. – М.: СП ”Crocus International”, 1991. – 32 с.
172. Финансовый менеджмент/ Под ред. Е.С.Стояновой. – М.: Перспектива, 1993. – 268 с.
173. Френклін Р. Рут, Філіпенко А. Міжнародна торгівля та інвестиції. – К.: “Основи”, 1998. – 743 с.
174. Хеддевик К. Финансовый и экономический анализ деятельности предприятий / Международная организация труда: Пер. с англ. Д.П.Лукичева и А.О.Лукичевой / Под ред. Ю.Н.Воропаева. – М.: Финансы и статистика, 1996. – 192 с.
175. Хеннекен П.Л., Тортра А. Теория вероятностей и некоторые ее приложения: Пер. с франц. – М.: Наука, 1974. – 472 с.
176. Хобта В. Управление инвестициями: механизм, принципы, метолы. – Донецк: ИЭП НАН Украины, 1996. – 206 с.
177. Холт Роберт Н. Основы финансового менеджмента: Пер. с англ. – М.: “Дело”, 1993. – 128 с.
178. Холт Роберт Н., Барнес Сет Б. Планирование инвестиций: Пер. с англ. – М.: Дело ЛТД, 1997. – 120 с.
179. Хонко Я. Планирование и контроль капиталовложений: Сокр. пер. со швед. и англ. – М.: Экономика, 1987. – 191 с.
180. Цисарь И. Ф., Чистов В. П., Лукьянов А. И. Оптимизация финансовых портфелей банков, страховых компаний, пенсионных фондов /Акад. нар. хоз-ва при Правительстве Рос. Федерации. – М.: Дело, 1998. – 128 с.

181. Черваньов Д.М., Нейкова Л.І. Менеджмент інноваційно-інвестиційного розвитку підприємств України. – К.: Т-во “Знання”, КОО, 1999. – 514 с.
182. Чеппел Д. Технологии ActiveX и OLE: Пер. с англ. – М.: Издательский отдел “Русская редакция”, 1997. – 320 с.
183. Шарп У., Александер Г., Бейли Дж. Инвестиции: Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 1024 с.
184. Шевчук В.Я., Рогожин П.С. Основи інвестиційної діяльності. – К.: Генеза, 1997. – 384с.
185. Юдин Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. – М.: Сов. радио, 1974. – 400 с.
186. Ястремський О.І. Моделювання економічного ризику. – К.: Либідь, 1992. – 176 с.
187. Ястремський О.І. Основи теорії економічного ризику. – К.: “АРТЕК”, 1998. – 235 с.
188. Anydike-Danes M., Codley W. A stock adjustment model on income determination with inside muny and private debt with some preliminary empirical results for the United States //Monetary theory and economic institutions. – Basingstoke.; L.; 1987. – P. 95-120.
189. Acceleration of US Technology Utilization and Commercialization.— Wash., 1991. – 86 p.
190. Alexander J., Francis C. Portfolio Analysis. – Prentice Hall, 1986. – 512 p.
191. Beehler P.J. Contemporary Cash Management. – New York: Wiley, 1983. — 205 p.
192. Black F. Beta and Return. //Journal of Portfolio Management, 20, no.1 (Fall 1993). – P. 8-18
193. Brighman E.F., Gapenski L.C. Intermediate Financial Management: 4-th ed. Chicago; New York; San Francisko ets. Dryden Press, 1993. — 312 p.
194. Brown D. P. Multiperiod financial planning //Management science. – Providence, 1987. – Vol. 33, № 7. – P. 845-875.

195. Browne M., Coxon T. Inflation-proofing your investments. – N.Y.: Morrow, 1981. – 512 p.
196. Elton J., Gruber J., Padberg D. Simple Criteria for Optimal Portfolio Selection. //Journal of Finance. – 5, no. (December 1976). – P.1341-1357.
197. Faddon D. Conditional Logic Analysis of Qualitative Choice Behavior in Econometrics. – New York, 1973. – № 4. – p. 105-141.
198. Fama E. F., Frehch K. R. Common Risk Factor in the Return on Stocks and Bonds //Journal of Financial Economics. – 1993. – Vol.33, № 1. – P. 3-56.
199. Filderer B., Homburg S. Makroekonomik und neue Makroekonomik. erlin. – London: Springer – Verlad, 1991. – 317 p.
200. Fisher I. Theory of Interest. – N.Y.: Macmillan, 1930. – 427 p.
201. Franke G., Hax G. Finanzwirtschaft des Unternehmens und apitalmarkt. – Berlin: Springer – Verlad, 1990. – 279 p.
202. Jagannathan R., Wang Z. The CAPM is Alive and Well // University of Minnesota, MN, 1993. – P. 315.
203. Haugen R. A. Modern Investment Theory, 4-th ed. – Prentice Hall, 1997. – 359 p.
204. Huberman Y., Ross S. Portfolio turnpike theorems, risk aversion and regularly varying utility functions //Econometrica. – 1987. – Vol. 51, № 5. – P. 1345-1361.
205. Jean W. H., Helms B. P. Stochastic dominance as a decision model //Quart. J. of business and economics. – Lincoln, 1986. – Vol. 25, № 1. – P. 65-97.
206. Knight F. H. Risk, Uncertain and Profit. – Boston and New York: Houghton Mifflin, 1921. – 368 p.
207. Korkie B., Jobson J. D. Estimation for Markovitz efficient portfolios //J. of the Amer. Statist. assoc. – Wash., 1980. – Vol. 75, № 371. – P. 544-554.
208. Levy H. Sarnat M. Capital Investment and Financial Decisions, 3-rd ed. – Prentice Hall, 1986. – 393 p.

209. Lintner J. The Valuation of Risk Asset and the Selection of risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets // Review of Economics and Statistics. – Feb., 1965. – P. 13-27.
210. Markowitz H. Portfolio Selection. //Journal of Finance. – 7, no. (March 1952). – P. 77-91.
211. Markowitz H. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment. – New York: John Wiley, 1959. – 319 p.
212. Markowitz H. The Optimization of the Quadratic Function Subject to Linear Constrains. //Naval Research Logistic Quarterly. – 3, nos. 1-2 (March-June 1956). – P. 111-133.
213. Markovitz H. M. Mean Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets. – Blackwel: Basil, 1990. – 314 p.
214. Miller P. Managing Economic Growth Through Knowledge: The Invention, Promotion and Deployment of Discounted Cash Flaw Techniques (unpublished), London School of Economics and Political Science. – London, 1988. – 312 p.
215. Mossin J. Equilibrium in a Capital Asset Market //Econometrica. – 1966. – № 34(4). – P. 76-83.
216. Northcott D. Rationality and decision making in capital budgeting. – “British Accounting Review”, September, 1991, vol. 23 (3). – P. 34-219.
217. Perold A., Sharpe W. Dynamic Strategies for Asset Allocation. – “Financial Analysts Journal”, January-February 1988, p.16-27.
218. Resek R. W. Skewness, skewness preference and optimal portfolios //Macroeconomica. – 1975. – Vol 27, Pasc. 1. – P. 126-135.
219. Roll R. A Critique of the Asset Pricing Theory's Test. //“Journal of Financial Economics”, 4, no. 2(March 1977). – P. 129-176.
220. Ross S. The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing //Journal of Economic Theory. – Dec., 1976. – P. 341-360.

221. Sanacnore G. M. La teoria delle scelte di portafoglio e il pocesso inflazionistico // Riv. di politica econ. – Roma, 1980. – A. 70, Fasc. 12. – P. 1235-1273.
222. Sharpe W. Asset Allocation Tools. – Paolo Alto (Calif.): Scientific Press, 1985. – 74 p.
223. Sharpe W. Capital Asset price: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk //Journal of Finance. – 1964. – Vol. 29, № 3. – P.425-442.
224. Sharpe W. A Simplified Model for Portfolio Analysis. – “Management Science”, 9 no. 2 (January 1963). – P. 277-293.
225. Smalyuk G. Methodology of modelling of making optimum decision in uncertainty on a microlevel. //The HERALD of TANE. – 1997. – special issue №2. – P. 123-124.
226. Strategic Financial Management / R. G. Clarke, B. Winson, H.Daines, S. D. Nadauld.- Homenwood (III.): Irwin, 1988. —312 p.
227. Tobin J. Liquidity preference as behaviour toward risk //Rev. of Econ. Studies. – 1958. – Vol. 25, № 1. – P. 65-86.
228. Tobin J. The of Portfolio Selection. – London: Macmillan and Co. – 1965. – 445 p.
229. Weirich Gunter, Hoffman Ulrich. Investitions-analyse. – Munchen; Wien; Houser, 1989. – 541 p.
230. Williams J. B. The Theory of Investment Value. – Amsterdam: North-Holland, 1964. – 612 p.

ДОДАТКИ

Додаток А

Програмна реалізація засобами MS Excel моделей формування інвестиційного портфеля, що містить безризикові активи

Таблиця А.1.

Реалізація обчислень засобами MS Excel

Формування портфеля з незалежних активів, де один актив безризиковий

	A	B	C	D
2	myu i	sigma i	D i	lambda i
3	0,1	0	=B3^2	
4	0,12	0,02	=B4^2	
5	0,13	0,03	=B5^2	=((A5-$A$3)/($A$4-$A$3))^2*$C$4
6	0,15	0,05	=B6^2	=((A6-$A$3)/($A$4-$A$3))^2*$C$4
7	0,18	0,06	=B7^2	=((A7-$A$3)/($A$4-$A$3))^2*$C$4
8	0,23	0,08	=B8^2	=((A8-$A$3)/($A$4-$A$3))^2*$C$4
9	0,25	0,09	=B9^2	=((A9-$A$3)/($A$4-$A$3))^2*$C$4
10	0,27	0,1	=B10^2	=((A10-$A$3)/($A$4-$A$3))^2*$C$4
11	0,3	0,14	=B11^2	=((A11-$A$3)/($A$4-$A$3))^2*$C$4
12			Добуток D j від 3 до n	
13	D p=	0,0003	=ПРОИЗВЕД(C5:C11)	
14				
15		Чисельник	Знаменник	x i (і від 3 до n)
16		=$B$13*D5*E5	=C5*($C$13+$F$12)	=(B16/C16)^0,5
17		=$B$13*D6*E6	=C6*($C$13+$F$12)	=(B17/C17)^0,5
18		=$B$13*D7*E7	=C7*($C$13+$F$12)	=(B18/C18)^0,5
19		=$B$13*D8*E8	=C8*($C$13+$F$12)	=(B19/C19)^0,5
20		=$B$13*D9*E9	=C9*($C$13+$F$12)	=(B20/C20)^0,5
21		=$B$13*D10*E10	=C10*($C$13+$F$12)	=(B21/C21)^0,5
22		=$B$13*D11*E11	=C11*($C$13+$F$12)	=(B22/C22)^0,5
23				=СУММ(D16:D22)

Продовження таблиці А.1.

	E	F	G	H
2	Добуток D j від 3 до n			
3	без і-го множника			
4				
5	=$C$13/C5	=D5*E5		
6	=$C$13/C6	=D6*E6		
7	=$C$13/C7	=D7*E7		
8	=$C$13/C8	=D8*E8		
9	=$C$13/C9	=D9*E9		
10	=$C$13/C10	=D10*E10		
11	=$C$13/C11	=D11*E11		
12	сума =	=СУММ(F5:F11)		
13				
14				
15	D i*x i^2	x2=	=(B13-E23)^0,5/B4	
16	=C5*D16^2	x1=	=1-D23-G15	
17	=C6*D17^2			
18	=C7*D18^2			
19	=C8*D19^2			
20	=C9*D20^2			
21	=C10*D21^2			
22	=C11*D22^2			
23	=СУММ(E16:E22)			

Таблиця А.2.

Реалізація обчислень засобами MS Excel

	A	B	C
1	Приклад обчислення оптимальних часток вкладень в активи		
2		портфеля з фіксованим ризиком	
3	myu i	beta i	D eps i
4	0,1	0	0
5	0,12	0,5	0,0004
6	0,13	0,7	0,0009
7			
8	D p=	0,0003	
9	D m=	0,001	
10			
11			
12	x1 =	=1-B13-B14	
13	x 2=	=((B16)^0,5-B5*B14*B6*B9)/((B5)^2*B9+C5)	
14	x 3=	0,311366551664711	Розв"язок x 3 знайдено
15			за допомогою команди
16	D(x 3)=	=(B5^2*B9+C5)*(B8-B14^2*C5)-B9*C5*(B14*B6)^2	Сервис-Подбор параметра,,,
17			
18		=(C6*(B5^2*B9+C5)*B14+B9*C5*B14*B6*B6)/((B16)^0,5)	
19			
20		=(A6-A4)/(A5-A4)*((B5)^2*B9+C5)-B5*B6*B9	
21		=B18-B20	
22			
23	myu=	=A4*B12+A5*B13+A6*B14	

Додаток Б

Програмна реалізація засобами MS Excel моделей формування інвестиційного портфеля, всі активи якого ризикові

Таблиця Б.1.

Реалізація обчислень засобами MS Excel

	A	B	C	D
1		Формування портфеля з заданим ризиком,		
2	в якому перші два активи прямо залежні між собою, а третій незалежний			
3	myu i	sigma i		
4	0,3	0,17	lambda=	=((A7-A5)*(B5-B6)-(A6-A5)*B5)/(A6-A5)
5	0,2	0,07		
6	0,5	0,3		
7				
8	Dp=	0,02		
9	x1=	=1-B10-B11		
10	x2=	=(B4*(1-(D4^2*B8)^0,5/B6/(B6^2+D4^2)^0,5)-(B8-D4^2*B8/(B6^2+D4^2))^0,5)/(B4-B5)		
11	x3=	=(D4^2*B8)^0,5/B6/(B6^2+D4^2)^0,5		
12			Доходність портфеля	
13				
14			myu=	=СУММПРОИЗВ(A5:A7;B10:B12)

Таблиця Б.2.

Реалізація обчислень засобами MS Excel

	A	B	C
1	Приклад формування портфеля з заданим ризиком,		
2	в якому перші два активи обернено залежні між собою, а третій незалежний		
3	myu i	sigma i	
4	0,2	0,08	
5	0,3	0,15	
6	0,5	0,25	
7			
8	Ризик портфеля Dp		0,005
9			
10	lambda 1	=((A6-A4)*(B4+B5)-(A5-A4)*B4)/(A5-A4)	
11			
12	x1	=1-B13-B14	
13	x2	=(B4*(1-B10*(C8)^0,5/B6/(B6^2+B10^2)^0,5)+B6^2*B14/B10)/(B4+B5)	
14	x3	=B10*((C8)^0,5)/B6/(B6^2+B10^2)^0,5	
15			
16	Контроль ризику		=B4^2*B12^2+B5^2*B13^2+B6^2*B14^2-2*B4*B5*B12*B13
17			
18	Доходність портфеля		=A4*B12+A5*B13+A6*B14

Таблиця Б.3.

Реалізація обчислень засобами MS Excel

	A	B	C	D
1	Обчислення мінімального ризику портфеля з двох активів			
2	Dm=	0,03		
3	De1=	0,005	beta1=	0,7
4	De2=	0,008	beta2=	0,6
5				
6	x1=	=1-B7		
7	x2=	=ЕСЛИ(И(B3>=D3*B2*(D4-D3);D3*(D3-D4)*B2<=B4+(D4-D2)^2*B2);(B3+D3*B2*(D4-D3))/(B4+(D4-D3)^2*B2);"")		
8				
9	Дисперсія портфеля			
10	=((D3*B4+D4*B3)^2*B2+(B4-D4*(D3-D4)*B2)^2*B3+(B3-D3*(D4-D3)*B2)^2*B4)/(B3+B4+(D4-D3)*B2)^2			

Таблиця Б.4.

Реалізація обчислень засобами MS Excel

	A	B	C	D	E
1	Приклад мінімізації коефіцієнта варіації портфеля				
2	myu 1	0,6		D 1	0,1
3	myu 2	0,8		D 2	0,15
4					
5	кореляція	0,2			
6					
7	x 1	=(E3*B2-B3*B5*(E2*E3)^0,5)/(B2*E3+B3*E2-(B2+B3)*B5*(E2*E3)^0,5)			
8	x 2	=1-B7			
9					
10	K	=(E2*B7^2+2*B5*(E2*E3)^0,5*B7*B8+E3*B8^2)/(B2*B7+B3*B8)^2			

Додаток В

Програмна реалізація засобами MS Excel моделей формування портфеля цінних паперів з різними термінами доходності

Таблиця В.1.

Реалізація обчислень засобами MS Excel

	A	B
1	Приклад обчислення математичного сподівання теперішньої вартості доходу портфеля з різнотерміновими активами	
2	I 1	500
3	I k	1000
4		
5	k	3
6		
7	a	0,3
8	b	0,4
9		
10	x	0,4
11		
12	M(i)	=B10*B2/(B8-B7)*LN((1+B8)/(1+B7))+(1-B10)*B3/(B5-1)/(B8-B7)*((1+B7)^(1-B5)-(1+B8)^(1-B5))

Таблиця В.2.

Реалізація обчислень засобами MS Excel

	A	B	C	D	E	F
1	Обчислення математичного сподівання теперішньої вартості доходу інвестиційного					
2		портфеля з різноперіодними активами				
3		A1=	200		A k=	500
4		B1=	290		B k=	1100
5						
6		a=	0,3		k=	3
7		b=	0,4		lambda=	0,6
8						
9	M(i1)=	=(C4+C3)/2/(C7-C6)*LN((1+C7)/(1+C6))				
10						
11		=((1+C7)^(F6+1)*F3^2-(1+C6)^(F6+1)*F4^2)/2/(F6+1)/(C7-C6)/(F4-F3)*((1+C6)^(-2*F6)-(1+C7)^(-2*F6))				
12		=((C7+1)^(F6+1)-(C6+1)^(F6+1))/2/(F6+1)/(C7-C6)/(F4-F3)*(F4^2/((1+C7)^(2*F6))-F3^2/((1+C6)^(2*F6)))				
13		=F6*(F4+F3)/(F6^2-1)/(C7-C6)*((1+C6)^(1-F6)-(1+C7)^(1-F6))				
14	M(i k)=	=СУММ(B11:B13)				
15						
16	M(i)=	=ЕСЛИ(И(C3/(1+C6)<C4/(1+C7);F3/((1+C6)^F6)<F4/((1+C7)^F6));F7*B9+(1-F7)*B14;"")				