ЖУРНАЛ
ЕВРОПЕЙСКОЙ ЭКОНОМИКИ
Том 12 (№ 3). Сентябрь 2013
Издание Тернопольского национального экономического университета

Рынок финансово-банковских услуг

Ксин ХЕ

МОРАЛЬНЫЙ РИСК КОНТРАКТА И НОРМИРОВАНИЕ КРЕДИТОВ НА НЕПРОЗРАЧНЫХ КРЕДИТНЫХ РЫНКАХ

Резюме

Мы делаем первый шаг в литературе, анализируя гибридную модель нормирования кредитов при наличии неблагоприятного отбора и морального риска. Исходя из того, что кредитные рынки в менее развитых странах достаточно непрозрачны, поскольку там нет необходимых учреждений, которые способствовали бы обмену информацией между кредиторами, мы еще раз вернулись к вопросу о нормировании кредитов в такой среде. Для целого ряда различных значений параметров мы полностью даем описание идеального равновесия подгрупп в игре получения кредита. При определенных значений параметров существует тип II нормирования кредитов для некоторых заемщиков и кредитов, которые навязывают, – для других. Показано, что эффективность вынужденных кредитов ограничена. Эти результаты контрастируют с результатами DeMeza и Webb (1992).

Хе Ксин, Школа экономики, Шанхайский университет финансов и экономики, Китай.

Автор выражает благодарность декану Corbae, Kevin X. D. Huang, In-Uck Park, Ted Temzelides за помощь, а также участникам WEAL-конференции, Пятой финансовой конференции и SUFE-семинара по микроэкономике. Данное исследование проведено в рамках Программы Главной Академической Дисциплины (Проект 2011) Китая.

Ключевые слова

Распределение (нормирование) кредитных ресурсов, моральный риск, неблагоприятный выбор.

Классификация по JEL: D40, D82.

1. Введение

Большое количество литературы посвящено объяснению феномена нормирования кредитов, апеллируя к асимметричной информации, находящейся на кредитном рынке. Существуют два основных вида объяснений данного направления исследований: базирующиеся на неблагоприятном выборе и другие, в основе которых – моральные риски. Фундаментальные труды Стиглица и Вейса (1981) (Stiglitz and Weiss) являются примером первых. Согласно их модели, банк не может видеть рискованности проекта фирмы и возвращение банку кредита зависит от возможного дефолта фирмы. Эти ученые утверждают, что в условиях ограниченной ответственности фирмы повышение процентной ставки кредита не обязательно увеличивает банковскую прибыль, так как за кредитами с более высокими процентными ставками обращаются только фирмы с более рискованными проектами, в то время как фирмы с менее рискованными – просто выходят с рынка. Этот негативный эффект выбора не дает банку повышать процентные ставки, и это устраняет избыточный спрос на рынке и приводит к рационированию кредита. Как пример подхода морального ущерба Бестер и Хельвиг (1987) (Bester and Hellwig) рассматривают возможность рационирования кредита через скрытые действия заемщиков. Заемщик может выбирать между «хорошим» и «плохим» инвестиционными проектами после получения средств от кредитора, что характеризуется разной суммой возврата кредита (то есть, их рискованностью). При ограниченной ответственности выбор заемщиком проекта влияет на возврат средств заимодавцу, но до принятия проекта в кредитном договоре нельзя делать этот выбор. При таких условиях снова возникает рационирование кредитов, на этот раз в результате постконтрактной информационной асимметрии между кредитором и заемщиком, в отличие от скрытой информации в приведенной выше модели Стиглица и Вайса, которая представляет собой в-контрактную информационную асимметрию.

Несмотря на различия особой формы скрытой информации или скрытого действия, все объяснения всех других моделей рационирования кредитов базируются в литературе на любом неблагоприятном выборе или моральном риске, то есть в тех моделях структуры стимулирования являются одномерными. Однако во многих практических приложениях только одномерный отрицательный выбор или только одномерный моральный риск вряд ли может составлять суть экономической проблемы. Существует явная необходимость изучения многомерных структур стимулирования рационирования кредита. В этом направлении Гельман и Стиглиц (2000) (Hellmann and Stiglitz) сделали первый шаг, вводя двумерную личную информацию (в отношении как ожидаемой прибыли, так и риска проекта фирмы) в модели нормирования кредита и маржи. Как оказалось, введение полной формы информационной асимметрии приводит к некоторым выводам, которые отличаются от сделанных в предыдущих работах на эту тему. Например, они показывают, что нормирование кредитов и маржи совместимы в их условиях, в отличие от результатов DeMeza и Webb (1987), когда рационирование кредита или маржи исчезает при одномерной асимметричной информации об ожидаемой доходности или риске проекта.

В этой работе мы вводим многомерную структуру стимулов другого направления нашего исследования рационирования кредитов. В гибридной модели мы допускаем одновременное присутствие неблагоприятного отбора и морального риска. Конкретная форма контрактной информационной асимметрии обусловлена тем фактом, что кредитные рынки во многих малоразвитых странах достаточно непрозрачны в том смысле, что кредитор не может легко наблюдать за финансовым состоянием заемщика, когда тот обращается за кредитом. Скрытая информация заемщика о существующих долгах представляет опасность для кредитора, поскольку это влияет на способность заемщика погасить долг. Мы моделируем проблемные кредиты, совершенные между кредитором и заемщиком в форме скрининговой игры, где заемщик не только самостоятельно выбирает предложенный кредитором договор, но также выбирает уровень оптимальных рабочих усилий. Поскольку прибыль кредитора частично зависит от выбора рабочих усилий заемщика в стохастическом плане, для кредитора это эндогенно порождает риск. Таким образом, эта эндогенность риска нашей модели выступает контрастом экзогенных рисков других моделей рационирования кредитов, которые освещаются в литературе. Например, в приведенных выше работах Стиглица и Вайса (1981) (Stiglitz and Weiss), Бестер и Гельвига (1987) (Bester and Hellwig) рискованность проекта фирмы просто предполагается как экзогенный элемент их соответствующей модели. Риски в моделях Майлд и Райли (1988) (Milde and Riley) и Гейла и Гедьвига (1985) (Gale and Hellwig) также экзогенные: первые вводят риск с абстрактной случайной величиной, а вторые представляют его как результат, скажем, неопределенности относительно будущей цены продукции предпринимателя.

Помимо вопроса экзогенных, в отличие от эндогенных, рисков в моделях рационирования кредита, появилась критика экзогенного характера кредитного договора между кредитором и заемщиком. Первоначальные исследования рационирования кредита рассматривали кредитный договор как типичное оформление долга, согласно которому заемщик обязан погасить заранее установленную сумму, и такая форма заключения контракта предлагалась всем без исключения потенциальным заемщикам. Для решения этой проблемы Уэтт (1983) (Wette), Бестер (1985a) (Bester), Бесанко и Такора (1987) (Besanko and Thakor), например, изучили идею скрининга, когда выдвигалось требование делать залог, а заемщики сами выбирали предложения кредитора по процентной ставке и требованию обеспечения необходимого залога. С другой стороны, в роли скринингового инструмента кредитора Бестер (1985b) (Bester), Майлд и Райли (1988) (Milde and Riley), Гринблатт и Хван (1989) (Grinblatt and Hwang) вводят переменную величину размеров кредита. В нашей модели при выборе заемщиков размер кредита также может быть переменным, который, помимо процентной ставки, кредитор использует как второй инструмент.

На основе теории Китона (1979) (Keeton) в литературе дается два вида рационирования кредитов. Тип I рационирования кредитов происходит, когда заемщик получает меньшую сумму кредита по определенной им процентной ставке, чем хотел бы. Тип II – когда из всех желающих заемщиков, долги которых нельзя отследить, одним предоставляются кредиты, а другим – нет. При наличии установленных инвестиционных потребностей всех потенциальных заемщиков этот вопрос невозможно решить, применив тип I рационирования кредитов, так как все предложения кредитора будут охватывать либо все, либо ничего. В наших условиях, при определенных значениях параметров модели, мы показываем, что тип II рационирования кредитов существует для одного типа заемщиков, а для других типов применяется явление, противоположное типу I рационирования кредитов, а именно: на кредитном рынке существуют вынуждаемые кредиты, когда заемщик «вынужден» принимать большую ссуду, чем хотел бы, по рыночным процентным ставкам кредитора. Поскольку размер предоставленного кредита не является наиболее желательным для заемщика, однако он составляет ограниченный оптимальный уровень инвестиций. В этом отношении наша статья близка к подходам Де Мезы и Уэбба (DeMeza и Webb) (1992), хотя они рассматривают окружающую среду с помощью симметричной информации и экзогенных рисков и делают акцент исключительно на типе I и рационирования кредитов. Результаты, которые мы получим, отличаются от них по таким вопросам, как возможность возникновения рационирования кредита на монопольном рынке, а также роль ситуации, когда не ведется контроль за задолженностью заемщика и правилом приоритетности погашения долга в условиях рационирования кредита. Одной из отличительных черт нашего анализа является то, что мы точно определили наличие (или отсутствие) кредитного нормирования для ряда различных значений параметров модели, в то время как большинство предыдущих работ в данной области просто показали возможность рационирования кредитов. На самом деле и Гельман, и Стиглиц (2000) (Hellmann and Stiglitz) утверждали, что «в идеале хотелось бы иметь общую характеристику, каким образом превратить эти параметры на достижение равновесия рационирования», но «это, как оказывается, аналитически невозможно сделать [в нашей модели]». Изучая достаточно общую, но все же гибкую модель рационирования кредитов в нашей статье, мы тем самым обогащаем существующую литературу.

Данная статья также связана с литературой о несостоявшихся эксклюзивных контрактах. Парк (2004) Park), например, считает, что проблема моральных рисков при оформлении кредита одного отдельно взятого заемщика и кредитора, согласно модели, – это когда заемщик выходит из промежуточного уровня имущества, что впоследствии становится его личной информацией, которой он пользуется на внешнем рынке перед заключением контракта с новым кредитором. В этом отношении наша модель и модели Парка подобны в том, что предварительно существующий долг заемщика является также его личной информацией. Бизер и ДеМарзо (1992) (Bizer and DeMarzo), в своем исследовании дальнейшей банковской деятельности, рассматривают условия, когда кредитор не может контролировать будущие заимствования заемщика у других кредиторов, в нашем же случае, для сравнения, – это когда кредитор не может отследить предыдущие займы заемщика.

Остальная статья построена следующим образом: раздел 2 посвящен природе и причине существования непрозрачных кредитных рынков, и здесь дается официальная модель. В разделе 3 выводится оптимальный контракт в условиях симметричной информации как ориентировочный случай. В разделе 4 мы анализируем скрининг равновесий при неконтролируемых долгах. Раздел 5 содержит анализ последствий скрининга равновесий для рационирования кредитов. Заключительные замечания представлены в разделе 6.

2. Конъюнктура

2.1. Непрозрачные кредитные рынки и сосуществование многочисленных долгов

Заемщики часто имеют несколько источников на кредитных рынках, из которых получают средства. Таким примером может служить рынок потребительского кредитования. В Соединенных Штатах потребители обычно имеют несколько кредитных карточек, выданных различными банками. Байсин и Гвейтоли (Bisin and Guaitoli) (2004) считают, что типичная американская семья имеет в среднем более семи кредитных карточек. Большинство долгов на кредитных карточках являются необеспеченными, а значит, их могут не вернуть. Как свидетельствуют Петерсен и Раджан (1994, 1995) (Petersen and Rajan), малые предприятия часто могут брать кредиты у нескольких кредиторов. В Европе превалирует кредитование из нескольких источников (Detragiache, Garella и Guiso, 2000). Во всех этих случаях долг заемщика у одного кредитора является экзогенным фактором для другого, потому что чем больше задолженность заемщика, тем больше риск для кредитора относительно погашения кредита.

Хотя практически невозможно ограничить доступ заемщиков к нескольким источникам кредитования, были созданы учреждения, которые решают проблемы информационной асимметрии, возникающие между кредиторами и заемщиками. Таким примером являются кредитные бюро. Кредиторы – члены бюро обмениваются информацией о финансовом состоянии своих общих должников. Когда потребитель подает заявку в банк на открытие кредитной линии, банк, помимо всего прочего, проверяет его задолженность на этот период, пользуясь информацией различных кредитных бюро. Если установлено, что общий долг слишком высок относительно предполагаемой способности его погашения (например, исходя из годового дохода заявителя), его просьба, вероятно, не будет удовлетворена.

Хотя такие страны, как США и Великобритания, имеют относительно совершенные системы обмена информацией между кредиторами о заемщиках, в других странах, таких как Бельгия, Италия и Испания, обмен такой информацией является минимальным (Пагано и Джапелли), (Pagano and Japelli, 1993). А в некоторых менее развитых странах обмена информацией практически не существует, что отчасти объясняет медленное развитие области потребительского кредитования в этих странах[1]. Кроме того, в большинстве стран существуют правила, которых должны придерживаться кредитные бюро и согласно которым запрещается сбор определенных видов информации, например, информации о задолженности перед друзьями, членами семьи и другими частными заемщиками. Хотя, в принципе, сами кредиторы могут попытаться узнать личные долги заемщика, анализируя стоимость его проживания, такая стоимость может оказаться непомерно высокой, что практически невозможно при его финансовом положении[2].

Исходя из учения Bizer and DeMarzo (1994), в свете этих институциональных реалий на кредитных рынках мы моделируем неотслеживаемые кредитором задолженности заемщика на момент подачи его заявления на получение нового кредита[3]. Мы также предполагаем, что в случае банкротства заемщика, он оплатил все предыдущие долги до погашения кредита новому кредитору. Это предположение может быть оправдано, если долги являются приоритетными, то есть если древние долги в случае банкротства могли быть возвращены позже по сравнению с теми, которые были получены позже. Кроме того, даже если долги не являются приоритетными в юридическом смысле, они, тем не менее, являются приоритетными с точки зрения заемщика, то есть, когда речь идет о погашении долгов, то преференции заемщика таковы: ранее взятые кредиты он покрывает сначала, а потом – те, которые взял позже. Это особенно случается во многих слаборазвитых странах, где большую часть долгов потребителей составляют долги перед частными сторонами, такими как друзья и члены семьи заемщика. При отсутствии необходимых правовых учреждений обеспечения погашения долга в этих странах, заемщик имеет как стимулы, так и средства убеждения, что долги платят в первую очередь «первоочередному» кредитору[4].

2.2. Заключение кредитного соглашения

Кредитный рынок состоит из монополиста-кредитора и большого количества заемщиков. По определенным причинам заемщики имеют предыдущие долги и находятся в трудном финансовом положении. Но у них есть эффективные технологии, которые, при условии соответствующего финансирования, могут обеспечить такое производство, которое бы дало возмож-

[1] Согласно Ивасаки (Iwasaki (2004), в Китае кредитных карточки составляют лишь 5 % от общего количества банковских карточек, все остальные – дебетные, как их называют в Америке, то есть, владелец карточки держит средства в определенном банке. Также см. Li и др. (2005).

[2] Подтверждение этого можно найти в соответствующей литературе. См., например, Townsend (1979), Gale and Hellwig (1985), and Williamson (1986, 1987).

[3] Подтверждение этого можно найти в соответствующей литературе. См., например, Townsend (1979), Gale and Hellwig (1985), and Williamson (1986, 1987).

[4] См. Longhover и Carlstrom (1995) и Longhover (1997).

ность погасить существующие долги. Заемщики по сути своих долгов различаются между собой: у одних эти долги сделаны в прошлом d_H предыдущие долги других d_H – при $0 < d_L < d_H$. В противном случае заемщики идентичны, как описано ниже, и в дальнейшем именуются как *L*-заемщики и *H*-заемщики, соответственно, в зависимости от суммы их предыдущей задолженности.

При первом инвестировании, $I \in [0,\infty)$, каждый заемщик с помощью своих технологий и вложенных усилий $e \in [0,1)$ может производить продукцию второго периода $F(I,e)$. Выход продукции увеличивается с увеличением уровня усилий в смысле стохастического доминирования первого ряда. В частности, мы считаем, что F имеет мультипликативную форму: $F(I,e) = f(I)Z(e)$, где f удовлетворяет $f(0) = 0$, $f'(0) = \infty$, $f' > 0$, $f'(\infty) = 0$, а $f'' < 0$ и $Z(e)$ составляет 0–1 случайной величины, где $prob\{Z(e) = 1\} = e$, а $prob\{Z(e) = 0\} = 1 - e$, то есть, высокий уровень усилий приводит к большей возможности успеха любого фиксированного объема инвестирования. Каждый заемщик имеет действие полезности: $U(w,e) = u(w) - g(e)$, которая определяется его вторым периодом имущественного положения *w,* а объем усилий *e*, где *u* удовлетворяет $u(0) = 0, u' > 0$, а $u'' < 0$, а g удовлетворяет $g(0) = 0$, $g(1) = \infty$, $g'(0) = 0$, $g'' > 0$ и $g''' > 0$[5]. Итак, заемщик становится нейтральным к риску в вопросах имущества, а высокий уровень усилий будет более затратным в смысле полезности.

Тот кредитор является нечувствительности к риску, который работает на рынке, пытаясь максимизировать свою ожидаемую во втором периоде прибыль. Он увеличивает объем кредитных средств на депозитном рынке, где их предложение под процентную ставку ρ является бесконечно эластичным. Это означает, что кредитор, если решит инвестировать в технологии заемщика, может получить средства в любом количестве, которые он желает, по проценту, который он сам установил[6]. Не нарушая общего подхода, мы предполагаем, что $\rho = 0$.

Все стороны несут ограниченную ответственность. Во-первых, заемщик несет ограниченную ответственность перед кредитором. То есть, если

---

[5]Пример, когда g удовлетворяет эти свойства $g(x) = -\ln(1 - x) - x$, $0 \le x < 1$.

[6] Раньше литература о рационировании кредитов базировалась на доктрине, что ограниченное количество заемных средств заставляет банки прибегать к их рационированию. Предположение о бесконечной эластичности предложения заемных средств позволяет сделать акцент на роли асимметричной информации, которая является причиной нормирования кредитов.

заемщик обанкротится во второй период, остальное его имущество гарантированно составит не менее нуля. Во-вторых, кредитор имеет ограниченную ответственность перед предыдущими кредиторами заемщика, то есть, когда заемщик не сможет погасить свои предыдущие долги, новый кредитор не несет ответственности за их погашение. И, наконец, ответственность кредитора перед его вкладчиками также ограничена.

Мы моделируем этот инвестиционный процесс как следующую двухступенчатую игру. В первом периоде, после того как определены инвестиционные возможности, кредитор привлекает средства депозитного рынка, а затем предлагает заемщику кредитное соглашение (l, r), где l – размер кредита и r – размер процентной ставки[7]. Заемщик может либо отказаться от кредитного контракта, и в этом случае он заканчивается нулевым результатом а, следовательно, нулевой полезностью во втором периоде, либо принять предложение, и в этом случае кредит укладывается в работу, и заемщик выбирает уровень усилий e, направленных на выпуск продукции второго периода. Если заемщик принимает предложение, тогда в течение второго периода он погашает долги при условии ограниченной ответственности и правил приоритета погашения долга (то есть сначала погашают ранее сделанные долги, а затем – более поздние). Для простоты возьмем правило «ничья», предполагая, что заемщик всегда отказывается от контрактного предложения, или, если ему все равно – принять или отклонить предложение, кредитор в таком случае всегда выбирает вариант не выходить с предложением.

3. Оптимальные кредитные договоры при условии видимых долгов

Мы хотим охарактеризовать под-игру совершенного равновесия (SPE) в игре заключения контракта, и в этом процессе получить оптимальный контракт кредитора относительно заемщика. Согласно этой под-игре совершенства, стратегия заемщика должна быть такой, что заемщик не может отказаться от договорных условий, при которых предложенный в первом периоде кредитором заем во втором периоде даст положительный полезность действия. Это условие эффективно уничтожает пустые угрозы заемщика о получении лучших условий кредита. В этом разделе мы сначала рассмотрим в качестве ориентира ситуацию, когда частная информация о долгах

[7] Как отмечают DeMeza и Webb (1992), в банковской практике заемщикам обычно устанавливается процентная ставка, а также объем займа. Это также касается и владельцев кредитных карточек: вместе с кредитной линией им дается и размер процентной ставки.

заемщика становится известной кредитору. Когда заемщику предлагается кредитное соглашение, он должен решить, принять его или отклонить. Следующая лемма показывает условия, при которых заемщик принимает кредитное соглашение, а $u'' < 0$, а g удовлетворяет $g(0) = 0$, $g(1) = \infty$, $g'(0) = 0$, $g'' > 0$ и $g''' > 0$.

Лемма 1. *I-заемщик примет кредитное соглашение* (l_i, r_i), *если (и только при условии, если)* $f(l_i) - d_i - (1 + r_i)l_i > 0$. *Если удовлетворяется данное условие, заемщик выбирает уровень* e_i *усилий, что будет единственным решением.*

Доказательство. См. приложение.

Установив необходимые и достаточные условия для принятия заемщиком кредитного соглашения, обратимся теперь к анализу SPE (под-игры совершенного равновесия), рассматривая игру в различных ситуациях относительно значений параметров модели. Но, прежде чем перейти к такому анализу, сначала приведем еще одну лемму, которую мы даем без доказательства, и определим две величины l и h.

Лемма 2. *Существует единственный* $l^* \in [0, \infty)$, *такой как* $f(l^*) - l^* \geq f(l) - l$ *для любого* $l \in [0, \infty)$. *Кроме того,* $l^* > 0, f'(l^*) = 1$, *а* $h^* \equiv f(l^*) - l^* > 0$.

Поскольку предыдущие долги не скрываются, кредитор может прекрасно устанавливать разницу между заемщиками, предлагая каждой категории иные кредитные соглашения. Так как заемщик является нечувствительным к рискам, максимизация его общего ожидаемого дохода является эквивалентом максимизации ожидаемого дохода от каждой категории заемщиков, независимо от того, происходит начисление процентов на капитал двух категорий заемщиков отдельно или нет. Ожидаемый доход кредитора от заемщика i, если тот примет соглашение (l_i, r_i) и выберет уровень усилий e_i, как показано в лемме 1, выражен формулой

$$\pi_i = E[\max\{\min\{\max\{f(l_i)Z(e_i) - d_i, 0\}, (1 + r_i)l_i\} - l_i, 0\} \mid e_i]. \tag{1}$$

Заметим, что две максимы в вышепредставленном выражении по порядку их появления отражают, соответственно, ограниченную ответственность заемщика перед его вкладчиками и заемщиков – перед их предыдущими кредиторами. Ожидаемая заемщиком i полезность второго периода в случае принятия им контрактного соглашения (l_i, r_i) при $f(l_i) - d_i - (1 + r_i)l_i > 0$ и при выборе им уровня усилий e_i выражается формулой

$$E_i = e_i \cdot u(f(l_i) - d_i - (1+r_i)l_i) - g(e_i) \quad (2)$$

Мы выводим SPE для каждого из трех случаев по очереди. Пример 1: $h^* \le d_L$; Пример 2: $d_L < h^* \le d_H$ и Пример 3: $d_H < h^*$.

Пример 1: $h^* \le d_L$. Тогда $h^* \le d_i, i = L, H$. Поскольку, по лемме 2, l является единственной максимой для $f(l) - l$ и $h^* = f(l^*) - l^*$, мы имеем для любого предложения контракта (l_i, r_i), что $f(l_i) - d_i - (1+r_i)l_i \le f(l^*) - l^* - d_i - r_i l_i = h^* - d_i - r_i l_i < 0$. Согласно лемме 1, ни одна категория заемщиков не примет соглашения и, соответственно, кредитор не выйдет с предложением заключения такого соглашения. Это приводит к следующей теореме.

Теорема 1. *Если* $h \le d_L$*, то существует единственный результат игры SPE, если кредитор не предлагает соглашения одной категории заемщиков.*

Пример 2: $d_L < h^* \le d_H$. Прежде всего, заемщик H не принимает предложение кредитора, а это значит, что кредитор не предлагает соглашения этой категории заемщиков, как показано в примере 1. Заемщикам L, зная, что по договору (l_L, r_L), когда $f(l_L) - d_L - (1+r_L)l_L \le 0$, при которой доход будет нулевым во втором периоде, поскольку заемщик L не захочет такого соглашения, кредитор для получения ожидаемого положительного дохода во втором периоде постарается предложить (l_L, r_L), так как $f(l_L) - d_L - (1+r_L)l_L > 0$. В таком случае, поскольку $f(l_L) - d_L - (1+r_L)l_L > 0$ предполагает, что $f(l_L) - d_L > (1+r_L)l_L \ge 0$, ожидаемый доход кредитора π_L от (1), составляет $\pi_L = e_L r_L l_L$. Задача кредитора заключается в том, чтобы максимизировать π_L, а это зависит от того, согласится ли заемщик L на сделку e_L, как описано в лемме 1. То есть, кредитор решает задачу максимизации.

Максимизировать $e_L r_L l_L$

s. t.

$$g'(e_L) = u(f(l_L) - d_L - (1+r_L)l_L) \quad (3)$$

$$f(l_L) - d_L - (1+r_L)l_L > 0 \quad (4)$$

Условия, вытекающие из интегранта (Лагранжа), для данной задачи следующие:

$$r_L l_L - \lambda g''(e_L) = 0 \tag{5}$$

$$e_L l_L - \lambda l_L u'(f(l_L) - d_L - (1 + r_L) l_L) = 0 \tag{6}$$

$$e_L r_L - \lambda((1 + r_L) - f'(l_L)) u'(f(l_L) - d_L - (1 + r_L) l_L) = 0 . \tag{7}$$

где λ – множитель, связанный с ограничением (3) и с ограничениями (3) и (4).

Из (6) и (7) мы получаем

$$f'(l_L) = 1 . \tag{8}$$

что, согласно лемме 2, предполагает, что $l_L = l^*$, а (5), (7) и (8) в результате дает

$$e_L g''(e_L) = r_L l_L u'(f(l_L) - d_L - (1 + r_L) l_L) \tag{9}$$

Теперь, при $l_L = l^*$, задание сужается до того, чтобы найти e_L, r_L , которое удовлетворит

$$g'(e_L) = u(f(l^*) - d_L - (1 + r_L) l^*) \tag{3'}$$

$$e_L g''(e_L) = r_L l^* u'(f(l^*) - d_L - (1 + r_L) l^*) \tag{9'}$$

$$f(l^*) - d_L - (1 + r_L) l^* > 0 \tag{4'}$$

Запись $A \equiv f(l^*) - l^* - d_L$ (3′), (9′), (4′), соответственно, становится

$$g'(e_L) = u(A - r_L l^*) \tag{3''}$$

$$e_L g''(e_L) = r_L l^* u'(A - r_L l^*) \tag{9''}$$

$$A - r_L l^* > 0 \tag{4''}$$

Заметим, что $A > 0$, поскольку по предположению $f(l^*) - l^* - d_L = h^* - d_L > 0$. Для дальнейшего использования мы приводим ниже соответствующие ограничения заемщику *H*:

$$g'(e_H) = u(f(l^*) - d_H - (1 + r_H) l^*) \tag{3*}$$

$$e_H g''(e_H) = r_H l\ u'(f(l^*) - d_H - (1 + r_H) l^*) \tag{9*}$$

$$f(l^*) - d_H - (1 + r_H) l^* > 0 \tag{4*}$$

Предложение 1. *Для удовлетворения (3´), (9´) і (4´) существует единственное решение* $(\bar{r}_L, \bar{e}_L)$.

Доказательство. Понятно, что для каждого случая $0 \le r_L \le \dfrac{A}{l}$ есть единственное условие $e_L \in [0,1)$, которое удовлетворяет (3″). Таким образом, только (3″) определяет e_L как функцию r_L : $e_L = p(r_L)$ для $0 \le r_L \le \dfrac{A}{l}$. Можно легко увидеть, что p – это резко возрастающая и продолжающаяся величина, когда $p(0) = g'^{-1}(u(A)) > 0$ и $p(\dfrac{A}{l}) = 0$.

Таким же образом только (9″) определяет e_L как функцию r_L : $e_L = q(r_L)$. Тогда q – резко растущая продолжительная величина, когда $q(0) = 0$ и $q(\dfrac{A}{l}) > 0$, поскольку $u' > 0$ увеличивается $e_L g''(e_L)$ в e_L, потому что $g''' > 0$. Таким образом, полученные данные (3″), (9″) и (4″) меньше, по сравнению с данными (r_L, e_L), удовлетворяют $e_L = p(r_L)$, $e_L = q(r_L)$, а также (4″). Рассмотрим $s(r_L) \equiv p(r_L) - q(r_L)$. Тогда s является длительной и ниспадающей величиной в r_L, $s(0) = p(0) - q(0) > 0$ и $s(\dfrac{A}{l^*}) = p(\dfrac{A}{l^*}) - q(\dfrac{A}{l^*}) < 0$. Согласно теореме промежуточного значения, существует единственная величина $\bar{r}_L$, такая как $0 < \bar{r}_L < \dfrac{A}{l^*}$, и $s(\bar{r}_L) = 0$ или эквивалентна $p(\bar{r}_L) = q(\bar{r}_L)$. Допустим, что $\bar{e}_L \equiv p(\bar{r}_L) = q(\bar{r}_L) > 0$. Тогда $(\bar{r}_L, \bar{e}_L)$ – действительно единственное решение (3″) и (9″). Поскольку $0 < \bar{r}_L < \dfrac{A}{l^*}$, это решение также удовлетворит (4″). Q.E.D.

Теперь мы можем применить теорему под-игры совершенного равновесия (SPE) для примера, когда $d_L < h^* \le d_H$.

Теорема 2. *Если* $d_L < h^* \le d_H$, *то для SPE существует единственный результат игры, если кредитор не предлагает соглашения заемщикам H, а предлагает заемщикам L соглашение* (l_L, r_L), *где* $l_L = l^*$, *и* $r_L = r_L^*$ *является единственным решением уравнений (3´) и (9´); заемщики L принимают соглашение; заемщики L получают ожидаемую положительную полезность, а кредитор во втором периоде – ожидаемый доход.*

Пример 3: $d_H < h^*$. Тогда $d_i < h^*, i = L,H$. Поскольку кредитор может выбирать между двумя категориями заемщиков, его задача состоит в том, чтобы во втором периоде максимизировать ожидаемый доход от каждой категории заемщиков. Понятно, что анализ примера 2 переносится на данный пример, следовательно, мы можем вывести следующую теорему.

Теорема 3. *Если $d_H < h^*$, то для SPE существует единственный исход игры, когда для $i = L,H$ кредитор предлагает заемщикам i соглашение (l_i, r_i), где $l_i = l^*$ и $r_i = r_i^*$ – единственное решение для (3') и (9'), или (3*) и (9*) в зависимости от того, или i = L, или H; различные категории заемщиков, соответственно, принимают две различные сделки; заемщики i – получают ожидаемую положительную полезность, а кредитор во втором периоде получает ожидаемый доход.*

4. Самостоятельный выбор заемщиков

В этом разделе мы рассмотрим ситуацию, когда кредитор не может отследить предыдущие долги заемщика. Не зная, к какой категории относится заемщик, лучшее, что может сделать кредитор, – это определить, к какой категории относится заемщик – к категории *L* или к категории *H*[8]. Его стратегия заключается в выборе двух соглашений (l', r') и (l'', r''), которые будут одновременно предложены заемщикам. Стратегия заемщика: рассматривая два предложенных соглашения кредитора, принять (l', r') либо (l'', r'') или отказаться от обоих. Если заемщик примет одно из двух соглашений, ему также потребуется выбрать соответствующий уровень усилий, что будет частью его стратегии. Мы принимаем правило «ничья», если заемщик все равно относится к предложенным соглашениям, тогда он выбирает то, которое предполагает большую сумму займа. В этом случае заемщик сам выбирает предложенное кредитором соглашение.

Мы снова поочередно рассмотрим три примера, которые освещались в предыдущем разделе относительно SPE при асимметричной информации. Оказывается, результаты примеров 1 и 2, по сути, дают одинаковые результаты SPE с теми, что описаны в теоремах 1 и 2. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим пример 2, где $d_L < h^* \le d_H$. Хотя кредитор не может выявить реальные предыдущие долги заемщиков, осознавая, что заемщик *H*

---

[8] Данное предположение базируется на том, что половина населения, которое обращается за кредитами, является заемщиками *L,* а половина – заемщиками *H.*

не примет ни одного его предложения, вопрос максимизации кредитора в данной ситуации асимметричной информации, по сути, такой же, как и рассматривавшийся в разделе 3 при такой же ситуации $d_L < h^* \le d_H$. Точнее, существует единственный результат SPE-игры, когда кредитор предлагает заемщикам две одинаковые сделки: (l', r') и (l'', r''), где $l' = l^*$ и $r' = r_L^*$. Совместное решение (3'), (9') и (l'', r'') представляет собой условное кредитное соглашение, удовлетворяющее $f(l'') - d_L - (1 + r'')l'' \le 0$, и выплаты обеих сторон во втором периоде такие же, как и те, что показано в теореме 2.

А потому $d_H < h^*$ – интересная ситуация, которая может дать больше различных результатов SPE, чем представлено в теореме 3, при асимметричной информации о предыдущих долгах заемщика. В дальнейшем мы сосредоточим внимание именно на этой ситуации.

4.1. Отсутствие полностью разъединяющих равновесий

Допустим, что $d_H < h^*$. Сначала разобьем стратегическое пространство кредитора $D = \{((l', r'), (l'', r''))\}$ на пять разделенных подмножеств $D = \bigcup_{j=1}^{5} D_j$, где $D_1 = \{((l', r'), (l'', r''))\,|$.

Заемщик *H* соглашается на одно из двух предложенных соглашений, а заемщик *L* – отказывается от обоих. $D_2 = \{((l', r'), (l'', r''))\,|$.

Заемщик *L* соглашается на одно из двух предложенных соглашений, а заемщик *H* – на другое, и $(l', r') \ne (l'', r'')\}$, $D_3 = \{((l', r'), (l'', r''))\,|$.

Заемщик *L* соглашается на одно из двух предложенных соглашений, а заемщик *H* – отказывается от обоих. $D_4 = \{((l', r'), (l'', r''))\,|$.

Заемщик *L* отказывается от обоих предложенных сделок, и заемщик *H* также отказывается $D_5 = \{((l', r'), (l'', r''))\,|$.

Оба заемщика соглашаются на одну и ту же сделку.

Дефиниция SPE скрининговых игр называется полностью разделяющей, если стратегия кредитора по этому SPE находится в D_2; она называется полуразделяющей, если стратегия кредитора находится в $D_1 \cup D_3$, и если стратегия кредитора находится в D_5 , она называется пуллинг.

Мы показываем, что в действительности D_j пустая, а следовательно, это сужает плоскость поисков SPE скрининговой игры.

Предложение 2. *D_1 пустая.*

Доказательство. Допустим, что D_1 не является пустой. Пусть $((l^{'},r^{'}),(l^{''},r^{''}))\in D_1$. Не нарушая характера универсальности, представим, что заемщик *H* соглашается на $(l^{'},r^{'})$. Согласно лемме 1, это должна быть ситуация, когда $f(l^{'})-d_H-(1+r^{'})l^{'}>0$. Но тогда $f(l^{'})-d_L-(1+r^{'})l^{'}>0$, которое, по лемме 1, предполагает, что заемщик *L* также выбирает $(l^{'},r^{'})$. Итак, $((l^{'},r^{'}),(l^{''},r^{''}))\notin D_1$, противоречит Q. E. D.

Предложение 2 означает, что единственными возможными полуразъединяющими SPE являются такие, стратегия кредитора которых находится в D_3. Далее мы показываем, что D_2 также пустые. Для доказательства использована следующая лемма.

Лема 3. *Пусть $t_i(e)\equiv eB_i-g(e), i=1,2$ – два действия, выраженные $0\le e<1$. Их соответствующие максимальные величины обозначим T_i. Тогда получаем $B_i\in(0,\infty)$, $T_1>T_2$, если и только при условии, если $B_1>B_2$, и, соответственно, $T_1=T_2$, если и только при условии, если $B_1=B_2$.*

Доказательство. См. приложение.

Предложение 3. *D_2 не пустая.*

Доказательство. Допустим, что D_2 не пустая. Пусть $((l^{'},r^{'}),(l^{''},r^{''}))\in D_2$. Не нарушая характера универсальности, допустим, что заемщик *L* принимает $(l^{'},r^{'})$, а заемщик *H* – $(l^{''},r^{''})$. Из леммы 1 следует, что

$$f(l^{'})-d_L-(1+r^{'})l^{'}>0 \tag{10}$$

$$f(l^{''})-d_H-(1+r^{''})l^{''}>0 \tag{11}$$

Пусть e_L, e_H соответственно будет определенным выбором усилий заемщика *L* и заемщика *H*. Тогда

$$v_L=e_L u(f(l^{'})-d_L-(1+r^{'})l^{'})-g(e_L),$$

$$v_H=e_H u(f(l^{''})-d_H-(1+r^{''})l^{''})-g(e_H)$$

будет ожидаемая полезность во втором периоде заемщика *L* и, соответственно, заемщика *H*.

А теперь рассмотрим, какой будет ожидаемая полезность заемщика *L*, если вместо (l',r') он выбрал бы (l'',r''). Пусть его соответствующим уровнем усилия будут e_{LH}. Тогда ожидаемая полезность заемщика *L* во втором периоде выражается формулой

$$v_{LH} = e_{LH}u(f(l'') - d_L - (1 + r'')l'') - g(e_{LH}).$$

Таким же образом, если бы заемщик *H* должен был выбрать (l',r') вместо (l'',r''), его ожидаемая полезность во втором периоде была бы

$$v_{HL} = e_{HL}u(f(l') - d_H - (1 + r')l') - g(e_{HL}),$$

где e_{HL} – соответствующий уровень его усилий при выборе сделки (l',r').

То, что заемщик *L* предпочитает соглашении (l',r'), а не (l'',r''), значит, что либо $v_L > v_{LH}$, либо $v_L = v_{LH}$ и $l'' < l'$ (вспомним правило «ничья» при выборе кредитного соглашения), а это поочередно означает, что либо

$$f(l') - d_L - (1 + r')l' > f(l'') - d_L - (1 + r'')l'', \tag{L1}$$

либо

$$f(l') - d_L - (1 + r')l' = f(l'') - d_L - (1 + r'')l'' \tag{L2}$$

и $l'' < l'$, по (10) согласно лемме 3, и то, что *u* – строго возрастающая функция.

Так же, когда заемщик Н предпочитает (l'',r''), а не (l',r'), это означает, что либо

$$f(l'') - d_H - (1 + r'')l'' > f(l') - d_H - (1 + r')l', \tag{H1}$$

либо

$$f(l'') - d_H - (1 + r'')l'' = f(l') - d_H - (1 + r')l' \tag{H2}$$

Это эффективное упражнение, чтобы показать, что (L1) и (H1) вместе являются противоречием, точно так же, как (L1) и (H2) вместе, (L2) и (H1) вместе, а также (L2) и (H2) вместе. Данными противоречиями заканчивается доказательство предложения. Q.E.D.

Собственно говоря, нам необходимо обратиться к следующему вопросу с целью завершенности: какую сделку из двух разных, предусматривающих одинаковый объем займа, выберет заемщик? Можно легко доказать, что отношение заемщика к этим соглашениям не может быть одинаковым, хотя сумма кредита одинакова.

Результатом предложения 3 является то, что полностью разъединяющего равновесия не существует, и этот вывод мы трактуем как теорему.

Теорема 4. *Допустим, что* $d_H < h$. *В игре, когда кредитор не может отслеживать существующие долги заемщика и заемщик сам выбирает себе кредитора, полностью разъединяющей SPE не существует.*

4.2. Пуллинг и полуразъединяющее равновесие

Теперь, когда D_1 и D_2 – пустые, чтобы найти SPE, мы можем сосредоточить свое внимание $D_3 \cup D_4 \cup D_5$. Но нет такой SPE, когда стратегия заемщика взята из D_4, так как, по теореме 2, она могла бы быть значительно лучше (то есть, во втором периоде дать положительный доход вместо нулевого) и переходим к стратегии D_3 (D_3 не является пустой, поскольку любая контрактная пара $((l^{'},r^{'}),(l^{''},r^{''}))$ удовлетворяет $f(l^{'})-d_L-(1+r^{'})l^{'}>0$, $f(l^{'})-d_H-(1+r^{'})l^{'}\le 0$ и $f(l^{''})-d_H-(1+r^{''})l^{''}\le 0$ есть в D_3).

Итак, сфера поиска SPE сужается до $D_3 \cup D_5$, откуда заемщик выбирает себе лучшую стратегию.

Из того, что следует, мы изучаем (анализируем) условия, при которых наступает пуллинг, или полуразъединяющее равновесие. Для удобства ниже мы приводим целевые функции, ограничения, проблемы оптимизации и другие величины, к которым в дальнейшем часто будем обращаться.

<u>Целевые функции:</u>

$$\varphi(l,r,e_L,e_H) \equiv \frac{1}{2}e_L rl + \frac{1}{2}e_H rl,$$

$$\varphi(l,r,e_L) \equiv \frac{1}{2}e_L rl.$$

<u>Ограничения:</u>

$$g^{'}(e_L) = u(f(l)-d_L-(1+r)l) \tag{12}$$

$$g'(e_H) = u(f(l) - d_H - (1+r)l) \tag{13}$$

$$f(l) - d_H - (1+r)l > 0 \tag{14}$$

$$f(l) - d_H - (1+r)l \geq 0 \tag{15}$$

$$f(l) - d_H - (1+r)l \leq 0 \tag{16}$$

$$f(l) - d_L - (1+r)l > 0 \tag{17}$$

$$f(l) - d_H - (1+r)l = 0 \tag{18}$$

Проблемы оптимизации:

Максимизировать $\varphi(l, r, e_L, e_H)$ *s.t. (12), (13) and (14),* (P1)

Максимизировать $\varphi(l, r, e_L)$ *s.t. (12), (16) and (17),* (P2)

Максимизировать $\varphi(l, r, e_L, e_H)$ *s.t. (12), (13) and (15),* (P3)

Максимизировать $\varphi(l, r, e_L, e_H)$ *s.t. (12), (13) and (18),* (P4)

Максимизировать $\varphi(l, r, e_L)$ *s.t. (12) and (18),* (P5)

Максимизировать $\varphi(l, r, e_L)$ *s.t. (12).* (P6)

Величины:

l^* описана в лемме 1; e_L^*, r_L^*; является единственным решением уравнения (3′) и (9′); e_H^*, r_H^* – единственное решение уравнения (3*) и (9*) r^{**} – единственное оптимальное решение задачи (P1), которое дается в лемме 4.

Также мы используем следующее предостережение [максимизация $\Omega(x)$ s.t. (1), (2),…,(*n*)] выражает максимальную величину соответствующей задачи максимизации, если существует оптимальное решение этой задачи; так же и для предостережения [(P)], где (P) – название задачи максимизации.

Лемма 4. *Допустим, что* $d_H < h^*$. *Задача оптимизации (P1) имеет единственное оптимальное решение* $(l^*, r^{**}, e_L^{**}, e_H^{**})$, *где* l^*, *как показано в лемме 2, и* r^{**} *удовлетворяет* $\min\{r_L^*, r_H^*\} \leq r^{**} \leq \max\{r_L^*, r_H^*\}$.

Доказательство. См. приложение.

С помощью этих вспомогательных вычислений теперь мы можем дать характеристику пуллингу и разъединяющей SME скрининг-игре (игре отбора). Полностью это представлено в пятой и шестой теоремах. Вспомним наши поиски лучшей стратегии заемщика при помощи $D_3 \cup D_5$. Также заметим, что, поскольку $f(l^*) - d_H - (1+\max\{r_L^*, r_H^*\})l^* > 0$ означает $d_H < h^*$, последнее условие не является обязательным в теореме 5, в то время как в теореме 6 оно необходимо, а именно: $f(l^*) - d_L - (1+\min\{r_L^*, r_H^*\})l^* \le 0$.

Теорема 5. *Если* $f(l^*) - d_H - (1+\max\{r_L^*, r_H^*\})l^* > 0$*, то для скрининг-игры существует единственный результат SPE – пуллинг. В SPE кредитор предлагает двум категориям заемщиков два одинаковых контракта* (l', r') *и* (l'', r'')*, где* $(l', r') = (l^*, r^{**})$ *и* (l'', r'') *– такие, как* $f(l'') - d_L - (1+r'')l'' \le 0$*; обе категории заемщиков принимают соглашение* (l', r')*; обе категории заемщиков получают ожидаемую положительную полезность, а кредитор – ожидаемый положительный доход во втором периоде.*

Доказательство. Сначала рассмотрим, что может сделать заемщик, если его стратегия выбора сводится к условиям, указанным в D_5. Поскольку в D_5 две категории заемщиков принимают одну и ту же сделку, кредитору нет необходимости волноваться по поводу другого предлагаемого им соглашения (l'', r''), которое не было принято, ведь он уверен, что ни одна другая категория заемщиков не согласится на сделку, потому что $f(l'') - d_L - (1+r'')l'' \le 0$.

Итак, если $f(l) - d_H - (1+r)l > 0$ означает, что $f(l) - d_L - (1+r)l > 0$, кредитор ставит своей целью решение задачи (P1), если его стратегия выбора сводится к D_5. А теперь рассмотрим, что может сделать кредитор, если его стратегия выбора ограничивается D_3. Опять же, кредитор может остановиться на соглашении, которое избрал заемщик L, выбрав другую сделку (l'', r''), чтобы удовлетворить $f(l'') - d_L - (1+r'')l'' \le 0$, так что ни одна другая категория заемщиков не выберет ее. Следовательно, важным для кредитора является решение задачи (P2), если стратегия его выбора ограничивается D_3.

Согласно следующему условию теоремы, когда

$$f(l^*) - d_H - (1+\max\{r_L^*, r_H^*\})l^* > 0, \tag{19}$$

задача (P1) имеет единственное оптимальное решение, как описано в лемме 4, а следовательно, величина (P1) все-таки существует. Рассмотрим 4-кратное $(l^*, r_L^*, e_L^*, \hat{e}_H)$, где $\hat{e}_H$ выражено $g'(\hat{e}_H) = u(f(l\ ) - d_H - (1+r_L\ )l\ )$. Тогда $\hat{e}_H > 0$ согласно (19). Это можно легко проверить, что, при условии (19), вышеуказанная 4-кратная величина удовлетворяет (12), (13) и (14). Таким образом, мы получаем

$$\phi(l^*, r_L^*, e_L^*, \hat{e}_H) = \frac{1}{2} e_L^* r_L^* l^* + \frac{1}{2} \hat{e}_H r_L^* l^* > \frac{1}{2} e_L^* r_L^* l^*,$$

а следовательно,

$$[(P1)] \geq \phi(l^*, r_L^*, e_L^*, \hat{e}_H) > \frac{1}{2} e_L^* r_L^* l^* \qquad (20)$$

С другой стороны, мы имеем для любой величины (l, r, e_L), удовлетворяющей (12), (16) и (17), что

$$\varphi(l, r, e_L) \leq \text{[максимизирует } \varphi(l, r, e_L) \text{ s.t. (12)]} = \frac{1}{2} e_L^* r_L^* l^* \qquad (21)$$

Здесь неравенство в (21) является результатом уменьшения ограничений (16) и (17) (l, r, e_L) задачи (P1). Отсюда следует из (20) и (21), что для любой величины, удовлетворяющей (12), (16) и (17), $\varphi(l, r, e_L) \leq$ [(P1)]. Итак, лучшая стратегия кредитора – D_5 и только D_5, и только лемма 4 гарантирует существование и обеспечение пуллингу SPE. Q. E. D.

Теорема 6. *Допустим, что* $d_H < h^*$. *Если* $f(l^*) - d_L - (1 + \min\{r_L^*, r_H^*\}) l^* \leq 0$, *то для скрининг-игры есть единственный SPE результат – полуразъединяющее равновесие. В SPE кредитор предлагает два одинаковых контракта* (l', r') *и* (l'', r'') *обеим категориям заемщиков, где* $l' = l^*, r' = \dfrac{h^* - d_H}{l^*}$ *и* (l'', r'') *– такие величины, когда* $f(l'') - d_L - (1 + r'') l'' \leq 0$; *заемщик L принимает соглашение* (l', r'), *а заемщик H не принимает никакого; заемщик L получает ожидаемую положительную полезность, а кредитор – ожидаемый положительный доход во втором периоде.*

Доказательство. И снова рассмотрим две задачи максимизации (P1) и (P2) по условию данной теоремы (22)

$$f(l^*) - d_L - (1 + \min\{r_L^*, r_H^*\}) l^* \leq 0 \qquad (22)$$

Сначала рассмотрим (P1). Если бы (P1) имела оптимальное решение, то таким решением было бы $(l^*, r^{**}, e_L^{**}, e_H^{**})$, как представлено в лемме 3. В частности, оно должно удовлетворять (14), то есть

$$f(l^*) - d_H - (1+r^{**})l^* > 0 \quad (23)$$

Но (23) противоположно (22), поскольку $\min\{r_L^*, r_H^*\} \le r^{**}$ и $d_L < d_H$. Итак, (P1) при условии (22) не имеет оптимального решения.

Теперь рассмотрим (P3), которая повторяет (P1), но условие (14) заменена на (15). Поскольку (P1) не имеет оптимального решения, условие (15) должна быть привязана к оптимальному решения (3). Итак, (P3) является эквивалентом (P4). Для (P4) условия (13) и (18) означают, что $e_H = 0$. Поскольку $\varphi(l, r, e_L, 0) = \phi(l, r, e_L)$, мы получаем

[(P3)] = [(P4)] = [максимизируем $\phi(l, r, e_L, 0)$ s.t. (12) i (18)] = [(P5)] (24)

Из-за того, что, как показано выше, (P1) не имеет оптимального решения, должно быть условие, при котором любые (l, r, e_L, e_H) удовлетворяют (12), (13) и (14),

$$\phi(l, r, e_L, e_H) < [(P3)] \quad (25)$$

Также предполагается, что (24), (25) любые (l, r, e_L, e_H), удовлетворяющие (12), (13) и (14),

$$\phi(l, r, e_L, e_H) < [(P5)] \quad (26)$$

Далее рассмотрим (P2). Оптимальное решение для (P6) (l^*, r_L^*), не удовлетворяет (17), так как, согласно (22), $f(l^*) - d_L - (1+r_L^*)l^* \le 0$. Итак, (16) должна быть привязанным к любому оптимальному решению (P2). Но, поскольку (16) имеет привязку, (17) становится излишним. Итак, (P2) является эквивалентом (P5).

Можно легко увидеть, что (P5) действительно имеет оптимальное решение $(l^*, \tilde{r}_L, \tilde{e}_L)$, где $\tilde{r}_L = \dfrac{h^* - d_H}{l^*}$ и $\tilde{e}_L = g'^{-1}(u(d_H - d_L))$. Это оптимальное решение (P5) будет также и оптимальным решением (P2), а следовательно

$$[(P5)] = [(P2)]. \quad (27)$$

В итоге мы показали, что для любой (l, r, e_L, e_H), удовлетворяющей (12), (13), и (14), что $\phi(l, r, e_L, e_H) <$ [(P2)], согласно (26) и (27). Согласно этому, мы видим, что при условии (22) лучшей стратегией кредитора будет в D_3 и только в D_3 и выражается $(l^*, \tilde{r}_L)$, как указано выше. Это приводит к результату полуразъединяющего SPE, как описано в данной теореме. Q.E.D.

5. Нормирование и навязывание кредитов

В этом разделе мы исследуем применение 5 и 6 теорем для нормирования кредитов. Как уже упоминалось во введении, для категории I рационирование кредита становится возможным при условии его переменного размера. Очевидно, что результат теоремы 5 не подразумевает II тип кредитного нормирования, так как обе категории заемщиков получают кредит в размере l^* по процентной ставке r^{**}. Возникает естественный вопрос, является ли размер кредита желательным по указанной процентной ставке с точки зрения заемщика, и если нет, то в каком направлении он искажается.

Ожидаемая полезность заемщиков и во втором периоде, когда принято кредитное соглашение (l_i, r_i), выражается $E_i^{\max}$, максимальное значение

$$E_i = e_i \cdot u(f(l_i) - d_i - (1 + r_i)l_i) - g(e_i).$$

По лемме 4, $E_i^{\max}$ является возрастающей функцией $u(f(l_i) - d_i - (1 + r_i)l_i)$, которая, в свою очередь, означает, что она является возрастающей функцией $f(l_i) - d_i - (1 + r_i)l_i$, поскольку именно u увеличивается в выгоде. Таким образом, наиболее желательный размер кредита для i-заемщика под процентную ставку $r_i = r^{**}$ – это тот, который максимизирует $f(l_i) - d_i - (1 + r^{**})l_i$. Обозначим его $\tilde{l}_i$. Тогда $\tilde{l}_i$ удовлетворяет условиям первого порядка $f'(\tilde{l}_i) = 1 + r^{**}$. Из леммы 2 следует, что размер кредита l^*, предоставляемого заемщику, такой $f'(l^*) = 1$, из которого видно, что $\tilde{l}_i > l^*$, потому что $f'' < 0$. Таким образом, размер кредита, который заемщик получает от кредитора, превышает его самые ожидаемые размеры и, в отличие от категории рационирования кредита, навязывание кредита возникает в этой ситуации, то есть только когда для выбора предлагается два соглашения, и заемщик вынужден принять то, которое предполагает более оптимальный размер кредита при условии данной процентной ставки. Так как, по нашему предположению о технологии производства заемщика, уровень его усилий не зависит от размера вклада, понятно, что навязывание кредита здесь возникает не потому, что больший кредит требует больше усилий, а скорее всего, это связано с самой природой уменьшения прибыли в данной технологии производства.

Навязывание кредита также происходит с L-заемщиком в теореме 6, при процентной ставке $r' = \dfrac{h^* - d_H}{l^*}$ он хотел бы иметь меньший объем кредита, чем l^*, но вынужден взять больше. С другой стороны, заемщик H не выигрывает от нормирования кредитов II-й категории, поскольку имеющиеся кредиты предоставляются на неприемлемых условиях, и в результате он отказывается от опциона рынке. Ситуация здесь в точности соответствует определению II типа кредитного нормирования: с точки зрения кредитора, некоторые получают кредит, а другие – нет. Это, конечно, является следствием асимметричности информации между кредитором и заемщиком. Лучше всего это видно при сравнении текущей ситуации с той, что представлена в теореме 3, где для того же диапазона значений параметров (то есть, $d_H < h^*$ и $f(I^*) - d_L - (1+\min\{r_L^*, r_H^*\})I^* \leq 0$) и без информационной асимметрии, заемщик H получил бы кредит, предложенный кредитором. Стоит отметить, что ситуация в теореме 2 не представляет собой случая II типа нормирования как такового (per se), хотя здесь происходит полный выход с рынка заемщика H, однако эти два типа заемщиков с точки зрения кредитора различаются между собой.

Здесь нужно будет сравнить наши результаты с результатами DeMeza и Webb (1992). Они показывают, что в условиях симметричной информации и отсутствия морального риска кредитное нормирование I типа (принуждение, навязывание) может быть социально эффективным. Для сравнения рассмотрим результаты навязывания кредитов в наших условиях. Хотя этот результат не может быть социально эффективным в первом – лучшем – смысле этого слова, однако он приводит к ограничению оптимального уровня инвестиций. Это видно из того, что при скрытых долгов объем кредита является таким же, как и в условиях, когда долги отслеживаются (в обоих случаях I^*). Этот уровень I^* может и не быть социально эффективным уровнем инвестиций из-за того, что здесь нельзя отслеживать выбор заемщиков и соответствующие действия по моральному риску, чего нет в условиях де Мезы и Уэбба. Таким образом, можно называть явления теорем 5 и 6 «эффективными» кредитами, которые навязываются, хотя термин «эффективные» нужно толковать в ограниченном (т. е. втором – лучшем) смысле.

Кроме того, вопросы эффективности наших результатов и результатов DeMeza и Webb (1992) совершенно противоположны. Они демонстрируют, что распределение кредитных ресурсов невозможно при монополии кредитора. Конечно, при их исключительном сосредоточении на I типе нормирования кредита тип II остается без внимания. Напротив, наш анализ показывает, что при асимметричной информации II тип нормирования кредитов вполне возможен. Однако, если мы вернемся к условиям асимметричности информации (теорема 3), то I тип рационирования кредита действительно исчезает и взамен появляется монополия кредитора с его навязыванием займа. Они также утверждают, что в условиях кредиторской конкурентности, когда кредиторы не могут отследить общую задолженность заемщиков, или не могут обеспечить приоритет правила погашения долга, нет никакого смысла вводить кредитное нормирование отдельном заемщику.

Однако в нашем случае именно эти два ограничения заставляют кредитора-монополиста нормировать кредиты[9].

6. Заключительные замечания

В данной работе мы делаем первый шаг в литературе, чтобы исследовать гибридную модель рационирования кредита по многомерной структуре стимулов. Для целого ряда различных значений параметров мы в полной мере характеризуем под-игру идеального равновесия в игре кредитного соглашения. При определенных значениях параметров для одного типа заемщиков существует тип II рационирования кредитов, а для другого – кредиты, которые навязывают. Последние продемонстрировали, что в ограниченном смысле они могут быть эффективными. Согласно стандартам существующей литературы по данному вопросу, наша модель является достаточно общей, которая включает многомерную структуру стимулов, эндогенные риски проекта и переменные размеры кредита.

В дальнейших исследованиях было бы желательно изучить модели в конкурентной среде в основном с теми же функциями, что и в данном. Как показывает анализ в Гейла и Гелвига (1985) (Gale and Hellwig) разница между монополистическими условиями и конкурентными может быть не такой постоянной, как кажется, поскольку речь идет о получении оптимального контракта. Действительно, за счет включения в ограничения соответствующей задачи максимизации дополнительных условий нулевой прибыли кредитора, оптимальный контракт может быть получен таким же образом, как и в случае монополии. Реальная проблема заключается в теоретико-игровой формулировке конкуренции в сделках, где существует многомерная информационная асимметрия, как аномалия (например, отсутствие равновесия) у Hellwig (1987). Вопрос осложняется еще и выводами Parlour и Rajan (2001), которые ставят под сомнение даже предположение нулевой прибыли на конкурентном рынке кредитов. Мы, конечно, не ожидаем, что задача теоретико-игрового моделирования в таких условиях может быть легкой.

[9] В данном вопросе наши результаты совпадают с результатами Longhofer (1997), исследовавшего причину, из-за которой нарушения правила абсолютного приоритета создают или обостряют необходимость рационирования кредитов.

Литература

1. Besanko, D. and A. Thakor (1987). Collateral and rationing: Sorting equilibria in monopolistic and competitive credit markets. *International Economic Review,* 28, 671–690.
2. Bester, H. (1985a). Screening vs. rationing in credit markets with imperfect information. *American Economic Review,* 75, 850–55.
3. Bester, H. (1985b). The level of investment in credit markets with imperfect information. *Journal of Institutional and Theoretical Economics,* 141, 503–515.
4. Bester, H. and M. Hellwig (1987). Moral hazard and equilibrium credit rationing. In: *Agency Theory, Information and Incentives*, edited by G. Bamberg and K. Spremann.
5. Bisin, A. and D. Guaitoli (2004). Moral hazard and nonexclusive contracts. *RAND Journal of Economics,* 35, 306–328.
6. Bizer, D. and P. DeMarzo (1992). Sequential banking. *Journal of Political Economy,* 100, 41–61.
7. DeMeza, D. and D. Webb (1987). Too much investment: a problem of asymmetric information. *Quarterly Journal of Economics,* 102, 281–292.
8. DeMeza, D. and D. Webb (1992). Efficient credit rationing. *European Economic Review,* 36, 1277–1290.
9. Detragiache, E., P. Garella, and L. Guiso (2000). Multiple versus single banking relationships. *Journal of Finance,* 55, 1133–1161.
10. Gale, D. and M. Hellwig (1985). Incentive compatible debt contracts: The one-period problem. *Review of Economic Studies,* LII, 647-664.
11. Grinblatt, M. and C.Y. Hwang (1989). Signaling and the pricing of new issues. *Journal of Finance,* 46, 393–420.
12. Hellmann, T. and J. Stiglitz (2000). Credit and equity rationing in markets with adverse selection. *European Economic Review,* 44, 281–304.
13. Hellwig, M. (1987). Some recent developments in the theory of competition in markets with adverse selection. *European Economic Review,* 31, 319–325.
14. Iwasaki, K. (2004, Summer). China's budding credit card market. *Japan Research Quarterly*.
15. Keeton, W. (1979). *Equilibrium Credit Rationing*, Garland Publishing Co.

16. Kletzer, K. (1984). Asymmetries of information and LCD borrowing with sovereign risk. *Economic Journal,* 94, 287–307
17. Li, Yang et al (2005, November). *Dianzi zhifu yu zhongguo jingji.* [Electronic Payments and Chinese Economy], report published by the Institute of Banking and Finance, Chinese Academy of Social Sciences.
18. Longhofer, S. (1997). Absolute priority rule violations, credit rationing, and efficiency. *Journal of Financial Intermediation,* 6, 249–267.
19. Longhofer, S. and C. Carlstrom (1995). Absolute priority rule violations in bankruptcy. Federal Reserve Bank of Cleveland, *Economic Review,* 31, 21–30.
20. Milde, H. and J. Riley (1988). Signaling in credit markets. *Quarterly Journal of Economics,* 103, 101–129.
21. Pagano, M. and T. Jappelli (1993). Information sharing in credit markets. *Journal of Finance,* 48, 1693–1718.
22. Park, I.U. (2004). Moral hazard contracting and private credit markets. *Econometrica,* 72, 701–746.
23. Parlour, C. and U. Rajan (2001). Competition in loan contracts. *American Economic Review,* 91, 1311–1328.
24. Petersen, M. and R. Rajan (1994). The benefits of lending relationships: evidence from small business data. *Journal of Finance,* 49, 3–37.
25. Petersen, M. and R. Rajan (1995). The effect of credit market competition on lending relationships. *Quarterly Journal of Economics,* 110, 407–444.
26. Stiglitz, J. and A. Weiss (1981). Credit rationing in markets with imperfect information. *American Economic Review,* 71, 393–409.
27. Townsend, R. (1979). Optimal contracts and competitive markets with costly state verification. *Journal of Economic Theory,* 21, 265–293.
28. Wette, H. (1983). Collateral in credit rationing in markets with imperfect information: Note. *American Economic Review,* 73, 442–445.
29. Williamson, S. (1986). Costly monitoring, financial intermediation, and equilibrium credit rationing. *Journal of Monetary Economics,* 18, 159–179.
30. Williamson, S. (1987). Costly monitoring, loan contracts, and equilibrium credit rationing. *Quarterly Journal of Economics,* 102, 135–145.

Приложение

Доказательство леммы 1

Для удобства достаточно показать, что ожидаемая максимальная полезность заемщика от получения кредитного соглашения (l_i, r_i) будет абсолютно положительной, если $f(l_i) - d_i - (1 + r_i)l_i > 0$.

Если заемщик принимает соглашение (l_i, r_i) и выбирает уровень усилий e_i, то его ожидаемая полезность при ограниченной ответственности выражается

$$E_i = E[u(\max\{f(l_i)Z(e_i) - d_i - (1 + r_i)l_i, 0\}) - g(e_i) \mid e_i]$$

$$= e_i \cdot u(\max\{f(l_i) - d_i - (1 + r_i)l_i, 0\}) - g(e_i).$$

Если $f(l_i) - d_i - (1 + r_i)l_i > 0$, то $E_i = e_i \cdot u(f(l_i) - d_i - (1 + r_i)l_i) - g(e_i)$, и E_i достигает максимума при решении $\hat{e}_i$ в уравнении

$$g'(e_i) = u(f(l_i) - d_i - (1 + r_i)l_i) \tag{A1}$$

при максимальном значении величины

$$E_i^{\max} = \hat{e}_i \cdot u(f(l_i) - d_i - (1 + r_i)l_i) - g(\hat{e}_i) \tag{A2}$$

Остается показать: (i) решение для (A1) существует и оно единственное, а (ii) $E_i^{\max} > 0$.

Вспомним свойства g: $g(0) = 0, g(1) = \infty, g'(0) = 0$, и $g'' > 0$. Отсюда следует, что g' резко увеличивается и $g'(e) > 0$, так как $0 < e < 1$. Мы показываем, что g' – неограниченная величина. Допустим, что, наоборот, $g' \leq M$ при $M > 0$. Тогда, по теореме Лагранжа, для любой величины $0 < e < 1$ существует $\hat{e}$ для $0 < \hat{e} < e$, так что $g(e) = g(e) - g(0) = g'(\hat{e}) \cdot (e - 0) = g'(\hat{e}) \cdot e$. Но мы получаем $g(e) = g'(\hat{e}) \cdot e \leq M \cdot 1 = M$ для любой величины $0 < e < 1$, а это противоречит предположению, что $g(1) = \infty$.

Однако g' – резко возрастающая и неограниченная величина, а это предполагает, что (A1) имеет единственное решение $\hat{e}_i > 0$ по теореме конечных приращений, непрерывность g', предположение, что $g'(0)=0$, и факт, что $u(f(l_i)-d_i-(1+r_i)l_i)>0$ (что следует из свойств u). Это доказывает (i).

Чтобы доказать (ii), вновь применяем теорему конечных приращений. По этой теореме $\tilde{e}$, существует при $0<\tilde{e}<\hat{e}_i$, так что $g(\hat{e}_i)=g(\hat{e}_i)-g(0)=g'(\tilde{e})\cdot(\hat{e}_i-0)=g'(\tilde{e})\cdot\hat{e}_i$, когда его подставить в (A2), даст

$$E_i^{\max}=\hat{e}_i\cdot(u(f(l_i)-d_i-(1+r_i)l_i)-g'(\hat{e}))=\tilde{e}\cdot(g'(\hat{e}_i)-g'(\tilde{e}))>0,$$

используя (A1), и так $\hat{e}_i>0$, $\tilde{e}<\hat{e}_i$ и g' резко возрастает. Это доказывает (ii).

При необходимости заметим, что если $f(l_i)-d_i-(1+r_i)l_i\le 0$, то $E_i=-g(e_i)$, максимум E_i достигается при $e_i=0$, когда максимальная величина составляет 0. Итак, доказательство завершено. Q.E.D.

<u>Доказательство леммы 3</u>

Максимум T_i для $t_i(e)\equiv eB_i-g(e)$ достигается при e_i – единственном решениии уравнения $t_i'(e)=B_i-g'(e)=0$, $i=1{,}2$. Если, $B_1>B_2$ то из $g''>0$ следует, что $e_1>e_2$. По теореме конечных приращений (теореме Лагранжа) существует $\tilde{e}$, при $e_1>\tilde{e}>e_2$, так что

$$g(e_1)-g(e_2)=g'(\tilde{e})(e_1-e_2),$$

которое вместе с $B_1=g'(e_1)$ и тем фактом, что $g''>0$, предполагает

$$e_1B_1-e_2B_2>B_1(e_1-e_2)>g'(\tilde{e})(e_1-e_2)=g(e_1)-g(e_2),$$

или

$$e_1B_1-g(e_1)>e_2B_2-g(e_2).$$

Итак, мы показали, что если $B_1>B_2$, то $T_1>T_2$, откуда вытекают все выводы леммы. Q.E.D.

<u>Доказательство леммы 4.</u>

Здесь мы еще раз обратимся к задаче максимизации (P1):

Максимизируем $\phi(l,r,e_L,e_H)\equiv\frac{1}{2}e_Lrl+\frac{1}{2}e_Hrl$

s.t.

$$g'(e_L)=u(f(l)-d_L-(1+r)l) \qquad (12)$$

$$g'(e_H)=u(f(l)-d_H-(1+r)l) \qquad (13)$$

$$f(l)-d_H-(1+r)l>0 \qquad (14)$$

Мы с этой задачей справились, если можем показать текущую (настоящую) задачу максимизации только при условии ограничений типа равенств (т. е. когда не принимается во внимание ограничение (14) с единственным оптимальным решением, которое также удовлетворяет ограничению типа неравенств (14)). Множители Лагранжа, связанные с ограничениями (12) и (13), обозначим через λ_1 и, соответственно, λ_2. Тогда условием задачи оптимизации является

$$\frac{1}{2}(e_L+e_H)l-\lambda_1 l\cdot u'(f(l)-d_L-(1+r)l)-\lambda_2 l\cdot u'(f(l)-d_H-(1+r)l)=0 \qquad (A3)$$

$$\frac{1}{2}(e_L+e_H)r-\lambda_1((1+r)-f'(l))\cdot u'(f(l)-d_L-(1+r)l) \qquad (A4)$$

$$-\lambda_2((1+r)-f'(l))\cdot u'(f(l)-d_H-(1+r)l)=0\,,$$

$$\frac{1}{2}rl-\lambda_1 g''(e_L)=0 \qquad (A5)$$

$$\frac{1}{2}rl-\lambda_2 g''(e_H)=0 \qquad (A6)$$

вместе с ограничениями (12) и (13).

Из (А3) и (А4) мы получим $f'(l)=1$, которое, по лемме 2, имеет единственное решение $l=l^*$. Подставляем его в (А3) и получаем

$$\frac{1}{2}(e_L+e_H)-\lambda_1\cdot u'(f(l^*)-d_L-(1+r)l^*)-\lambda_2\cdot u'(f(l^*)-d_H-(1+r)l^*)=0 \qquad (A7)$$

В доказательстве предложения 1 мы показали, что если $l=l^*$ (12), это является единственным условием, когда e_L выражает убывающую функцию r:

$$e_L=p_1(r) \qquad (A8)$$

Так же, когда $l = l$ (13) – единственное условие, выражающее убывающую функцию:

$$e_H = p_2(r) \tag{A9}$$

Теперь (A7), (A8) и (A9) вместе с (A5) и (A6) (когда $l = l^*$) дают

$$(e_L + e_H) - rl^*[\frac{1}{g''(e_L)}u'(f(l^*) - d_L - (1+r)l^*) \tag{A10}$$

$$+\frac{1}{g''(e_H)}u'(f(l^*) - d_H - (1+r)l^*)] = 0$$

Далее мы показываем, что система уравнений (A8), (A9) и (A10) имеет единственное решение $(r^{**}, e_L^{**}, e_H^{**})$.

Для этого подставляем (A8), (A9) в (A10) и получаем

$$p(r) \equiv p_1(r) + p_2(r) = rl^*[\frac{1}{g''(p_1(r))}u'(f(l^*) - d_L - (1+r)l^*) \tag{A11}$$

$$+\frac{1}{g''(p_2(r))}u'(f(l^*) - d_H - (1+r)l^*)] \equiv q(r)$$

Тогда свойства g'', u', p_1 и p_2, показывают, что q – возрастающая функция (действие) r, а p – его ниспадающая.

Вспомним величины r_L^* и r_H^*, а также соответствующие e_L^* и e_H^*, определенные в разделе 4.

Не нарушая общности, допустим, что $r_L^* < r_H^*$. Также вспомним два уравнения из раздела 3.

$$e_L g''(e_L) = r_L l_L u'(f(l_L) - d_L - (1+r_L)l_L) \tag{9}$$

$$e_H g''(e_H) = r_H l^* u'(f(l^*) - d_H - (1+r_H)l^*) \tag{9*}$$

На основе анализа раздела 3 мы получим, что

$$p_1(r_L^*) = r_L^* l^*[\frac{1}{g''(p_1(r_L^*))}u'(f(l^*) - d_L - (1+r_L^*)l^*)] \tag{A12}$$

и, на основе свойств g'', u' и p_2, также

$$p_2(r_L^*)g''(p_2(r_L^*)) > p_2(r_H^*)g''(p_2(r_H^*)) = r_H^* l^* u'(f(l^*) - d_H - (1+r_H^*)l^*) \tag{A13}$$

$$> r_L^* l^* u'(f(l^*) - d_H - (1+r_L^*)l^*)$$

или эквивалентно тому, что

$$p_2(r_L^*) > r_L^* l^* [\frac{1}{g''(p_2(r_L^*))} u'(f(l^*) - d_H - (1 + r_L^*) l^*)] \qquad \text{(A14)}$$

Из (A12) и (A14) понятно, что (cf. (A11))

$$p(r_L^*) > q(r_L^*) \qquad \text{(A15)}$$

Таким же способом можно показать

$$p(r_H^*) > q(r_H^*) \qquad \text{(A16)}$$

Из (A15) и (A16) с помощью теоремы конечного увеличения и того факта, что q – это возрастающая функция r, а p – его ниспадающая функция, мы видим, что r^{**} – это единственное решение уравнения (A11). Итак, определяя $e_L^{**} = p_1(r^{**})$ и $e_H^{**} = p_2(r^{**})$, мы находим единственное решение системы уравнений (A8) (A9) и (A10). Ясно, что $r_L^* \le r^{**} \le r_H^*$. Наконец, поскольку ясно, что $e_H^{**} > e_H^* > 0$, исходя из свойств g' и u, что единственное оптимальное решение задачи с ограничениями типа равенств (при $l = l^*$) также удовлетворяет (14). Q.E.D.

Статья поступила в редакцию 26 июня 2013 г.