

ЛЬВОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени ИВАНА ФРАНКО

На правах рукописи

Пасичник Роман Мирославович

УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО
УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

/01.01.07 – вычислительная математика/

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:

Остудин Б.А. – доцент, кандидат
физико-математических наук

Львов – 1987

СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА ПЕРВАЯ. НЕКОТОРЫЕ ПОСТАНОВКИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ И ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ИМ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.....	15
§ 1.1. Смешанная задача и эквивалентное ей интегральное уравнение в случае двух пространственных перемен- ных.....	15
§ 1.2. Смешанная задача и эквивалентное ей интегральное уравнение в случае трех пространственных перемен- ных.....	25
§ 1.3. Корректность постановки смешанной задачи Дирихле для волнового уравнения в плоском случае.....	28
ГЛАВА ВТОРАЯ. РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЧЕБЫШЕВА-ЛАГЕРРА.....	38
§ 2.1. Сведение нестационарного интегрального уравнения к последовательности стационарных.....	39
§ 2.2. Численное решение последовательности стационарных интегральных уравнений метода интегральных преобра- зований в осесимметричном случае.....	42
§ 2.3. Численное решение последовательности стационарных интегральных уравнений метода интегральных преобра- зований в существенно-пространственном случае.....	48
§ 2.4. Результаты численных экспериментов по методу преобразований.....	51
ГЛАВА ТРЕТЬЯ. РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОШАГОВЫМ МЕТОДОМ.....	61
§ 3.1. Численное решение нестационарного интегрального уравнения в случае двух пространственных переменных	61

§ 3.2. Сведение нестационарного интегрального уравнения к последовательности стационарных в случае трех пространственных переменных.....	67
§ 3.3. Численное решение последовательности стационарных интегральных уравнений пошагового метода в осесимметричном случае.....	72
§ 3.4. Численное решение последовательности стационарных интегральных уравнений пошагового метода в существенно-пространственном случае.....	75
§ 3.5. Результаты численных экспериментов по пошаговому методу.....	79
ПРИЛОЖЕНИЕ	107
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	143
ЛИТЕРАТУРА	148

В В Е Д Е Н И Е

Многие проблемы, имеющие прикладное значение, формулируются в виде начально-краевых задач для волнового уравнения. Сюда прежде всего можно отнести задачи прикладной гидроакустики, связанные с изучением распространения, генерации и рассеяния звука различными объектами в жидкости. Учет быстрого затухания высокочастотного звука в воде приводит к необходимости рассматривать эти волновые процессы в низкочастотном диапазоне, а значит, к исследованию нестационарного акустического взаимодействия. Общим для задач гидроакустики является наличие акустической среды, в которой невозможно возникновение и распространение сдвиговых волн. Многие среды при больших температурах и давлениях имеют это свойство, что делает возможным применение единого подхода к описанию большого числа прикладных задач из различных областей науки и техники [19] .

На низких частотах звук может распространяться в донных породах и отражаться назад к поверхности океана, а также испытывать рассеяние на морской поверхности. Вследствие этого, необходимо учитывать свойства поверхности и пород, образующих дно океана, в чем состоит характерное отличие распространения звука в океане от его распространения в атмосфере [1] .

Развитие различных областей техники и создание новых конструкций, работающих при динамических нагрузках, широкое применение оболочечных систем, подвергающихся в процессе эксплуатации внешним нестационарным воздействиям, способствует постоянному повышению актуальности проблем дифракции вообще и нестационарного взаимодействия акустических волн с незамкнутыми оболочками в частности [20] . Поэтому в дальнейшем, в общем случае, будем рассматривать объекты с разомкнутой границей. Как будет по-

казано ниже, начально-краевая задача для замкнутой граничной поверхности может быть представлена как более простой частный случай задачи с разомкнутой границей.

Граничными функциями задач гидроакустики являются, как правило, гладкие импульсы конечной длительности. Наибольшую трудность для анализа представляет тот случай, когда длина импульса сравнима с размерами граничной поверхности. В этом случае на решение задачи существенное влияние оказывает геометрия граничных поверхностей и необходимо применение численных методов [21].

Смешанная задача Дирихле для волнового уравнения служит математической моделью многих гидроакустических процессов. Некоторые аспекты ее исследования получили освещение в литературе.

К настоящему времени хорошо разработана теория смешанных задач для волнового уравнения с гладкими границами области определения решения [25]. В работе В.В.Кравцова [26] исследован вопрос единственности решения внешней краевой задачи для волнового уравнения с замкнутой граничной поверхностью Ляпуновского типа. Разрешимость внешней смешанной задачи для волнового уравнения с произвольным числом пространственных переменных, нулевыми начальными и ненулевыми граничными условиями исследована в работах С.Г.Михлина и В.Д.Сапожниковой [37,38]. Здесь существенную роль сыграла развитая авторами теория волновых потенциалов в случае произвольного числа пространственных переменных. В работе [6] исследованы вопросы существования и единственности решения задачи для гиперболического уравнения общего типа с нулевыми граничными условиями на двугранном угле. Для произвольной же замкнутой негладкой граничной поверхности корректность постановки начально-краевых задач для гиперболического уравнения была исследована в работах О.А.Ладьженской [28,29]. Следует отметить

что корректность интересующей нас смешанной задачи Дирихле для волнового уравнения в случае разомкнутых граничных поверхностей пока не исследована.

В случае канонических граничных поверхностей, для которых применим метод разделения переменных, в работах Я.А. Миндлина [33, 34], Х.Л. Смолицкого [50], Ф.Фридендера [54], В.М. Дикасова [17], В.В. Дыхты [19, 20] построены аналитические решения рассматриваемой задачи. В работах С.Г. Михлина [35, 36] и В.В. Кравцова [26] приведены алгоритмы построения приближенного решения для более общих случаев, которые не получили, однако, программной реализации.

Сам характер внешней смешанной задачи, когда решение ищется в неограниченной пространственной области, предполагает применение метода интегральных уравнений /ИУ/, на который мы в дальнейшем и будем ориентироваться. При использовании метода ИУ для решения смешанной задачи в случае разомкнутых граничных поверхностей возникает вопрос о корректности перехода от исходной задачи к соответствующему ИУ. Эта проблема для уравнения Гельмгольца в случае двух пространственных переменных рассмотрена в работах *У. Hayashi* [68, 69]. Там же исследована корректность постановки граничной задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в случае разомкнутой граничной поверхности. В то же время, эти вопросы для волнового уравнения пока еще не нашли освещения в литературе. Поэтому представляется важным обобщить методику *У. Hayashi* на смешанную задачу Дирихле для волнового уравнения с разомкнутой граничной поверхностью.

подавляющему большинству прикладных задач, возникающих в инженерном деле и прикладных науках, присуща чрезвычайная нерегулярность границ областей, отвечающих изучаемым объектам, так

что при их количественном исследовании трудно рассчитывать на получение аналитических результатов и решения, как правило, приходится искать численно [4, 6]. При исследовании такого рода задач необходимо использовать методику вычислительного эксперимента с применением быстродействующих ЭВМ [49].

Численное решение внешних смешанных задач для волнового уравнения с применением метода ИУ рассмотрено в работах А.А.Гладкова [II-14, 66], Н.М.Хуторянского и В.В.Турилова [57], А.Е.Музычука [32], *D. Danson* [64], *P. Groenenboom* [67], *C. Brebbia* [63], *R. Shaw* [73]. *C. Brebbia* построил алгоритмы решения смешанных внутренних задач для случая двух пространственных переменных. *D. Danson* и *P. Groenenboom* анализировали внутренние трехмерные задачи с граничными условиями Неймана и импеданского типа. *R. Shaw* рассмотрел комбинацию метода ИУ и конечных элементов для задач, содержащих локальные однородные области. А.А.Гладков, Н.М.Хуторянский и В.В.Турилов, как упомянутые выше авторы, сводили внешние смешанные задачи к нестационарным ИУ второго рода, которые решали, используя кусочно-линейную или кусочно-постоянную аппроксимации неизвестных плотностей ИУ по временной и пространственным переменным, а также метод коллокации. Указанный подход применим только для задач с замкнутыми граничными поверхностями. Е.В.Захаров и С.И.Софронов [22] при определении характеристик электромагнитного поля получили нестационарное ИУ первого рода. Такой подход позволяет рассматривать задачи с разомкнутыми граничными поверхностями, хотя метод решения самого ИУ может оставаться тем же.

Большинство рассмотренных методик получило численную реализацию только для частных случаев. А.А.Гладков рассматривал смешанные задачи для сферы в осесимметричном и пространственном случаях, а также для круга и клина в случае двух пространственных пе-

ременных. Н.М.Хуторянский и В.В.Турилов приводят пример расчета смешанной задачи Неймана для сферы. В работе [22] ИУ сводится к последовательности систем линейных алгебраических уравнений /СЛАУ/ только с диагональной матрицей, а численные расчеты проведены лишь для диска.

Более общими в этом плане являются исследования проведенные А.Е.Музычуком [32]. Он рассматривал внешние смешанные задачи Дирихле и Неймана. С помощью преобразований Чебышева-Лагерра они сводятся к последовательности стационарных задач, которые далее решаются методом ИУ. Этот алгоритм получил численную реализацию для широкого класса поверхностей, однако вследствие особенностей численной реализации обращения преобразований Чебышева-Лагерра и самого представления решений исходной задачи, это решение эффективно определяется лишь вблизи граничных поверхностей, что не всегда желательно.

Все рассмотренные варианты метода ИУ в качестве необходимого и важного этапа содержат численное решение одномерных и двумерных стационарных ИУ со слабой особенностью. Среди многих работ посвященных этой проблеме, отметим работы А.Н.Тихонова и В.И.Дмитриева [53], В.И.Дмитриева и Е.В.Захарова [18], М.М.Хапаева [55], В.П.Ильина [23], А.С.Ильинского [10], В.И.Гордийчука [15], И.В.Людкевича [31], Б.А.Остудина [43], А.Н.Чухлебова [60], В.А.Бакальца [3]. В последнее время появились работы по обоснованию численных методов решения стационарных ИУ со слабой особенностью. В работах В.А.Цецохо [8, 58, 59], А.Н.Гребенникова [16], Ю.И.Мокина [39], А.С.Ильинского [10, 24], W.Wendland [62, 71], G.Schmid [72], K. Atkinson [61] исследованы сходимость и оценки погрешности методов приближенного решения стационарных ИУ первого и второго рода. Следует отметить, что в работах А.С.Ильинского оценки получены по единой методике как для случая замкнутых, так

и для случая разомкнутых граничных контуров. При этом решение ИУ должно лишь удовлетворять условию на краю для разомкнутого контура. Для ИУ на разомкнутых граничных поверхностях существенным является поведение плотности и потенциала вблизи края и в нерегулярных точках граничной поверхности. Этот вопрос для стационарного случая анализируется в работах Х.Хенла, А.Мауэ, К.Вестпфала [56], О.Ф.Антоненко [2], М. Джаоца, Р. Дестуйндер [65].

Данная диссертационная работа посвящена разработке эффективного метода приближенного решения смешанной задачи Дирихле для волнового уравнения с нулевыми начальными условиями для широкого класса замкнутых и разомкнутых граничных поверхностей и применению его в некоторых задачах гидроакустики. Реализованы два подхода к решению поставленной задачи в форме эквивалентного ей нестационарного ИУ; метод интегральных преобразований Чебышева-Лагерра и пошаговый метод по временной переменной. Приближенное решение в обоих случаях определяется как вблизи граничных поверхностей, так и на значительных удалениях. Реализована возможность учета влияния дна и поверхности океана, т.е. численного решения поставленной задачи в частично-ограниченном пространстве. Показана также эквивалентность полученного нестационарного ИУ и исходной задачи, а также доказана корректность постановки задачи в случае двух пространственных переменных для разомкнутых граничных поверхностей. Результаты работы переданы в Проектно-конструкторское бюро АН УССР /Г. Николаев/, а также в НПО "Система" /г. Львов/, где они используются при расчете и анализе гидроакустических полей.

Данная работа состоит из настоящего введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы.

В первой главе рассматривается постановка смешанной задачи

Дирихле для волнового уравнения в случае двух и трех пространственных переменных. Показано, что учет граничного условия Дирихле на разомкнутой граничной поверхности необходимо приводит к интегральному представлению решения смешанной задачи в виде волнового потенциала простого слоя и граничному интегральному уравнению первого рода. Учет граничных условий для замкнутых граничных поверхностей не приводит к такому жесткому ограничению на интегральное представление решения. В этом случае можно использовать различные интегральные представления решения [13] и приходиться к граничным интегральным уравнениям как первого, так и второго рода. Следовательно, метод ИУ, разработанный для случая разомкнутой граничной поверхности, без изменений может быть применен для случая замкнутой граничной поверхности. Это позволяет рассматривать случай замкнутой граничной поверхности как частный. Однако постановка задачи на разомкнутой граничной поверхности вызывает дополнительные трудности, поскольку в этом случае формулы Грина уже не имеют места. Значит необходимо обосновать переход от исходной задачи к соответствующему граничному интегральному уравнению. Важным представляется также исследование вопроса разрешимости полученных ИУ.

В первом и втором параграфах рассмотрена постановка смешанной задачи Дирихле для волнового уравнения в случае двух и трех пространственных переменных. Показана эквивалентность этих постановок соответствующим гранично-временным ИУ первого рода.

В третьем параграфе доказывается существование, единственность и непрерывная зависимость решения гранично-временного ИУ от правой части в случае двух пространственных переменных. В силу эквивалентности ИУ исходной задаче, отсюда следует корректность постановки смешанной задачи Дирихле в случае двух простран-

ственных переменных.

Вторая и третья главы посвящены двум различным подходам к численному решению нестационарного ИУ первого рода типа волнового потенциала простого слоя. Во второй главе рассмотрен метод преобразований Чебышева-Лагерра, а в третьей - пошаговый временной метод.

Как известно, [5], при решении нестационарных задач методом ИУ в основном используются два подхода: либо пошаговый алгоритм нахождения приближенного решения через определенные временные интервалы, либо преобразование Лапласа по временной переменной. Главная сложность последнего метода состоит в обращении преобразований Лапласа, для преодоления которой до сих пор не существует универсального численного метода [4, 27]. Поэтому представляется интересным использовать метод преобразований Чебышева-Лагерра, разработанный В.А.Галазюком [9] и успешно применяемый для решения нестационарных задач механики в случае канонических граничных поверхностей. Преобразование Чебышева-Лагерра выполняется на том же временном интервале, что и преобразование Лапласа, однако построение оригинала в этом случае уже не составляет труда. В данной работе, в отличие от методики разработанной А.Е.Музычуком, преобразования Чебышева-Лагерра применяются к ИУ, а не к смешанной задаче, что позволяет строить приближенное решение как вблизи, так и на больших удалениях от граничной поверхности.

Во второй главе, применяя преобразования Чебышева-Лагерра к нестационарному ИУ, приходим к последовательности стационарных ИУ относительно изображений плотности исходного ИУ. Решение полученной последовательности ИУ строится численно с использованием метода коллокации и кусочно-линейной аппроксимации изображений плотности по пространственным переменным. Определив изображения плот-

ности, вычисляем саму плотность как частную сумму ряда по полиномам Чебышева-Лагерра, коэффициентами которого служат изображения плотности. Зная плотность интегрального представления решения смешанной задачи, легко построить само это решение в произвольной точке пространства.

В первом параграфе рассмотрена процедура сведения нестационарного ИУ к последовательности стационарных с помощью преобразований Чебышева-Лагерра. Во втором параграфе строится алгоритм численного решения полученной последовательности стационарных ИУ в случае осевой симметрии задачи методом интерполяции и коллокации. В третьем параграфе этот алгоритм применен в общем случае задачи с тремя пространственными переменными. В четвертом параграфе приводятся численные примеры, иллюстрирующие возможности методики.

Пошаговый алгоритм, который используется в третьей главе, состоит в кусочно-линейной аппроксимации неизвестной плотности по временной переменной и удовлетворении ИУ в последовательности отдельных временных узлов. Таким образом, решение исходного ИУ сводится к решению последовательности стационарных ИУ со слабой особенностью в ядре, которые решаются тем же подходом, что и в предыдущей главе. Предложенный пошаговый алгоритм разработан для широкого класса поверхностей и позволяет рассматривать исходную задачу как в неограниченном, так и в частично-ограниченном внешнем пространстве.

В первом параграфе пошаговый метод применяется для построения решения задачи в случае двух пространственных переменных. Во втором параграфе рассматривается процедура сведения гранично-временного ИУ к последовательности стационарных в случае трех пространственных переменных. В третьем и четвертом параграфах строятся алгоритмы решения полученных стационарных ИУ в случае осевой сим-

метрии и в общем пространственном случае. В пятом параграфе приводятся численные примеры, иллюстрирующие возможности методики, а также приводится сравнение ее эффективности с методом преобразований Чебышева-Лагерра.

Основные результаты работы докладывались на семинарах кафедры вычислительной математики и научных конференциях Львовского государственного университета /1982-1987 гг./, на Всесоюзных школах молодых ученых "Численные методы решения задач математической физики" /Львов, 1983/, "Вычислительные методы и математическое моделирование" /Щушенское, 1986/, Всесоюзной школе-семинаре "Применение методов математической физики в электронной технологии" /Львов, 1986/, IX Всесоюзном симпозиуме по дифракции и распространению волн /Тбилиси, 1985/, Республиканских научно-технических конференциях "Интегральные уравнения в прикладном моделировании" /Киев, 1983, 1986/ и опубликованы в работах [40, 44-48] .

Отметим вклад соавторов работ, опубликованных по теме диссертации. Научный руководитель Б.А.Остудин участвовал в постановке задачи и обсуждении результатов. А.Е.Музычук занимался методом преобразований Чебышева-Лагерра применяемом к смешанной задаче и сравнением результатов с подходом, предлагаемым в настоящей работе. Ю.Н.Сибиль принимал участие в обсуждении результатов.

На защиту диссертационной работы выносятся следующие результаты

1/ Обоснование эквивалентности постановки внешней смешанной задачи Дирихле для волнового уравнения соответствующему гранично-временному ИУ для разомкнутых граничных поверхностей в случае двух и трех пространственных переменных.

2/ Обоснование существования, единственности и непрерывной за-

висимости от правой части решения гранично-временного ИУ в случае двух пространственных переменных.

3/ Методика расчета решения гранично-временного ИУ первого рода типа волнового потенциала простого слоя методом преобразований Чебышева-Лагерра.

4/ Методика расчета решения гранично-временного ИУ первого рода типа волнового потенциала простого слоя пошаговым методом по временной переменной.

5/ Результаты численных расчетов практически важных задач гидроакустики.

Автор выражает сердечную благодарность доцентам Людкевичу И.В. и Остудину Б.А. за предложенную тему, постоянное внимание и помощь при выполнении работы. Автор выражает благодарность также сотрудникам кафедры вычислительной математики Львовского университета: Музычку А.Е. за участие в обсуждении результатов вычислительных экспериментов и Сибилю Ю.Н. за конструктивные замечания при обсуждении теоретических результатов.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

НЕКОТОРЫЕ ПОСТАНОВКИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ И ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ
ИМ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этой главе будут рассмотрены постановки внешней смешанной задачи Дирихле для волнового уравнения в случае двух и трех пространственных переменных, а также будут построены интегральные уравнения, эквивалентные этим постановкам. Исследование корректности постановки задач проводится в более простом случае двух пространственных переменных с использованием развитой теории одномерных сингулярных интегральных уравнений.

Волновое уравнение общего вида $u''_{\tau\tau} - c^2 \Delta u = 0$, где c - скорость распространения звука в среде, а τ - временная переменная, с помощью замены $\tau = ct$ и перехода к безразмерным величинам, сводится к уравнению более простого вида

$$u''_{tt} - \Delta u = 0, \text{ которое в дальнейшем мы и будем подразумевать.}$$

§ 1.1. Смешанная задача и эквивалентное ей интегральное уравнение в случае двух пространственных переменных.

В полупространстве $R^2_+[0, \infty)$ рассмотрим следующую смешанную задачу.

Пусть $L = \bigcup_{j=1}^n L_j$ - объединение конечного числа кусочно-Ляпуновских незамкнутых ограниченных дуг в R^2 . Будем обозначать точки в R^2 через x, y и т.д., крайние точки L_j через x_m^* ($m=2j-1, 2j$), расстояние между x и y через $r_{xy} = |x-y|$, а расстояние между x и L через $r(x, L)$. Определим замыкание L как $\bar{L} = L \cup \{x_1^*, \dots, x_{2n}^*\}$, а также следующую бесконечную область: $D^2_{\bar{L}} = R^2 \setminus \bar{L}$. Считаем, что каждая из двух сторон L называется положительной (L^+) или отрицательной (L^-) в зависимости от выбранного направления нормали \bar{n} к L , а

также, что для всякого j $x_{2j-1}^* \neq x_{2j}^*$.

Пусть требуется определить такую функцию $u(x, t)$, которая является непрерывно-дифференцируемой вне \bar{L} , непрерывной во всем пространстве R^2 и для которой $\square u \equiv (u''_{tt} - \Delta u) \in C[\mathcal{D}_e^2 \times [0, \infty))$. Кроме этого, функция $u(x, t)$ должна удовлетворять волновому уравнению

$$\square u \equiv u''_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \quad x \in \mathcal{D}_e^2, t \geq 0 \quad (1)$$

а также условиям

$$u(x, 0) = u'_t(x, 0) = 0 \quad x \in R^2, \quad (2)$$

$$u(x, t) = f(x, t) \quad x \in L, t \geq 0, \quad (3)$$

$$f(x, 0) = f'_t(x, 0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \{t^{3/4} f(x, t)\} = 0 \quad x \in L, \quad (4)$$

$$\exists \delta_2: \lim_{t \rightarrow \infty} \{t^{\delta_2} (|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)| + |\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)|)\} < \infty \quad i=1, 2, x \in L, \delta_2 > 1$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} V(\rho, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\rho \rightarrow 0} t^{\delta_1} V(\rho, t) = 0 \quad 0 < \delta_1 \leq 1/4, \quad (5)$$

$$V(\rho, t) = \sum_{m=1}^{2\nu} \int_{C_m^*(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial \rho}(x, t) \right| dL_x, \quad C_m^*(\rho) = \{x \mid |x - x_m^*| = \rho\},$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ |x| \rightarrow \infty}} \{t^{3/4} u(x, t)\} = 0, \quad \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ |x| \rightarrow \infty}} \{t^{\delta_2} (|u'_{x_i}(x, t)| + |u'_t(x, t)|)\} < \infty \quad i=1, 2. \quad (6)$$

Задачу (1)-(6) будем называть смешанной задачей Дирихле поставленной в дифференциальной форме. Преобразуем эту постановку в эквивалентную задачу для интегрального уравнения. Для этого построим интегральное представление решения задачи (1)-(6) с помощью следующей леммы.

Лемма I.I.

Если решение задачи (I)-(6) существует, оно представляется в виде

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^n \int_0^t d\tau \int_{L_j} f(y, \tau) \frac{\theta(t-\tau-r_{xy}) dL_y}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} \quad x \in D_e^2, t \geq 0, \quad (7)$$

где $f(y, \tau) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial u^-}{\partial n}(y, \tau) - \frac{\partial u^+}{\partial n}(y, \tau) \right) \quad y \in L,$

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial n}(y, \tau) = \lim_{y' \rightarrow y \in L^\pm} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(y', t) \right) \quad \theta(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \leq 0, \\ 1 & \tau > 0. \end{cases}$$

Доказательство леммы I.I. Предположим, что решение $u(x, t)$ задачи (I)-(6) существует. Введем следующие обозначения. Обозначим через $C_j = C_{2j-1}^*(\varrho) \cup C_{2j}^*(\varrho) \cup L_j^{(+)} \cup L_j^{(-)}$ простой замкнутый контур. Этот контур включает L_j таким образом, что $C_m^*(\varrho)$ ($m=2j-1, 2j$) являются дугами окружности радиуса ϱ с центром в точке x_m^* , а $L_j^{(+)}$ ($L_j^{(-)}$) — незамкнутые дуги, расположенные на расстоянии $\varrho' < \varrho$ по одну (положительную или отрицательную) сторону от L_j . Обозначим также через $\Omega_{\varrho, R} \subset R^2$ область, ограниченной окружностью $S_R = \{y \mid |y| = R\}$ и контуром $C = \bigcup_{j=1}^n C_j$. Пусть \bar{P} является внешней нормалью к границе области $\Omega_{\varrho, R}$.

Рассмотрим решение $u(x, t)$ задачи (I)-(6) в области $\Omega_{\varrho, R}^T = \Omega_{\varrho, R} \times [0, \infty)$. Доопределяя его нулем вне $\Omega_{\varrho, R}^T$, получим некоторое продолжение \tilde{u} решения u из $\Omega_{\varrho, R}^T$ на R^3 . При переходе через границу области $\Omega_{\varrho, R}^T$ функция $\tilde{u}(x, t)$, а также ее производные могут иметь разрывы, например

$$\tilde{u}'_t(x, +0) - \tilde{u}'_t(x, -0) = u'_t(x, 0) - 0 = u'_t(x, 0),$$

$$\tilde{u}(x, t)|_{x \in S_R+0} - \tilde{u}(x, t)|_{x \in S_R-0} = 0 - u(x, t)|_{x \in S_R} = -u(x, t)|_{x \in S_R}.$$

Согласно построению, функция $\tilde{u}(x, t)$ во внутренних точках области $\Omega_{S, R}^T$ удовлетворяет волновому уравнению. В точках внешних по отношению к области $\Omega_{S, R}^T$ функция $\tilde{u}(x, t)$ также удовлетворяет волновому уравнению как тождественный ноль. Поэтому воспользовавшись формулами дифференцирования разрывных функций [7], с учетом условий (2), можно записать следующее представление для $\tilde{u}(x, t)$ в R^3 :

$$\square \tilde{u}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial \bar{p}} \Big|_c \delta_c + \frac{\partial}{\partial \bar{p}} (u|_c \delta_c) + \frac{\partial u}{\partial \bar{p}} \Big|_{S_R} \delta_{S_R} + \frac{\partial}{\partial \bar{p}} (u|_{S_R} \delta_{S_R}). \quad (8)$$

Используя фундаментальное решение однородного волнового уравнения и рассматривая соотношение (8) как неоднородное волновое уравнение в обобщенном смысле, можем построить интегральное представление функции $\tilde{u}(x, t)$, как свертку фундаментального решения и правой части соотношения (8). Построим для примера следующую свертку

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{p}} \Big|_c \delta_c \right) * \frac{\theta(t - |x|)}{[t^2 - |x|^2]^{1/2}} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_c \frac{\partial u}{\partial \bar{p}}(y, \tau) \frac{\theta(t - \tau - r_{xy}) dC_y}{[(t - \tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_c \frac{\partial u}{\partial \bar{p}}(y, \tau) \frac{\theta(t - \tau - r_{xy}) dC_y}{[(t - \tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}}. \end{aligned}$$

При построении использован тот факт, что $u'_p(y, t) \equiv 0$ при $t < 0$ а также то, что $\theta(t - \tau - r_{xy}) \equiv 0$ при $\tau > t$. Аналогично:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{p}} (u|_{\delta_c}) * \frac{\theta(t-|x|)}{[t^2-|x|^2]^{1/2}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{p}} \int_0^t d\tau \int_C u(y, \tau) \frac{\theta(t-\tau-r_{xy}) dC_y}{[(t-\tau)^2-r_{xy}^2]^{1/2}}$$

Существование первой свертки не вызывает сомнений - ее интегральное представление содержит особенность в подынтегральной функции порядка лишь $1/2$. Для обоснования существования свертки второго типа используем следующую замену переменных $\eta = \tau/(t-r_{xy})$.

При этом:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{p}} \int_0^t d\tau \int_C u(y, \tau) \frac{\theta(t-\tau-r_{xy}) dC_y}{[(t-\tau)^2-r_{xy}^2]^{1/2}} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \bar{p}} \int_C \theta(t-r_{xy})(t-r_{xy}) dC_y \int_0^1 \frac{u(y, \eta(t-r_{xy})) d\eta}{[t^2(1-\eta)^2 + 2t\eta(1-\eta)r_{xy} - r_{xy}^2(1-\eta)^2]^{1/2}} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \bar{p}} \int_C \theta(t-r_{xy})(t-r_{xy})^{1/2} dC_y \int_0^1 \frac{u(y, \eta(t-r_{xy})) d\eta}{(1-\eta)^{1/2} [t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{1/2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_C \frac{\theta(t-r_{xy})}{(t-r_{xy})^{1/2}} \frac{\partial r_{xy}}{\partial \bar{p}} dC_y \int_0^1 \frac{u(y, \eta(t-r_{xy})) d\eta}{(1-\eta)^{1/2} [t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{1/2}} -$$

$$-\frac{1}{2} \int_C \theta(t-r_{xy})(t-r_{xy})^{1/2} \frac{\partial r_{xy}}{\partial \bar{p}} dC_y \int_0^1 \frac{(1+\eta) u(y, \eta(t-r_{xy})) d\eta}{(1-\eta)^{1/2} [t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{3/2}} -$$

$$-\int_C \theta(t-r_{xy})(t-r_{xy})^{1/2} \frac{\partial r_{xy}}{\partial \bar{p}} dC_y \int_0^1 \frac{\eta u_t(y, \eta(t-r_{xy})) d\eta}{(1-\eta)^{1/2} [t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{1/2}} .$$

Поскольку $x \in C$, то $r_{xy} > 0$, и полученные интегралы содержат лишь интегрируемые особенности в подынтегральных функциях. Поэтому рассматриваемая свертка является локально интегрируемой. Но это значит, что и свертка правой части соотношения (8) и фундаментального решения волнового уравнения локально интегрируема. Таким образом, следующее представление имеет место в обычном смысле

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^t d\tau \int_C \left\{ \frac{\partial u}{\partial \bar{p}}(y, \tau) \frac{\theta(t-\tau-r_{xy})}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} - \right. \right. \\ \left. \left. - u(y, \tau) \frac{\partial}{\partial \bar{p}} \left(\frac{\theta(t-\tau-r_{xy})}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} \right) \right\} dC_y + \right.$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{S_R} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \rho}(y, \tau) \frac{\theta(t-\tau-r_{xy})}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} - u(y, \tau) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\theta(t-\tau-r_{xy})}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} \right) \right\} dS_y. \quad (9)$$

В случае, если $(x, t) \in \Omega_{S, R}^T$, представление (9) принимает

вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^t d\tau \int_C \left\{ \frac{\partial u}{\partial \rho}(y, \tau) \frac{\theta(t-\tau-r_{xy})}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} - u(y, \tau) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\theta(t-\tau-r_{xy})}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} \right) \right\} dC_y + \right.$$

$$\left. + \int_0^t d\tau \int_{S_R} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \rho}(y, \tau) \frac{\theta(t-\tau-r_{xy})}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} - u(y, \tau) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\theta(t-\tau-r_{xy})}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} \right) \right\} dS_y \right]. \quad (10)$$

Используя в формуле (10) предельный переход при $g \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$, получаем следующее соотношение

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{j=1}^y \left(\int_0^t d\tau \int_{L_j} \left[\frac{\partial u^-}{\partial n}(y, \tau) - \frac{\partial u^+}{\partial n}(y, \tau) \right] \frac{\theta(t-\tau-r_{xy})}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} dL_y + u_{2j-1}^*(x, t) - \right.$$

$$\left. - \int_0^t d\tau \int_{L_j} [u^-(y, \tau) - u^+(y, \tau)] \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\theta(t-\tau-r_{xy})}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} \right) dL_y + u_{2j}^*(x, t) \right\} + u^{**}(x, t), \quad (11)$$

где

$$u^*(x, t) = \lim_{g \rightarrow 0} \int_0^t d\tau \int_{C_m^*(g)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \rho}(y, \tau) \frac{\theta(t-\tau-r_{xy})}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} - u(y, \tau) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\theta(t-\tau-r_{xy})}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} \right) \right\} dC_y, \quad (12)$$

$$u^{**}(x, t) = \lim \int_0^t d\tau \int_{S_R} \left\{ \frac{\partial u}{\partial R}(y, \tau) \frac{\theta(t-\tau-r_{xy})}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} - u(y, \tau) \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\theta(t-\tau-r_{xy})}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} \right) \right\} dS_y \quad (I3)$$

$x \in D_e^2, t \geq 0.$

Как следует из условия (3), $u^-(x, t) = u^+(x, t) = f(x, t)$. Поэтому второй интеграл по h_j в правой части соотношения (II) равен нулю. Поскольку решение $u(x, t)$ существует, то существуют и пределы (I2) и (I3). Как следует из леммы I.2 (см. Приложение), эти пределы равны нулю.

С учетом вышесказанного, из соотношения (II) следует интегральное представление (7). Лемма I.1 доказана.

Результат леммы I.1 можно обобщить в виде следующей теоремы.

Теорема I.

Если решение задачи (I)-(6) существует, оно представляется в виде

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \int_L q(y, \tau) \frac{\theta(t-\tau-r_{xy})}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} dh_y \quad x \in D_e^2, t \geq 0, \quad (7)$$

причем плотность $q(y, \tau)$ удовлетворяет следующим требованиям

$$\int_0^t d\tau \int_L q(y, \tau) \frac{\theta(t-\tau-r_{xy})}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} dh_y = f(x, t) \quad x \in L, t \geq 0, \quad (I4)$$

$$q(x, 0) = f(x, 0) = f'_t(x, 0) = 0 \quad x \in L, \quad (I5)$$

$$\exists \delta_2 > 1: \lim_{t \rightarrow \infty} \{ t^{3/4} f(x, t) \} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \{ t^{\delta_2} (\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right|) \} < \infty \quad (I6)$$

$i = 1, 2, x \in L$

$$q \in Q_h^1,$$

где Q_L^1 - класс функций, определенных на $L \times [0, \infty)$, которые при подстановке вместо $q(y, t)$ в формулу (7), определяют такие функции $u(x, t)$, что $u \in C^1(D_L^2 \times [0, \infty))$ и выполняется условие (5).

И наоборот, если решение задачи (I4)-(I6) существует, то представление (7) определяет решение задачи (I)-(6).

Задачу (I4)-(I6), в совокупности с представлением функции $u(x, t)$ по формуле (7), будем называть внешней задачей Дирихле для волнового уравнения в плоском случае, поставленной в интегральной форме. Таким образом, теорема утверждает эквивалентность дифференциальной и интегральной постановок рассматриваемой задачи.

Доказательство теоремы I.

Докажем первую часть теоремы. Пусть решение задачи (I)-(6) существует. Тогда, согласно лемме I.1, справедливо представление (7). Устремляя в формуле (7) X к L , получаем ИУ (I4). Используя условие (4) и свойства волнового потенциала простого слоя, из ИУ (I4) заключаем, что $q(y, 0) = 0$. Поскольку $u(x, t)$ удовлетворяет условиям задачи (I)-(6) и справедливо представление (7), то $q \in Q_L^1$. Первая часть теоремы доказана.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть решение задачи (I4)-(I6) существует, и справедливо представление (7). Покажем, что функция, определяемая этим представлением, является решением задачи (I)-(6). Из условия (I6) следует, что эта функция $u(x, t)$ удовлетворяет условиям гладкости, накладываемыми на решение задачи (I)-(6). Эта функция удовлетворяет уравнению (I), поскольку является волновым потенциалом простого слоя. По этой же причине $\square u \in [D_L^2 \times [0, \infty)]$. Благодаря свойствам волнового потенциала и соотношению (I5) выполняется условие (2). Условие (3) выполняется, поскольку оно эквивалентно ИУ (I4). Чтобы доказать выполнение условий (6), определим

асимптотику следующих интегралов

$$\int_0^t d\tau \int_L q(y, \tau) \frac{\theta(t-\tau-r_{xy}) dh_y}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^t d\tau \int_L q(y, \tau) \frac{\theta(t-\tau-r_{xy}) dh_y}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}}$$

при $t \rightarrow \infty$. Используя замену переменных $\eta = \tau / (t - r_{xy})$ нетрудно показать, что

$$\int_0^t d\tau \int_L q(y, \tau) \frac{\theta(t-\tau-r_{xy}) dh_y}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} = \int_L \theta(t-r_{xy})(t-r_{xy})^{1/2} dh_y \int_0^1 \frac{q(y, \eta(t-r_{xy}))}{[t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{1/2} (1-\eta)^{1/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^t d\tau \int_L q(y, \tau) \frac{\theta(t-\tau-r_{xy}) dh_y}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} = -\frac{1}{2} \int_L \frac{\theta(t-r_{xy})}{(t-r_{xy})^{1/2}} \frac{\partial r_{xy}}{\partial x_i} dh_y \int_0^1 \frac{q(y, \eta(t-r_{xy}))}{(1-\eta)^{1/2}} x$$

$$x [t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{-1/2} - \int_L \theta(t-r_{xy})(t-r_{xy})^{1/2} \frac{\partial r_{xy}}{\partial x_i} dh_y \int_0^1 (1-\eta)^{-1/2} \left\{ \frac{q(y, \eta(t-r_{xy}))}{2} x$$

$$x \frac{(1+\eta)}{[t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{3/2}} + \frac{q'_t(y, \eta(t-r_{xy})) \eta}{[t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{1/2}} \right\} d\eta.$$

Заметим, что при $t \rightarrow \infty$, $r_{xy} < \text{const}$ первый из рассматриваемых интегралов имеет ту же асимптотику, что и функция $f(x, t)$. Асимптотика этого же интеграла при $t \rightarrow \infty$, $r_{xy} \rightarrow \infty$ совпадает с пределом $\lim_{|x| \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty} u(x, t)$. В доказательстве леммы I.2 (см. Приложение) показано, что асимптотика первого типа является величиной не меньшей, чем асимптотика второго типа. Поэтому, из условия, на-

лагаемого на функцию $f(x, t)$, следует справедливость первого утверждения (6). Аналогично замечаем, что асимптотика второго интеграла при $t \rightarrow \infty$, $r_{xy} < \text{const}$ совпадает с пределом $\lim_{t \rightarrow \infty} f_{x_i}^+(x, t)$. Асимптотика того же интеграла при $t \rightarrow \infty$, $r_{xy} \rightarrow \infty$ совпадает с пределом $\lim_{|x|, t \rightarrow \infty} u'_{x_i}(x, t)$. Значит, из условия, налагаемого на производную функции $f(x, t)$, следует справедливость второго условия (6). Требование (5) удовлетворяется благодаря соотношению (16). Таким образом, теорема I полностью доказана.

Замечание I. Усложним условия задачи (I)-(6): пусть среди контуров h_j встречаются замкнутые. Поскольку у замкнутых контуров отсутствуют крайние точки x_m^* и вспомогательные дуги $C_m^*(\varrho)$, то условие (5) на них не рассматривается. Так как нас интересует решение задачи вне тех областей, которые ограничены замкнутыми контурами h_j , то можно наложить дополнительное условие непрерывности решения при переходе через замкнутые контура h_j . В этом случае справедливо введенное в лемме I.I интегральное представление решения, а также теорема I.

§ I.2. Смешанная задача и эквивалентное ей интегральное уравнение в случае трех пространственных переменных.

В полупространстве $R^3 \times [0, \infty)$ рассмотрим следующую задачу. Пусть $S = \bigcup_{j=1}^n S_j$ - объединение конечного числа незамкнутых кусочно-Ляпуновских ограниченных поверхностей (фрагментов) S_j в R^3 причем замыкания этих фрагментов не имеют общих точек. Обозначим точки в R^3 через x, y и т.д., множество точек края S_j через X_j^* , а расстояние между x и y через $r_{xy} = |x - y|$. Каждому фрагменту S_j поставим в соответствие вспомогательную поверхность $S_j^*(\varrho)$. Последняя образована окружностями радиуса ϱ с

центрами в точках из множеств X_j^* . Эти окружности построены в плоскостях, перпендикулярных линии края S_j . Пусть $\bar{S}_j = S_j \cup X_j^*$. Считаем, что каждая из двух сторон граничной поверхности называется положительной (S^+) или отрицательной (S^-), в зависимости от направления нормали \bar{n} к S .

Положим $\mathcal{D}_e^3 = R^3 \setminus \bar{S}$. Требуется определить функцию $u(x, t)$ непрерывно-дифференцируемую вне \bar{S} и непрерывную во всем пространстве R^3 , для которой $\square u \in ([\mathcal{D}_e^3 \times [0, \infty)])$. Кроме этого, функция $u(x, t)$ должна удовлетворять следующим условиям

$$\square u \equiv u''_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \quad x \in \mathcal{D}_e^3, \quad t \geq 0, \quad (17)$$

$$u(x, 0) = u'_t(x, 0) = 0 \quad x \in R^3, \quad (18)$$

$$u(x, t) = f(x, t) \quad x \in S, \quad t \geq 0, \quad (19)$$

$$f(x, 0) = f'_t(x, 0) = 0 \quad |f(x, \infty)| < \infty \quad x \in S, \quad (20)$$

$$\lim_{g \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \int_{S_j^*(g)} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial g}(x, t) \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right| \right\} dS_x = 0 \quad t \geq 0, \quad (21)$$

$$u(x, t) = O(|x|^{-1}) \quad |x| \rightarrow \infty, \quad t > |x|, \quad (22)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right) = 0 \quad t \geq 0. \quad (23)$$

Задачу (17)-(23) будем называть смешанной задачей Дирихле для волнового уравнения, поставленной в дифференциальной форме. Имеет место следующая теорема эквивалентности.

Теорема 2. Если решение задачи (17)-(23) существует, оно представляется в виде

$$u(x,t) = \iint_S q(y,t-r_{xy}) \theta(t-r_{xy}) r_{xy}^{-1} dS_y \quad x \in \mathcal{D}_e^3, \quad t \geq 0, \quad (24)$$

причем $q(y,t)$ удовлетворяет следующим требованиям

$$\iint_S q(y,t-r_{xy}) \theta(t-r_{xy}) r_{xy}^{-1} dS_y = f(x,t) \quad x \in S, \quad t \geq 0, \quad (25)$$

$$q(x,0) = f(x,0) = f'_t(x,0) = 0 \quad x \in S, \quad (26)$$

$$q(x,t) \in Q_S^2, \quad (|f(x,\infty)| < \infty), \quad (27)$$

где Q_S^2 - класс функций, определенных на $S \times [0, \infty)$, которые при подстановке вместо $q(y,t)$ в формулу (24) определяют такую функцию $u(x,t)$, что $u \in C^1[\mathcal{D}_e^3 \times [0, \infty)]$ и выполняется условие (21).

И наоборот, если решение задачи (25)-(27) существует, то формула (24) дает решение задачи (17)-(23).

Доказательство теоремы 2, а также вспомогательной леммы 2.1 приводятся в Приложении.

Аналогично плоскому случаю задачу (25)-(27), в совокупности с представлением функции $u(x,t)$ по формуле (24), будем называть задачей Дирихле для волнового уравнения, поставленной в интегральной форме. Таким образом, теорема утверждает эквивалентность дифференциальной и интегральной постановок рассматриваемой задачи.

Если допустить среди фрагментов S_j наличие замкнутых, то нетрудно убедиться, что по аналогии с § I.1 теорема 2 сохраняет силу.

§ 1.3. Корректность постановки смешанной задачи Дирихле для волнового уравнения в плоском случае.

Пусть $L = \bigcup_{j=1}^n L_j$ - объединение конечного числа кусочно-Ляпуновских незамкнутых ограниченных дуг в R^2 . К классу функций $C^\mu(L)$ $0 < \mu < 1$ будем относить такие непрерывные на \bar{L} функции φ , для которых на \bar{L} определена следующая функция $\varphi^{(\mu)}$ по правилу

$$\varphi^{(\mu)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{(x - x_0)^\mu} \quad \varphi^{(\mu)} \in C.$$

Нетрудно проверить, что следующий функционал

$$\|\varphi\|_{C^\mu(\bar{L})} = \|\varphi\|_{C(\bar{L})} + \max_{x \in \bar{L}} |\varphi^{(\mu)}(x)|$$

удовлетворяет аксиомам нормы. Несложно также проверить, что такой класс функций с введенной нормой, образует банахово пространство. По аналогии можно определить банахово пространство $C^{1+\mu}(\bar{L})$ на соответствующем классе функций с нормой

$$\|\varphi\|_{C^{1+\mu}(\bar{L})} = \|\varphi\|_{C^1(\bar{L})} + \max_{x \in \bar{L}} |\varphi^{(1+\mu)}(x)|$$

$$\varphi^{(1+\mu)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi'(x) - \varphi'(x_0)}{(x - x_0)^\mu} \quad 0 < \mu < 1, \quad \varphi^{(1+\mu)} \in C.$$

Пусть функция $w_\delta(x) \in C^1(\bar{L})$ и обладает следующими свойствами. Она равняется 1 в окрестности регулярных точек контура L и стремится к 0 с порядком $\tilde{g}^{-1/2}(\tilde{x}, x)$ в δ -окрестностях нерегулярных точек \tilde{x} контура L (здесь $\tilde{g}(\tilde{x}, x) = |x - \tilde{x}|$). К нерегулярным точкам контура L отнесем точки края разомкнутых контуров \tilde{L}_j и точки излома этих контуров. На \bar{L} введем класс функций $C_{w, \delta}^\mu(\bar{L})$. К это-

му классу отнесем те функции, которые, умноженные на функцию $w_\delta(x)$, принадлежат классу $C^\mu(\bar{L})$. Если в этом классе ввести норму

$$\| \varphi \|_{C_{w,\delta}^\mu(\bar{L})} = \| w_\delta(x) \varphi(x) \|_{C^\mu(\bar{L})} \quad 0 < \delta \ll \text{mes}(\bar{L}),$$

то, как нетрудно видеть, получим банахово пространство $C_{w,\delta}^\mu(\bar{L})$. Докажем следующую теорему.

Теорема 3. Если функция $f(x,t)$ принадлежит пространству $C_{w,\delta}^{1+\mu}(\bar{L})$ по пространственной переменной и одновременно пространству $C^2[0,\infty)$ по переменной t ($f \in C_{w,\delta}^{1+\mu}(\bar{L}) \times C^2[0,\infty)$), то решение задачи (I4)-(I6) существует в пространстве функций $C_{w,\delta}^\mu(\bar{L})$ по пространственным переменным и пространстве $C^1[0,\infty)$ по переменной t ($q \in C_{w,\delta}^\mu(\bar{L}) \cdot C^1[0,\infty)$). При этом функция $q(x,t)$ непрерывно зависит от функции $f(x,t)$.

(Здесь и всюду дальше под константой μ подразумеваем показатель условия Гельдера для нормалей к контурам L_j в их регулярных точках. Нормали к контурам L_j удовлетворяют условию Гельдера поскольку L_j являются кусочно-Ляпуновскими контурами).

Доказательство теоремы.

Зафиксируем некоторое конечное целое число M . Каждый единичный интервал вида $[K-1, K]$ покрываем равномерной сеткой $w_\tau^{N,K}$ вида

$$w_\tau^{N,K} = \{ \tau_j^K \mid \tau_j^K = (K-1) + (j-1)h_N, \quad j = \overline{1, N+1}, \quad h_N = 1/N \} \quad K = \overline{1, M}.$$

Введем в рассмотрение кусочно-постоянную по времени функцию

$Q_N^M(y, \tau)$, причем $Q_N^M(y, \tau) = q_{N,j}^K(y)$ когда $\tau \in [\tau_j^K, \tau_{j+1}^K], K = \overline{1, M}$ и $Q_N^M(y, \tau) = 0$ при $\tau > M$ и $q_{N,1}^1(y) \equiv 0$. Нетрудно видеть, что при $t \in [\tau_i^K, \tau_{i+1}^K]$

$$\int_L dh_y \int_{M-1}^t Q_N^M(y, \tau) \frac{\theta(t-\tau-r_{xy}) d\tau}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} = \int_L q_{N,i}^M(y) dh_y \int_{\tau_i^M}^t \frac{\theta(t-\tau-r_{xy}) d\tau}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{i-1} \int_L q_{N,j}^M(y) dh_y \int_{\tau_j^M}^{\tau_{j+1}^M} \frac{\theta(t-\tau-r_{xy}) d\tau}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} = \int_L q_{N,i}^M(y) \theta(t-\tau_i^M - r_{xy}) \times$$

$$\times \ln \left| \frac{t-\tau_i^M}{r_{xy}} + \sqrt{\frac{(t-\tau_i^M)^2}{r_{xy}^2} - 1} \right| dh_y - \sum_{j=1}^{i-1} \int_L q_{N,j}^M(y) \{ \theta(t-\tau_{j+1}^M - r_{xy}) \times$$

$$\times \ln \left| \frac{t-\tau_{j+1}^M}{r_{xy}} + \sqrt{\frac{(t-\tau_{j+1}^M)^2}{r_{xy}^2} - 1} \right| - \theta(t-\tau_j^M - r_{xy}) \ln \left| \frac{t-\tau_j^M}{r_{xy}} + \sqrt{\frac{(t-\tau_j^M)^2}{r_{xy}^2} - 1} \right| \} dh_y.$$

Подставляя функцию $Q_N^M(y, \tau)$ вместо $q(y, \tau)$ в ИУ (14) и требуя его удовлетворения в узлах $\{\tau_i^k\}_{i=2}^{N+1}$, $k = \overline{1, M}$, получаем последовательность стационарных ИУ вида

$$\int_L q_{N,1}^1(y) \varphi(\tau_2^1 - \tau_1^1, r_{xy}) dh_y = f(x, \tau_2^1),$$

$$\int_L q_{N,i}^1(y) \varphi(\tau_{i+1}^1 - \tau_i^1, r_{xy}) dh_y - \sum_{j=1}^{i-1} \int_L q_{N,j}^1(y) \{ \varphi(\tau_{i+1}^1 - \tau_{j+1}^1, r_{xy}) -$$

$$- \varphi(\tau_{i+1}^1 - \tau_j^1, r_{xy}) \} dh_y = f(x, \tau_{i+1}^1) \quad i = \overline{2, N} \quad x \in L,$$

$$\int_L q_{N,i}^k(y) \varphi(\tau_{i+1}^k - \tau_i^k, r_{xy}) dhy - \sum_{j=1}^{i-1} \int_L q_{N,j}^k(y) \{ \varphi(\tau_{i+1}^k - \tau_{j+1}^k, r_{xy}) - \varphi(\tau_{i+1}^k - \tau_j^k, r_{xy}) \} dhy - \sum_{p=1}^{K-1} \sum_{j=1}^N \int_L q_{N,j}^p(y) \{ \varphi(\tau_{i+1}^k - \tau_{j+1}^p, r_{xy}) - \varphi(\tau_{i+1}^k - \tau_j^p, r_{xy}) \} dhy = f(x, \tau_{i+1}^k) \quad K = \overline{2, M}, \quad i = \overline{1, N},$$

где $\varphi(\tau, r_{xy}) = \theta(\tau - r_{xy}) \ln \left| \frac{\tau}{r_{xy}} + \sqrt{\frac{\tau^2}{r_{xy}^2} - 1} \right|$

Видоизменим полученную последовательность ИУ следующим образом. А именно, интеграл вида

$$\int_L q_{N,i}^k(y) \varphi(\tau_{i+1}^k - \tau_i^k, r_{xy}) dhy$$

заменяем следующим

$$\int_L (q_{N,i}^k(y) - q_{N,i-1}^k(y)) \ln \frac{1}{r_{xy}} dhy.$$

В результате получим преобразованную последовательность ИУ :

$$\int_L q_{N,1}^1(y) \ln \frac{1}{r_{xy}} dhy = f(x, \tau_2^1),$$

$$\int_L q_{N,i}^k(y) \ln \frac{1}{r_{xy}} dhy = f(x, \tau_{i+1}^k) + \int_L q_{N,i-1}^k(y) \ln \frac{1}{r_{xy}} dhy +$$

(28)

$$+ \sum_{j=0}^{i-1} \int_L q_{N,j}^k(y) \{ \varphi(\tau_{i+1}^k - \tau_{j+1}^k, r_{xy}) - \varphi(\tau_{i+1}^k - \tau_j^k, r_{xy}) \} dhy +$$

$$+ \sum_{p=1}^{K-1} \sum_{j=1}^N \int_L \varrho_{N,j}^p(y) \{ \Psi(\tau_{i+1}^K - \tau_{j+1}^p, r_{xy}) - \Psi(\tau_{i+1}^K - \tau_j^p, r_{xy}) \} d\lambda_y = f(x, \tau_{i+1}^K),$$

$$K = \overline{1, M}, \quad i = \overline{1, N}, \quad x \in L.$$

Введем также другую нумерацию узлов временной сетки и функций $\varrho_{N,j}^K$ по правилу

$$\tau_j^K = \tau_{N, m(K,j)}, \quad \varrho_{N,j}^K(y) = \varrho_{N, m(K,j)}(y),$$

$$m(K,j) = (j+1) + (K-2)(N+1) + N \quad \text{при } K > 1 \quad \text{и} \quad m(1,j) = j.$$

Используя результаты леммы 3.1 (см. Приложение), можно утверждать, что при всяких конечных значениях N и M решения последовательности ИУ (28) существуют и единственны. Тем самым для всяких конечных значений N и M определяется кусочно-постоянная по времени функция $Q_N^M(y, \tau)$. Как следует из леммы 3.3. (см. Приложение) последовательность функций $Q_N^M(y, \tau)$ оказывается фундаментальной при $N \rightarrow \infty$, $M = [N^{1/4}]$ в полном пространстве $C_{\omega, S}^{\mu}(\bar{L}) \cdot C^1[0, \infty)$. Обозначим предел этой последовательности через $Q(y, \tau)$ и покажем, что он является решением ИУ (14).

Отметим, что согласно лемме 3.4 (см. Приложение) при подстановке функции $Q(y, \tau)$ вместо $q(y, \tau)$ в левую часть ИУ (14) получим выражение из класса $C_{\omega, S}^{1+\mu}(\bar{L}) \cdot C^1[0, \infty)$. Запишем последовательность ИУ (28) в виде

$$\int_L \varrho_{N,1}^1(y) \ln \frac{1}{r_{xy}} d\lambda_y = f(x, \tau_2^1),$$

$$\int_L \varrho_{N,i}^K(y) \ln \frac{1}{r_{xy}} d\lambda_y = \int_L \varrho_{N,i-1}^K(y) \ln \frac{1}{r_{xy}} d\lambda_y -$$

(29)

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j=1}^{i-1} \int_L \varrho_{N,j}^k(y) \{ \varphi(\tau_{i+1}^k - \tau_{j+1}^k, \tau_{xy}) - \varphi(\tau_{i+1}^k - \tau_j^k, \tau_{xy}) \} d h_y - \\
 & - \sum_{p=1}^{k-1} \sum_{j=1}^N \int_L \varrho_{N,j}^p(y) \{ \varphi(\tau_{i+1}^k - \tau_{j+1}^p, \tau_{xy}) - \varphi(\tau_{i+1}^k - \tau_j^p, \tau_{xy}) \} d h_y = f(x, \tau_{i+1}^k),
 \end{aligned}$$

$$k = \overline{1, [N^{1/4}]} \quad , \quad i = \overline{1, N} \quad , \quad x \in L \quad .$$

Устремляя N к бесконечности, выбираем такую последовательность временных узлов $\{\ell_N\}_{N=1}^{\infty}$ (по одному номеру из каждого разбиения), что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tau_{\ell_N+1}^k = t \quad t \in [k-1, k] \quad k \geq 1 \quad .$$

Правые части ИУ, взятых с такими номерами из последовательности ИУ (29), при $N \rightarrow \infty$ стремятся к значению $f(x, t)$. Покажем, что в этом случае левые части такой последовательности ИУ будут стремиться к левой части ИУ (14) в норме пространства $C^{1+k}(\bar{L}) - C^1[0, \infty)$.

Рассмотрим левую часть ИУ из последовательности (29) с номером ℓ_N . Справедлива оценка

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_L (\varrho_{N, \ell_N}^k(y) - \varrho_{N, \ell_N-1}^k(y)) \ln \frac{1}{\tau_{xy}} d h_y \right| \leq (c_{f,2} + 1) h_N, \\
 & c_{f,2} > 0 \quad .
 \end{aligned}$$

(Здесь использованы результаты леммы 3.2 (см. Приложение) и факт существования интегралов). Поэтому рассматриваемая левая часть представима в виде

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j=1}^{\ell_N-1} \int_L \varrho_{N,j}^k(y) \{ \varphi(\tau_{\ell_N+1}^k - \tau_{j+1}^k, \tau_{xy}) - \varphi(\tau_{\ell_N+1}^k - \tau_j^k, \tau_{xy}) \} d h_y - \\
 & - \sum_{p=1}^{k-1} \sum_{j=1}^N \int_L \varrho_{N,j}^p(y) \{ \varphi(\tau_{\ell_N+1}^k - \tau_{j+1}^p, \tau_{xy}) - \varphi(\tau_{\ell_N+1}^k - \tau_j^p, \tau_{xy}) \} d h_y + O(h_N).
 \end{aligned}$$

Используя определение функции $Q(y, \tau)$, а также непрерывную дифференцируемость функций $\Psi(\tau, r_{xy})$ по τ почти всюду на \bar{L} и переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, получаем

$$- \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{j=1}^{l_N-1} \int_L \varphi_{N,j}^k(y) \frac{\Psi(\tau_{l_N+1}^k - \tau_{j+1}^k, r_{xy}) - \Psi(\tau_{l_N+1}^k - \tau_j^k, r_{xy})}{h_N} h_N dy + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{k-1} \sum_{j=1}^N \int_L \varphi_{N,j}^p(y) \frac{\Psi(\tau_{l_N+1}^k - \tau_{j+1}^p, r_{xy}) - \Psi(\tau_{l_N+1}^k - \tau_j^p, r_{xy})}{h_N} h_N dy + o(h_N) \right\} =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_L \sum_{j=1}^{l_N-1} Q(y, \tau_{j+1/2}^k) \Psi'_\tau(\tau_{l_N+1}^k - \tau_{j+1/2}^k, r_{xy}) h_N dy + \right.$$

$$\left. + \int_L \sum_{p=1}^{k-1} \sum_{j=1}^N Q(y, \tau_{j+1/2}^p) \Psi'_\tau(\tau_{l_N+1}^k - \tau_{j+1/2}^p, r_{xy}) h_N dy \right\} =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_L \sum_{j=1}^{l_N-1} Q(y, \tau_{j+1/2}^k) \frac{\Theta(t - \tau_{j+1/2}^k - r_{xy}) h_N}{[(t - \tau_{j+1/2}^k)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} dy + \right.$$

$$\left. + \int_L \sum_{p=1}^{k-1} \sum_{j=1}^N Q(y, \tau_{j+1/2}^p) \frac{\Theta(t - \tau_{j+1/2}^p - r_{xy}) h_N}{[(t - \tau_{j+1/2}^p)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} dy \right\}.$$

Полученное выражение является интегральной суммой для интеграла

$$\int_L dL_y \int_0^t Q(y, \tau) \frac{\theta(t-\tau-r_{xy}) d\tau}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}}$$

Поскольку последний существует (см. лемму 3.4 в Приложении), то рассматриваемое выражение равномерно сходится к нему, т.е. к левой части ИУ (14).

Продифференцируем по любой компоненте x_i ($i=1,2$) пространственной переменной X левую часть ИУ с номером ℓ_N из последовательности (29):

$$\begin{aligned} & \int_L \varphi_{N, \ell_N}^k(y) r_{xy}^{-1} \frac{\partial r_{xy}}{\partial x_i} dL_y - \int_L \varphi_{N, \ell_N-1}^k(y) r_{xy}^{-1} \frac{\partial r_{xy}}{\partial x_i} dL_y - \\ & - \sum_{j=1}^{\ell_N-1} \int_L \varphi_{N, j}^k(y) \{ \varphi'_{x_i}(\tau_{\ell_N+1}^k - \tau_{j+1}^k, r_{xy}) - \varphi'_{x_i}(\tau_{\ell_N+1}^k - \tau_j^k, r_{xy}) \} dL_y - \\ & - \sum_{p=1}^{k-1} \sum_{j=1}^N \int_L \varphi_{N, j}^p(y) \{ \varphi'_{x_i}(\tau_{\ell_N+1}^k - \tau_{j+1}^p, r_{xy}) - \varphi'_{x_i}(\tau_{\ell_N+1}^k - \tau_j^p, r_{xy}) \} dL_y = f(x, \tau_{\ell_N+1}^k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi'_{x_i}(\tau, r_{xy}) &= \theta(\tau - r_{xy}) \frac{\partial}{\partial x_i} \ln \left| \frac{\tau}{r_{xy}} + \sqrt{\frac{\tau^2}{r_{xy}^2} - 1} \right| = \\ &= -\theta(\tau - r_{xy}) \frac{\partial r_{xy}}{\partial x_i} \frac{\tau}{r_{xy} \sqrt{\tau^2 - r_{xy}^2}}. \end{aligned}$$

Видно, что функция φ'_{x_i} имеет особенность $\frac{\partial r_{xy}}{\partial x_i} r_{xy}^{-1}$ сингулярного типа и слабую особенность $(\tau - r_{xy})^{-1/2}$, которые не совпадают между собой. Справедлива оценка.

$$\int_L^K \varphi_{N, \varepsilon_N}^k(y) \frac{\partial r_{xy}}{\partial x_i} r_{xy}^{-1} dL_y - \int_L^K \varphi_{N, \varepsilon_{N-1}}^k(y) \frac{\partial r_{xy}}{\partial x_i} r_{xy}^{-1} dL_y = O(h_N).$$

Используя тот факт, что левая часть ИУ (I4) принадлежит пространству $C_{\omega, \delta}^{1+\mu}(\bar{L})$ (см. лемму 3.4) в Приложении, аналогично предыдущему можно доказать, что левая часть рассматриваемой последовательности ИУ равномерно сходится к выражению

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^t d\tau \int_L \frac{Q(y, \tau) \theta(t - \tau - r_{xy})}{[(t - \tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} dL_y$$

в норме пространства $C_{\omega, \delta}^{\mu}(\bar{L})$.

Рассмотрим разность левых частей уравнений с номерами ℓ_N и ℓ_{N-1} , разделенную на h_N . В силу леммы 3.3 из Приложения при $N \rightarrow \infty$ имеет место оценка

$$\| \frac{1}{h_N} \int_L \{ \varphi_{N, \varepsilon_N}^k(y) - \varphi_{N, \varepsilon_{N-1}}^k(y) \} \ln \frac{1}{r_{xy}} dL_y - \frac{1}{h_N} \int_L \{ \varphi_{N, \varepsilon_{N-1}}^k(y) - \varphi_{N, \varepsilon_{N-2}}^k(y) \} \times$$

$$\times \ln \frac{1}{r_{xy}} dL_y \|_{C_{\omega, \delta}^{1+\mu}} = \| \int_L \{ Q_{\tau}^i(y, \tau_{\varepsilon_{N-1/2}}^k) - Q_{\tau}^i(y, \tau_{\varepsilon_{N-3/2}}^k) \} \ln \frac{1}{r_{xy}} dL_y \|_{C_{\omega, \delta}^{1+\mu}} + o(1) =$$

$$= o(1).$$

Используя тот факт, что левая часть ИУ (I4) при $q(y, \tau) = Q(y, \tau)$ принадлежит пространству $C^1[0, \infty)$ по переменной t и пространству $C_{\omega, \delta}^{1+\mu}(\bar{L})$ по пространственным переменным (см. лемму 3.4), аналогично предыдущему можно доказать равномерную сходимость рассматриваемого выражения к пределу

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t d\tau \int_L \frac{Q(y, \tau) \theta(t - \tau - r_{xy})}{[(t - \tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} dL_y$$

при $N \rightarrow \infty$ в норме пространства $C_{\omega, \delta}^{\mu}(\bar{L})$. Таким образом мы показали, что функция $Q(y, \tau)$ является решением ИУ (I4).

Покажем единственность этого решения. Для этого докажем, что решение задачи (I)-(6) единственно, а затем воспользуемся теоремой I, утверждающей эквивалентность постановок задач (I)-(6) и (I4)-(I6) (см. § I.1). Аналогично доказательству леммы I.1 (§ I.1) построим вспомогательный контур $C = \bigcup_{j=1}^N C_j$ и сформулируем задачу (I)-(6) для замкнутого граничного контура C , а не для разомкнутого контура L . Согласно работе [26], решение такой задачи единственно. Устремляя ξ к 0 получаем, что $C \rightarrow L$ и решение задачи (I)-(6) единственно.

Чтобы воспользоваться теоремой I, необходимо показать, что при подстановке $Q(y, \tau)$ вместо $q(y, \tau)$ в представление (7), выполняется условие (5). Этот факт доказан в лемме 3.5 (см. Приложение). Поэтому из единственности решения задачи (I)-(6) следует единственность решения задачи (I4)-(I6).

Как следует из оценок (I5) и (I6) леммы 3.2 (см. Приложение) при $N \rightarrow \infty$ и факта сходимости последовательности $Q_N^M(y, \tau)$ к решению ИУ (I4), это решение непрерывно зависит от функции $f(x, t)$.

Теорема 3 доказана.

По ходу доказательства показано, что решение задачи (I)-(6) также существует, единственно и непрерывно зависит от функции f . Тем самым доказана корректность постановок задач (I)-(6) и (I4)-(I6).

ГЛАВА ВТОРАЯ

РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С
ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЧЕБЫШЕВА-ЛАГЕРРА

Вид нестационарного ИУ (1.25) (см. § 1.2), которое соответствует смешанной задаче Дирихле в случае трех пространственных переменных, допускает простое применение интегральных преобразований по временной переменной. Для решения этого ИУ мы применили метод интегральных преобразований Чебышева-Лагерра. Преимуществом этого метода является простота построения обратных преобразований.

Плотность нестационарного ИУ ищем в классе функций $C_{w,\delta}^{\mu}(\bar{S}) \cdot C^1[0, \infty)$. Класс функций $C_{w,\delta}^{\mu}(\bar{S})$ определяем аналогично § 1.3. Рассмотрим функцию $w_{\delta}(x) \in C^{\mu}(\bar{S})$. Пусть эта функция равна 1 на регулярной части S , а в δ -окрестности нерегулярных точек поверхности S она стремится к 0 с порядком $1/2$. К классу функций $C_{w,\delta}^{\mu}(\bar{S})$ отнесем те функции $q(x, t)$, для которых выполняется следующее условие

$$w_{\delta}(x) q(x, t) \in C^{\mu}(\bar{S}) \quad t \geq 0.$$

В этом случае формула (1.24) определяет такую функцию $u(x, t)$, что $u \in C^1[\mathcal{D}_c^3 \times [0, \infty)]$. В самом деле

$$u'_{x_i}(x, t) = - \iint_S q'_t(y, t - r_{xy}) r_{xy}^{-1} \frac{\partial r_{xy}}{\partial x_i} dS_y + \\ + \iint_S q(y, t - r_{xy}) \theta(t - r_{xy}) r_{xy}^{-2} \frac{\partial r_{xy}}{\partial x_i} dS_y, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (1)$$

$$u'_t(x, t) = \iint_S q'_t(y, t - r_{xy}) \theta(t - r_{xy}) r_{xy}^{-1} dS_y. \quad (2)$$

Если $x \in \bar{S}$, то ядра приведенных интегралов не содержат особенностей, а порядок особенностей функций $q(y, t)$ и $q'_t(y, t)$ не превышает $1/2$. Это значит, что интегралы в правых частях формул (1) и (2) существуют, и функция $u(x, t)$ обладает требуемой степенью гладкости.

Если предположить, что $x \in S_j^*(g)$, то в пределе при $g \rightarrow 0$ ядра рассматриваемых интегралов содержат особенности вида $\frac{\Gamma_y^{-1}}{\sqrt{y}}$, $\frac{\partial \Gamma_y}{\partial x} \frac{\Gamma_y^{-2}}{\sqrt{y}}$ при $y \rightarrow x$. В этом случае функция $u'_g(x, t)$ будет иметь особенности порядка $1/2$. Но это значит, что интеграл в левой части условия (1.2I) существует. Поскольку мера $S_j^*(g)$ при $g \rightarrow 0$ стремится к 0, то условие (1.2I) выполняется. Учитывая вышесказанное, можно заключить, что функция $q(x, t)$ из класса $C_{\omega, g}^k(\bar{S}) * C^1[0, \infty)$ принадлежит Q_s^2 (определение этого класса функций см. в § 1.2). В этом случае выполняется теорема 2 об эквивалентности (§ 1.2).

§ 2.1. Сведение нестационарного интегрального уравнения к последовательности стационарных.

Преобразованием Чебышева-Лагерра порядка n от функции $q(y, t)$ называется выражение вида

$$Q_n^x(y) = \int_0^{\infty} e^{-xt} L_n(xt) q(y, t) dt, \quad (3)$$

где x - некоторый числовой параметр, L_n - полином Чебышева-Лагерра порядка n .

Известно, что полиномы Чебышева-Лагерра образуют ортонормированную систему функций на интервале $[0, \infty)$ с весом e^{-t} . Поскольку функция $q(y, t)$ непрерывна по t , то ее разложение в ряд Фурье по полиномам Чебышева-Лагерра сходится в среднем на

интервале $[0, \infty)$ с весом e^{-xt} к исходной функции. Поэтому представление

$$q(y, t) = x \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^x(y) h_n(xt) \quad (4)$$

можно считать обратным преобразованием Чебышева-Лагерра.

Используя свойства полиномов Чебышева-Лагерра [51], нетрудно показать справедливость следующих соотношений [46]:

$$h_n(x+y) = h_n(x) + \sum_{m=0}^{n-1} \{h_{n-m}(y) - h_{n-m-1}(y)\} h_m(x) \quad n \geq 1, \quad (5)$$

$$h_n(x) - h_{n-1}(x) = -x + O(x^2) \quad n \geq 1, \quad x \rightarrow 0. \quad (6)$$

Применяя формулу (5) и замену переменных $\tau = t - r_{xy}$, можно получить следующее интегральное тождество

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} h_n(xt) q(y, t - r_{xy}) \theta(t - r_{xy}) dt = e^{-xr_{xy}} \int_0^{\infty} e^{-x\tau} h_n(x\tau + xr_{xy}) q(y, \tau) d\tau =$$

$$= e^{-xr_{xy}} \int_0^{\infty} e^{-x\tau} \left\{ h_n(x\tau) + \sum_{m=0}^{n-1} [C_{n-m}(xr_{xy}) h_m(x\tau)] \right\} q(y, \tau) d\tau = \quad (7)$$

$$= e^{-xr_{xy}} \left\{ Q_n^x(y) + \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-m}(xr_{xy}) Q_m^x(x\tau) \right\},$$

где $C_{n-m}(x) = h_{n-m}(x) - h_{n-m-1}(x)$.

Применим к ИУ (I.25)

$$\iint_S q(y, t - r_{xy}) \theta(t - r_{xy}) r_{xy}^{-1} dS_y = f(x, t) \quad x \in S, \quad t \geq 0, \quad (I.25)$$

$$f \in C_{w, S}^{1+\mu} \times C^1[0, \infty)$$

интегральные преобразования Чебышева-Лагерра по переменной t . В результате N -кратного применения этих преобразований получим последовательность стационарных ИУ вида

$$\iint_S r_{xy}^{-1} dS_y \int_0^{\infty} e^{-xt} h_n(xt) q(y, t-r_{xy}) \theta(t-r_{xy}) dt = F_n^x(x) \quad x \in S, \quad (8)$$

где $F_n^x(x)$ - преобразование Чебышева-Лагерра порядка n функции $f(x, t)$. С помощью тождества (7) ИУ (8) преобразуем к виду

$$\iint_S e^{-xr_{xy}} r_{xy}^{-1} Q_0^x(y) dS_y = F_0^x(x), \quad (9)$$

$$\iint_S e^{-xr_{xy}} r_{xy}^{-1} Q_n^x(y) dS_y = F_n^x(x) - \iint_S e^{-xr_{xy}} r_{xy}^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-m}(xr_{xy}) Q_m^x(y) dS_y, \\ n = \overline{0, N}, \quad x \in S.$$

Определив из последовательности ИУ (9) неизвестные функции $Q_n^x(y)$, с учетом формулы (4), для определения $q(y, \tau)$ можно использовать соотношение

$$q(y, \tau) \approx x \sum_{n=0}^N Q_n^x(y) h_n(xt) \quad (10)$$

Таким образом, чтобы построить приближенное решение ИУ (1.25) достаточно решить последовательность стационарных ИУ (9). Решение этих ИУ рассмотрим отдельно в осесимметричном и общем пространственном случаях. Дело в том, что изображения плотностей $Q_n^x(y)$, в случае осевой симметрии ИУ, зависят от одной пространственной переменной, а в общем случае - от двух. Зависимость плотностей от двух переменных приводит к усложнению алгоритма приближенного решения стационарных ИУ, а также к увеличению расчетного времени ЭВМ для его реализации. Поэтому случай осевой симметрии выделен, как требующий упрощенного алгоритма решения,

также к увеличению расчетного времени ЭВМ для его реализации. Поэтому случай осевой симметрии выделен, как требующий упрощенного алгоритма решения, а также как подготовительный этап к решению существенно пространственных задач.

§ 2.2. Численное решение последовательности стационарных интегральных уравнений метода интегральных преобразований в осесимметричном случае.

Рассмотрим один из возможных вариантов метода интерполяции и коллокации решения ИУ из последовательности (9) (§ 2.1).

Поскольку исходная задача осесимметрична, то осевая симметрия свойственна граничной поверхности S , граничной функции $f(x, t)$ на S , а значит и плотности $q(y, t)$. Введем цилиндрическую систему координат (r, z, φ) такую, что ось z совпадает с осью симметрии задачи. Как следствие симметрии получаем

$$Q_n^x(y(r_y, z_y, \varphi_y)) = \tilde{Q}_n^x(r_y, z_y), \quad F_n^x(x(r_x, z_x, \varphi_x)) = \tilde{F}_n^x(r_x, z_x).$$

Пусть образующая L граничной поверхности S задается параметрическим представлением

$$L : \begin{cases} r = r(\alpha), \\ z = z(\alpha), \\ \varphi = 0, \end{cases} \quad \alpha \in [u_1, u_2], \quad (II)$$

где $r(\alpha)$, $z(\alpha)$ дважды непрерывно-дифференцируемые функции.

На интервалах $[u_1, u_2]$ и $[0, \pi/2]$ введем следующие равномерные сетки

$$W_\alpha = \{ \alpha_i \mid \alpha_i = u_1 + (i-1)h_\alpha, \quad i = 1, n_\alpha + 1 \}, \quad h_\alpha = (u_2 - u_1) / n_\alpha, \quad (I2)$$

$$W_\varphi = \{ \varphi_k \mid \varphi_k = (k-1)h_\varphi, \quad k = 1, n_\varphi + 1 \}, \quad h_\varphi = \pi / 2 n_\varphi.$$

Для аппроксимации неизвестных функций $\bar{Q}_m^{\alpha}(x) = \tilde{Q}_m^{\alpha}(r(x), z(x))$ используем систему кусочно-линейных функций, которая является предельно плотной в пространстве $C_{w,s}^{\mu}(\bar{S})$

$$\bar{Q}_m^{\alpha}(x) = \sum_{s=0,1} Q_{j+s}^{\alpha,n} \phi_j^s(x) \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad (I3)$$

где

$$\phi_j^s(x) = \begin{cases} \frac{x_{j+1} - x}{h_x} & s=0, \\ \frac{x - x_j}{h_x} & s=1, \end{cases}$$

$Q_j^{\alpha,n}$ - значение функции $\bar{Q}_n^{\alpha}(x)$ в узле $x_j \in w_x$.

Согласно методу коллокации требуем удовлетворения каждого уравнения последовательности (9) на множестве отдельных точек коллокации, расположенных по образующей h поверхности S . Параметры точек коллокации выбираем по следующему правилу

$$\bar{x}_i = \begin{cases} x_i \in w_x & i \neq 1, \quad i \neq n_x + 1, \\ u_1 + \delta h_x & i = 1, \\ u_2 - \delta h_x & i = n_x + 1, \end{cases} \quad (I4)$$

где $0 < \delta < 1$ $i = \overline{1, n_x + 1}$.

Используя параметрическое представление поверхности S , приближение функции $Q_n^{\alpha}(y)$ по формуле (I3) и выбирая точки коллокации указанным образом, приходим к последовательности систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно коэффициентов $Q_j^{\alpha,n}$:

$$\sum_{s=0,1} \sum_{j=1}^{n_d} Q_{j+s}^{x,0} A_{j,s}^{i,x} = \frac{1}{4} F_i^{x,0} \quad (I5)$$

$$\sum_{s=0,1} Q_{j+s}^{x,n} A_{j,s}^{i,x} = \frac{1}{4} F_i^{x,n} - \sum_{s=0,1} \sum_{j=1}^{n_d} \sum_{m=0}^{n-1} Q_{j+s}^{x,m} B_{j,s}^{i,n-m,x}, \quad i = \overline{1, n_d+1}, n = \overline{1, N},$$

где

$$A_{j,s}^{i,x} = \sum_{k=1}^{n_\varphi} \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} J(\alpha) \phi_j^s(\alpha) d\alpha \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} e^{-xR(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi)} R^{-1}(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi) d\varphi, \quad (I6)$$

$$B_{j,s}^{i,m,x} = \sum_{k=1}^{n_\varphi} \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} J(\alpha) \phi_j^s(\alpha) d\alpha \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} e^{-xR(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi)} R^{-1}(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi) C_m(xR(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi)) d\varphi,$$

$$J(\alpha) = r(\alpha) \sqrt{r'(\alpha)^2 + z'(\alpha)^2}$$

- элемент площади поверхнос-

ти S

$$R(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi) = r_{xy} = [(r(\alpha) + r(\bar{\alpha}_i))^2 + (z(\alpha) - z(\bar{\alpha}_i))^2 - 4r(\alpha)r(\bar{\alpha}_i)\cos^2\varphi]^{1/2} -$$

- расстояние между точками $x(r(\bar{\alpha}_i), z(\bar{\alpha}_i), 0)$ и $y(r(\alpha), z(\alpha), \varphi)$.

Нетрудно заметить, что коэффициенты $A_{j,s}^{i,x}$ включают несобственные интегралы от неограниченных функций. Так функция $R^{-1}(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi)$ при $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}_i$, $\varphi \rightarrow 0$ обращается в бесконечность. Интегралы, которые составляют коэффициенты $B_{j,s}^{i,m,x}$, особенностей не содержат, поскольку в силу формулы (6)

$$\lim_{R \rightarrow 0} (R^{-1} C_m(xR)) = -x$$

Несобственные интегралы, которые встречаются при вычислении коэффициентов $A_{j,s}^{i,x}$, могут быть определены по методу Канторовича. Продемонстрируем это на примере следующего интеграла

$$\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} J(\alpha) \Phi_{i-1}^1(\alpha) \int_0^{h\varphi} e^{-\alpha R(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi)} R^{-1}(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi) d\varphi d\alpha$$

Пусть $r'(\bar{\alpha}_i) \neq 0$. Если же $r'(\bar{\alpha}_i) = 0$, то, как нетрудно убедиться

$$\lim_{\alpha \rightarrow \bar{\alpha}_i} J(\alpha) R^{-1}(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi) = r'(\bar{\alpha}_i)$$

и особенность подынтегральной функции погашается. Воспользуемся разложением функций $r(\alpha)$, $\xi(\alpha)$, $R(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi)$ в окрестности точки $\alpha = \bar{\alpha}_i$, $\varphi = 0$:

$$4r(\alpha)r(\bar{\alpha}_i)\cos^2\varphi = 4r(\alpha)r(\bar{\alpha}_i) - 4r(\alpha)r(\bar{\alpha}_i)\varphi^2 + O(\varphi^4),$$

$$\begin{aligned} (r(\alpha) + r(\bar{\alpha}_i))^2 - 4r(\alpha)r(\bar{\alpha}_i) &= (r(\alpha) - r(\bar{\alpha}_i))^2 = (r'(\bar{\alpha}_i)(\alpha - \bar{\alpha}_i) + O(\alpha - \bar{\alpha}_i)^2)^2 = \\ &= r'(\bar{\alpha}_i)^2(\alpha - \bar{\alpha}_i)^2 + O(\alpha - \bar{\alpha}_i)^3, \end{aligned}$$

$$4r(\alpha)r(\bar{\alpha}_i)\varphi^2 = 4r^2(\bar{\alpha}_i)\varphi^2 + O((\alpha - \bar{\alpha}_i)\varphi^2),$$

$$(\xi(\alpha) - \xi(\bar{\alpha}_i))^2 = \xi'(\bar{\alpha}_i)(\alpha - \bar{\alpha}_i)^2 + O(\alpha - \bar{\alpha}_i)^3,$$

$$R(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi) = [(r'(\bar{\alpha}_i)^2 + \xi'(\bar{\alpha}_i)^2)(\alpha - \bar{\alpha}_i)^2 + 4r(\bar{\alpha}_i)^2\varphi^2 +$$

$$+ O(\alpha - \bar{\alpha}_i)^3 + O((\alpha - \bar{\alpha}_i)\varphi^2) + O(\varphi^4)]^{1/2}. \quad (17)$$

Рассматриваемый интеграл представим в виде

$$\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} d\alpha \int_0^{h\varphi} [J(\alpha) \Phi_{i-1}^1(\alpha) e^{-\alpha R(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi)} R^{-1}(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi) - J(\alpha_i) R_1^{-1}(\alpha, \alpha_i, \varphi)] d\varphi +$$

$$+ \mathcal{J}(\alpha_i) \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} d\alpha \int_0^{h_\varphi} R_1^{-1}(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi) d\varphi, \quad (I8)$$

где $R_1(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi) = [4r(\bar{\alpha}_i)\varphi^2 + (r'(\bar{\alpha}_i)^2 + z'(\bar{\alpha}_i)^2)(\alpha - \bar{\alpha}_i)^2]^{1/2}$ -
 главный член в разложении (I7). Исследуем поведение первой

подынтегральной функции в формуле (I8) при $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}_i$, $\varphi \rightarrow 0$.

Пусть $\alpha = \bar{\alpha}_i - h_\alpha \varepsilon$, $\varphi = h_\varphi \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$. В этом случае

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}(\alpha) \Phi_{i-1}^1(\alpha) e^{-\varkappa R(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi)} R_1^{-1}(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi) - \mathcal{J}(\bar{\alpha}_i) R_1^{-1}(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi) = \\ & = \mathcal{J}(\bar{\alpha}_i) [R_1^{-1}(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi) - R_1^{-1}(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi)] + O(\varepsilon) R_1^{-1}(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi), \end{aligned}$$

поскольку при сделанных допущениях

$$\mathcal{J}(\alpha) = \mathcal{J}(\bar{\alpha}_i) + O(\alpha - \bar{\alpha}_i), \quad \Phi_{i-1}^1(\alpha) = 1 + O(\alpha - \bar{\alpha}_i),$$

$$e^{-\varkappa R(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi)} = 1 + O(\varepsilon).$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} R(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi) &= [4r(\bar{\alpha}_i)h_\varphi^2 + (r'(\bar{\alpha}_i) + z'(\bar{\alpha}_i))^2 h_\alpha^2]^{1/2} \varepsilon + O(\varepsilon^2) = \\ &= G(\bar{\alpha}_i) \varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad G(\bar{\alpha}_i) = [4r(\bar{\alpha}_i)^2 h_\varphi^2 + (r'(\bar{\alpha}_i)^2 + z'(\bar{\alpha}_i)^2) h_\alpha^2]^{1/2}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$R_1^{-1}(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi) - R_1^{-1}(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi) = (R_1(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi) - R(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi)) R_1^{-1}(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi) \times$$

$$\times R_1^{-1}(\alpha, \bar{\alpha}_i, \varphi) = O(\varepsilon^2) \cdot [G(\bar{\alpha}_i) \varepsilon + O(\varepsilon^2)]^{-1} [G(\bar{\alpha}_i) \varepsilon]^{-1} = O(\varepsilon) [G^*(\bar{\alpha}_i) \varepsilon +$$

$$+ O(\varepsilon^2)]^{-1} = [G^*(\bar{\alpha}_i) + O(\varepsilon)]^{-1} = O(1).$$

Суммируя вышесказанное, заключаем, что первая подынтегральная функция в формуле (18) ограничена в окрестности точки $d = \bar{d}_i$, $\psi = 0$. Второй интеграл в формуле (18) вычисляется аналитически. Таким образом можно свести несобственный интеграл к сумме собственного интеграла и такого интеграла, который вычисляется аналитически. Следовательно, для вычисления всех интегралов в левых и правых частях последовательности СЛАУ (15), можно использовать формулы численного интегрирования.

Каждую СЛАУ из полученной совокупности решаем последовательно, подставляя коэффициенты $Q_j^{x,m}$, определенные на предыдущих шагах, в правую часть решаемой СЛАУ. Поскольку матрицы всех СЛАУ совпадают, целесообразно применить метод разложения матрицы на произведение треугольных. В этом случае процесс решения очередной СЛАУ будет заключаться в умножении правой части на треугольную матрицу и проведении обратного хода метода Гаусса. Чтобы избежать ненужного пересчета, целесообразно также, вместе с вычислением матрицы последовательности СЛАУ, определить массив величин, стоящих при коэффициентах $Q_j^{x,m}$ в правых частях СЛАУ из этой последовательности.

Когда коэффициенты $Q_j^{x,m}$ определены, по формулам (1.24), (10) и (13) можно вычислять решение исходной задачи вне граничной поверхности. Вычисляя приближенное решение в точках, лежащих на поверхности S , но не совпадающих с коллокационными, можем апостериорно оценить невязку решения ИУ (1.25), а также погрешность удовлетворения граничному условию приближенным решением исходной задачи.

§ 2.3. Численное решение последовательности стационарных интегральных уравнений метода интегральных преобразований в существенно-пространственном случае

Построенный в § 2.2 алгоритм нетрудно обобщить на случай отсутствия осевой симметрии исходной задачи.

В трехмерном пространстве R^3 введем прямоугольную декартовую систему координат (x_1, x_2, x_3) . Пусть поверхность S задается следующим параметрическим представлением

$$S: \begin{cases} x_1 = x_1(\alpha, \beta) \\ x_2 = x_2(\alpha, \beta) \\ x_3 = x_3(\alpha, \beta) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \alpha \in [u_1, u_2], \\ \beta \in [v_1, v_2], \end{array} \quad (19)$$

где $x_1(\alpha, \beta)$, $x_2(\alpha, \beta)$, $x_3(\alpha, \beta)$ — дважды непрерывно-дифференцируемые функции. На прямоугольнике $D = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$

введем сетку $W_{\alpha\beta} = \{(\alpha_i, \beta_j) \mid \alpha_i \in W_\alpha, \beta_j \in W_\beta\}$,

где $W_\alpha = \{\alpha_i \mid \alpha_i = u_1 + (i-1)h_\alpha, i = \overline{1, n_\alpha + 1}\}$, $h_\alpha = (u_2 - u_1)/n_\alpha$,

$W_\beta = \{\beta_j \mid \beta_j = v_1 + (j-1)h_\beta, j = \overline{1, n_\beta + 1}\}$, $h_\beta = (v_2 - v_1)/n_\beta$.

К функциям $\bar{Q}_m^\alpha(\alpha, \beta) = Q_m^\alpha(y(x_1(\alpha, \beta), x_2(\alpha, \beta), x_3(\alpha, \beta)))$

применяем кусочно-линейную аппроксимацию по каждой из переменных

$$\bar{Q}_m^\alpha(\alpha, \beta) = \sum_{s=0,1} \sum_{\sigma=0,1} Q_{k+s, \nu+\sigma}^{\alpha, m} \phi_{\alpha, k}^s(\alpha) \phi_{\beta, \nu}^\sigma(\beta), \quad (20)$$

где

$$\phi_{\alpha, k}^s(\alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha_{k+1} - \alpha}{h_\alpha} & s=0, \\ \frac{\alpha - \alpha_k}{h_\alpha} & s=1, \end{cases} \quad \alpha \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}],$$

$$\phi_{\beta, \gamma}^{\beta}(\beta) = \begin{cases} \frac{\beta_{\gamma+1} - \beta}{h_{\beta}} & \gamma = 0, \\ \frac{\beta - \beta_{\gamma}}{h_{\beta}} & \gamma = 1, \end{cases} \quad \beta \in [\beta_{\gamma}, \beta_{\gamma+1}] ,$$

$Q_{k, \gamma}^{\alpha, m}$ - значение функции $\bar{Q}_m^{\alpha}(\alpha, \beta)$ в узле $(\alpha_k, \beta_{\gamma})$ сетки $W_{\alpha\beta}$.

Каждое ИУ из последовательности (9) решаем методом коллокации.

Параметры $(\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j)$ точек коллокации выбираем аналогично § 2.2.

$$\bar{\alpha}_i = \begin{cases} \alpha_i \in W_{\alpha} & i \neq 1, i \neq n_{\alpha} + 1, \\ u_1 + \delta_{\alpha} h_{\alpha} & i = 1, \\ u_2 - \delta_{\alpha} h_{\alpha} & i = n_{\alpha} + 1, \end{cases} \quad (21)$$

$$\bar{\beta}_j = \begin{cases} \beta_j \in W_{\beta} & j \neq 1, j \neq n_{\beta} + 1, \\ v_1 + \delta_{\beta} h_{\beta} & j = 1, \\ v_2 + \delta_{\beta} h_{\beta} & j = n_{\beta} + 1, \end{cases}$$

$$0 < \delta_{\alpha} < 1, \quad 0 < \delta_{\beta} < 1.$$

Подставляя параметрическое представление (19) поверхности и аппроксимационное представление (20) функций $Q_m^{\alpha}(\gamma)$ в уравнения последовательности (9), а также выбирая параметры точек коллокации по формулам (21), приходим к последовательности СЛАУ относительно коэффициентов $Q_{k, \gamma}^{\alpha, m}$:

$$\sum_{s=0,1} \sum_{\sigma=0,1} \sum_{k=1}^{n_{\alpha}} \sum_{\gamma=1}^{n_{\beta}} Q_{k+s, \gamma+\sigma}^{\alpha, 0} A_{k, \gamma}^{i, j, \alpha}(s, \sigma) = F_{i, j}^{\alpha, 0},$$

$$\sum_{s=0,1} \sum_{\sigma=0,1} \sum_{k=1}^{n_{\alpha}} \sum_{\gamma=1}^{n_{\beta}} Q_{k+s, \gamma+\sigma}^{\alpha, n} A_{k, \gamma}^{i, j, \alpha}(s, \sigma) = F_{i, j}^{\alpha, n} -$$

$$- \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0,1} \sum_{\sigma=0,1} \sum_{k=1}^{n_\alpha} \sum_{\nu=1}^{n_\beta} Q_{k+s, \nu+\sigma}^{\alpha, m} B_{k, \nu}^{i, j, \alpha} (n-m, s, \sigma), \quad (22)$$

$$i = \overline{1, n_\alpha + 1}, \quad j = \overline{1, n_\beta + 1}, \quad n = \overline{1, N},$$

$$\text{где } A_{k, \nu}^{i, j, \alpha} (s, \sigma) = \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \phi_{\alpha, k}^s(\alpha) d\alpha \int_{\beta_\nu}^{\beta_{\nu+1}} J(\alpha, \beta) \phi_{\beta, \nu}^\sigma(\beta) e^{-\alpha R(\alpha, \beta, \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j)} R(\alpha, \beta, \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j) d\beta,$$

$$B_{k, \nu}^{i, j, \alpha} (m, s, \sigma) = \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \phi_{\alpha, k}^s(\alpha) d\alpha \int_{\beta_\nu}^{\beta_{\nu+1}} J(\alpha, \beta) \phi_{\beta, \nu}^\sigma(\beta) e^{-\alpha R(\alpha, \beta, \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j)} \times$$

$$\times C_m(\alpha R(\alpha, \beta, \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j)) R^{-1}(\alpha, \beta, \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j) d\beta,$$

$$F_{i, j}^{\alpha, m} = F_m^\alpha (x(x_1(\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j), x_2(\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j), x_3(\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j)),$$

$J(\alpha, \beta) = [E(\alpha, \beta)G(\alpha, \beta) - F^2(\alpha, \beta)]^{1/2}$ - элемент площади поверхности S ,

$$E(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) \right)^2, \quad G(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial \beta}(\alpha, \beta) \right)^2,$$

$$F(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) \frac{\partial x_i}{\partial \beta}(\alpha, \beta),$$

$$R(\alpha, \beta, \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j) = r_{xy} = \left[\sum_{k=1}^3 (x_k(\alpha, \beta) - x_k(\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j))^2 \right]^{1/2} -$$

- расстояние между точкой коллокации и точкой интегрирования.

Для вычисления несобственных интегралов, которые служат коэффициентами матрицы полученной СЛАУ, применяем также метод Канторовича. Поскольку в окрестности точки $\alpha = \bar{\alpha}_i$. $\beta = \bar{\beta}_j$ справедливо соотношение

$$R(\alpha, \beta, \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j) = [E(\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j)(\alpha - \bar{\alpha}_i)^2 + 2F(\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j)(\alpha - \bar{\alpha}_i)(\beta - \bar{\beta}_j) + G(\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j)(\beta - \bar{\beta}_j)^2 + (O(\alpha - \bar{\alpha}_i) + O(\beta - \bar{\beta}_j))(O(\alpha - \bar{\alpha}_i)^2 + O(\beta - \bar{\beta}_j)^2)]^{1/2}$$

в качестве вспомогательной функции метода Канторовича

$R_1(\alpha, \beta, \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j)$ используется главный член приведенного разложения.

Решив полученную последовательность СЛАУ, можем построить приближенное решение исходной задачи, а также проверить точность удовлетворения граничного условия в точках, не совпадающих с коллокационными.

§ 2.4. Результаты численных экспериментов по методу преобразований.

Описанная в настоящей главе методика приближенного решения смешанной задачи Дирихле для волнового уравнения в осесимметричном случае реализована в виде прикладной программы.

Программа состоит из иерархической системы модулей и спроектирована с использованием идей структурного программирования. Эта совокупность модулей выполняет следующую последовательность операций: вводит входную информацию о геометрии граничных поверхностей, других параметрах задачи и численном алгоритме ее решения; формирует матрицу последовательности СЛАУ и массив величин, стоящих при коэффициентах аппроксимации плотности в правых частях последовательности СЛАУ; разлагает матрицу СЛАУ на произведе-

дение треугольных. Затем программа формирует правую часть текущей СЛАУ в последовательности, используя значения коэффициентов $Q_j^{\varkappa, m}$, определенных на предыдущих шагах и решает эту СЛАУ. Таким образом определяются все величины $Q_j^{\varkappa, m}$ - коэффициенты аппроксимации неизвестной плотности. Программа также позволяет вычислять приближенное решение в произвольной точке вне граничной поверхности, а также сравнивать полученное решение на граничной поверхности с граничным условием.

Программа составлена на алгоритмическом языке фортран-4 и апробирована на ЭВМ ЕС-1045 на решении ряда задач преимущественно тестового характера. Граничное условие большинства задач представляло собой финитную по времени функцию. Временной профиль этой функции частично или полностью представлял собой B -сплайн различной продолжительности. Установлено, что чем меньше продолжительность импульса по сравнению с характерным размером граничной поверхности, тем больше вычислительных ресурсов необходимо привлекать для достижения заданной точности удовлетворения граничному условию. При изменении длительности граничного импульса необходимо варьировать значение параметра \varkappa : чем длиннее импульс - тем меньше значение принимает \varkappa . Оптимальное значение \varkappa определяют из минимизации погрешности удовлетворения граничному условию на временном промежутке выбранной длительности. Подбор такого значения позволяет равномерно распределить эту погрешность на рассматриваемом временном промежутке. Относительная погрешность удовлетворения граничному условию вычислялась по следующей формуле

$$\delta(\varkappa) = \max_{t \in [0, T]} |u(x, t) - f(x, t)| / \max_{t \in [0, T]} |f(x, t)|$$

Ниже приводятся результаты некоторых численных экспериментов.

При всех расчетах использовано 30 пространственных точек коллокации и интегральные преобразования, включающие полиномы Чебышева-Лагерра до 30-й степени. Выбор таких значений параметров диктовался необходимостью рационального использования ресурсов ЭВМ ЕС 1045.

1. В качестве первого тестового примера (рис.1) рассмотрим случай, когда граничная функция не зависит от пространственных переменных, а граничная поверхность является сферой единичного радиуса. Тогда решение определяется аналитически

$$u(x, t) = f(t - |x| + 1) / |x| .$$

Профилем граничной функции по временной переменной является δ - сплайн единичной амплитуды и длительности d . Удовлетворение приближенного решения граничному условию контролировалось на временном интервале $[0, \frac{3}{2}d]$.

Максимальные относительные погрешности решения при удовлетворении граничному условию для различных значений d приводятся в табл.1. Видно, как с уменьшением значения d погрешность быстро возрастает. Здесь, по-видимому, установленного максимального порядка полиномов Чебышева-Лагерра оказывается недостаточно. В табл.2 приведено сравнение приближенного решения с аналитическим для различных удалений R от граничной поверхности, а в табл.3 приводятся максимальные отклонения между этими решениями. Видно, в какой степени с увеличением расстояния до граничной поверхности отклонения уменьшаются.

2. Граничной поверхностью второй тестовой задачи служит диск единичного радиуса. Граничная функция задачи также не зависит от пространственной переменной, но не является финитной. На временном интервале $[0, 2]$ граничная функция представляет

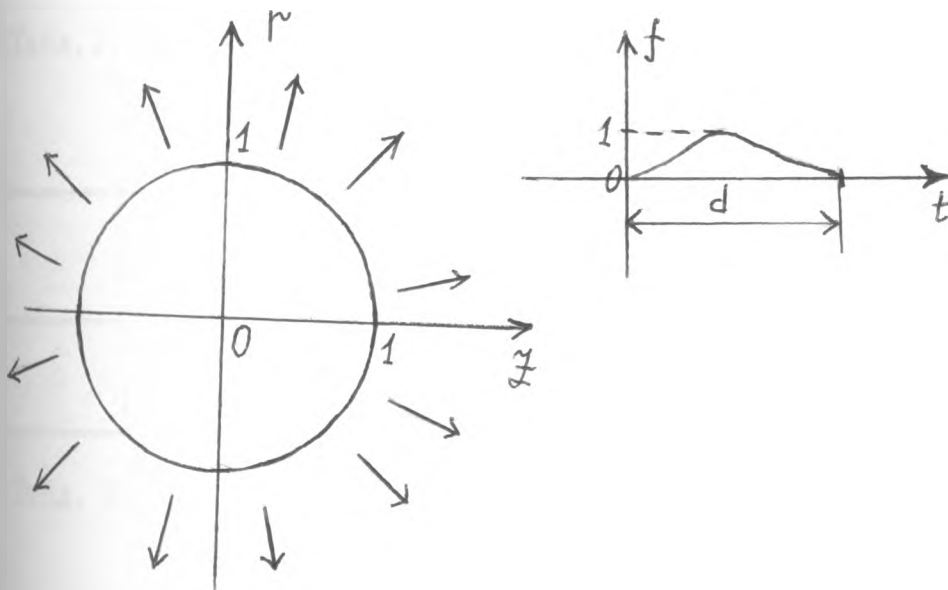


Рис. 1. Меридианное сечение геометрии первой тестовой задачи и временной профиль граничного условия.

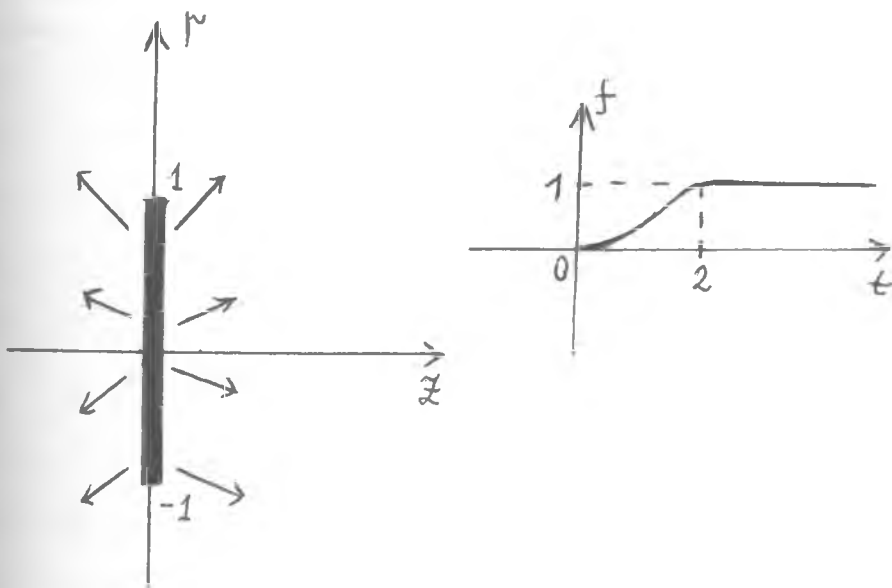


Рис. 2. Меридианное сечение геометрии второй тестовой задачи и временной профиль граничного условия.

Табл. I. Максимальная погрешность решения при удовлетворении граничному условию /задача I/.

	$d = 8.0$ $\varkappa = 1.0$	$d = 4.0$ $\varkappa = 2.0$	$d = 2.0$ $\varkappa = 4.0$
δ	0.93%	5.5%	15%

Табл. 2. Сравнение приближенного решения с аналитическим /задача I/.

$$d = 8.0, \quad \varkappa = 1.0$$

$R = 1.0$			$R = 10.0$		
τ	прибл. реш.	аналит. реш.	τ	прибл. реш.	аналит. реш.
1.0	0.0	0.0	10.0	0.0	0.0
2.0	0.0156	0.0156	11.0	0.0028	0.0028
3.0	0.1253	0.1250	12.0	0.0228	0.0227
4.0	0.3597	0.3593	13.0	0.0654	0.0653
5.0	0.4983	0.5	14.0	0.0906	0.0909
6.0	0.3597	0.3593	15.0	0.0654	0.0653
7.0	0.1260	0.1250	16.0	0.0229	0.0227
8.0	0.0141	0.0156	17.0	0.0026	0.0028
9.0	0.0021	0.0	18.0	0.0004	0.0
10.0	-0.0006	0.0	19.0	-0.0001	0.0
11.0	-0.0045	0.0	20.0	-0.0008	0.0
12.0	0.0047	0.0	21.0	0.0009	0.0

Табл. I. Максимальная погрешность решения при удовлетворении граничному условию /задача I/.

	$d = 8.0$ $\varkappa = 1.0$	$d = 4.0$ $\varkappa = 2.0$	$d = 2.0$ $\varkappa = 4.0$
δ	0.93%	5.5%	15%

Табл. 2. Сравнение приближенного решения с аналитическим /задача I/.

$$d = 8.0, \quad \varkappa = 1.0$$

$R = 1.0$			$R = 10.0$		
τ	прибл. реш.	аналит. реш.	τ	прибл. реш.	аналит. реш.
1.0	0.0	0.0	10.0	0.0	0.0
2.0	0.0156	0.0156	11.0	0.0028	0.0028
3.0	0.1253	0.1250	12.0	0.0228	0.0227
4.0	0.3597	0.3593	13.0	0.0654	0.0653
5.0	0.4983	0.5	14.0	0.0906	0.0909
6.0	0.3597	0.3593	15.0	0.0654	0.0653
7.0	0.1260	0.1250	16.0	0.0229	0.0227
8.0	0.0141	0.0156	17.0	0.0026	0.0028
9.0	0.0021	0.0	18.0	0.0004	0.0
10.0	-0.0006	0.0	19.0	-0.0001	0.0
11.0	-0.0045	0.0	20.0	-0.0008	0.0
12.0	0.0047	0.0	21.0	0.0009	0.0

Табл.2 /продолжение/

$$d = 4.0, \quad \alpha = 2.0$$

$R = 1.0$			$R = 10.0$		
T	прибл. реш.	аналит. реш.	T	прибл. реш.	аналит. реш.
1.0	0.0	0.0	10.0	0.0	0.0
1.5	0.0156	0.0156	10.5	0.0028	0.0028
2.0	0.1256	0.1250	11.0	0.0228	0.0227
2.5	0.3600	0.3593	11.5	0.0654	0.0653
3.0	0.4980	0.5	12.0	0.0905	0.0909
3.5	0.3592	0.3593	12.5	0.0653	0.0653
4.0	0.1282	0.1250	13.0	0.0233	0.0227
4.5	0.0105	0.0156	13.5	0.0019	0.0028
5.0	0.0013	0.0	14.0	0.0002	0.0
5.5	0.0130	0.0	14.5	0.0023	0.0
6.0	-0.0180	0.0	15.0	-0.0033	0.0
6.5	-0.0230	0.0	15.0	-0.0012	0.0

Табл.3. Максимальные отклонения приближенного решения от аналитического /задача I/.

$$d = 8.0, \quad \alpha = 1.0$$

R	0.01	0.1	1.0	10.0
ϵ	0.0093	0.0086	0.0047	0.00086

$$d=4,0, \quad \alpha = 2.0$$

R	0.01	0.1	1.0	10.0
ϵ	0.051	0.043	0.023	0.0042

собой левую половину B -сплайна единичной амплитуды и длительности 4. При $t \geq 2$ граничная функция тождественно равна единице (рис.2). Решение этой задачи сопоставляется с аналитическим решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа с той же граничной поверхностью, и граничной функцией, которая тождественно равна единице. Таким образом, имеется возможность наблюдать процесс выхода решения на стационарный режим. Погрешность удовлетворения граничному условию контролировалась на временном интервале $[0,6]$ и при $\chi = 2$ составляла 5,4%. Сравнение приближенного решения с аналитическим решением стационарной задачи приводится в табл.4 и 5.

3. Рассмотрена также задача определения возмущенного поля при взаимодействии сферического импульса с акустически мягкими разомкнутыми оболочками (рис.3). Временной профиль граничного финитного импульса представляет собой B -сплайн длительности 8. Поскольку суммарный импульс на акустически мягкой граничной поверхности равен 0, то граничное условие для задачи о возмущенном поле будет равно граничному импульсу с противоположным знаком.

Погрешность удовлетворения граничному условию контролировалась на временном интервале $[0,12]$ и при $\chi = 1$ составляла 1.4% в случае а) и 3.3% в случае б). Так как задача не является тестовой, то производилось сравнение решений, полученных с помощью рассматриваемого метода, а также пошагового метода. Оно проводится в § 3.5, после описания пошагового метода.

В процессе проектирования и эксплуатации программы для решения осесимметричной задачи вскрылись некоторые неудобства метода преобразований Чебышева-Лагерра. Так многократное использование

Табл.4. Сравнение приближенного решения с аналитическим /задача 2/.

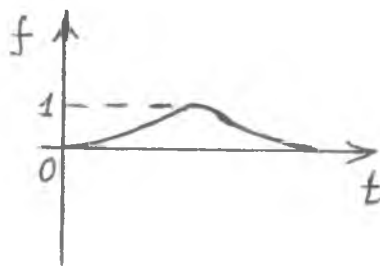
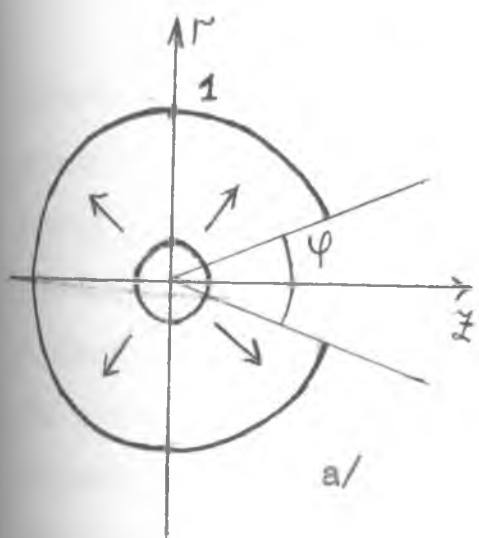
$r = 0.0, z = 0.1$			$r = 0.0, z = 1.0$		
r	прибл.реш.	аналит.реш.	r	прибл.реш.	аналит.реш.
2.6	0.970	0.936	3.5	0.513	0.5
3.1	0.923	0.936	4.0	0.490	0.5
3.6	0.939	0.936	4.5	0.512	0.5
4.1	0.942	0.936	5.0	0.507	0.5
4.6	0.928	0.936	5.5	0.501	0.5
5.1	0.941	0.936	6.0	0.514	0.5
5.6	0.953	0.936	6.5	0.515	0.5
6.1	0.928	0.936	7.0	0.495	0.5

$r = 1.0, z = 0.1$			$r = 1.0, z = 1.0$		
r	прибл.реш.	аналит.реш.	r	прибл.реш.	аналит.реш.
2.6	0.844	0.8	3.5	0.459	0.424
3.1	0.832	0.8	4.0	0.428	0.424
3.6	0.829	0.8	4.5	0.430	0.424
4.1	0.827	0.8	5.0	0.434	0.424
4.6	0.823	0.8	5.5	0.429	0.424
5.1	0.828	0.8	6.0	0.433	0.424
5.6	0.834	0.8	6.5	0.438	0.424
6.1	0.825	0.8	7.0	0.430	0.424

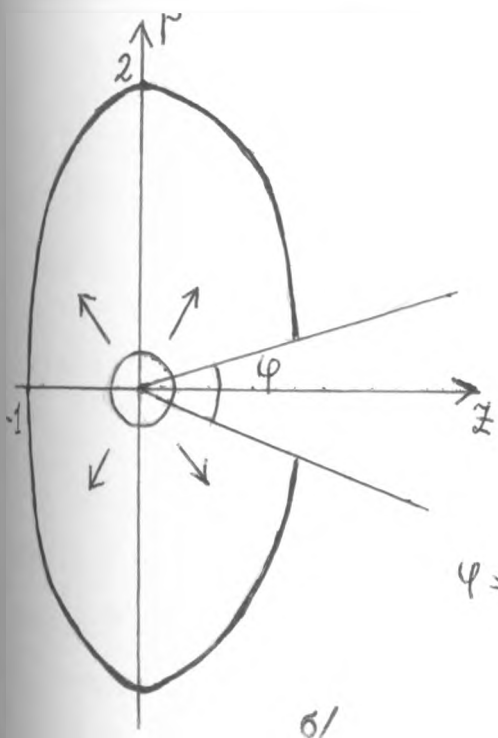
r, z - координаты точки наблюдения

Табл.5. Максимальные отклонения приближенного решения от аналитического /задача 2/.

r, z	0.0 ; 0.1	0.0 ; 1.0	1.0 ; 0.1	1.0 ; 1.0
ϵ	0.034	0.015	0.044	0.035



$$\varphi = \pi/4$$



$$\varphi = \pi/4$$

Рис. 3. Меридианное сечение граничной геометрии третьей задачи и временной профиль граничного условия.

полиномов Чебышева-Лагерра загромождает алгоритм вычисления правых частей СЛАУ и построения плотности ИУ. Самым существенным фактором является высокий порядок используемых полиномов для удовлетворительной аппроксимации граничных функций и решения задачи в целом. Это приводит к значительным затратам машинного времени ЭВМ типа ЕС-1045 даже при решении сравнительно простых задач. Поскольку пошаговый метод оказался намного эффективнее (см. § 3.5), то реализация метода преобразований для более громоздкого пространственного случая осуществлена не была.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ПОШАГОВЫМ МЕТОДОМ

В данной главе рассматриваются ИУ, которые эквивалентны исходной смешанной задаче как в случае двух, так и в случае трех пространственных переменных. В случае трех пространственных переменных плотность ИУ ищется в том же классе функций, что и в главе второй. В случае двух пространственных переменных плотность ищется в классе функций, устанавливаемом теоремой 3 (§ I.3)

§ 3.1. Численное решение нестационарного интегрального уравнения в случае двух пространственных переменных.

Рассмотрим плоскую смешанную задачу Дирихле для волнового уравнения (§ I.1). Согласно теореме I она эквивалентна следующему нестационарному ИУ

$$\int_0^t \int_L q(y, \tau) \frac{\theta(t-\tau-r_{xy}) dL_y}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} = f(x, t) \quad x \in L, \quad t \geq 0, \quad (I)$$
$$f \in C_{\omega, \delta}^{1+\mu}(\bar{L}) \cdot C^1[0, \infty),$$

где $q(y, \tau)$ — неизвестная плотность, для которой выполняется условие $q(y, 0) = 0$.

Пусть приближенное решение ИУ ищется на временном интервале $[0, T]$. Покроем этот интервал равномерной сеткой

$$\omega_T = \{t_k \mid t_k = (k-1)h_t, \quad k = \overline{1, n_t+1}\} \quad h_t = T/n_t.$$

Введем приближенное представление функции $q(y, t)$ по переменной t с помощью кусочно-линейных функций, которые образуют предельно плотную систему в пространстве $C[0, T]$

$$q(y, t) = \sum_{\sigma=0,1} Q^{k+\sigma}(y) \phi_{t,k}^{\sigma}(t) \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad (2)$$

где

$$\phi_{t,k}^{\sigma}(t) = \begin{cases} \frac{t_{k+1} - t}{h_t} & \sigma = 0, \\ \frac{t - t_k}{h_t} & \sigma = 1, \end{cases} \quad t \in [t_k, t_{k+1}],$$

$Q^k(y)$ - значение функции $q(y, t)$ в точке $t = t_k$.

Требую удовлетворения уравнения (I) в узлах t_k , $k=2, n_t+1$ сетки ω_T и учитывая, что $q(y, 0) = 0$, а значит $Q^1(y) = 0$, получаем последовательность стационарных ИУ

$$\int_L Q^2(y) dL_y \int_0^{t_2} \phi_{t,1}^1(\tau) \frac{\theta(t_2 - \tau - r_{xy}) d\tau}{[(t_2 - \tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} = f(x, t_2),$$

$$\int_L Q^{n+1}(y) dL_y \int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi_{t,n}^1(\tau) \frac{\theta(t_{n+1} - \tau - r_{xy})}{[(t_{n+1} - \tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} = f(x, t_{n+1}) - \quad (3)$$

$$- \sum_{m=2}^n \sum_{\sigma=0,1} \int_L Q^m(y) dL_y \int_{t_{m-\sigma}}^{t_{m-\sigma+1}} \phi_{t,m-\sigma}^{\sigma}(\tau) \frac{\theta(t_{n+1} - \tau - r_{xy}) d\tau}{[(t_{n+1} - \tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}},$$

$n = \overline{2, n_t}$

Внутренние интегралы в уравнениях (3) нетрудно вычислить аналитически

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi_{t,n}^1(\tau) \frac{\theta(t_{n+1}-\tau-r_{xy}) d\tau}{[(t_{n+1}-\tau)^2-r_{xy}^2]^{1/2}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\tau-t_n}{h\tau} \frac{\theta(t_{n+1}-\tau-r_{xy}) d\tau}{[(t_{n+1}-\tau)^2-r_{xy}^2]^{1/2}} =$$

$$= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{h\tau-t}{h\tau} \frac{\theta(t-r_{xy}) dt}{[t^2-r_{xy}^2]^{1/2}} = \theta(h\tau-r_{xy}) \left\{ \ln \left| \frac{h\tau}{r_{xy}} + \sqrt{\frac{h^2\tau^2}{r_{xy}^2} - 1} \right| - \sqrt{1 - \frac{r_{xy}^2}{h^2\tau^2}} \right\}$$

$$\int_{t_m}^{t_{m+1}} \phi_{t,m}^0(\tau) \frac{\theta(t_{n+1}-\tau-r_{xy}) d\tau}{[(t_{n+1}-\tau)^2-r_{xy}^2]^{1/2}} = \int_{t_m}^{t_{m+1}} \frac{t_{m+1}-\tau}{h\tau} \frac{\theta(t_{n+1}-\tau-r_{xy})}{[(t_{n+1}-\tau)^2-r_{xy}^2]^{1/2}} =$$

$$= - \int_{t_{n+1}-t_m}^{t_{n+1}-t_{m+1}} \frac{t_{m+1}-t_{n+1}+t}{h\tau} \frac{\theta(t-r_{xy}) dt}{[t^2-r_{xy}^2]^{1/2}} =$$

$$= \left\{ \theta(t-r_{xy}) [(n-m) \ln \left| \frac{t}{r_{xy}} + \sqrt{\frac{t^2}{r_{xy}^2} - 1} \right| - \frac{(t^2-r_{xy}^2)^{1/2}}{h\tau}] \right\} \Big|_{t_{n+1}-t_{m+1}}^{t_{n+1}-t_m}$$

$$\int_{t_{m-1}}^{t_m} \phi_{t,m-1}^1(\tau) \frac{\theta(t_{n+1}-\tau-r_{xy}) d\tau}{[(t_{n+1}-\tau)^2-r_{xy}^2]^{1/2}} = \int_{t_{m-1}}^{t_m} \frac{\tau-t_{m-1}}{h\tau} \frac{\theta(t_{n+1}-\tau-r_{xy}) d\tau}{[(t_{n+1}-\tau)^2-r_{xy}^2]^{1/2}} =$$

$$= \left\{ \theta(t-r_{xy}) [(n+2-m) \ln \left| \frac{t}{r_{xy}} + \sqrt{\frac{t^2}{r_{xy}^2} - 1} \right| - \frac{(t^2-r_{xy}^2)^{1/2}}{h\tau}] \right\} \Big|_{t_{n+1}-t_m}^{t_{n+1}-t_{m-1}}$$

Подставляя полученные выражения в уравнения (3), преобразуем их к виду

$$\int_L Q^2(y) G(h_\tau, x, y) dh_y = f(x, t_2) ,$$

$$\int_L Q^{n+1}(y) G(h_\tau, x, y) dh_y = f(x, t_{n+1}) - \sum_{m=2}^n \sum_{k=0,1} \int_L Q^m(y) B_{n+1,m}^{(k)}(x, y) dh_y , \quad n=2, n_4, \quad (4)$$

где

$$G(h_\tau, x, y) = \theta(h_\tau - r_{xy}) \left\{ \ln \left| \frac{h_\tau}{r_{xy}} + \sqrt{\frac{h_\tau^2}{r_{xy}^2} - 1} \right| - \sqrt{1 - \frac{r_{xy}^2}{h_\tau^2}} \right\} ,$$

$$B_{n+1,m}^{(k)}(x, y) = (-1)^{k+1} [C_{n+1}^{(k)}(t_{m+1-k}, x, y) - C_{n+1}^{(k)}(t_{m-k}, x, y)] ,$$

$$C_{n+1}^{(k)}(t_m, x, y) = \theta(t_{n+1} - t_m - r_{xy}) \left[(n-m+2) \ln \left| \frac{t_{n+1} - t_m}{r_{xy}} + \sqrt{\frac{(t_{n+1} - t_m)^2}{r_{xy}^2} - 1} \right| - \sqrt{(n+1-m)^2 - \frac{r_{xy}^2}{h_\tau^2}} \right] .$$

Таким образом, получена последовательность стационарных ИУ относительно неизвестных функций $Q^m(y)$. Для численного решения этих уравнений необходима их дискретизация по пространственной переменной.

В пространстве R^2 введем некоторую прямоугольную декартовую систему координат (x_1, x_2) . Пусть граничный контур L задается параметрически следующим представлением

$$L: \begin{cases} x_1 = x_1(d) , \\ x_2 = x_2(d) , \end{cases} \quad u_1 \leq d \leq u_2 , \quad (5)$$

причем $x_1(\alpha)$, $x_2(\alpha)$ - дважды непрерывно-дифференцируемые функции. На отрезке $[u_1, u_2]$ введем сетку W_α (§ 2.2) и определим следующую кусочно-линейную аппроксимацию для функций $Q^m(y)$:

$$Q^m(y(x_1(\alpha), x_2(\alpha))) \approx \sum_{s=0,1} \Phi_j^s(\alpha) Q_{j+s}^m \quad \alpha \in [\alpha_j, \alpha_{j+1}], \quad (6)$$

где Q_j^m - значение функции $Q^m(y(x_1(\alpha), x_2(\alpha)))$ в точке $\alpha = \alpha_j$, а аппроксимирующие функции $\Phi_j^s(\alpha)$ определяются формулой (2.13). Требуем удовлетворения каждого ИУ из последовательности (4) на множестве точек коллокации $\bar{x}_i = x(x_1(\bar{\alpha}_i), x_2(\bar{\alpha}_i))$, когда параметры $\bar{\alpha}_i$ задаются соотношением (2.14). В результате получаем последовательность СЛАУ относительно коэффициентов Q_j^m :

$$\sum_{s=0,1} \sum_{j=1}^{n_\alpha} A_{j,s}^i(h_\tau) Q_{j+s}^2 = \bar{f}(\bar{\alpha}_i, t_2) \quad i = \overline{1, n_\alpha + 1},$$

$$\sum_{s=0,1} \sum_{j=1}^{n_\alpha} A_{j,s}^i(h_\tau) Q_{j+s}^{n+1} = \bar{f}(\bar{\alpha}_i, t_{n+1}) - \sum_{m=2}^n \sum_{s=0,1} \sum_{j=1}^{n_\alpha} D_{j,s}^i(m, n+1),$$

$$i = \overline{1, n_\alpha + 1}, \quad h = \overline{2, n_t},$$

где
$$A_{j,s}^i(h_\tau) = \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+s}} \{ \mathcal{J}(\alpha) \Phi_j^s(\alpha) \bar{G}(h_\tau, \alpha, \bar{\alpha}_i) \} d\alpha,$$

$$D_{j,s}^i(m, n+1) = \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} \{ \mathcal{J}(\alpha) \Phi_j^s(\alpha) \sum_{k=0,1} \bar{B}_{n+1, in}^k(\alpha, \bar{\alpha}_i) \} d\alpha,$$

$$\mathcal{J}(\alpha) = [(x_1'(\alpha))^2 + (x_2'(\alpha))^2]^{1/2},$$

$$\bar{G}(h_\tau, \alpha, \bar{\alpha}_i) = G(h_\tau, x(x_1(\bar{\alpha}_i), x_2(\bar{\alpha}_i)), y(x_1(\alpha), x_2(\alpha))) ,$$

$$\bar{B}_{n+1, m}^k(\alpha, \bar{\alpha}_i) = B_{n+1, m}^k(x(x_1(\bar{\alpha}_i), x_2(\bar{\alpha}_i)), y(x_1(\alpha), x_2(\alpha))) ,$$

$$\bar{f}(\bar{\alpha}_i, t_m) = f(x(x_1(\bar{\alpha}_i), x_2(\bar{\alpha}_i)), t_m)$$

Нетрудно заметить, что подынтегральные функции, включающие множители $G(h_\tau, \alpha, \bar{\alpha}_i)$ или $\bar{B}_{n+1, m}^k(\alpha, \bar{\alpha}_i)$, имеют особенности при $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}_i$ вида

$$\ln |(c + \sqrt{c^2 - r_{xy}^2}) / r_{xy}| ,$$

где c может равняться h_τ , $t_{n+1} - t_m$ или $t_{n+1} - t_{m-1}$ ($n \geq m$).

Для вычисления таких несобственных интегралов применяем метод Канторовича. Поскольку в окрестности точки $\alpha = \bar{\alpha}_i$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \ln |(c + \sqrt{c^2 - r_{xy}^2}) / r_{xy}| &= -\ln \left| \frac{J(\bar{\alpha}_i) |\alpha - \bar{\alpha}_i| + O(\alpha - \bar{\alpha}_i)^2}{2c + O(\alpha - \bar{\alpha}_i)^2} \right| = \\ &= -\ln \left| \frac{J(\bar{\alpha}_i) |\alpha - \bar{\alpha}_i|}{2c} \right| + O(\alpha - \bar{\alpha}_i) \end{aligned}$$

в качестве вспомогательной функции метода Канторовича используем главный член этого разложения.

В результате применения метода Канторовича получим окончательный вид последовательности СЛАУ, подготовленный для программной реализации на ЭВМ. После определения коэффициентов аппроксимации плотности $g(y, \tau)$, построение приближенного решения исходной задачи, а также проверка удовлетворения им гра-

ничного условия, проводится аналогично предыдущим подходам.

§ 3.2. Сведение нестационарного интегрального уравнения к последовательности стационарных в случае трех пространственных переменных.

Пусть решение нестационарного ИУ

$$\iint_S q(y, t-r_{xy}) \theta(t-r_{xy}) r_{xy}^{-1} dS_y = f(x, t) \quad x \in S, t \geq 0 \quad (7)$$

ищется на некотором конечном временном интервале $[0, T]$.

Покрываем этот интервал равномерной сеткой ω_T (§ 3.1) и вводим приближенное представление неизвестной функции по формуле (2). Введем семейство временных узлов коллокации \bar{t}_k :

$$\bar{t}_k = t_{k-1} + \frac{1+\sigma}{2} h_t \quad k = \overline{2, n_t+1}, \sigma \in (-1, 1],$$

где σ - параметр семейства временных узлов,

t_k - узлы сетки ω_T .

Введем также вспомогательные разбиения граничной поверхности

$$D_1(x) = \{y \mid y \in S; \bar{t}_{n+1} - t_n = \frac{1+\sigma}{2} h_t \geq r_{xy}\} \quad x \in S,$$

$$D_2(x) = S \setminus D_1(x).$$

Подобласть $D_1(x)$ включает те точки поверхности S , для которых запаздывающий аргумент $\bar{t}_{n+1} - r_{xy}$ принадлежит временному промежутку $[t_n, t_{n+1}]$.

Требую удовлетворения ИУ (7) на совокупности временных узлов коллокации, получаем следующую последовательность стационарных ИУ

$$\iint_{D_1(x)} q^2(y) \phi_{t,1}^1(\bar{t}_2 - r_{xy}) \theta(\bar{t}_2 - r_{xy}) r_{xy}^{-1} dS_y = f(x, \bar{t}_2),$$

$$\iint_{\mathcal{D}_1(x)} Q^{n+1}(y) \Phi_{t,n}^1(\bar{t}_{n+1} - r_{xy}) \theta(\bar{t}_{n+1} - r_{xy}) r_{xy}^{-1} dS_y = f(x, \bar{t}_{n+1}) -$$

$$- \iint_{\mathcal{D}_1(x)} Q^n(y) \Phi_{t,n}^0(\bar{t}_{n+1} - r_{xy}) \theta(\bar{t}_{n+1} - r_{xy}) r_{xy}^{-1} dS_y - \quad (8)$$

$$- \sum_{g=0,1} \iint_{\mathcal{D}_2(x)} Q^{k+g}(y) \Phi_{t,k}^g(\bar{t}_{n+1} - r_{xy}) \theta(\bar{t}_{n+1} - r_{xy}) r_{xy}^{-1} dS_y, \quad n = \overline{2, n_t}$$

где $Q^k(y)$ - значение неизвестной плотности $q(y, t)$ в точке $t = t_k$,

$$k = \left[\frac{\bar{t}_{n+1} - r_{xy}}{h_t} \right] = \left[\frac{t_n + (1+\delta)h_t/2 - r_{xy}}{h_t} \right] = n-1 + \left[\frac{1+\delta}{2} - r_{xy}/h_t \right],$$

причем здесь символ $[\cdot]$ обозначает целую часть от числа.

Таким образом, применяя пошаговый алгоритм по временной переменной к нестационарному ИУ (7), приходим к последовательности стационарных ИУ (8) относительно неизвестных функций

Во всех рассмотренных выше случаях среду, в которую помещаются граничные объекты, предполагается неограниченной. Такая постановка задач не позволяет учитывать влияние поверхности и дна океана на процесс распространения звуковых импульсов. Снимем это ограничение.

Рассмотрим исходную задачу в бесконечном слое. Пусть на верхней поверхности слоя решение исходной задачи должно равняться нулю, а на нижней поверхности слоя должна равняться нулю нормальная производная этого решения. Таким образом, верхняя плоскость слоя моделирует поверхность океана с условием абсолютного на ней рассеяния, а нижняя плоскость слоя моделиру-

ет дно океана с условием абсолютного отражения на нем. Чтобы не строить волновых потенциалов на неограниченных плоскостях, воспользуемся функцией Грина для волнового уравнения в указанном слое.

В пространстве R^3 введем прямоугольную систему координат (x_1, x_2, x_3) . Пусть нижняя плоскость слоя задается соотношением $x_3 = 0$, а верхняя - соотношением $x_3 = d$ (рис.4). Функцию Грина для слоя строим с использованием метода отражений. Получаем представление следующего вида

$$G(x, y, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{|n|} \left[\frac{\delta(t - R_{2n}^+(x, y))}{R_{2n}^+(x, y)} + \frac{\delta(t - R_{2n}^-(x, y))}{R_{2n}^-(x, y)} \right],$$

где

$$R_{2n}^+(x, y) = \sqrt{\rho^2(x, y) + (x_3 - 2nd - y_3)^2},$$

$$R_{2n}^-(x, y) = \sqrt{\rho^2(x, y) + (2nd - x_3 - y_3)^2},$$

$$\rho^2(x, y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2.$$

Эта функция является фундаментальным решением волнового уравнения, а также удовлетворяет условиям на плоскостях слоя при $x_3 = 0$ или $x_3 = d$. С целью упрощения практического использования, определим следующее приближенное представление функции Грина

$$G_N(x, y, t) = \sum_{n=-N+1}^N (-1)^{|n|} \left[\frac{\delta(t - R_{2n}^+(x, y))}{R_{2n}^+(x, y)} + \frac{\delta(t - R_{2n}^-(x, y))}{R_{2n}^-(x, y)} \right] \quad (9)$$

Это приближенное представление точно удовлетворяет условию на плоскости $x_3 = d$, а на плоскости $x_3 = 0$ условие удовлетворяется с погрешностью. Поэтому следующее интегральное представление

продолжение

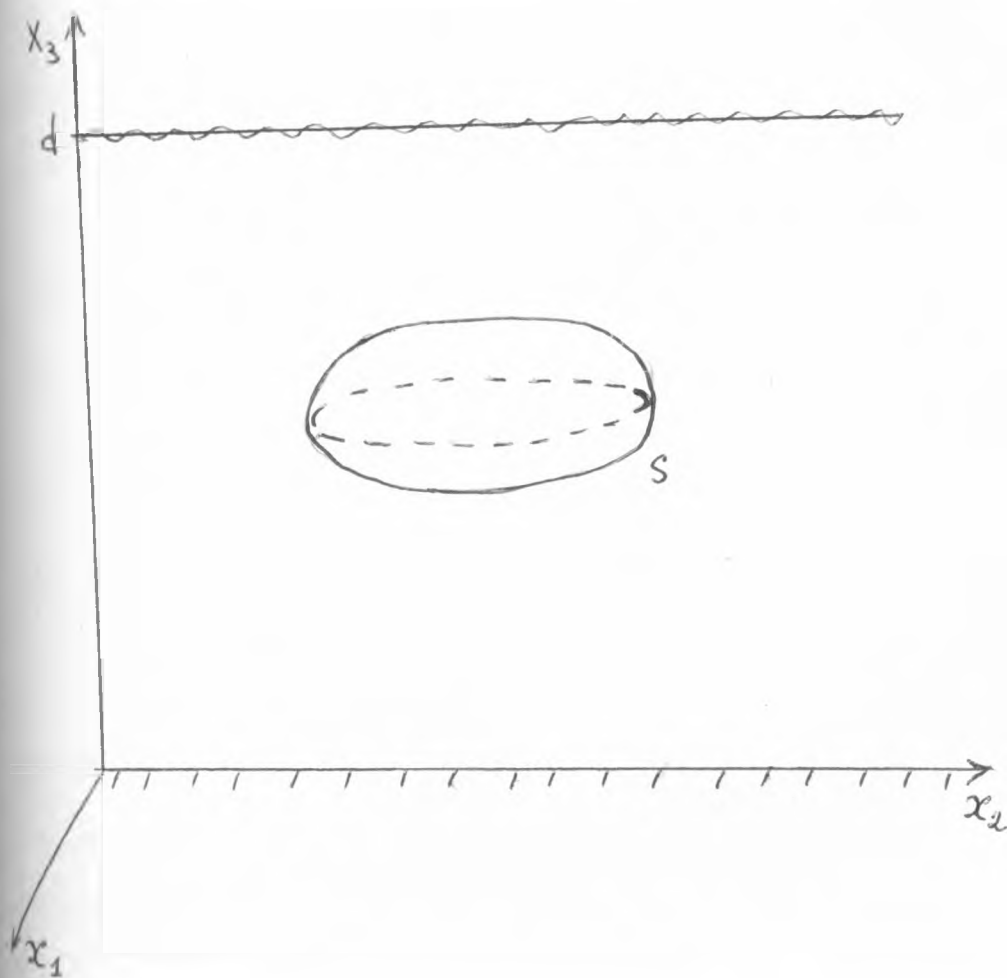


Рис. 4. Пример конфигурации граничных поверхностей задачи в ограниченном пространстве.

$$u(x, t) = \sum_{n=-N+1}^N (-1)^{|n|} \iint_S \left[\frac{q(y, t - R_{2n}^+(x, y))}{R_{2n}^+(x, y)} + \frac{q(y, t - R_{2n}^-(x, y))}{R_{2n}^-(x, y)} \right] dS_y$$

удовлетворяет волновому уравнению и условию на верхней плоскости, а условию на нижней плоскости удовлетворяет с погрешностью величины

$$\frac{1}{Nd} \iint_S q_T^*(y) dS, \quad \text{где} \quad q_T^*(y) = \sup_{0 \leq t \leq T} |q(y, t)|$$

Требую, чтобы представление (9) удовлетворяло граничному условию на поверхности S , приходим к следующему ИУ:

$$\sum_{n=-N+1}^N (-1)^n \iint_S \left[\frac{q(y, t - R_{2n}^+(x, y))}{R_{2n}^+(x, y)} + \frac{q(y, t - R_{2n}^-(x, y))}{R_{2n}^-(x, y)} \right] dS_y = f(x, t), \quad (10)$$

$$x \in S.$$

Вид этого ИУ во многом схож с видом ИУ (7). Оба ИУ имеют в подынтегральных функциях при $y \rightarrow x$ особенности одинакового порядка. Поэтому закономерно, что к ИУ (10) применим такой же пошаговый метод, как и к ИУ (7).

§ 3.3. Численное решение последовательности стационарных интегральных уравнений пошагового метода в осесимметричном случае.

Учет осевой симметрии производим аналогично § 2.2. При этом, однако, допускаем, что образующая граничной поверхности состоит из конечного числа гладких участков, каждый из которых задается параметрически в цилиндрической системе координат (r, z, ψ) . Если задача рассматривается в слое, то ось

должна совпадать с осью X_3 исходной системы координат. Пусть гладкие участки образующей задаются следующими параметрическими представлениями

$$L_p : \begin{cases} r = r_p(\alpha), \\ z = z_p(\alpha), \\ \varphi = 0, \end{cases} \quad \begin{aligned} & u_1^p \leq \alpha \leq u_2^p, \\ & p = \overline{1, n_p}, \end{aligned}$$

где функции $r_p(\alpha), z_p(\alpha)$ - дважды непрерывно-дифференцируемые. Аналогично § 2.2 на каждом интервале $[u_1^p, u_2^p]$ строим сетку

$$w_{\alpha, p} = \{ \alpha_{i, p} \mid \alpha_{i, p} = u_1^p + (i-1)h_{\alpha p}, i = \overline{1, n_{\alpha p} + 1} \}, \quad h_{\alpha p} = (u_2^p - u_1^p) / n_{\alpha p},$$

и сетку w_φ на промежутке $[0, \pi]$, а также вводим аппроксимацию для функций $\bar{Q}_{(\alpha)}^{m, p} = Q^m(r_p(\alpha), z_p(\alpha), 0)$

$$\bar{Q}^m(\alpha) = \sum_{s=0,1} \Phi_{j,p}^s(\alpha) Q_{j+s}^{m,p} \quad \alpha \in [\alpha_{j,p}, \alpha_{j+1,p}],$$

где

$$\Phi_{j,p}^s(\alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha_{j+1,p} - \alpha}{h_{\alpha p}} & s=0, \\ \frac{\alpha - \alpha_{j,p}}{h_{\alpha p}} & s=1, \end{cases}$$

$Q_j^{m,p}$ - значение функции $\bar{Q}^{m,p}(\alpha)$ в узле $\alpha_{j,p}$.

Аналогично § 2.2 выбираем и параметры пространственных точек коллокации

$$\bar{\alpha}_{i,q} = \begin{cases} \alpha_{i,q} \in w_{\alpha q} & i \neq 1, i \neq n_{\alpha q} + 1, \\ u_1^q + \delta h_{\alpha q} & i = 1, \\ u_2^q - \delta h_{\alpha q} & i = n_{\alpha q} + 1. \end{cases}$$

Применяя метод коллокации к последовательности ИУ (8'), а также используя введенные ранее обозначения, получаем последовательность СЛАУ относительно коэффициентов $Q_j^{m,p}$:

$$\sum_{p=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{n_{d,p}} \sum_{s=0,1} A_{p,j,s}^{q,i} Q_{j+s}^{2,p} = \bar{f}(\bar{\alpha}_{iq}, \bar{t}_2) \quad q = \overline{1, n_p}, \quad i = \overline{1, n_{d,q}+1},$$

$$\sum_{p=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{n_{d,p}} \sum_{s=0,1} A_{p,j,s}^{q,i} Q_{j+s}^{n+1,p} = \bar{f}(\bar{\alpha}_{iq}, \bar{t}_{n+1}) - \sum_{p=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{n_{d,p}} \sum_{s=0,1} A_{p,j,s}^{q,i} (n, 0) \times$$

$$\times Q_{j+s}^{n,p} - \sum_{q=0,1} \sum_{p=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{n_{d,p}} \sum_{s=0,1} B_{p,j,s}^{q,i} (n, q) \quad n = 2, n_t, \quad q = \overline{1, n_p}, \quad i = \overline{1, n_{d,q}+1},$$

где

$$A_{p,j,s}^{q,i} (n, m) = \sum_{k=1}^{n_\psi} \int_{\alpha_{j,p}}^{\alpha_{j+1,p}} \mathcal{J}_p(\alpha) \phi_{j,p}^s(\alpha) d\alpha \int_{\psi_k}^{\psi_{k+1}} \phi_{t,n}^m(\bar{\tau}_p^{n+1}(\alpha, \bar{\alpha}_{iq}, \psi)) \times$$

$$\times \Theta(\bar{\tau}_p^{n+1}(\alpha, \bar{\alpha}_{iq}, \psi)) R_p^{-1}(\alpha, \bar{\alpha}_{iq}, \psi) \mathcal{X}_p^1(\alpha, \bar{\alpha}_{ip}, \psi) d\psi,$$

$$B_{p,j,s}^{q,i} (n, q) = \sum_{k=1}^{n_\psi} \int_{\alpha_{j,p}}^{\alpha_{j+1,p}} \mathcal{J}_p(\alpha) \phi_{j,p}^s(\alpha) d\alpha \int_{\psi_k}^{\psi_{k+1}} Q_{j+s}^{k+q,p} \phi_{t,k}^q(\bar{\tau}_p^{n+1}(\alpha, \bar{\alpha}_{iq}, \psi)) \times$$

$$\times \Theta(\bar{\tau}_p^{n+1}(\alpha, \bar{\alpha}_{iq}, \psi)) R_p^{-1}(\alpha, \bar{\alpha}_{iq}, \psi) \mathcal{X}_p^2(\alpha, \bar{\alpha}_{iq}, \psi) d\psi,$$

$$k = n - 1 + \left[\frac{1+\delta}{2} - R_p(\alpha, \bar{\alpha}_{iq}, \psi) / h_t \right],$$

где

$$J_p(\alpha) = r_p(\alpha) [r_p(\alpha)^2 + z_p'(\alpha)^2]^{1/2},$$

$$\bar{t}_p^n(\alpha, \alpha_{iq}, \varphi) = \bar{t}_n - R_p(\alpha, \alpha_{iq}, \varphi),$$

$$R_p(\alpha, \alpha_{iq}, \varphi) = [r_q(\alpha_{iq})^2 + r_p(\alpha)^2 + (z_q(\alpha_{iq}) - z_p(\alpha))^2 - 2r_q(\alpha_{iq})r_p(\alpha)\cos\varphi]^{1/2},$$

$$x_p^i(\alpha, \alpha_{iq}, \varphi) = \begin{cases} 0 & y(r_p(\alpha), z_p(\alpha), \varphi) \in \mathcal{D}_i(x(r_q(\alpha_{iq}), z_q(\alpha_{iq}), 0)), \\ 1 & y(r_p(\alpha), z_p(\alpha), \varphi) \in \mathcal{D}_i(x(r_q(\alpha_{iq}), z_q(\alpha_{iq}), 0)), \end{cases}$$

$$f(\alpha_{iq}, \bar{t}_n) = f[x(r_q(\alpha_{iq}), z_q(\alpha_{iq}), 0), \bar{t}_n].$$

К несобственным интегралам, определяющим коэффициенты полученной СЛАУ, аналогично § 2.2 применяем метод Канторовича.

Поскольку при $\alpha \rightarrow \alpha_{iq}$ справедливо представление

$$R_q(\alpha, \alpha_{iq}, \varphi) = [r_q(\alpha_{iq})\varphi^2 + (r_q'(\alpha_{iq})^2 + z_q'(\alpha_{iq})^2)(\alpha - \alpha_{iq})^2 + O(\varphi^2(\alpha - \alpha_{iq})) + O(\alpha - \alpha_{iq})^3]^{1/2}$$

в качестве вспомогательной функции в методе Канторовича используем главный член этого разложения.

§ 3.4. Численное решение последовательности стационарных интегральных уравнений пошагового метода в существенно-пространственном случае.

Считаем, что поверхность S состоит из конечного числа гладких фрагментов S_p : $S = \bigcup_{p=1}^{n_p} S_p$. Пусть каждый из фрагментов задается параметрически

$$S_p : \begin{cases} x_1 = x_{1p}(\alpha, \beta), \\ x_2 = x_{2p}(\alpha, \beta), \\ x_3 = x_{3p}(\alpha, \beta), \end{cases} \quad \begin{matrix} u_{1p} \leq \alpha \leq u_{2p}, \\ v_{1p} \leq \beta \leq v_{2p}, \end{matrix}$$

где $x_{ip}(\alpha, \beta)$ — дважды непрерывно-дифференцируемая функция.

На каждом прямоугольнике $D_p = [u_{1p}, u_{2p}] \times [v_{1p}, v_{2p}]$

вводим сетку

$$W_{\alpha, \beta}^p = \{(\alpha_{ip}, \beta_{jp}) \mid \alpha_{ip} \in W_{\alpha p}, \beta_{jp} \in W_{\beta p}\},$$

где

$$W_{\alpha p} = \{\alpha_{ip} \mid \alpha_{ip} = u_{1p} + (i-1)h_{\alpha p}, i = \overline{1, n_{\alpha p} + 1}\}, h_{\alpha p} = (u_{2p} - u_{1p})/n_{\alpha p},$$

$$W_{\beta p} = \{\beta_{jp} \mid \beta_{jp} = v_{1p} + (j-1)h_{\beta p}, j = \overline{1, n_{\beta p} + 1}\}, h_{\beta p} = (v_{2p} - v_{1p})/n_{\beta p}.$$

К функциям $\bar{Q}^{m,p}(\alpha, \beta) = Q(x_{1p}(\alpha, \beta), x_{2p}(\alpha, \beta), x_{3p}(\alpha, \beta))$ применяем кусочно-линейную аппроксимацию по каждой из переменных

$$\bar{Q}^{m,p}(\alpha, \beta) = \sum_{s=0,1} \sum_{\sigma=0,1} Q_{\eta+s, \nu+\sigma}^{m,p} \Phi_{\alpha, \eta}^{s,p}(\alpha) \Phi_{\beta, \nu}^{\sigma,p}(\beta),$$

$$\alpha \in [\alpha_{2,p}, \alpha_{2+1,p}], \quad \beta \in [\beta_{\nu,p}, \beta_{\nu+1,p}],$$

$$\Phi_{\alpha, \eta}^{s,p}(\alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha_{\eta+1,p} - \alpha}{h_{\alpha p}} & s=0, \\ \frac{\alpha - \alpha_{\eta,p}}{h_{\alpha p}} & s=1, \end{cases} \quad \alpha \in [\alpha_{2,p}, \alpha_{2+1,p}],$$

$$\phi_{\beta, \nu}^{\sigma, r}(\beta) = \begin{cases} \frac{\beta_{\nu+1, r} - \beta}{h_{\beta r}} & \sigma = 0, \\ \frac{\beta - \beta_{\nu r}}{h_{\beta r}} & \sigma = 1, \end{cases} \quad \beta \in [\beta_{\nu r}, \beta_{\nu+1, r}]$$

$Q_{\eta, \nu}^{m, r}$ - значение функции $\bar{Q}(\alpha, \beta)$ в узле $(\alpha_{\eta r}, \beta_{\nu r})$ сетки $W_{\alpha, \beta}^r$. Введем следующее семейство параметров пространственных точек коллокации

$$\bar{\alpha}_{i q} = \begin{cases} \alpha_{i q} \in W_{\alpha q} & i \neq 1, i \neq n_{\alpha q} + 1, \\ \alpha_{1 q} + \delta_{\alpha q} h_{\alpha q} & i = 1, \\ \alpha_{2 q} - \delta_{\alpha q} h_{\alpha q} & i = n_{\alpha q} + 1, \end{cases}$$

$$\bar{\beta}_{j q} = \begin{cases} \beta_{j q} \in W_{\beta q} & j \neq 1, j \neq n_{\beta q} + 1, \\ \beta_{1 q} + \delta_{\beta q} h_{\beta q} & j = 1, \\ \beta_{2 q} - \delta_{\beta q} h_{\beta q} & j = n_{\beta q} + 1, \end{cases}$$

$$0 < \delta_{\alpha q} < 1, \quad 0 < \delta_{\beta q} < 1$$

Применяя метод коллокации к последовательности ИУ (8) и используя введенные допущения, приходим к последовательности СЛАУ относительно коэффициентов $Q_{\eta, \nu}^{m, r}$:

$$\sum_{p=1}^{n_r} \sum_{\eta=1}^{n_{\alpha, p}} \sum_{\nu=1}^{n_{\beta, p}} \sum_{s=0,1} \sum_{\sigma=0,1} A_{p, \eta, \nu}^{q, i, j} (1, 1) Q_{\eta+s, \nu+\sigma}^{2, r} = \bar{f}(\bar{\alpha}_{i q}, \bar{\beta}_{j q}, \bar{t}_2),$$

$$q = \overline{1, n_r}, \quad i = \overline{1, n_{\alpha q} + 1}, \quad j = \overline{1, n_{\beta q} + 1},$$

$$\sum_{p=1}^{n_r} \sum_{\eta=1}^{n_{\alpha, p}} \sum_{\nu=1}^{n_{\beta, p}} \sum_{s=0,1} \sum_{\sigma=0,1} A_{p, \eta, \nu}^{q, i, j} (n, 1) Q_{\eta+s, \nu+\sigma}^{n+1, r} = \bar{f}(\bar{\alpha}_{i q}, \bar{\beta}_{j q}, \bar{t}_{n+1}) -$$

$$- \sum_{p=1}^{n_p} \sum_{q=1}^{n_{\alpha,p}} \sum_{v=1}^{n_{\beta,p}} \sum_{s=0,1} \sum_{\sigma=0,1} A_{p,2,v}^{q,i,j} (n,0) Q_{q+s,v+\sigma}^{n,p} -$$

$$- \sum_{q=0,1} \sum_{p=1}^{n_p} \sum_{v=1}^{n_{\beta,p}} \sum_{s=0,1} \sum_{\sigma=0,1} B_{p,2,v}^{q,i,j} (n,q),$$

$$n = \overline{2, n_t}, \quad q = \overline{1, n_p}, \quad i = \overline{1, n_{\alpha q} + 1}, \quad j = \overline{1, n_{\beta q} + 1},$$

где $A_{p,2,v}^{q,i,j} (n, m) = \int_{\alpha_{2,p}}^{\alpha_{q+1,p}} \phi_{\alpha,2}^{s,p}(\alpha) d\alpha \int_{\beta_{v,p}}^{\beta_{v+1,p}} \phi_{\beta,v}^{s,p}(\beta) J_p(\alpha, \beta) \Phi_{t,2}^m(\bar{T}_p^{n+1}(\alpha, \beta, \bar{\alpha}_{i,q}, \bar{\beta}_{j,q})) \times$

$$\times \Theta(\bar{T}_p^{n+1}(\alpha, \beta, \bar{\alpha}_{i,q}, \bar{\beta}_{j,q})) R_p^{-1}(\alpha, \beta, \bar{\alpha}_{i,q}, \bar{\beta}_{j,q}) X_p^1(\alpha, \beta, \bar{\alpha}_{i,q}, \bar{\beta}_{j,q}) d\beta,$$

$$B_{p,2,v}^{q,i,j} (n, q) = \int_{\alpha_{2,p}}^{\alpha_{q+1,p}} \phi_{\alpha,2}^{s,p}(\alpha) d\alpha \int_{\beta_{v,p}}^{\beta_{v+1,p}} \phi_{\beta,v}^{s,p}(\beta) J_p(\alpha, \beta) Q_{q+s,v+\sigma}^{k+q,p} \Phi_{t,k}^q(\bar{T}_p^{n+1}(\alpha, \beta, \bar{\alpha}_{i,q}, \bar{\beta}_{j,q})) \times$$

$$\times \Theta(\bar{T}_p^{n+1}(\alpha, \beta, \bar{\alpha}_{i,q}, \bar{\beta}_{j,q})) R_p^{-1}(\alpha, \beta, \bar{\alpha}_{i,q}, \bar{\beta}_{j,q}) X_p^2(\alpha, \beta, \bar{\alpha}_{i,q}, \bar{\beta}_{j,q}) d\beta,$$

$$J_p(\alpha, \beta) = [E_p(\alpha, \beta) G_p(\alpha, \beta) - F_p^2(\alpha, \beta)]^{1/2},$$

$$E_p(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_{i,p}}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) \right)^2, \quad F_p(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_{i,p}}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) \frac{\partial x_{i,p}}{\partial \beta}(\alpha, \beta),$$

$$G_p(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_{i,p}}{\partial \beta} \right)^2,$$

$$\bar{f}(\bar{\alpha}_{i,q}, \bar{\beta}_{j,q}, \bar{t}_{n+1}) = f(x_1(x_{i,q}(\bar{\alpha}_{i,q})), x_2(x_{i,q}(\bar{\alpha}_{i,q})), x_3(x_{i,q}(\bar{\alpha}_{i,q})), \bar{t}_{n+1}),$$

$$\chi_p^i(\alpha, \beta, \bar{\alpha}_{ip}, \bar{\beta}_{ip}) = \begin{cases} 0 & y(\chi_{1p}(\alpha, \beta), \chi_{2p}(\alpha, \beta), \chi_{3p}(\alpha, \beta)) \in \mathcal{D}_i(x(\chi_{1p}(\alpha_{ip}, \bar{\beta}_{ip}), \chi_{2p}(), \chi_{3p}())) \\ 1 & y(\chi_{1p}(\alpha, \beta), \chi_{2p}(\alpha, \beta), \chi_{3p}(\alpha, \beta)) \in \mathcal{D}_i(x(\chi_{1p}(\alpha_{ip}, \bar{\beta}_{ip}), \chi_{2p}(), \chi_{3p}())) \end{cases}$$

Применение процедуры выделения особенностей в несобственных интегралах по методу Канторовича производится аналогично § 2.3.

При построении решения пространственных задач целесообразно учитывать их симметричность относительно плоскостей $x_1 = x_1^*$, $x_2 = x_2^*$, $x_3 = x_3^*$. Пусть поверхность S и функция f обладают соответствующими симметриями. Тогда n -ое уравнение из последовательности (8) может быть записано в виде

$$\sum_{m=1}^{\delta} \lambda_m \iint_{\mathcal{D}_{1,m}^*(x)} Q^{n+1}(y) \Phi_{t,h}^i(\bar{E}_{n+1} - r_{xy}^{(m)}) \theta(\bar{E}_{n+1} - r_{xy}^{(m)}) (r_{xy}^{(m)})^{-1} dS_y = f(x, \bar{E}_{n+1}) -$$

$$- \sum_{m=1}^{\delta} \lambda_m \iint_{\mathcal{D}_{1,m}^*(x)} Q^n(y) \Phi_{t,h}^0(\bar{E}_{n+1} - r_{xy}^{(m)}) \theta(\bar{E}_{n+1} - r_{xy}^{(m)}) (r_{xy}^{(m)})^{-1} dS_y -$$

$$- \sum_{g=0,1}^{\delta} \sum_{m=1}^{\delta} \lambda_m \iint_{\mathcal{D}_{2,m}^*(x)} Q^{k+g}(y) \Phi_{t,k}^g(\bar{E}_{n+1} - r_{xy}^{(m)}) \theta(\bar{E}_{n+1} - r_{xy}^{(m)}) (r_{xy}^{(m)})^{-1} dS_y,$$

$$x \in S^*,$$

$$k = n-1 + [(1+\delta)/2 - r_{xy}^{(m)}/h_t],$$

где

$$D_{1,m}^*(x) = \{ y \in S^* \mid \frac{1+\delta}{2} h_t \geq r_{xy}^{(m)} \}, \quad D_{2,m}^*(x) = S^* \setminus D_{1,m}^*(x),$$

S^* - та часть поверхности S , которая образует S при отображениях относительно имеющихся осей симметрии задачи,

$$\Lambda_1 = 1, \quad \Lambda_2 = i_{x_1}, \quad \Lambda_3 = i_{x_2}, \quad \Lambda_4 = i_{x_3}, \quad \Lambda_5 = i_{x_1} i_{x_2},$$

$$\Lambda_6 = i_{x_1} i_{x_3}, \quad \Lambda_7 = i_{x_2} i_{x_3}, \quad \Lambda_8 = i_{x_1} i_{x_2} i_{x_3},$$

$$i_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{- если есть симметрия относительно оси } \alpha, \\ 0 & \text{- если нет симметрии} \end{cases},$$

$$r_{xy}^{(1)} = r_{xy}, \quad r_{xy}^{(2)} = \left[\sum_{i=2}^3 (x_i - y_i)^2 + (2x_1^* - y_1 - x_1)^2 \right]^{1/2},$$

$$r_{xy}^{(3)} = \left[\sum_{i=1,3} (x_i - y_i)^2 + (2x_2^* - y_2 - x_2)^2 \right]^{1/2},$$

$$r_{xy}^{(4)} = \left[\sum_{i=1,2} (x_i - y_i)^2 + (2x_3^* - y_3 - x_3)^2 \right]^{1/2},$$

$$r_{xy}^{(5)} = \left[\sum_{i=1,2} (2x_i^* - x_i - y_i)^2 + (x_3 - y_3)^2 \right]^{1/2},$$

$$r_{xy}^{(6)} = \left[\sum_{i=1,3} (2x_i^* - x_i - y_i)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right]^{1/2},$$

$$r_{xy}^{(7)} = \left[\sum_{i=2,3} (2x_i^* - x_i - y_i)^2 + (x_1 - y_1)^2 \right]^{1/2}, \quad r_{xy}^{(8)} = \left[\sum_{i=1}^3 (2x_i^* - x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}.$$

Таким образом приходим к последовательности стационарных ИУ того же типа, что и последовательность (8). За счет некоторого усложнения ядер удается существенно уменьшить область интегриро-

вания, а значит сэкономить вычислительные ресурсы. Соответственно, при этом изменяет вид и представление решения исходной задачи:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^g \sum_{g=0,1} \lambda_m \iint_{S^*} Q^{k+g}(y) \phi_{t,k}^g(t - \tau_{xy}^{(m)}) \theta(t - \tau_{yy}^{(m)}) (\tau_{xy}^{(m)})^{-1} dS_y,$$

$$x \in S, \quad k = \left[\frac{t - \tau_{xy}^{(m)}}{h_t} \right].$$

§ 3.5. Результаты численных экспериментов по пошаговому методу.

Описанная в настоящей главе методика приближенного решения смешанной задачи Дирихле для волнового уравнения реализована в виде двух прикладных программ для осесимметричного и пространственного случаев. Программы составлены с использованием идей структурного программирования и выполняют такие же функции, что и программа, реализующая методику интегральных преобразований (§ 2.4).

Однако в работе программ, реализующих различные методики имеются и существенные отличия. Так применение кусочно-линейных функций для аппроксимации неизвестной плотности по времени в пошаговом методе упрощает структуру программы по сравнению с аппроксимацией полиномами Чебышева-Лагерра. Однако метод интегральных преобразований предполагает более простой алгоритм формирования массива величин, стоящих при коэффициентах аппроксимации плотности в правых частях СЛАУ. Это объясняется более сложной структурой ядер интегралов, составляющих коэффициенты СЛАУ в пошаговом методе.

При сравнении методик по эффективности, решающим оказалось следующее обстоятельство. В отличие от методики интегральных

преобразований, пошаговая методика предполагает формирование разреженной матрицы последовательности СЛАУ и значительно меньше вычислений при формировании массива вспомогательных величин, используемых для вычисления правых частей последовательности СЛАУ. Проведенные численные эксперименты показали большую эффективность пошаговой методики по точности при меньших затратах машинного времени. Поэтому пошаговая методика была избрана для решения более сложных пространственных задач.

Программы, реализующие пошаговую методику, апробированы на решении ряда задач. Часть последних носила тестовый характер и их решение служило подтверждением правильности работы программ. При решении остальных задач методика исследовалась для выработки рекомендаций по ее применению. В ходе численных экспериментов установлено, что оптимальным значениям параметра семейства временных узлов коллокации является значение $\sigma = 1$ и что соотношение шагов по временной переменной h_t и пространственной переменной h_x оказывает существенное влияние на точность решения нестационарных ИУ. Если выбрать h_t значительно меньшим чем h_x , может наступить явление неустойчивости. В этом случае матрица последовательности СЛАУ становится диагональной.

Ниже приводятся результаты некоторых численных экспериментов. В большинстве экспериментов используется 30 пространственных узлов коллокации. В тех же случаях, когда использовалось другое их количество это указывается особо. Значение параметра h_t подбиралось из условия наиболее точного удовлетворения граничного условия в точках, не совпадающих с коллокационными.

I. В качестве первого тестового примера рассмотрим задачу I из § 2.4. В табл.6 приведены максимальные относительные погрешности удовлетворения граничному условию при различных зна-

чениях d . В табл.7 проведено сравнение приближенного решения с аналитическим для различных удалений R от граничной поверхности, а в табл.8 приводятся максимальные отклонения этих решений друг от друга. Для сравнения, в таблицах 6 и 8 приведены значения относительных погрешностей и отклонений, получаемых с помощью метода преобразований. Четко наблюдается преимущество пошагового метода.

2. В качестве второго тестового примера рассмотрим задачу 2 из § 2.4. Временной интервал определения плотности $[0,6]$ разбивался на 30 подинтервалов ($n_{\pm} = 30$). Погрешность удовлетворения граничному условию составляла 6,2%. Сравнение приближенного решения с аналитическим решением стационарной задачи приводится в табл.9. В табл.10 приведены максимальные отклонения приближенного решения от аналитического в различных точках наблюдения для пошагового метода и метода преобразований. Здесь также наблюдается преимущество пошагового метода.

3. Пошаговым методом решена также и задача 3 из § 2.4. При расчетах использовано 24 подинтервала разбиения временного интервала $[0,12]$. Погрешность удовлетворения граничному условию составляла 0,7% в случае а) и 4,7% в случае б), что значительно меньше чем для метода преобразований (см. п.3 из § 2.4).

Сопоставление результатов, полученных пошаговым методом и методом преобразований, показывает их близость по сравнению с погрешностью удовлетворения граничному условию. Это говорит о допустимости применения обоих методов к решению данной задачи, а также об их корректной программной реализации.

Приведен также расчет задачи 3 с воздействием на оболочку (рис.3а) импульса синусоидального типа, половинки которого составляют B -сплайны (рис. 5б). При этом же значении n_{\pm} максимальная погрешность удовлетворения граничному условию составляла

Табл.6. Максимальная погрешность решения при удовлетворении граничному условию /задача I/.

	$d = 8.0$ $n_t = 24$	$d = 4.0$ $n_t = 25$	$d = 1.0$ $n_t = 17$
δ	0.59%	0.96%	3.3%
δ^i	0.93%	5.5%	

δ - погрешность пошагового метода

δ^i - погрешность метода преобразований /табл. I, § 2.4/

Табл. 7. Сравнение приближенного решения с аналитическим /задача I/.

$d = 8.0, n_t = 24$

$R = 1.0$			$R = 10.0$		
T	прибл. реш.	аналит. реш.	T	прибл. реш.	аналит. реш.
1.0	0.0	0.0	10.0	0.0	0.0
2.0	0.01561	0.01562	11.0	0.002841	0.002841
3.0	0.12499	0.12500	12.00	0.022731	0.022727
4.0	0.35942	0.35937	13.0	0.065345	0.065341
5.0	0.50005	0.5	14.0	0.090908	0.090909
6.0	0.35936	0.35937	15.0	0.065341	0.065341
7.0	0.12498	0.12500	16.00	0.022730	0.022727
8.0	0.01562	0.01562	17.0	0.002840	0.002841
9.0	-0.00001	0.0	18.0	-0.000004	0.0
10.0	-0.00001	0.0	19.0	-0.000004	0.0
11.0	0.0	0.0	20.0	0.0	0.0
12.0	0.00002	0.0	21.0	0.000007	0.0

чениях d . В табл.7 проведено сравнение приближенного решения с аналитическим для различных удалений R от граничной поверхности, а в табл.8 приводятся максимальные отклонения этих решений друг от друга. Для сравнения, в таблицах 6 и 8 приведены значения относительных погрешностей и отклонений, получаемых с помощью метода преобразований. Четко наблюдается преимущество пошагового метода.

2. В качестве второго тестового примера рассмотрим задачу 2 из § 2.4. Временной интервал определения плотности $[0,6]$ разбивался на 30 подинтервалов ($h_t = 30$). Погрешность удовлетворения граничному условию составляла 6,2%. Сравнение приближенного решения с аналитическим решением стационарной задачи приводится в табл.9. В табл.10 приведены максимальные отклонения приближенного решения от аналитического в различных точках наблюдения для пошагового метода и метода преобразований. Здесь также наблюдается преимущество пошагового метода.

3. Пошаговым методом решена также и задача 3 из § 2.4. При расчетах использовано 24 подинтервала разбиения временного интервала $[0,12]$. Погрешность удовлетворения граничному условию составляла 0,7% в случае а) и 4,7% в случае б), что значительно меньше чем для метода преобразований (см. п.3 из § 2.4).

Сопоставление результатов, полученных пошаговым методом и методом преобразований, показывает их близость по сравнению с погрешностью удовлетворения граничному условию. Это говорит о допустимости применения обоих методов к решению данной задачи, а также об их корректной программной реализации.

Приведен также расчет задачи 3 с воздействием на оболочку (рис.3а) импульса синусоидального типа, половинки которого составляют B -сплайны (рис. 5б). При этом же значении h_t максимальная погрешность удовлетворения граничному условию составляла

Табл.6. Максимальная погрешность решения при удовлетворении граничному условию /задача I/.

	$d = 8.0$ $n_t = 24$	$d = 4.0$ $n_t = 25$	$d = 1.0$ $n_t = 17$
δ	0.59%	0.96%	3.3%
δ^i	0.93%	5.5%	

δ - погрешность пошагового метода

δ^i - погрешность метода преобразований /табл. I, § 2.4/

Табл. 7. Сравнение приближенного решения с аналитическим /задача I/.

$d = 8.0, h_t = 24$

$R = 1.0$			$R = 10.0$		
T	прибл. реш.	аналит. реш.	T	прибл. реш.	аналит. реш.
1.0	0.0	0.0	10.0	0.0	0.0
2.0	0.01561	0.01562	11.0	0.002841	0.002841
3.0	0.12499	0.12500	12.00	0.022731	0.022727
4.0	0.35942	0.35937	13.0	0.065345	0.065341
5.0	0.50005	0.5	14.0	0.090908	0.090909
6.0	0.35936	0.35937	15.0	0.065341	0.065341
7.0	0.12498	0.12500	16.00	0.022730	0.022727
8.0	0.01562	0.01562	17.0	0.002840	0.002841
9.0	-0.00001	0.0	18.0	-0.000004	0.0
10.0	-0.00001	0.0	19.0	-0.000004	0.0
11.0	0.0	0.0	20.0	0.0	0.0
12.0	0.00002	0.0	21.0	0.000007	0.0

Табл.7 /продолжение/

$$d = 4.0, n_t = 25$$

R = 1.0			R = 10.0		
	прибл.реш.	аналит.реш.		прибл.реш.	аналит.реш.
1.0	0.0	0.0	10.0	0.0	0.0
1.5	0.01562	0.01562	11.5	0.00284	0.00284
2.0	0.12494	0.12500	11.0	0.02271	0.02273
2.5	0.35934	0.35937	11.5	0.06532	0.06534
3.0	0.50008	0.5	12.0	0.09095	0.09091
3.5	0.35906	0.35937	12.5	0.06526	0.06534
4.0	0.12388	0.12500	13.0	0.02251	0.02273
5.0	0.00120	0.0	14.0	0.00018	0.0
5.5	0.00096	0.0	14.5	0.00014	0.0
6.0	0.00110	0.0	15.0	0.00019	0.0
6.5	0.00054	0.0	15.5	0.00017	0.0

Табл.8. Максимальные отклонения приближенного решения от аналитического /задача I/.

$$d = 8.0, n_t = 24$$

R	0.01	0.1	1.0	10.0
ε	0.00063	0.00007	0.00004	0.00001
ε'	0.0093	0.0086	0.0047	0.00086

$$d = 4.0, h_t = 25$$

R	0.01	0.1	1.0	10.0
ε	0.0028	0.0026	0.0011	0.00021
ε'	0.051	0.043	0.023	0.0042

Табл.8 /продолжение/

$$d = 1,0, \quad n_t = 17$$

R	0.01	0.1	1.0	10.0
ε	0.018	0.012	0.0089	0.0017

ε - отклонение при пошаговом методе

ε' - отклонения метода преобразований /табл.3, § 2.4/.

Табл.9. Сравнение приближенного решения с аналитическим /задача 2/.

$r = 0.0, \quad z = 0.1$			$r = 0.0, \quad z = 1.0$		
τ	прибл.реш.	аналит.реш.	τ	прибл.реш.	аналит.реш.
2.6	0.949	0.936	3.5	0.488	0.5
3.1	0.935	0.936	4.0	0.496	0.5
3.6	0.934	0.936	4.5	0.500	0.5
4.1	0.937	0.936	5.0	0.501	0.5
4.6	0.939	0.936	5.5	0.503	0.5
5.1	0.937	0.936	6.0	0.502	0.5
5.6	0.935	0.936	6.5	0.499	0.5
6.1	0.936	0.936	7.0	0.501	0.5

$r = 1.0, \quad z = 0.1$			$r = 1.0, \quad z = 1.0$		
τ	прибл.реш.	аналит.реш.	τ	прибл.реш.	аналит.реш.
2.6	0.805	0.8	3.5	0.438	0.424
3.1	0.808	0.8	4.0	0.422	0.424
3.6	0.806	0.8	4.5	0.424	0.424
4.1	0.805	0.8	5.0	0.424	0.424
4.6	0.805	0.8	5.5	0.426	0.424
5.1	0.806	0.8	6.0	0.426	0.424
5.6	0.805	0.8	6.5	0.425	0.424
6.1	0.805	0.8	7.0	0.425	0.424

r, z - координаты точки наблюдения.

1.4%. На рис.6а приводятся графики возмущенных импульсов в точке наблюдения $\Gamma = 0.0$, $\xi = 2.0$. Графики суммарных импульсов, которые состоят из суммы импульсов воздействия и возмущения, приводятся на рис. 6б. Суммарные импульсы определяют результирующее поле во время прохождения импульсов воздействия. Видно, что более сильно поглощающие свойства в точке наблюдения ^{оболочка} проявляет к импульсу вида 5а, хотя и импульс 5б в точке наблюдения она ослабляет более чем в 10 раз.

Последующие задачи решались только с использованием пошагового временного метода.

4. В задаче 4 исследовался процесс поглощения акустически мягкими оболочками различных конфигураций (рис.7) сферического импульса воздействия, временной профиль которого представляет собой B - сплайн длительности 8. При расчетах использовано 30 точек коллокации по пространственной переменной в случае а), по 15 точек на диске и цилиндре в случае б), 5 точек на диске и 55 на конусе в случае в). При этом оптимальные количества подинтервалов разбиения временного интервала $[0,12]$ распределились вледующим образом: 25 подинтервалов в случае а), 29 подинтервалов в случае б) и 30 подинтервалов в случае в). Погрешность же удовлетворения граничному условию не превышала 0,5% в случае а), 4.3% в случае б) и 6.6% в случае в).

Для примера, на рис.8а) приводятся графики импульсов в точке наблюдения $\Gamma = 0.0$, $\xi = 1.0$, для различных конфигураций. Как видно из рис.8б, лучшие поглощающие свойства в точке наблюдения проявляет конфигурация, изображенная на рис. 7в).

5. Рассмотрим задачу распространения импульсов, изучаемых различными объектами в среде, ограниченной дном и поверхностью океана. Геометрия объектов показана на рис. 9. Излучающий им-

Табл.10. Максимальные отклонения приближенного решения от аналитического /задача 2/.

τ, τ	0.0 ; 0.1	0.0 ; 1.0	1.0 ; 0.1	1.0 ; 1.0
ε	0.013	0.011	0.008	0.013
ε'	0.034	0.015	0.044	0.035

ε - отклонение при пошаговом методе,

ε' - отклонение метода преобразований /табл.5, § 2.4/.

Табл. II. Сравнение решений задачи 3, полученных методом преобразований и пошаговым методом.

а/

T	$r = 0.7, z = 2.0$		T	$r = 1.0, z = 2.0$	
	мет. преобр.	пошаг. мет.		мет. преобр.	пошаг. мет.
2.0	0.0124	0.0124	2.0	0.0054	0.0053
3.0	0.1157	0.1158	3.0	0.0728	0.0728
4.0	0.3501	0.3509	4.0	0.2638	0.2649
5.0	0.4960	0.4979	5.0	0.4352	0.4360
6.0	0.3610	0.3599	6.0	0.3695	0.3682
7.0	0.1266	0.1254	7.0	0.1567	0.1559
8.0	0.0140	0.0162	8.0	0.0248	0.0271
9.0	0.0021	0.0011	9.0	0.0015	0.0007
10.0	-0.0003	0.0010	10.0	0.0010	-0.0006
11.0	-0.0045	-0.0003	11.0	-0.0041	-0.0013
12.0	0.0042	-0.0008	12.0	0.0014	-0.0006
$\varepsilon = 0.0022$			$\varepsilon = 0.0023$		

б/

T	$r = 0.0, z = 2.0$		$r = 1.0, z = 2.0$	
	мет. преобр.	пошаг. мет.	мет. преобр.	пошаг. мет.
2.0	0.0024	0.0026	0.0025	0.0027
3.0	0.0631	0.0611	0.0503	0.0493
4.0	0.2706	0.2665	0.2178	0.2153
5.0	0.4913	0.4893	0.4195	0.4188
6.0	0.4040	0.4067	0.3970	0.3974
7.0	0.1090	0.1100	0.1570	0.1552
8.0	-0.0036	0.0057	0.0064	0.0127
$\varepsilon = 0.0093$			$\varepsilon = 0.0063$	

Табл. II. Сравнение решений задачи 3, полученных методом преобразований и пошаговым методом.

а/

T	$r = 0.7, z = 2.0$		T	$r = 1.0, z = 2.0$	
	мет. преобр.	пошаг. мет.		мет. преобр.	пошаг. мет.
2.0	0.0124	0.0124	2.0	0.0054	0.0053
3.0	0.1157	0.1158	3.0	0.0728	0.0728
4.0	0.3501	0.3509	4.0	0.2638	0.2649
5.0	0.4960	0.4979	5.0	0.4352	0.4360
6.0	0.3610	0.3599	6.0	0.3695	0.3682
7.0	0.1266	0.1254	7.0	0.1567	0.1559
8.0	0.0140	0.0162	8.0	0.0248	0.0271
9.0	0.0021	0.0011	9.0	0.0015	0.0007
10.0	-0.0003	0.0010	10.0	0.0010	-0.0006
11.0	-0.0045	-0.0003	11.0	-0.0041	-0.0013
12.0	0.0042	-0.0008	12.0	0.0014	-0.0006
$\varepsilon = 0.0022$			$\varepsilon = 0.0023$		

б/

T	$r = 0.0, z = 2.0$		$r = 1.0, z = 2.0$	
	мет. преобр.	пошаг. мет.	мет. преобр.	пошаг. мет.
2.0	0.0024	0.0026	0.0025	0.0027
3.0	0.0631	0.0611	0.0503	0.0493
4.0	0.2706	0.2665	0.2178	0.2153
5.0	0.4913	0.4893	0.4195	0.4188
6.0	0.4040	0.4067	0.3970	0.3974
7.0	0.1090	0.1100	0.1570	0.1552
8.0	-0.0036	0.0057	0.0064	0.0127
$\varepsilon = 0.0093$			$\varepsilon = 0.0063$	

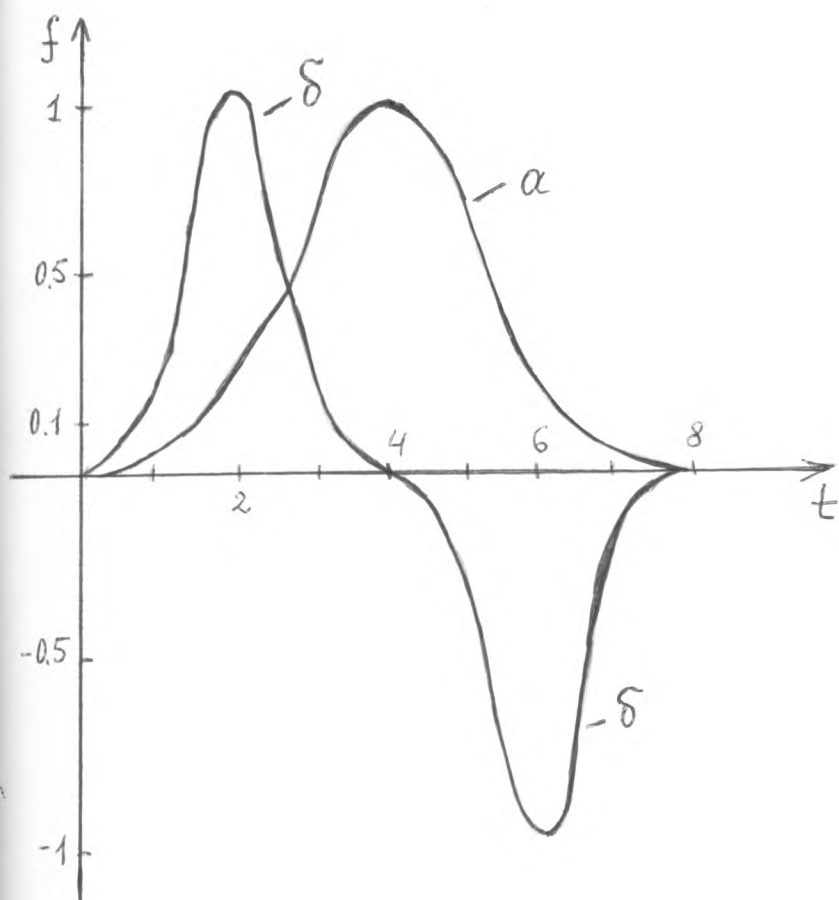


Рис. 5. Временной профиль одного из вариантов граничного условия задачи 3.

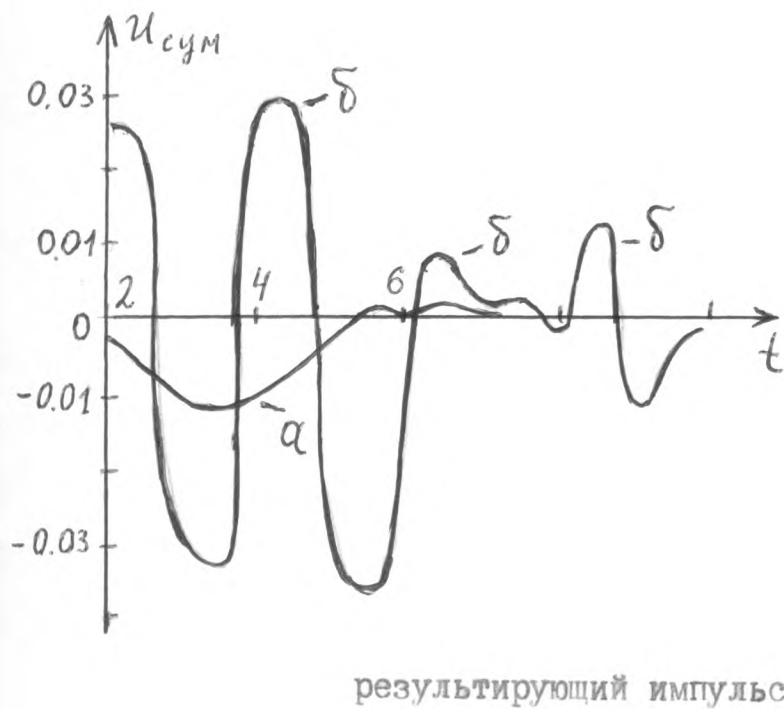
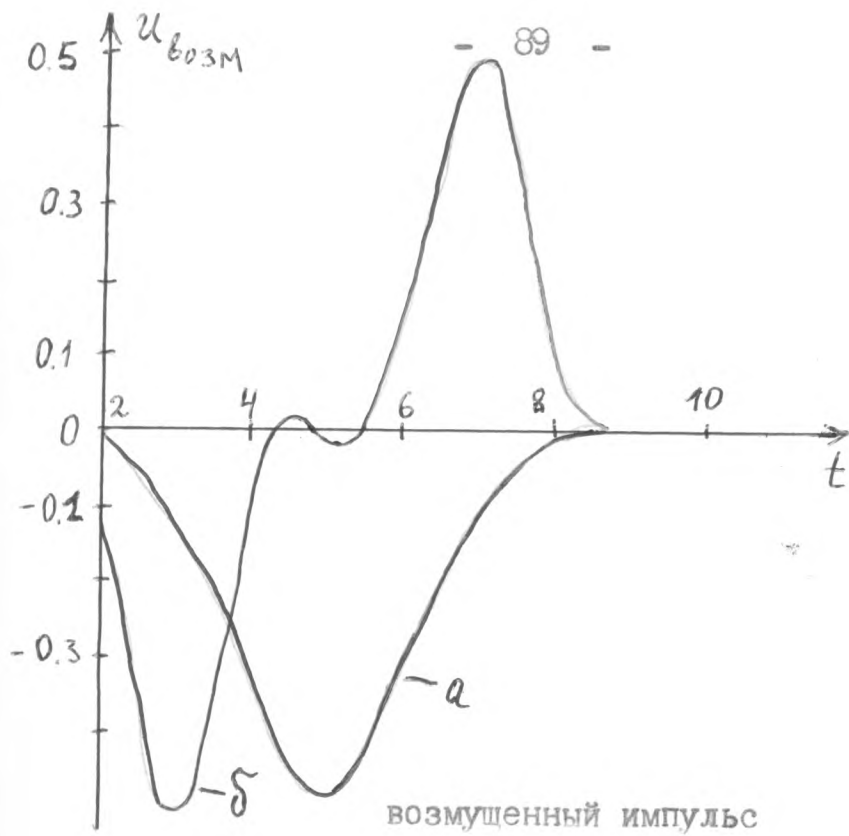


Рис.6. Возмущенный и результирующий импульсы задачи 3 в точке наблюдения

пульс представляет собой функцию, не зависящую от пространственной координаты, временным профилем которой является

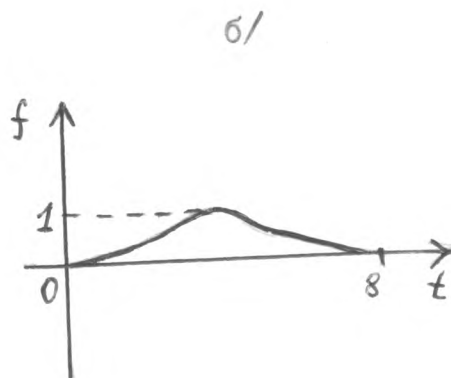
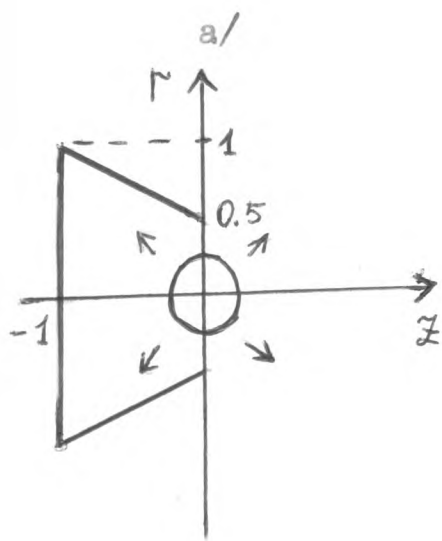
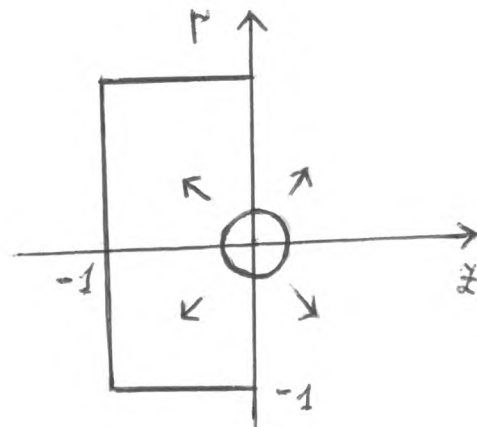
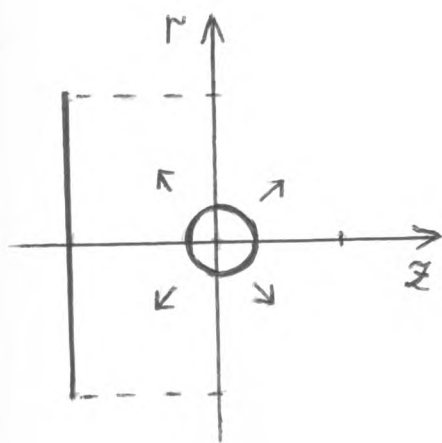
B - сплайн длительности δ (см. рис.5а).

Параметры дискретизации задачи распределились следующим образом, 15 точек колокации использовано в случаях а) и б), по 8 точек коллокации на каждый из конусов - в случае в). Потребовалось 24 подинтервала разбиения временного интервала $[0,12]$ в случаях а) и б), а также 28 таких подинтервалов в случае в). В представлении функции Грина использовалось значение параметра $N = 5$, а расстояние d между дном и поверхностью равнялось 20. При этом максимальная погрешность удовлетворения граничному условию составляла 0,6% в случаях а) и б), 5% - в случае в).

Сопоставление излучаемых импульсов на расстоянии высоты слоя (20) и двух высот слоя (40) от оси симметрии задачи позволяет оценить характер импульсов и степень их слияния для различных конфигураций при удалении точек наблюдения от излучающих поверхностей (рис. 10-12).

Следующие примеры иллюстрируют работу программы расчета существенно-пространственных задач. В обоих случаях учитывались симметрия задач относительно соответствующих плоскостей симметрии. Так при расчете задачи 6 использовались плоскости симметрии $x = 0, y = 0, z = 0, x = y$, а для задачи 7 - плоскости $x = 0, y = 0, x = y$.

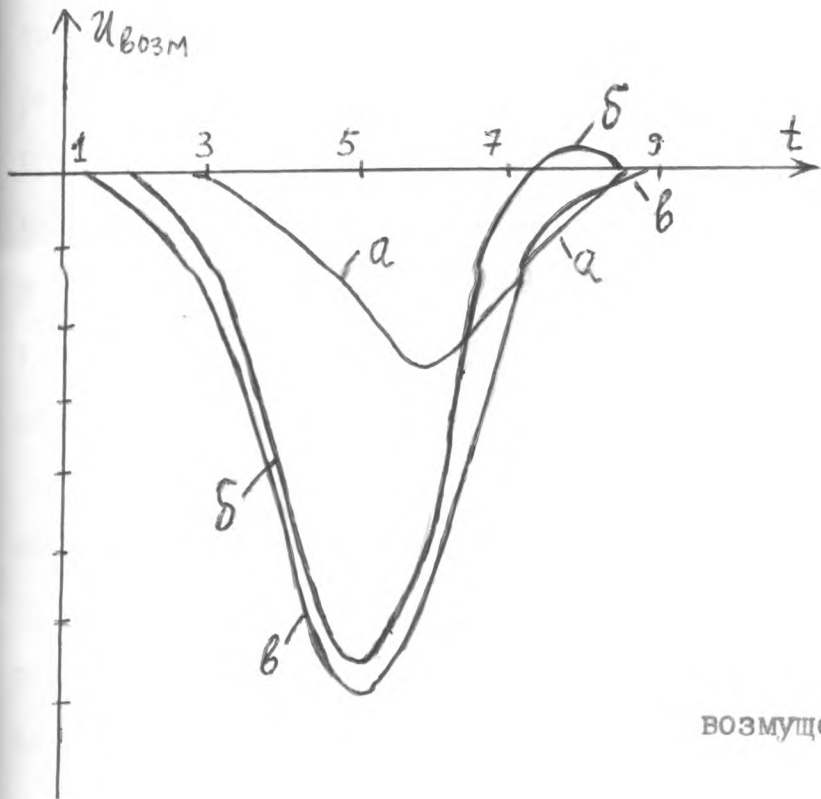
6. В качестве тестового примера взята задача I из § 2.4, интерпретированная как пространственная. При расчетах использовано 25 точек коллокации (по 5 на каждый пространственный параметр). В табл. 12 приведены максимальные погрешности удовлетворения граничному условию при различных длительностях d профиля граничного импульса по временной переменной. В табл.13



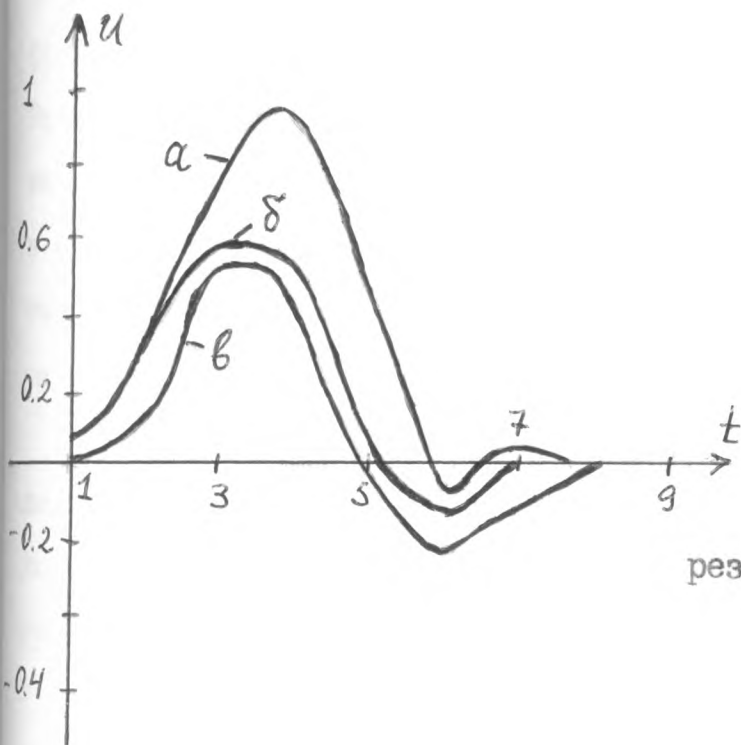
в/

г/

Рис.7. Меридианное сечение геометрии задачи 4.



возмущенный импульс



результрующий импульс

Рис.8. Решение задачи 4 в точке наблюдения

$$\Gamma = 0, \quad z = 1.$$

сопоставляется аналитическое решение задачи с приближенным для различных удалений R от граничной поверхности, а в табл. I4 приводятся максимальные расхождения этих решений. Несмотря на хорошее совпадение аналитического и приближенных решений при различных значениях d , наблюдается быстрый рост погрешности удовлетворения граничному условию, когда значение d уменьшается.

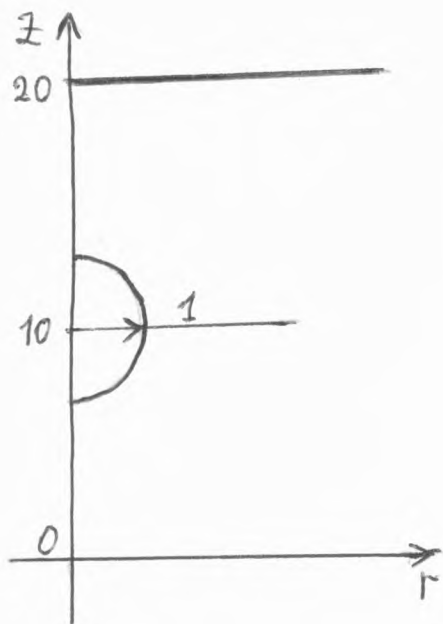
7. Рассмотрим задачу изучения поглощающих свойств акустически мягких диафрагм различной конфигурации (рис. I3). В качестве импульса воздействия выбрана сферическая волна с центром в начале координат. Временной профиль представляет собой B - сплайн длительности 8 (см. рис. 5а).

Распределение параметров дискретизации производилось следующим образом: 25 точек коллокации на полусфере и 9 точек на диафрагме в случае а), 25 точек в случае б) и 36 точек в случае в). Временной интеграл $[0, 12]$ потребовал разбиения на 16 подинтервалов в случае а), 25 подинтервалов в случае б) и 31 подинтервал в случае в). При этом погрешность удовлетворения граничному условию составляла 4.8% в случае а), 4.2% в случае б) и 4.3% в случае в).

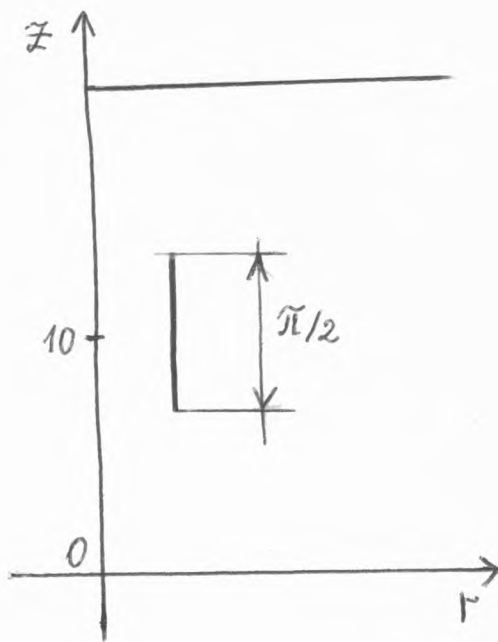
Графики возмущенных и суммарных импульсов в двух точках наблюдения приводятся на рис. I4 и I5. В рассматриваемых точках наблюдения видно улучшение поглощающих свойств конфигурации а) по сравнению с конфигурацией б).

В последующих пунктах мы вновь возвращаемся к использованию результатов расчета осесимметричных задач.

8. Как показывает анализ проведенных экспериментов, при оптимальных значениях параметра n_t матрица последовательности СЛАУ пошагового метода не состоит только из диагональных элементов. Вместе с тем, если увеличивать значение параметра n_t , то можно



a/



б/

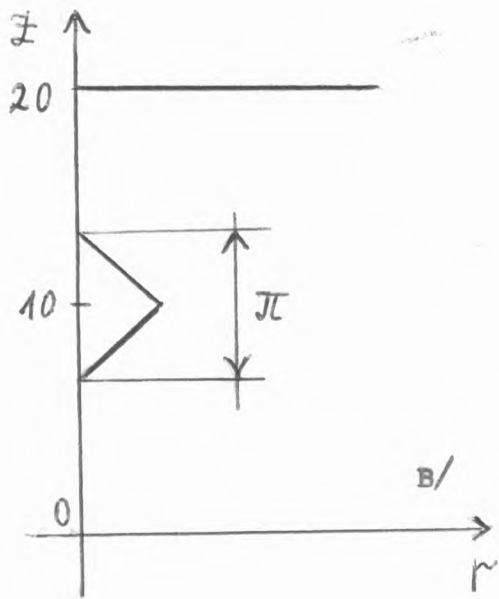


Рис.9. Меридианное сечение геометрии задачи 5.

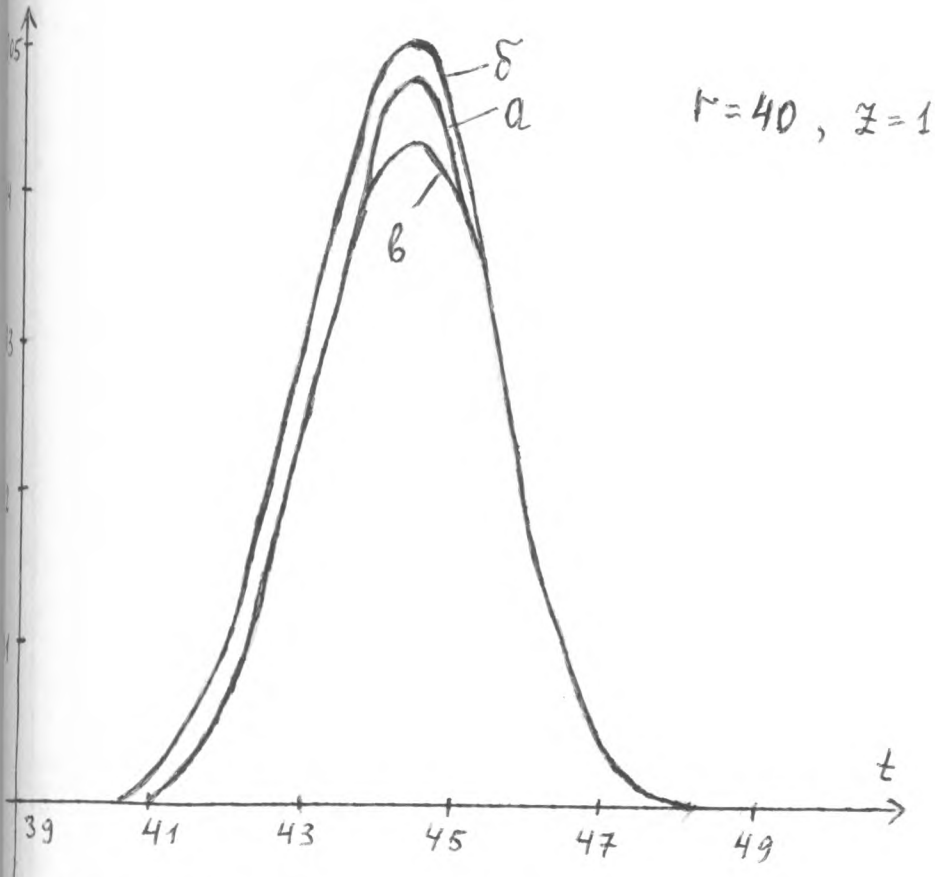
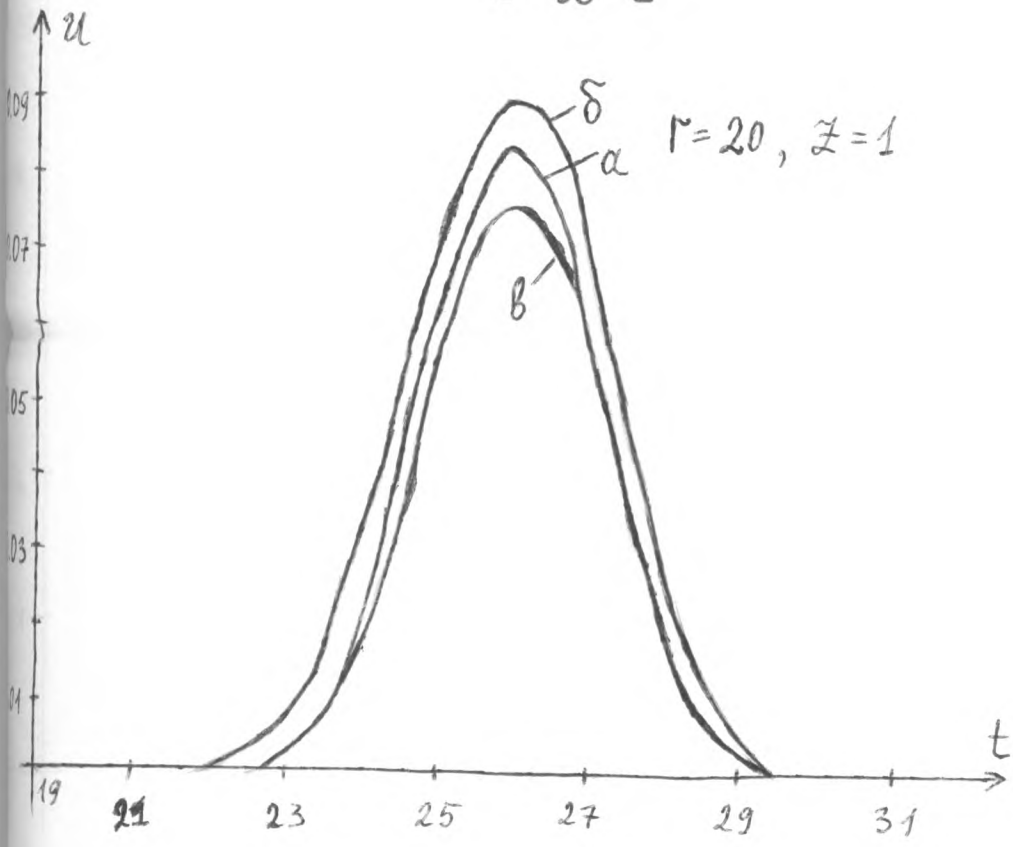


Рис. 10. Решение задачи 5 в окрестности нижней поверхности слоя.

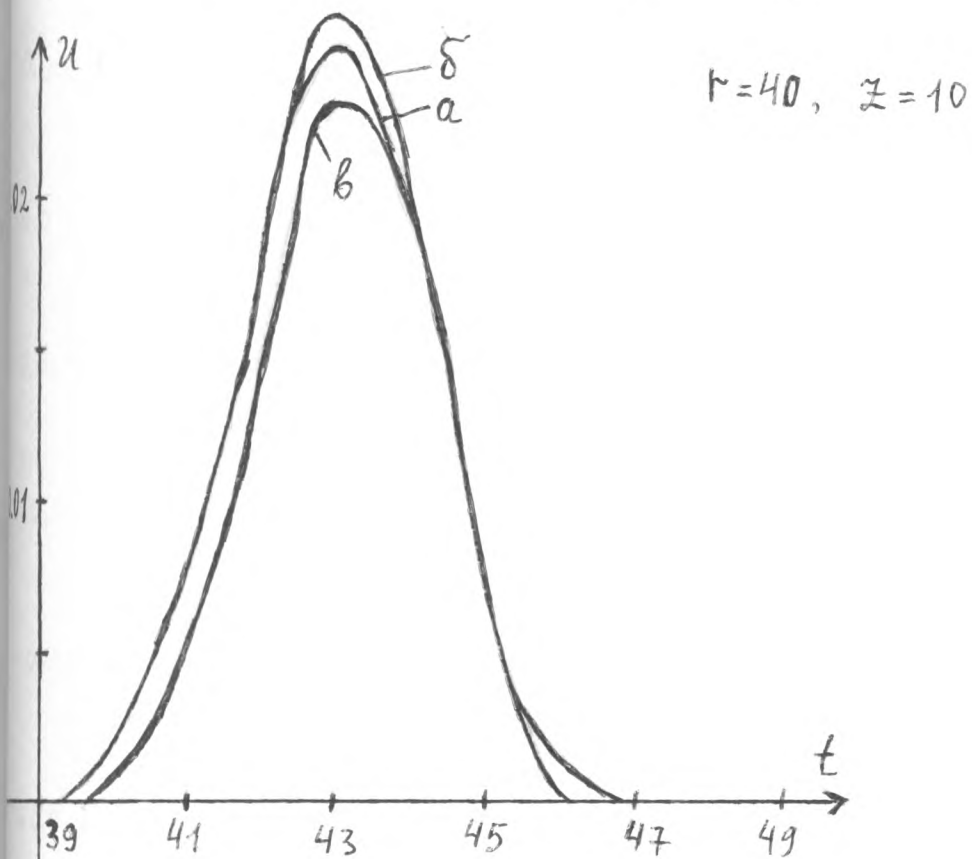
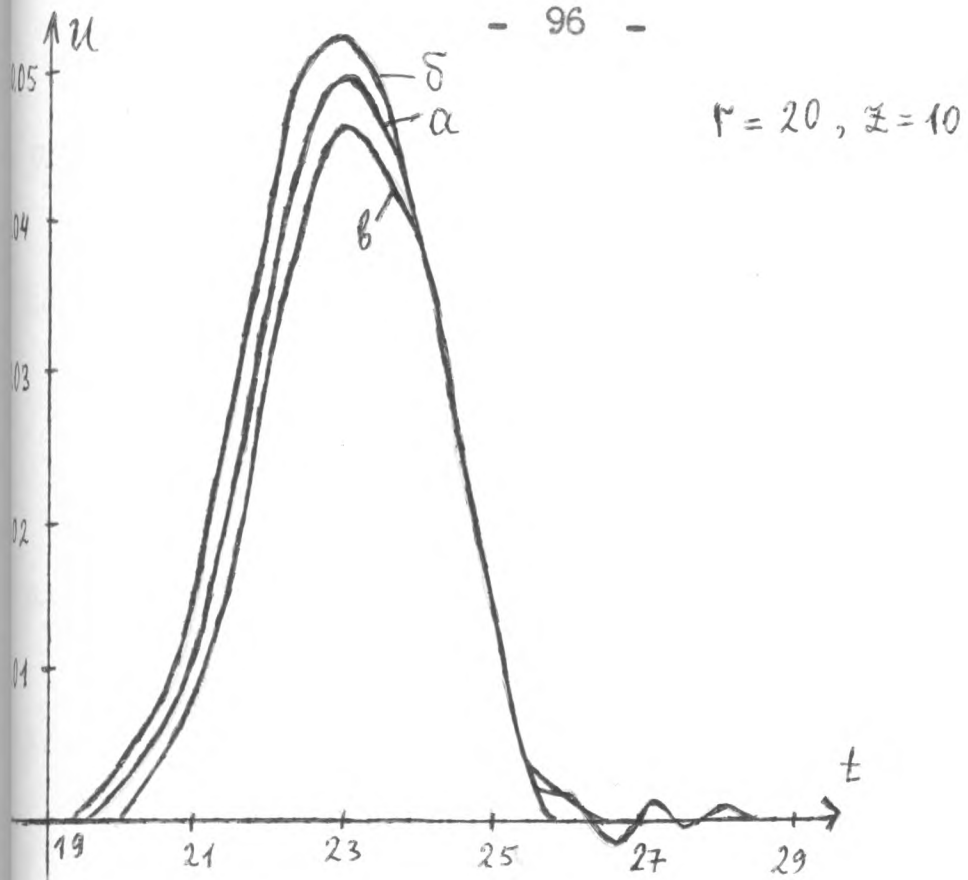


Рис. II. Решение задачи 5 на равном удалении от поверхностей слоя.

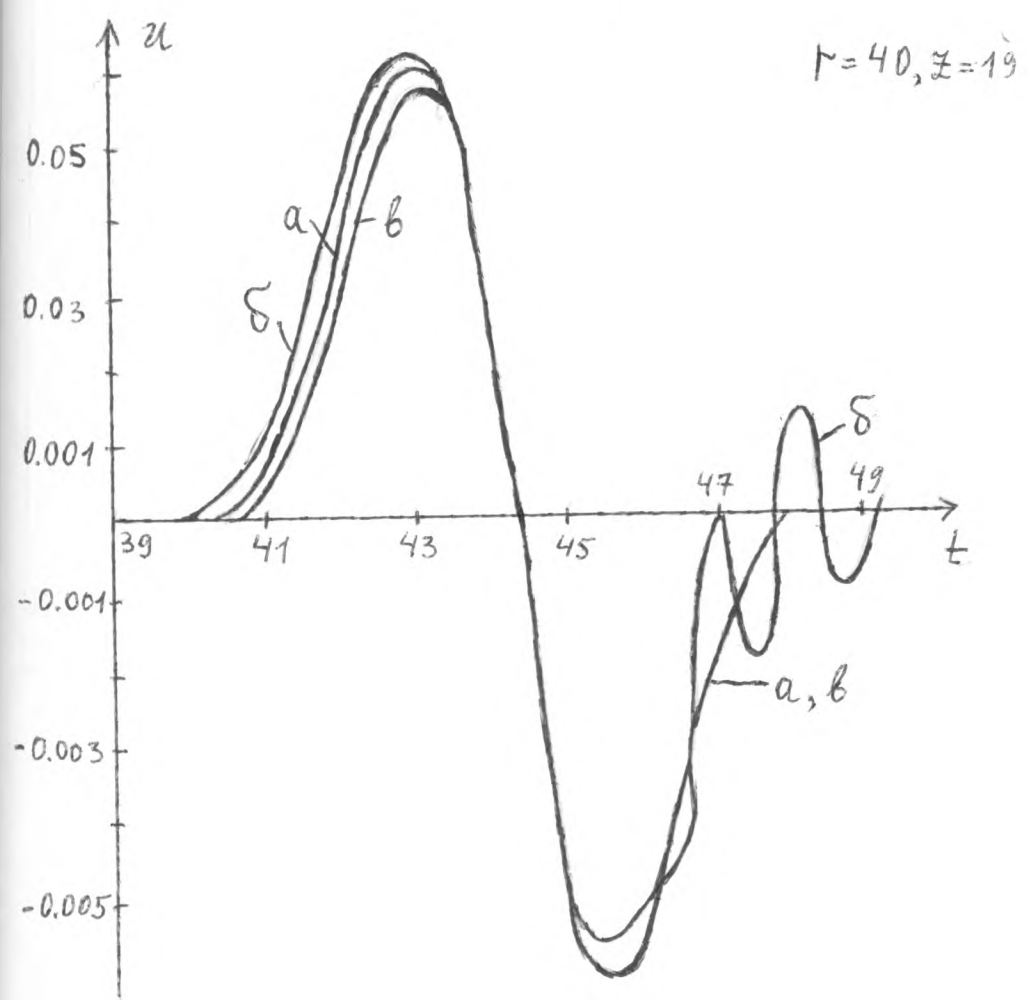
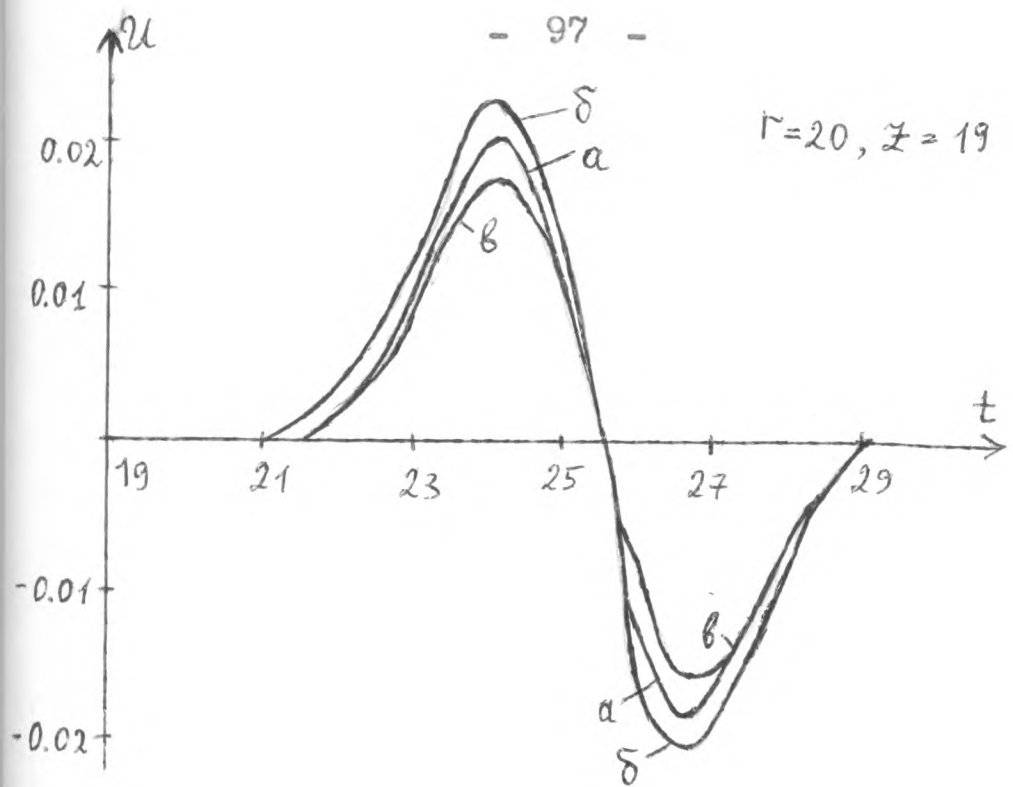


Рис.12. Решение задачи 5 в окрестности верхней поверхности слоя.

Табл. I2. Максимальная абсолютная погрешность решения при удовлетворении граничному условию /задача I/.

	$d = 8.0, n_t = 13$	$d = 4.0, n_t = 12$	$d = 1.0, n_t = 16$
ε	1.6%	3.4%	13%

Табл. I3. Сравнение приближенного решения с аналитическим /задача I/.

$$d = 8.0, n_t = 13$$

$R = 1.0$			$R = 10.0$		
T	прибл. реш.	аналит. реш.	T	приблиз. реш.	аналит. реш.
1.0	0.0	0.0	10.0	0.0	0.0
2.0	0.0148	0.0156	11.0	0.00269	0.00284
3.0	0.1245	0.1250	12.0	0.02266	0.02273
4.0	0.3645	0.3594	13.0	0.06626	0.06534
5.0	0.4978	0.5	14.0	0.09038	0.09090
6.0	0.3538	0.3594	15.0	0.06435	0.06534
7.0	0.1264	0.1250	16.0	0.02301	0.02273
8.0	0.0142	0.0156	17.0	0.00258	0.00284
9.0	0.0027	0.0	18.0	0.00050	0.0
10.0	-0.0015	0.0	19.0	0.00027	0.0
11.0	0.0003	0.0	20.0	0.00006	0.0
12.0	0.0004	0.0	21.0	0.0	0.0

Табл. I3 /продолжение/

$$d = 4.0, n_t = 12$$

$R = 1.0$			$R = 10.0$		
T	прибл. реш.	аналит. реш.	T	прибл. реш.	аналит. реш.
1.0	0.0	0.0	10.0	0.0	0.0
1.5	0.0156	0.0156	10.5	0.00283	0.00284
2.0	0.1248	0.1250	11.0	0.02269	0.02273
2.5	0.3591	0.3594	11.5	0.06531	0.06534
3.0	0.4995	0.5	12.0	0.09073	0.09090
3.5	0.3585	0.3594	12.5	0.06512	0.06534
4.0	0.1245	0.1250	13.0	0.02268	0.0273
4.5	0.0157	0.0157	13.5	0.00307	0.00284
5.0	0.0001	0.0	14.0	0.00002	0.0
5.5	-0.0003	0.0	14.5	-0.00024	0.0
6.0	-0.0001	0.0	15.0	-0.00002	0.0
6.5	0.0003	0.0	15.5	0.00023	0.0

Табл. I4. Максимальные отклонения приближенного решения от аналитического /задача I/.

$$d = 8.0, n_t = 13.$$

R	0.01	0.1	1.0	10.0
ϵ	0.0111	0.0097	0.0056	0.00099

$$d = 4.0, n_t = 12$$

R	0.01	0.1	1.0	10.0
ϵ	0.00651	0.00077	0.00079	0.00024

$$d = 1.0, n_t = 16$$

R	0.01	0.1	1.0	10.0
ϵ	0.0262	0.0145	0.0062	0.0011

получать и матрицы диагонального вида. Такой вид матрицы упрощает процесс построения решения, что используется в работе Е.В.Захарова и С.И.Сафронова [22] для анализа некоторых процессов дифракции электромагнитных волн. В связи с этим представляет интерес испытать метод диагонализации на решении задач рассматриваемого типа.

Использование диагональной матрицы возможно при небольших значениях параметра n_x и длительностях граничного импульса, так как в противном случае параметр n_t должен принимать слишком большие значения. Последнее обстоятельство требует больших ресурсов памяти и машинного времени для реализации "явного метода" с диагональной матрицей последовательности СЛАУ.

Поэтому для реализации "явного метода" избран импульс в виде В-сплайна длительности 2 для граничной конфигурации задачи 3 а) (рис.3а). При использовании 8-ми пространственных точек коллокации и при $n_t \geq 60$ матрица последовательности СЛАУ становится диагональной. Однако уже при $n_t = 60$ процесс построения решения становится неустойчивым (см.табл.15). В то же самое время процесс с недиагональной матрицей при $n_t = 28$ позволяет удовлетворять граничному условию с точностью $\delta = 2\%$ (см.табл.15). Все это свидетельствует о преимуществе метода с недиагональной матрицей для решений рассматриваемого класса задач.

9. Важной характеристикой исследуемого метода является его область применимости. В частности, представляет интерес установить те максимальные и минимальные длительности граничного импульса в виде В-сплайна, для которых пошаговый метод позволяет строить удовлетворительные по точности решения. Исходя из анализа расчетов, проведенных для тестовой задачи I, можно утверждать, что минимальная допустимая длительность граничного импульса указанного типа составляет $1/2$ или $1/4$ характерного размера

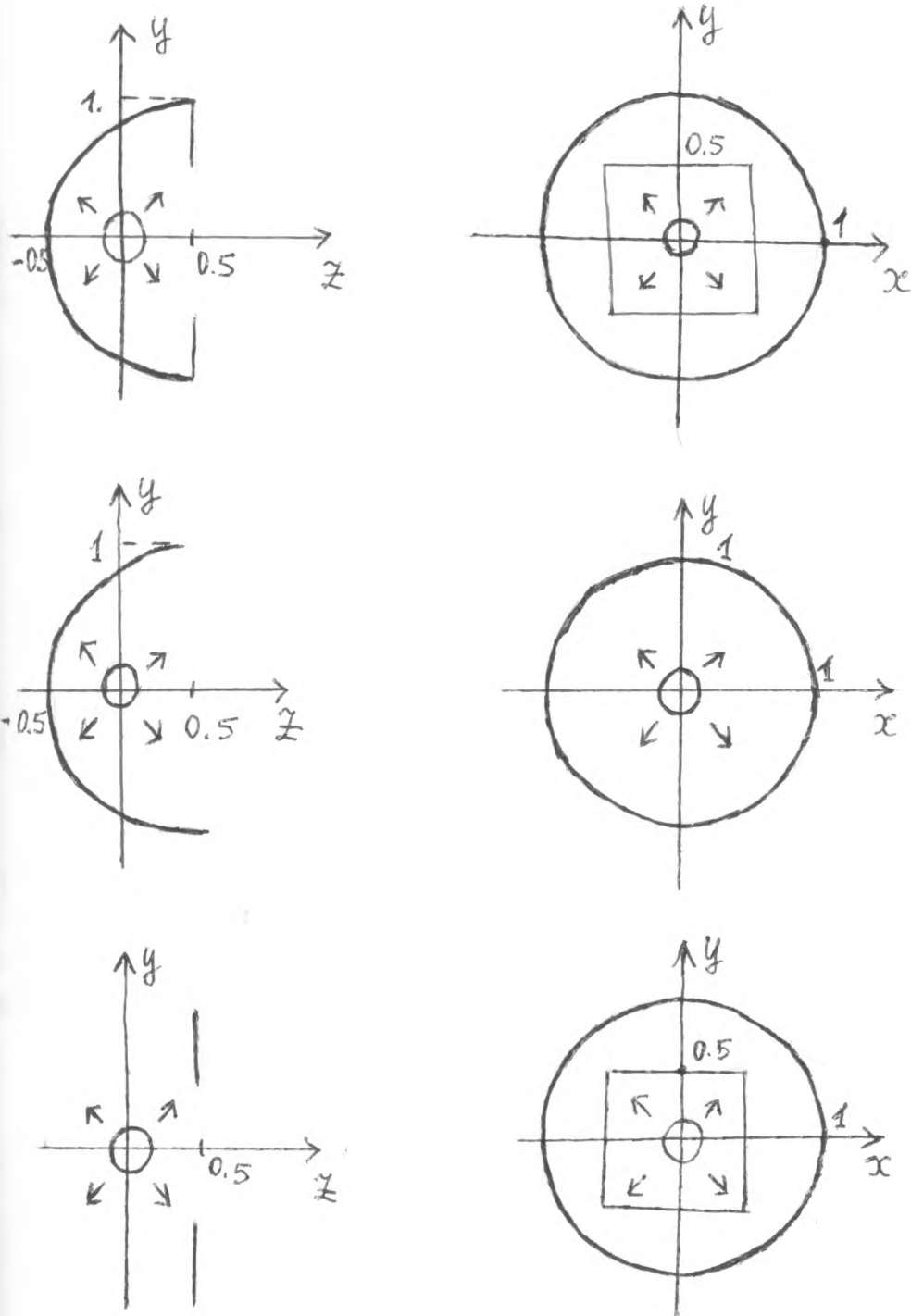


Рис.13. Проекция геометрических конфигураций задачи 6 на координатные плоскости.

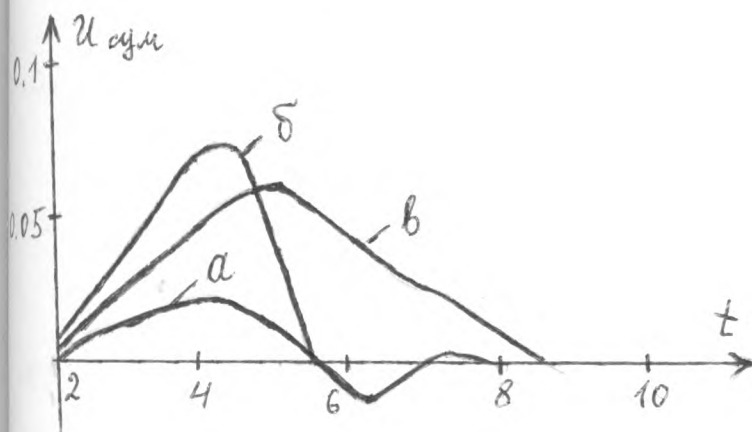
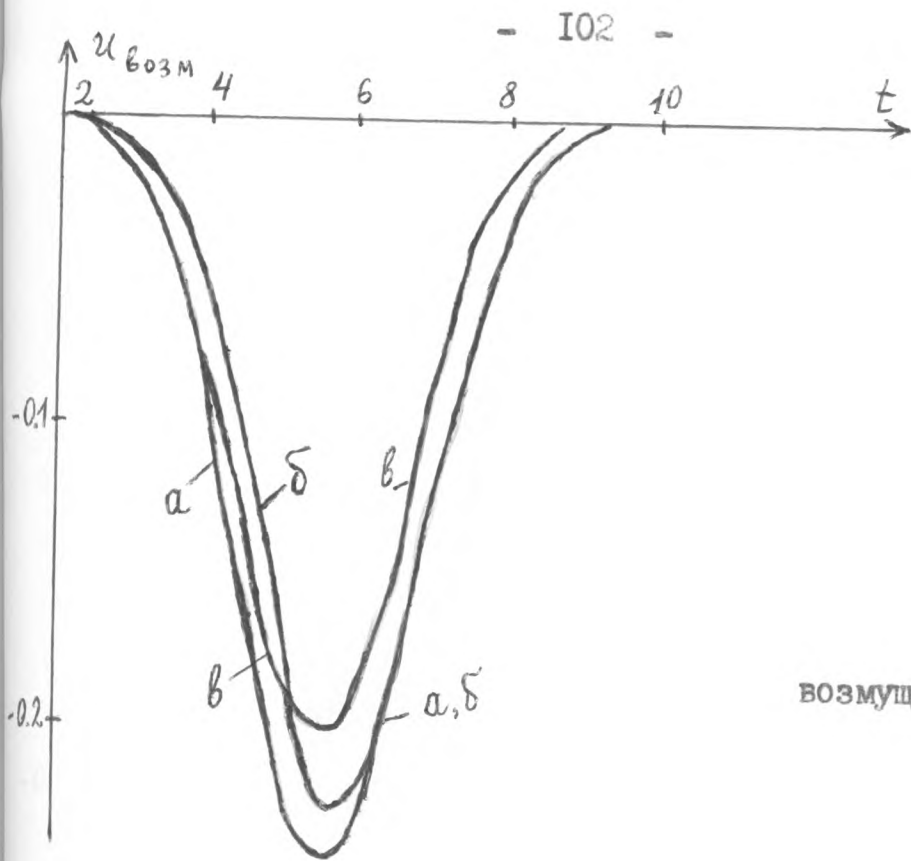


Рис.14. Решение задачи 6 в точке наблюдения
 $x=0, y=0, z=2.$

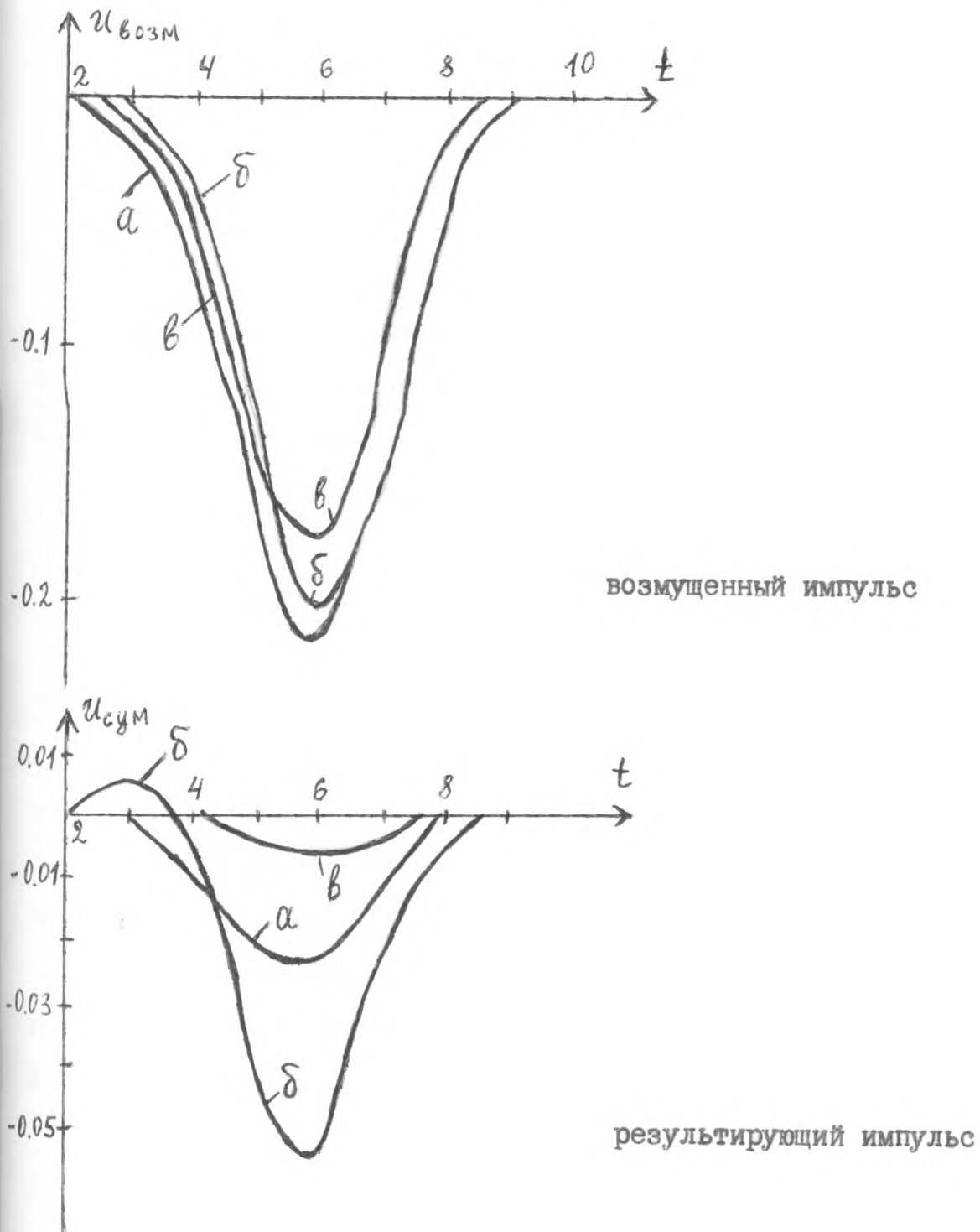


Рис.15. Решение задачи 6 в точке наблюдения

$$x = 0, y = 1, z = 2.$$

(диаметра) граничной конфигурации. Дальнейшее уменьшение длительности импульса потребует использования большего количества пространственных точек коллокации, что повлечет дальнейшее увеличение размерности матрицы СЛАУ и значительное увеличение ресурсов машинного времени и оперативной памяти.

Для исследования максимально допустимых длительностей граничного импульса выбираем граничную конфигурацию задачи За. При расчете длительных импульсов достаточно небольшого количества пространственных точек коллокации. Поэтому выбираем их количество равным 8. При этом для длительности импульса 50 и для $n_t=30$ относительная погрешность δ удовлетворения граничному условию в регулярных точках контура не превышала 0,5%, а при длительности импульса 100 и для $n_t=40$ $\delta = 0,4\%$.

Таким образом, исследуемый пошаговый метод хорошо работает на длительных импульсах, но требует больших вычислительных затрат для граничных импульсов, длительность которых меньше характерного размера граничной поверхности.

10. Определенный практический интерес также представляет эмпирическая зависимость, с помощью которой можно бы выбирать оптимальные значения параметров вычислительных алгоритмов.

Проведенные эксперименты позволяют определить следующую формулу для приближенного определения параметра \mathcal{X} в методе интегральных преобразований:

$$\mathcal{X}_{\text{опт}} \approx \delta / d_f$$

где d_f - длительность граничного импульса.

Значительно труднее установить такую формулу для параметра n_t пошагового метода. Если длительность граничного импульса не меньше характерного размера граничного объекта и не больше 5-и таких размеров, а количество пространственных точек коллокации

Табл. 15. Удовлетворение граничному условию задачи
 За) при длительности граничного импульса 2
 в точке $r = \sqrt{2}/2$, $z = \sqrt{2}/2$.

T	граничное условие	решение при $n_t = 28$	решение при $n_t = 60$
0	0	0	0
0.25	0.0312	0.0277	0.1729
0.5	0.25	0.2347	6.01×10^3
0.75	0.7187	0.7010	2.97×10^8
1	1	1.0022	1.6×10^{13}
1.25	0.7187	0.7371	8.81×10^{17}
1.5	0.25	0.2621	4.9×10^{22}
1.75	0.0312	0.0371	2.73×10^{27}
2	0	0.0021	1.53×10^{32}
2.25	0	0.0039	8.54×10^{36}
2.5	0	0.0220	4.77×10^{41}
2.75	0	0.0134	2.67×10^{46}
3	0	0.0012	1.49×10^{51}

находится в пределах от 15 до 30, то справедливо

$$n_{\pm \text{длт}} \approx 0.9 \frac{n_{\text{к}}}{d_s}$$

где d_s - характерный размер граничной поверхности.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Лемма I.2. Если решение задачи (I.1)-(I.6) существует, то пределы

$$u^*(x, t) = \lim_{g \rightarrow 0} \int_0^t d\tau \int_{C_m^*(g)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial g}(y, \tau) \frac{\theta(t-\tau-r_{xy})}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} - \right. \\ \left. - u(y, \tau) \frac{\partial}{\partial g} \left(\frac{\theta(t-\tau-r_{xy})}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} \right) \right\} dC_y, \quad (I.12)$$

$$u^{**}(x, t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^t d\tau \int_{S_R} \left\{ \frac{\partial u}{\partial R}(y, \tau) \frac{\theta(t-\tau-r_{xy})}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} - \right. \\ \left. - u(y, \tau) \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\theta(t-\tau-r_{xy})}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} \right) \right\} dS_y, \quad (I.13)$$

при $x \in D_e^2$, $t > 0$ равняются нулю.

Доказательство леммы I.2.

Сначала исследуем предел (I.12). Из условия (I.5) следует, что

$\frac{\partial u}{\partial g}(y, t) = o(t^{-\delta_1} g^{-1})$ при $y \in C_m^*(g)$ $m=1, 2V$, $g \rightarrow 0$, а из условия непрерывности функции $u(x, t)$ в пространстве $R^2 \times [0, \infty)$ следует, что $|u(y, t)| \leq c_u$, $c_u = \text{const} > 0$, $y \in C_m^*(g)$ $m=1, 2V$, $g \rightarrow 0$.

Поэтому можно записать оценку

$$|u^*(x, t)| \leq \lim_{g \rightarrow 0} \left\{ o(t^{-\delta_1} g^{-1}) \int_0^t d\tau \int_{C_m^*(g)} \frac{\theta(t-\tau-r_{xy}) dC_y}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} + \right. \\ \left. + c_u \left| \int_0^t d\tau \int_{C_m^*(g)} \frac{\partial}{\partial g} \left(\frac{\theta(t-\tau-r_{xy})}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} \right) dC_y \right| \right\}. \quad (I)$$

Полученные интегралы с помощью переменных $\eta = \tau / (t - r_{xy})$ преобразуем следующим образом

$$\int_0^t d\tau \int_{C_m^*(g)} \frac{\theta(t-\tau-r_{xy}) dC_y}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} = \int_{C_m^*(g)} \theta(t-r_{xy})(t-r_{xy}) dC_y \int_0^1 \frac{d\eta}{[t^2(1-\eta)^2 + 2t\eta(1-\eta)r_{xy} - r_{xy}^2(1-\eta)^2]^{1/2}} =$$

$$= \int_{C_m^*(g)} \theta(t-r_{xy})(t-r_{xy})^{1/2} dC_y \int_0^1 \frac{d\eta}{(1-\eta)^{1/2} [t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{1/2}}, \quad (2)$$

$$\int_0^t d\tau \int_{C_m^*(g)} \frac{\partial}{\partial g} \left(\frac{\theta(t-\tau-r_{xy})}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} \right) dC_y = -\frac{1}{2} \int_{C_m^*(g)} \theta(t-r_{xy})(t-r_{xy})^{-1/2} \frac{\partial r_{xy}}{\partial g} dC_y \int_0^1 (1-\eta)^{-1/2} \times$$

$$\times [t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{-1/2} d\eta - \frac{1}{2} \int_{C_m^*(g)} \theta(t-r_{xy})(t-r_{xy})^{1/2} dC_y \int_0^1 \frac{\frac{\partial r_{xy}}{\partial g} (1+\eta) d\eta}{(1-\eta)^{1/2} [t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{3/2}}. \quad (3)$$

Поскольку $x \in L$, то $r_{xy} > 0$. Это значит, что при $\eta \in [0, 1]$ $t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta) > 0$. Нетрудно видеть, что при конечных значениях t интегралы (2) и (3) существуют, так как содержат интегрируемые особенности вида $(1-\eta)^{-1/2}$ и $(t-r_{xy})^{-1/2}$.

Пусть $t \rightarrow \infty$. Тогда справедливы оценки

$$\int_0^1 (1-\eta)^{-1/2} [t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{-1/2} d\eta = \int_{1-t^{-1}}^1 (1-\eta)^{-1/2} [t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{-1/2} d\eta +$$

$$+ t^{-1/2} \int_0^{1-t^{-1}} (1-\eta)^{-1/2} [(1-\eta) + 0(t^{-1})]^{-1/2} d\eta = O(t^{-1}) + O(t^{-1/2}) \ln t = O(t^{-1/2} \ln t)$$

$$\int_0^1 \frac{\frac{\partial r_{xy}}{\partial g} (1+\eta) d\eta}{[t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{3/2} (1-\eta)^{1/2}} = \int_{1-t^{-3/4}}^1 \frac{\frac{\partial r_{xy}}{\partial g} (1+\eta) d\eta}{[t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{3/2} (1-\eta)^{1/2}} +$$

$$+ t^{-3/2} \int_0^{1-t^{-3/4}} \frac{\frac{\partial \sqrt{x y}}{\partial s} (1+\eta) d\eta}{[(1-\eta) + O(t^{-1})]^{3/2} (1-\eta)^{1/2}} = O(t^{-3/4}) + O(t^{-3/2}) t^{3/4} = O(t^{-3/4}).$$

Подставляя эти оценки в формулы (2) и (3), получим

$$\int_0^t d\tau \int_{C_m^*(g)} \frac{\theta(t-\tau-r_{xy}) dC_y}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} = O(t^{1/2}) O(t^{-1/2} \ln t) \text{mes}(C_m^*(g)) =$$

$$= O(\ln t) \text{mes}(C_m^*(g)),$$

$$\int_0^t d\tau \int_{C_m^*(g)} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\theta(t-\tau-r_{xy})}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} \right) dC_y = O(t^{-1/2}) O(t^{-1/2} \ln t) \text{mes}(C_m^*(g)) +$$

$$+ O(t^{1/2}) O(t^{-3/4}) \text{mes}(C_m^*(g)) = O(t^{-1/4}) \text{mes}(C_m^*(g)).$$

Подставляя доказанные соотношения в оценку (I), получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u^*(x, t)| \leq \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ g \rightarrow 0}} \{ o(t^{-\gamma_1} g^{-1}) O(\ln t) O(g) + c_n O(t^{-1/4}) O(g) \} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \{ O(t^{-\gamma_1} \ln t) \lim_{g \rightarrow 0} (1) + c_n t^{-1/4} \lim_{g \rightarrow 0} O(g) \} = 0.$$

Поскольку при конечных значениях t интегралы (2) и (3) существуют, то в этом случае

$$|u^*(x, t)| \leq \lim_{g \rightarrow 0} \{ o(g^{-1}) O(g) + c_n O(g) \} = 0.$$

Таким образом предел (I.12) всегда равен нулю.

Исследуем теперь предел (I.13). Очевидно, что при конечных значениях t он равен 0. Поэтому рассматриваем случай $t \rightarrow \infty$. Из условий (I.6) следует, что

$$u(x, t) = o(t^{-3/4}), \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) = O(t^{-\delta_2}) \quad i=1, 2.$$

при $|x| \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$. Поэтому справедлива оценка

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |u^{**}(x, t)| &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \infty}} \left\{ O(t^{-\delta_2}) \int_0^t d\tau \int_{S_R} \frac{\theta(t-\tau-r_{xy}) dS_y}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} + \right. \\ &+ \left. o(t^{-3/4}) \int_0^t d\tau \int_{S_R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\theta(t-\tau-r_{xy})}{[(t-\tau)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} \right) dS_y \right\}. \end{aligned}$$

Интегралы в полученной оценке можно оценить так же, как это сделано выше. При этом надо учитывать, что $\text{mes}(S_R) = O(R)$ и что величина $(t-r_{xy})$ не обязательно стремится к бесконечности, поскольку $y \in S_R$, а $R \rightarrow \infty$. При этом возможны еще варианты: $t/r_{xy} \rightarrow \text{const} > 1$, $t-r_{xy} \rightarrow \text{const} \gg 0$.

Однако, в первом случае выражение $[t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{-\delta} / t^{-\delta}$ при $t \rightarrow \infty$ не имеет особенности $(1-\eta)^{-\delta}$, а во втором — еще и выражение $(t-r_{xy})^{\delta}$ принимает конечные значения. Поэтому оценки, полученные в случае $t-r_{xy} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ являются всеобщими и выполняются для упомянутых выше вариантов. Значит оценку для $u^{**}(x, t)$ можно продолжить следующим образом:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |u^{**}(x, t)| &= \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ R \rightarrow \infty}} \left\{ O(t^{-\delta_2}) O(\ln t \cdot R) + o(t^{-3/4}) O(t^{-1/4} R) \right\} \leq \\ &\leq \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ R \rightarrow \infty}} \left\{ O(t^{1-\delta_2} \ln t) + o(t^{-1} R) \right\} = 0. \end{aligned}$$

При этом мы учитывали, что $t \geq R$, поскольку в противном случае интегралы под знаком предела в оценке стремятся к нулю.

Таким образом $u^{**}(x, t) = 0$ и лемма 1.2 доказана.

Лемма 2.1. Если решение задачи (1.17)-(1.23) существует, оно представляется в виде

$$u(x, t) = \iint_S q(y, t - r_{xy}) \theta(t - r_{xy}) r_{xy}^{-1} dS_y \quad x \in D_\varepsilon^3, t \geq 0, \quad (1.24)$$

где $q(y, t) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial u^-}{\partial n}(y, t) - \frac{\partial u^+}{\partial n}(y, t) \right)$, $\frac{\partial u^\pm}{\partial n}(y, t) = \lim_{y' \rightarrow y \in S^\pm} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(y', t) \right)$.

Доказательство леммы 2.1.

Предположим, что решение $u(x, t)$ задачи (1.17)-(1.23) существует. Обозначим через $M_j = S_j^*(\varrho) \cup S_j^{(+)} \cup S_j^{(-)}$ поверхность, охватывающую поверхность S_j . При этом, $S_j^{(+)} (S_j^{(-)})$ - фрагменты кусочно-гладких поверхностей расположенных на расстоянии $\varrho' < \varrho$ по одну (положительную или отрицательную) сторону от S_j . Будем считать, $\Omega_{\varrho, R}$ конечной областью в R^3 , ограниченной сферой $C_R = \{y \mid |y| = R\}$ достаточно большого радиуса и поверхностью $M = \bigcup_{j=1}^N M_j$. Пусть \bar{p} - внешняя нормаль к границе области $\Omega_{\varrho, R}$.

Рассмотрим решение задачи (1.17)-(1.23) в области $\Omega_{\varrho, R}^\Gamma = \Omega_{\varrho, R} \times [0, \infty)$, доопределив его нулем вне этой области. Таким образом мы получаем некоторую функцию $\tilde{u}(x, t)$, определенную в R^4 . По построению, внутри области $\Omega_{\varrho, R}^\Gamma$ функция $\tilde{u}(x, t)$ удовлетворяет волновому уравнению, а вне области - тождественный ноль. На границе же области эта функция, а также ее первые производные могут иметь конечные разрывы. Поэтому, воспользовавшись формулами дифференцирования разрывных функций [7], с учетом условий

(I.18), можно записать следующее соотношение для \tilde{u} в R^4 :

$$\square \tilde{u}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_M \delta_M + \frac{\partial}{\partial \rho} (u \Big|_M \delta_M) + \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_c \delta_c + \frac{\partial}{\partial \rho} (u \Big|_c \delta_c) \quad (4)$$

Исходя из полученного соотношения и используя фундаментальное решение однородного волнового уравнения, можно построить интегральное представление функции $\tilde{u}(x, t)$. Рассмотрим для примера следующую свертку:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} (u \Big|_M \delta_M) * \left(\frac{\theta(t)}{4\pi t} \delta_{S_t}(x) \right) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_M u(y, \tau) \theta(t-\tau) (t-\tau)^{-2} \delta_{S_{t-\tau}}(x-y) dS_M = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_M u(y, t-r_{xy}) \theta(r_{xy}) r_{xy}^{-1} dS_M = \frac{1}{4\pi} \int_M u'_t(y, t-r_{xy}) \frac{\partial r_{xy}}{\partial \rho} r_{xy}^{-1} dS_M - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_M u(y, t-r_{xy}) \frac{\partial}{\partial \rho} (r_{xy}^{-1}) dS_M = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_M u'_t(y, t-r_{xy}) \theta(t-r_{xy}) \frac{\partial r_{xy}}{\partial \rho} r_{xy}^{-1} dS_M - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_M u(y, t-r_{xy}) \theta(t-r_{xy}) \frac{\partial}{\partial \rho} (r_{xy}^{-1}) dS_M. \end{aligned}$$

Здесь использован тот факт, что $\theta(r_{xy}) \geq 0$ и $u(y, t) = u'_t(y, t) = 0$ при $t \leq 0$. Полученное выражение является локально-интегрируемой функцией. Но это значит, что следующее представление имеет место в обычном смысле

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_M \left\{ \frac{\partial u}{\partial \rho} (y, t-r_{xy}) r_{xy}^{-1} - u(y, t-r_{xy}) \frac{\partial}{\partial \rho} (r_{xy}^{-1}) + \right.$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial t}(y, t-r_{xy}) \frac{\partial}{\partial \bar{p}} (r_{xy}) r_{xy}^{-1} \} \theta(t-r_{xy}) dM_y + \frac{1}{4\pi} \int_C \left\{ \frac{\partial u}{\partial \bar{p}}(y, t-r_{xy}) r_{xy}^{-1} - \right. \\ \left. - u(y, t-r_{xy}) \frac{\partial}{\partial \bar{p}} (r_{xy}^{-1}) + \frac{\partial u}{\partial t}(y, t-r_{xy}) \frac{\partial}{\partial \bar{p}} (r_{xy}) r_{xy}^{-1} \right\} \theta(t-r_{xy}) dC_y.$$

Записывая это представление для случая $(x, t) \in \Omega_{S, R}^T$ и используя предельный переход при $\delta \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$, получим

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \left[\sum_{j=1}^N \int_{S_j} \{ \theta(t-r_{xy}) \left[\frac{\partial u^-}{\partial n}(y, t-r_{xy}) - \frac{\partial u^+}{\partial n}(y, t-r_{xy}) \right] r_{xy}^{-1} dS_y - \right.$$

$$\left. - \int_{S_j} \theta(t-r_{xy}) [u^-(y, t-r_{xy}) - u^+(y, t-r_{xy})] \frac{\partial}{\partial n} (r_{xy}^{-1}) dS_y + \right.$$

$$\left. + \int_{S_j} \theta(t-r_{xy}) \left[\frac{\partial u^-}{\partial t}(y, t-r_{xy}) - \frac{\partial u^+}{\partial t}(y, t-r_{xy}) \right] \frac{\partial}{\partial n} (r_{xy}) r_{xy}^{-1} dS_y + \right.$$

$$\left. + u_j^*(x, t) \right\} + u^{**}(x, t) \quad x \in \mathcal{D}_c^3, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

где $u_j^*(x, t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_j^*(\delta)} \theta(t-r_{xy}) \left[\frac{\partial u}{\partial \bar{p}}(y, t-r_{xy}) r_{xy}^{-1} - \right.$

$$\left. - u(y, t-r_{xy}) \frac{\partial}{\partial \bar{p}} (r_{xy}^{-1}) + \frac{\partial u}{\partial t}(y, t-r_{xy}) \frac{\partial}{\partial \bar{p}} (r_{xy}) r_{xy}^{-1} \right] dS_y, \quad (6)$$

$$u^{**}(x, t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \theta(t-r_{xy}) \left[\frac{\partial u}{\partial \bar{p}}(y, t-r_{xy}) r_{xy}^{-1} - \right.$$

$$-u(y, t-r_{xy}) \frac{\partial}{\partial R} (r_{xy}^{-1}) + \frac{\partial u}{\partial t} (y, t-r_{xy}) \frac{\partial}{\partial R} (r_{xy}) r_{xy}^{-1} \Big] dS_y. \quad (7)$$

Как следует из условия (I.19), $u^-(y, t) = u^+(y, t) = f(y, t)$ в любой момент времени t . Поэтому второй и третий интегралы в полученном соотношении (5) равны нулю. Поскольку решение задачи (I.17)-(I.23) существует, то существуют и пределы (6), (7). Вычислим их.

Из условия (I.21) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial g} (y, t) = o(g^{-1}), \quad \frac{\partial u}{\partial t} (y, t) = o(g^{-1}) \quad \text{при } y \in S_j^*(g) \quad j = \overline{1, N}, \quad g \rightarrow 0,$$

а из условия непрерывности функции $u(x, t)$ в пространстве $R^3 \times [0, \infty)$ следует, что $|u(y, t)| \leq c_u \quad y \in S_j^*(g) \quad j = \overline{1, N}, \quad g \rightarrow 0$.

Поэтому предел (6) можно оценить следующим образом

$$\begin{aligned} |u_j^*(x, t)| \leq \lim_{g \rightarrow 0} \left\{ o(g^{-1}) \int_{S_j^*(g)} \theta(t-r_{xy}) r_{xy}^{-1} dS_y + c_u \left| \int_{S_j^*(g)} \theta(t-r_{xy}) \frac{\partial}{\partial g} (r_{xy}) r_{xy}^{-2} dS_y \right| + \right. \\ \left. + o(g^{-1}) \int_{S_j^*(g)} \theta(t-r_{xy}) \frac{\partial r_{xy}}{\partial g} r_{xy}^{-1} dS_y \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку $x \in \mathcal{D}_c^3$, то существует такое $g_0 > 0$, что для всех $g \geq g_0$ справедливо $r_{xy} \neq 0 \quad (y \in S_j^*(g))$. Учитывая, что $|\partial r_{xy} / \partial g| \leq 1$, заключаем, что подинтегральные функции в правой части соотношения (8) непрерывны. Значит, при $g \rightarrow 0$ интегралы в правой части (8) можно оценить величиной порядка $O(\text{mes}[S_j^*(g)]) = O(g)$. Но это означает, что сумма интегралов в правой части формулы (8) имеет порядок $O(1)$. Значит пределы (8) и (6) равны нулю.

Оценим предел (7). Из условий (I.22) и (I.23) следует, что

$$u(y, t) = O(R^{-1}), \quad \left| \frac{\partial u}{\partial y} (y, t) + \frac{\partial u}{\partial t} (y, t) \right| = o(R^{-1}) \quad \text{при } y \in C_R \quad R \rightarrow \infty \quad (9)$$

При $R \rightarrow \infty$, $y \in C_R$ имеют место соотношения

$$r_{xy} = [|x|^2 + R^2 - 2|x| \cdot R \cdot \cos \varphi_{xy}]^{1/2} = R - \cos \varphi_{xy} \cdot |x| +$$

$$+ (1 - \cos^2 \varphi_{xy}) \frac{|x|^2}{2} R^{-1} + O(R^{-2}),$$

$$\frac{\partial r_{xy}}{\partial R} = 1 - 2 \cos \varphi_{xy} \cdot |x| \cdot R^{-1} + O(R^{-2}),$$

$$r_{xy}^{-1} = R^{-1} (1 + \cos \varphi_{xy} \cdot |x| \cdot R^{-1} + O(R^{-2})),$$

$$\frac{\partial r_{xy}^{-1}}{\partial R} = -R^{-2} + O(R^{-3}),$$

где φ_{xy} - угол между векторами \vec{Ox} и \vec{Oy} . Используя оценки (9) получаем

$$|u^{**}(x, t)| = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ (R^{-1} + O(R^{-2})) \int_{C_R} \theta(t - r_{xy}) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(y, t - r_{xy}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial u}{\partial t}(y, t - r_{xy}) |dS_y + (R^{-2} + O(R^{-3})) \int_{C_R} \theta(t - r_{xy}) |u(y, t - r_{xy})| dS_y \right\} =$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ o(R^{-1}) (R^{-1} + O(R^{-2})) O(R^2) + O(R^{-1}) (R^{-2} + O(R^{-3})) O(R^2) \right\} =$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ o(1) + o(R^{-1}) + O(R^{-1}) + O(R^{-2}) \right\} = 0.$$

Значит и предел (7) равен 0. Тем самым лемма 2.1 доказана.

Теорема 2. Если решение задачи (I.17)-(I.23) существует, оно представляется в виде

$$u(x,t) = \iint_S q(y,t-r_{xy}) \theta(t-r_{xy}) r_{xy}^{-1} dS_y \quad x \in D_2^3, t \geq 0, \quad (I.24)$$

причем $q(y,t)$ удовлетворяет следующим требованиям

$$\iint_S q(y,t-r_{xy}) \theta(t-r_{xy}) r_{xy}^{-1} dS_y = f(x,t) \quad x \in S, t \geq 0, \quad (I.25)$$

$$q(x,0) = f(x,0) = f'_t(x,0) = 0 \quad x \in S, \quad (I.26)$$

$$|f(x,\omega)| < \omega, \quad q(x,t) \in Q_S^2, \quad (I.27)$$

где Q_S^2 - класс функций, определенных на $S \times [0, \omega)$, которые при подстановке вместо $q(y,t)$ в формулу (I.24) определяют такую функцию $u(x,t)$, что $u \in C^1[D_2^3 \times [0, \omega)]$ и выполняется условие (I.21).

И наоборот, если решение задачи (I.17)-(I.23) существует, то формула (I.24) дает решение задачи (I.17)-(I.23).

Доказательство теоремы 2.

Докажем первую часть теоремы. Пусть решение задачи (I.17)-(I.23) существует. Согласно лемме 2.1, оно представляется в виде (I.24). Устремляя в (I.24) x к S и учитывая непрерывность волнового потенциала простого слоя при переходе через граничную поверхность, с помощью граничного условия (I.19) получаем ИУ (I.25). Отсюда, а также из условия $f'_t(x,0) = 0$ и свойств волнового потенциала простого слоя [7] заключаем, что справедливо условие $q(y,0) = 0$. Поскольку $u(x,t)$ является решением задачи (I.17)-(I.23) и справедливо представление (I.24), то $q(y,t) \in Q_S^2$. Первая часть теоремы доказана.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть существует такая функция $q(y,t)$, что выполняются условия (I.25)-(I.27). Покажем, что

функция $u(y, t)$, определяемая представлением (I.24), является решением задачи (I.17)-(I.23).

Действительно, условия $u \in C^1[\mathcal{D}_e^3 \times [0, \infty)]$ и (I.21) выполняются благодаря соотношению (I.27). Условия (I.17) и (I.18) а также требование $\square u \in C[\mathcal{D}_e^3 \times [0, \infty)]$ удовлетворяются благодаря свойствам волнового потенциала простого слоя и условию (I.26). Условие (I.19) эквивалентно ИУ (I.25). Выполнение условий (I.22) и (I.23) проверим непосредственно. Действительно, при $|x| \rightarrow \infty$ справедливы соотношения

$$r_{xy} = [|x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos\varphi_{xy}]^{1/2} = |x| - \cos\varphi_{xy} \cdot |y| + \\ + (1 - \cos^2\varphi_{xy}) \frac{|y|^2}{2} |x|^{-1} + O(|x|^{-2}),$$

$$\frac{\partial r_{xy}}{\partial x} = 1 - 2\cos\varphi_{xy} \cdot |y| |x|^{-1} + O(|x|^{-2}),$$

$$r_{xy}^{-1} = |x|^{-1} (1 + \cos\varphi_{xy} \cdot |y| \cdot |x|^{-1} + O(|x|^{-2})),$$

$$\frac{\partial r_{xy}}{\partial x} = -|x|^{-2} + O(|x|^{-3}),$$

где φ_{xy} - угол между векторами \vec{Ox} и \vec{Oy} . Кроме этого, из условия (I.27) следует, что функции $q(y, t)$ и $q'_t(y, t)$ интегрируемы на S . Значит, при $|x| \rightarrow \infty$ имеют место соотношения

$$|u(x, t)| = \iint_S |q(y, t - r_{xy})| \theta(t - r_{xy}) r_{xy}^{-1} dS_y = |x|^{-1} \iint_S |q(y, t - r_{xy})| \times \\ \times \theta(t - r_{xy}) dS_y + O(|x|^{-2}) = O(|x|^{-1}),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} (x, t) + \frac{\partial u}{\partial t} (x, t) &= \iint_S \theta(t-r_{xy}) \left\{ q(y, t-r_{xy}) \frac{\partial}{\partial x} (r_{xy}^{-1}) - \right. \\ &\quad \left. - q'_t(y, t-r_{xy}) \frac{\partial r_{xy}}{\partial x} r_{xy}^{-2} \right\} dS_y + \iint_S q'_t(y, t-r_{xy}) \theta(t-r_{xy}) r_{xy}^{-1} dS_y = \\ &= |x|^{-2} \iint_S \theta(t-r_{xy}) q(y, t-r_{xy}) dS_y - |x|^{-1} \iint_S \theta(t-r_{xy}) q'_t(y, t-r_{xy}) dS_y + \\ &\quad + |x|^{-1} \iint_S \theta(t-r_{xy}) q'_t(y, t-r_{xy}) dS_y + O(|x|^{-2}) = O(|x|^{-2}). \end{aligned}$$

Но это равносильно выполнению условий (I.22), (I.23).

Теорема 2 доказана.

Лемма 3.1. Если функция $f(x, t)$ принадлежит пространству $C^{1+k}_{\omega, S}(\bar{L}) \times C^1[0, \infty)$, то для любых конечных значений N и M решение последовательности стационарных ИУ (I.28) существует и единственно в пространстве $C^M_{\omega, S}(\bar{L})$.

Доказательство леммы 3.1. Рассмотрим интегралы, встречающиеся в правых частях последовательности ИУ (I.28). А именно, покажем, что при $q^k_{N, j}(y) \in C^M_{\omega, S}(\bar{L})$ интегралы вида

$$\int_L q^k_{N, i-1}(y) \ln \frac{1}{r_{xy}} dL_y, \quad (10)$$

$$\int_L q^k_{N, j}(y) \varphi(\tau^k_{i+1} - \tau^k_e, r_{xy}) dL_y, \quad (11)$$

$$k = \overline{1, M}, \quad i = \overline{1, N}, \quad j < i, \quad \ell \in \{j, j+1\}, \quad x \in L,$$

принадлежит классу функций $C_{\omega, \delta}^{1+\mu}(\bar{L})$. Для этого продифференцируем выражения (I0)-(II) по произвольной компоненте x_i переменной x

$$-\int q_{N, i-1}^k(y) r_{xy}^{\mu-1} \frac{\partial r_{xy}}{\partial x_i} dL_y, \quad (I2)$$

$$-\int_L q_{N, j}^k(y) \theta(\tau_{i+1}^k - \tau_e^k - r_{xy}) r_{xy}^{\mu-1} \frac{\partial r_{xy}}{\partial x_i} \frac{\tau_{i+1}^k - \tau_e^k}{[(\tau_{i+1}^k - \tau_e^k)^2 - r_{xy}^2]^{1/2}} dL_y. \quad (I3)$$

Интеграл (I2) содержит только сингулярную особенность вида $r_{xy}^{\mu-1} \frac{\partial r_{xy}}{\partial x_i}$. Интеграл (I3) содержит сингулярную особенность вида $r_{xy}^{\mu-1} \frac{\partial r_{xy}}{\partial x_i}$ и слабую особенность вида $[(\tau_{i+1}^k - \tau_e^k)^2 - r_{xy}^2]^{-1/2}$. Поскольку $h_N \neq 0$, то особенности не совпадают и не взаимоусиливаются.

Учитывая свойства интегралов со слабыми и сингулярными особенностями [4I], гладкость контура L и функций $q_{N, j}^k(y)$, можно сделать вывод о том, что интегралы (I2) и (I3) принадлежат классу функций $C_{\omega, \delta}^{\mu}(\bar{L})$. Но это и будет означать, что интегралы вида (II)-(I2) принадлежат классу $C_{\omega, \delta}^{1+\mu}(\bar{L})$.

Рассмотрим первое ИУ последовательности (I.28). Используя результаты работ [I8, 4I], можем заключить, что для любого конечного N решение первого ИУ (I.28) существует и единственно в классе функций $C_{\omega, \delta}^{\mu}(\bar{L})$. Но из вышесказанного будет следовать, что правая часть второго ИУ из последовательности (I.28) принадлежит классу $C_{\omega, \delta}^{1+\mu}(\bar{L})$. А это значит, что и решение второго ИУ существует в требуемом классе. Продолжая этот процесс, при конечных значениях M и N получаем утверждение леммы.

Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. При $N \rightarrow \infty$, $M = [N^{1/4}]$ для решений последовательности ИУ (1.28) имеют место соотношения

$$\| \varphi_{N,i}^1(y) \|_{C_{w,\delta}^{\mu}(\bar{L})} \leq c_0 (C_{f,0} + \tilde{u}_N) h_N \quad i=1,2, \quad (I4)$$

$$\| \varphi_{N,i}(y) \|_{C_{w,\delta}^{\mu}(\bar{L})} \leq c_0 C_{f,1} + u_N \quad \dot{I} = \overline{1, \dot{I}_1}, \quad (I5)$$

$$\| \varphi_{N,i}(y) - \varphi_{N,i-1}(y) \|_{C_{w,\delta}^{\mu}(\bar{L})} \leq c_0 (C_{f,2} + v_N) h_N \quad \dot{I} = \overline{2, \dot{I}_1}, \quad (I6)$$

$$\| \varphi_{N,i}(y) - 2\varphi_{N,i-1}(y) + \varphi_{N,i-2}(y) \|_{C_{w,\delta}^{\mu}(\bar{L})} \leq \tilde{z}_N h_N \quad \dot{I} = \overline{3, \dot{I}_1}, \quad (I7)$$

$$\dot{I} = m(p, j), \quad \dot{I}_1 = m(M, N), \quad j \in [1, N],$$

$$m(p, j) = (j+1) + (p-2)(N+1) + N,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{u}_N = \lim_{N \rightarrow \infty} u_N = \lim_{N \rightarrow \infty} v_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{z}_N = 0,$$

$$c_0 > 0, \quad C_{f,1} = \sup_{t \geq 0} \| f(x, t) \|_{C_{w,\delta}^{1+\mu}(\bar{L})},$$

$$C_{f,2} = \sup_{t \geq 0} \| f'_t(x, t) \|_{C_{w,\delta}^{1+\mu}(\bar{L})}, \quad C_{f,0} = 3 C_{f,2}.$$

Доказательство леммы 3.2.

На основании работ [18], [41] можно сделать вывод о непрерывной зависимости от правой части f решения q ИУ Фредгольма первого рода с логарифмическим ядром, правая часть которого принадлежит пространству $C_{\omega, \delta}^{1+\mu}(\bar{L})$. Пусть для данной поверхности L такая зависимость характеризуется константой $c_0 > 0$ и неравенством вида

$$\|q\|_{C_{\omega, \delta}^{\mu}(\bar{L})} \leq c_0 \|f\|_{C_{\omega, \delta}^{1+\mu}(\bar{L})}.$$

Этот факт мы будем постоянно использовать при доказательстве леммы. Так из первого ИУ последовательности I.28 с учетом того, что $f(x, 0) = 0$, следует оценка

$$\|q_{N,1}^1(x)\|_{C_{\omega, \delta}^{\mu}(\bar{L})} \leq c_0 \sup_{t \geq 0} \|f'_t(x, t)\|_{C_{\omega, \delta}^{1+\mu}(\bar{L})} h_N.$$

Если вместо интеграла содержащего $\ln \frac{1}{r_{xy}}$ в правой части второго ИУ подставить его значение, определяемое всей правой частью первого ИУ, получим следующее соотношение

$$\int_L q_{N,2}^1(y) \ln \frac{1}{r_{xy}} dL_y = f(x, \tau_3^1) - f(x, \tau_2^1) + \int_L q_{N,1}^1(y) \{ \Psi(\tau_3^1 - \tau_2^1, r_{xy}) - \Psi(\tau_3^1 - \tau_1^1, r_{xy}) \} dL_y.$$

Отсюда можно получить оценку

$$\|q_{N,2}^1(x)\|_{C_{\omega, \delta}^{\mu}(\bar{L})} \leq c_0 \left[3 \sup_{t \geq 0} \|f'_t(x, t)\|_{C_{\omega, \delta}^{1+\mu}(\bar{L})} h_N + c_0 \sup_{t \geq 0} \|f'_t(x, t)\|_{C_{\omega, \delta}^{1+\mu}(\bar{L})} h_N \left\| \int_L \{ \Psi(h_N, r_{xy}) - \Psi(2h_N, r_{xy}) \} dL_y \right\|_{C_{\omega, \delta}^{1+\mu}(\bar{L})} \right] \leq$$

$$\leq c_0 h_N \left[3 \sup_{t \geq 0} \|f'_t(x, t)\|_{C_{\omega, \delta}^{1+\mu}(\bar{L})} + 2 c_0 \sup_{t \geq 0} \|f'_t(x, t)\|_{C_{\omega, \delta}^{1+\mu}(\bar{L})} \times c_1 h_N^{1/2} \right],$$

где c_1 не зависит от N . Здесь для оценки членов, содержащих функцию $f(x, t)$ используется разложение последней в окрестности точки $t=0$. Учтено также, что функции $\varphi'_{x_i}(h_N, r_{xy}), \varphi'_{x_i}(2h_N, r_{xy})$ при $h_N \rightarrow 0$ имеют особенности вида $r_{xy}^{-1} \frac{\partial r_{xy}}{\partial x_i}, \theta(kh_N - r_{xy}) [1 - r_{xy}/kh_N]^{-1/2}$ ($k=1, 2$) а области их интегрирования соразмерны с h_N . Значит рассматриваемый интеграл в норме $C_{\omega, \delta}^{1+\mu}(\bar{L})$ при $h_N \rightarrow 0$ может быть оценен величиной $c_1 h_N^{1/2}$. Приведенными соотношениями доказывается оценка (I4).

Чтобы доказать оценки (I5)-(I6) преобразуем ИУ последовательности (I.28). Вместо интеграла, содержащего $\ln \frac{1}{r_{xy}}$ в правой части ИУ, подставим его значение, которое равняется всей правой части предыдущего ИУ. Этот процесс продолжаем до тех пор, пока не подставим правую часть первого ИУ. Таким образом, аналогично вышеуказанному представлению второго ИУ, может быть построено представление, например, шестого ИУ. После перегруппировки членов в его правой части и с учетом тождества $\tau_{N,i}^k - \tau_{N,j}^k = \tau_{N,i-1}^k - \tau_{N,j-1}^k$, получаем следующее соотношение

$$\int_L \varrho_{N,6}^1(y) \ln \frac{1}{r_{xy}} dL_y = f(x, \tau_7^1) - f(x, \tau_6^1) + \dots - f(x, \tau_2^1) +$$

$$+ \int_L \{ \varrho_{N,5}^1(y) - \varrho_{N,4}^1(y) + \varrho_{N,3}^1(y) - \varrho_{N,2}^1(y) + \varrho_{N,1}^1(y) \} \{ \varphi(\tau_7^1 - \tau_6^1, r_{xy}) -$$

$$- \varphi(\tau_7^1 - \tau_5^1, r_{xy}) \} dL_y + \int_L \{ \varrho_{N,4}^1(y) - \varrho_{N,3}^1(y) + \varrho_{N,2}^1(y) - \varrho_{N,1}^1(y) \} \times$$

$$x \left\{ \Psi(\tau_7^1 - \tau_5^1, r_{xy}) - \Psi(\tau_7^1 - \tau_4^1, r_{xy}) \right\} dh_y + \dots +$$

$$+ \int_L q_{N,1}^1(y) \left\{ \Psi(\tau_7^1 - \tau_2^1, r_{xy}) - \Psi(\tau_7^1 - \tau_1^1, r_{xy}) \right\} dh_y.$$

Полученное ИУ можно записать и в другом виде

$$\int_L q_{N,6}^1(y) \ln \frac{1}{r_{xy}} dh_y = f(x, \tau_7^1) - f(x, \tau_6^1) + \dots - f(x, \tau_2^1) +$$

$$+ \int_L q_{N,5}^1(y) \left\{ \Psi(\tau_7^1 - \tau_6^1, r_{xy}) - \Psi(\tau_7^1 - \tau_5^1, r_{xy}) \right\} dh_y +$$

$$+ \int_L q_{N,3}^1(y) \left\{ \Psi(\tau_7^1 - \tau_4^1, r_{xy}) - \Psi(\tau_7^1 - \tau_3^1, r_{xy}) \right\} dh_y +$$

$$+ \int_L q_{N,1}^1(y) \left\{ \Psi(\tau_7^1 - \tau_2^1, r_{xy}) - \Psi(\tau_7^1 - \tau_1^1, r_{xy}) \right\} dh_y - \int_L \left\{ q_{N,4}^1(y) -$$

$$- q_{N,3}^1(y) + q_{N,2}^1(y) - q_{N,1}^1(y) \right\} \left\{ \Psi(\tau_7^1 - \tau_6^1, r_{xy}) - 2\Psi(\tau_7^1 - \tau_5^1, r_{xy}) +$$

$$+ \Psi(\tau_7^1 - \tau_4^1, r_{xy}) \right\} dh_y - \int_L \left\{ q_{N,2}^1(y) - q_{N,1}^1(y) \right\} \left\{ \Psi(\tau_7^1 - \tau_4^1, r_{xy}) -$$

$$- 2\Psi(\tau_7^1 - \tau_2^1, r_{xy}) \right\} dh_y.$$

По аналогии, в общем случае справедливо представление

$$\int_L \varrho_{N,i}(y) \ln \frac{1}{r_{xy}} dL_y = \{f(x, \tau_{N,i+1}) - f(x, \tau_{N,i}) + \dots + (-1)^{i+1} f(x, \tau_{N,2})\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{i-1} \int_L \varrho_{N,j}(y) \{ \Psi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,j+1}, r_{xy}) - \Psi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,j}, r_{xy}) \} dL_y -$$

$$- \sum_{j=0}^{M_1(K,i)} \sum_{l=1}^{M_2(I,j)} \int_L \{ \varrho_{N,i-2j-2l}(y) - \varrho_{N,i-2j-2l-1}(y) \} \{ \Psi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j}, r_{xy}) -$$

(18)

$$- 2 \Psi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j-1}, r_{xy}) + \Psi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j-2}, r_{xy}) \} dL_y -$$

$$- B_i \sum_{j=0}^{M_1(K,i)} \int_L \varrho_{N,1}(y) \{ \Psi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j}, r_{xy}) - 2 \Psi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j-1}, r_{xy}) +$$

$$+ \Psi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j-2}, r_{xy}) \} dL_y,$$

где $I = m(K, i)$, $M_1(K, i) = \left[\frac{m(K, i) - 4}{2} \right]$,

$$B_i = \begin{cases} 0 & I - \text{четное,} \\ 1 & I - \text{нечетное,} \end{cases} \quad M_2(I, j) = \left[\frac{i - 2j - 2}{2} \right],$$

$[\cdot]$ - целая часть от числа, \sum' - обозначает суммирование, начиная от последнего индекса и с пропуском всех четных слагаемых.

Допустим, что условия (I5) и (I6) выполняются для $p = \overline{1, K}$

$\rho = K, j = \overline{0, i-1}$. Покажем, что в этом случае соотношение (15) выполняется при $\rho = K, j = i$. С этой целью оценим правую часть ИУ (16) по норме пространства $C_{\omega, S}^{1+\mu}(\bar{L})$.

Начнем с последнего слагаемого. Функцию $\varphi_{N,1}(y)$ оцениваем используя формулу (14). При $h_N \rightarrow 0$ ядро рассматриваемого интеграла можно представить в виде $\{\Psi'_\tau(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j-1/2}, \tilde{r}_{xy}) - \Psi'_\tau(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j-3/2}, \tilde{r}_{xy})\} h_N$. Но поскольку Ψ'_τ эквивалентно ядру ИУ (1.14), а суммирование подынтегрального выражения по j при $h_N \rightarrow 0$ эквивалентно интегрированию по τ , то выражение вида

$$\sum_{j=0}^{M_1(K,i)} h_N \int_L \Psi'_\tau(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j-1/2}, \tilde{r}_{xy}) dL_y$$

является конечной величиной в норме пространства $C_{\omega, S}^{1+\mu}(\bar{L})$. Этот факт следует из оценки интегралов от функций Ψ'_τ и $\Psi''_{\tau x_i}$ при доказательстве леммы 2.1 (см. Приложение). Нетрудно заметить, что функция $\Psi'_\tau(\tau, \tilde{r}_{xy})$ является бесконечно дифференцируемой почти всюду на $\bar{L} \times [0, \infty)$. Поэтому выражение

$$\sum_{j=0}^{M_1(K,i)} h_N \int_L \{\Psi'_\tau(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j-1/2}, \tilde{r}_{xy}) - \Psi'_\tau(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j-3/2}, \tilde{r}_{xy})\} dL_y$$

при $N \rightarrow \infty, K \rightarrow \infty$ в норме пространства $C_{\omega, S}^{1+\mu}(\bar{L})$ не превышает величины $c_2 h_N$, где $c_2 > 0$ не зависит от N, K, i, j .

Суммируя: заключаем, что рассматриваемой слагаемое в норме пространства $C_{\omega, S}^{1+\mu}(\bar{L})$ является величиной порядка $B_i c_0 c_2 c_{f,0} h_N^2$.

Аналогичным образом оцениваем и третью компоненту в правой части ИУ (18). Разницу плотностей оцениваем с помощью соотношения (16) при $\rho = \overline{1, K}, j = \overline{0, i-1}$. Аналогично предыдущему заключаем, что

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{\ell=1}^{M_2(I,j)} \sum_{j=0}^{M_1(K,i)} h_N \int_L \left\{ \Psi'_\tau(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j-1/2}, r_{xy}) - \Psi'_\tau(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j-3/2}, r_{xy}) \right\} \right\|_{C_{\omega, S}^{1+\mu}(\bar{L})} \leq \\ & \leq \sum_{\ell=1}^{M_2(I,0)} c_2 h_N < c_2 \sum_{\ell=1}^{m(K,i)} h_N = c_2 M = c_2 h_N^{-1/4}. \end{aligned}$$

Суммируя, получаем следующую оценку рассматриваемой компоненты:

$$C_0 c_2 C_{f,2} h_N^{3/4}.$$

Второе слагаемое в правой части ИУ (18) представим в виде

$$\sum_{j=1}^{i-3} \int_L g_{N,j}(y) \left\{ \Psi(\tau_{N,i-1} - \tau_{N,j+1}, r_{xy}) - \Psi(\tau_{N,i-1} - \tau_{N,j}, r_{xy}) \right\} dL_y +$$

$$+ \sum_{j=1}^{i-3} \int_L g_{N,j}(y) \left\{ \Psi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,j+1}, r_{xy}) - \Psi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,j}, r_{xy}) -$$

(19)

$$- \Psi(\tau_{N,i-1} - \tau_{N,j+1}, r_{xy}) + \Psi(\tau_{N,i-1} - \tau_{N,j}, r_{xy}) \right\} dL_y +$$

$$+ \int_L g_{N,i-1}(y) \left\{ \Psi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i}, r_{xy}) - \Psi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-1}, r_{xy}) \right\} dL_y.$$

В третьем слагаемом представления (19) для оценки плотности используем формулу (15). Учитывая, что функции $\Psi'_\tau(\tau, r_{xy})$ и $\Psi''_{\tau x_i}(\tau, r_{xy})$ имеют особенности порядка $(\tau - r_{xy})^{-1/2}$ и $(\tau - r_{xy})^{-3/2}$ и также, что область интегрирования в третьем слагаемом соразмерна с h_N , при $h_N \rightarrow 0$ получаем

$$\left\| \int_L g_{N,i-1}(y) \Psi'_\tau(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-1/2}, r_{xy}) h_N dL_y \right\|_{C_{\omega, S}^{1+\mu}(\bar{L})} \leq C_0 C_3 C_{f,1} h_N^{3/2},$$

где $C_3 > 0$ не зависит от \dot{I} и N . Аналогично вышеуказанному замечаем, что при $h_N \rightarrow 0$

$$\left\| \sum_{j=1}^{\dot{I}-3} \int_L \{ \Psi'_\tau(\tau_{N,\dot{I}+1} - \tau_{N,j+1/2}, r_{xy}) - \Psi'_\tau(\tau_{N,\dot{I}-1} - \tau_{N,j+1/2}, r_{xy}) \} h_N \right\|_{C_{\omega, \delta}^{1+\mu}(\bar{L})} \leq C_4 h_N.$$

Поэтому второе слагаемое представления (19) оценивается величиной порядка $C_0 C_4 C_{f,1} h_N$.

Первое слагаемое в представлении (19) с учетом формулы (16) можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^{\dot{I}-3} \int_L \varphi_{N,j-1}(y) \{ \Psi(\tau_{N,\dot{I}-1} - \tau_{N,j}, r_{xy}) - \Psi(\tau_{N,\dot{I}-1} - \tau_{N,j-1}, r_{xy}) \} dh_y.$$

Поскольку, как упоминалось ранее, величина

$$\left\| \sum_{j=1}^{\dot{I}-3} \int_L \Psi'_\tau(\tau_{N,\dot{I}-1} - \tau_{N,j+1/2}, r_{xy}) h_N dh_y \right\|_{C_{\omega, \delta}^{1+\mu}(\bar{L})} \quad N \rightarrow \infty, K \rightarrow \infty$$

является конечной (например равняется C_5), то погрешность последнего представления составляет $C_0(C_5 C_{f,2} + C_4 C_{f,1}) h_N$. Это

представление дополняет рассматриваемую первую компоненту формулы (19) до полной суммы. Поэтому второе слагаемое в правой части

ИУ (18) с погрешностью порядка $C_0(C_5 C_{f,2} + 2C_4 C_{f,1}) h_N$ равно по-

ловине следующей полной суммы

$$\sum_{j=1}^{\dot{I}-3} \int_L \varphi_{N,j}(y) \{ \Psi(\tau_{N,\dot{I}-1} - \tau_{N,j+1}, r_{xy}) - \Psi(\tau_{N,\dot{I}-1} - \tau_{N,j}, r_{xy}) \} dh_y. \quad (20)$$

Запишем теперь (I-2) - ое ИУ типа (I.28) в виде

$$\int_L (\varphi_{N,\dot{I}-2}(y) - \varphi_{N,\dot{I}-3}(y)) \ln \frac{1}{r_{xy}} dh_y = f(x, \tau_{N,\dot{I}-1}) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\dot{I}-3} \int_L \varphi_{N,j}(y) \{ \Psi(\tau_{N,\dot{I}-1} - \tau_{N,j+1}, r_{xy}) - \Psi(\tau_{N,\dot{I}-1} - \tau_{N,j}, r_{xy}) \} dh_y.$$

Из оценки (16) следует, что правая часть приведенного соотношения по норме $C_{\omega, S}^{1+\mu}(\bar{L})$ является величиной порядка $C_{f,2} h_N$. Но это значит, что в этой же норме половина полной суммы (20) сложенная с $\frac{1}{2} f(x, \tau_{N, \dot{i}-1})$ равна $C_{f,2} h_N / 2$. Этой же величине с погрешностью $C_0 (C_5 C_{f,2} + 2 C_4 C_{f,1}) h_N$, согласно доказанному, равняется норма суммы второго слагаемого в правой части ИУ (18) и компоненты $\frac{1}{2} f(x, \tau_{N, \dot{i}-1})$.

Оценим теперь первое слагаемое в правой части ИУ (18) за вычетом компоненты $\frac{1}{2} f(x, \tau_{N, \dot{i}-1})$:

$$\begin{aligned} & \| f(x, \tau_{N, \dot{i}+1}) - f(x, \tau_{N, \dot{i}}) + \frac{1}{2} f(x, \tau_{N, \dot{i}-1}) - f(x, \tau_{N, \dot{i}-2}) + \dots + (-1)^{\dot{i}+1} f(x, \tau_{N, 2}) \|_{C_{\omega, S}^{1+\mu}(\bar{L})} \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \| f(x, \tau_{N, \dot{i}+1}) \|_{C_{\omega, S}^{1+\mu}(\bar{L})} + \frac{1}{2} \| f(x, \tau_{N, \dot{i}+1}) - f(x, \tau_{N, \dot{i}}) \|_{C_{\omega, S}^{1+\mu}(\bar{L})} + \\ & + \frac{1}{2} \| f(x, \tau_{N, \dot{i}}) - f(x, \tau_{N, \dot{i}-1}) \|_{C_{\omega, S}^{1+\mu}(\bar{L})} + \left\| \sum_{j=3}^{\dot{i}-2} \{ f(x, \tau_{N, j}) - \right. \\ & \left. - f(x, \tau_{N, j-1}) \} \|_{C_{\omega, S}^{1+\mu}(\bar{L})} + C_{\dot{i}} \| f(x, \tau_{N, 2}) \|_{C_{\omega, S}^{1+\mu}(\bar{L})}, \end{aligned}$$

где $C_{\dot{i}} = \begin{cases} 1 & \text{при } \dot{i} \text{ четном,} \\ 0 & \text{при } \dot{i} \text{ нечетном.} \end{cases}$

При $N \rightarrow \infty$ компоненту, представленную в рассматриваемом выражении суммой, можно рассматривать как интеграл:

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=3}^{\dot{I}-2} \{f(x, \tau_{N,j}) - f(x, \tau_{N,j-1})\} \right\|_{C_{\omega, \delta}^{1+\mu}(\bar{L})} = \frac{1}{2} \left\| \int_0^k f'_x(x, \tau) d\tau \right\|_{C_{\omega, \delta}^{1+\mu}(\bar{L})} = \\ & = \frac{1}{2} \|f(x, k)\|_{C_{\omega, \delta}^{1+\mu}(\bar{L})}. \end{aligned}$$

Остальные слагаемые выражения (2I), кроме первого, при $h_N \rightarrow 0$ стремятся к нулю. И поэтому рассматриваемое выражение не превышает величины $C_{f,1} + C_{f,2} h_N$.

Суммируя заключаем, что правая часть ИУ (I8) по норме $C_{\omega, \delta}^{1+\mu}(\bar{L})$ не превышает величины $C_{f,1} + C_{f,2} h_N + C_0(C_5 C_{f,2} + 2C_4 C_{f,1})h_N + C_{f,2} h_N + C_0 C_2 C_{f,2} h_N^{3/4} + B_i C_0 C_2 C_{f,0} h_N^2$.

Поскольку плотность ИУ (I8) непрерывно зависит от правой части то оценка (I5) имеет место и при $p=K$, $j=i$, причем

$$u_N = [2C_{f,2} + C_0(C_5 C_{f,2} + 2C_4 C_{f,1})]h_N + C_0 C_2 C_{f,2} h_N^{3/4} + B_i C_0 C_2 C_{f,0} h_N^2, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} u_N = 0.$$

Для доказательства оценки (I6) при $p=K$, $j=i$ рассмотрим разность ИУ (I8) с порядковыми номерами \dot{I} и $\dot{I}-1$. При этом \dot{I} -ое ИУ представим в несколько ином виде

$$\begin{aligned} & \int_L \vartheta_{N,i}(y) \ln \frac{1}{r_{xy}} dh_y = \{f(x, \tau_{N,i+1}) - f(x, \tau_{N,i}) + \dots + (-1)^{\dot{I}+1} f(x, \tau_{N,2})\} + \\ & + \sum_{e=1}^{M_2(\dot{I}, 0)} \int_L \{\vartheta_{N,i+1-2e}(y) - \vartheta_{N,i-2e}(y)\} \{\Psi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i}, r_{xy}) - \Psi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-1}, r_{xy})\} dh_y + \\ & + \sum_{j=1}^{\dot{I}-2} \int_L \vartheta_{N,j}(y) \{\Psi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,j+1}, r_{xy}) - \Psi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,j}, r_{xy})\} dh_y - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j=0}^{M_1(K, i-1)} \sum_{\ell=1}^{M_2(i, j)} \int_L \{ \varrho_{N, i-2j-2\ell}(y) - \varrho_{N, i-2j-2\ell-1}(y) \} \{ \varphi(\tau_{N, i+1} - \tau_{N, i-2j}, r_{xy}) - \\
 & - 2\varphi(\tau_{N, i+1} - \tau_{N, i-2j-1}, r_{xy}) + \varphi(\tau_{N, i+1} - \tau_{N, i-2j-2}, r_{xy}) \} dh_y - \\
 & - B_{i-1} \sum_{j=0}^{M_1(K, i)} \int_L \varrho_{N, j}(y) \{ \varphi(\tau_{N, i+1} - \tau_{N, i-2j}, r_{xy}) - 2\varphi(\tau_{N, i+1} - \tau_{N, i-2j-1}, r_{xy}) + \\
 & + \varphi(\tau_{N, i+1} - \tau_{N, i-2j-2}, r_{xy}) \} dh_y.
 \end{aligned}$$

В этом случае указанную разность уравнений можно представить следующим образом

$$\begin{aligned}
 & \int_L \{ \varrho_{N, i}(y) - \varrho_{N, i-1}(y) \} \ln \frac{1}{r_{xy}} dh_y = \{ [f(x, \tau_{N, i+1}) - f(x, \tau_{N, i})] - \\
 & - [f(x, \tau_{N, i}) - f(x, \tau_{N, i-1})] + \dots + (-1)^{i+1} 2f(x, \tau_{N, 2}) \} + \sum_{\ell=1}^{M_2(i, 0)} \int_L \{ \varrho_{N, i+1-2\ell}(y) - \\
 & - \varrho_{N, i-2\ell}(y) \} \{ \varphi(\tau_{N, i+1} - \tau_{N, i}, r_{xy}) - \varphi(\tau_{N, i+1} - \tau_{N, i-1}, r_{xy}) \} dh_y + \sum_{j=1}^{i-2} \int_L \varrho_{N, j}(y) \times \\
 & \times \{ \varphi(\tau_{N, i+1} - \tau_{N, j+1}, r_{xy}) - \varphi(\tau_{N, i+1} - \tau_{N, j}, r_{xy}) - \varphi(\tau_{N, i} - \tau_{N, j+1}, r_{xy}) + \varphi(\tau_{N, i} - \tau_{N, j}, r_{xy}) \} dh_y
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j=0}^{M_1(K,i-1)} \sum_{\ell=1}^{M_2(i,j)} \int_L \{ \varrho_{N,i-2j-2\ell}(y) - \varrho_{N,i-2j-2\ell-1}(y) \} \{ \varphi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j}, r_{xy}) - \\
 & - 2\varphi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j-1}, r_{xy}) + \varphi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j-2}, r_{xy}) - \\
 & \hspace{15em} (2.2)
 \end{aligned}$$

$$- \varphi(\tau_{N,i} - \tau_{N,i-2j}, r_{xy}) + 2\varphi(\tau_{N,i} - \tau_{N,i-2j-1}, r_{xy}) -$$

$$- \varphi(\tau_{N,i} - \tau_{N,i-2j-2}, r_{xy}) \} dl_y - B_i \left[\sum_{j=0}^{M_1(K,i)} \int_L \varrho_{N,1}(y) \{ \varphi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j}, r_{xy}) -$$

$$- 2\varphi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j-1}, r_{xy}) + \varphi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j-2}, r_{xy}) \} dl_y +$$

$$+ \sum_{j=0}^{M_1(K,i-1)} \int_L \varrho_{N,1}(y) \{ \varphi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j}, r_{xy}) -$$

$$- 2\varphi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j-1}, r_{xy}) + \varphi(\tau_{N,i} - \tau_{N,i-2j-2}, r_{xy}) \} dl_y] .$$

Оценим правую часть ИУ (22) в норме пространства $C_{w,s}^{1+\mu}(\bar{L})$. По аналогии с доказательством справедливости формулы (15) при $p=k, j=i$ четвертое и пятое слагаемые оцениваем соответственно величинами $c_0 c_6 c_{f,2} h_N^{7/4}$ и $2B_i c_0 c_2 c_{f,0} h_N^2$ где $c_6 > 0$ и не зависит от K, j, N . Во втором слагаемом для оценки разности плотностей с используем формулу (16). Учитывая, что область интегрирования для этого слагаемого сопоставима с h_N , заключаем:

$$\left\| \int_L \Psi'(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-1/2}, r_{xy}) h_N dL_y \right\|_{C_{w,s}^{1+\mu}(\bar{L})} \leq c_7 h_N^{3/2} \quad N \rightarrow \infty.$$

Поэтому рассматриваемое слагаемое оцениваем выражением $c_0 c_7 c_{f,2} h_N^{5/4}$.

Вполне аналогично предыдущему можно показать, что третья компонента с погрешностью порядка $O(h_N^{3/2})$ равняется половине следующей полной суммы

$$\sum_{j=1}^{i-4} \int_L q_{N,j}(y) \{ \Psi(\tau_{N,i-1} - \tau_{N,j+1}, r_{xy}) - \Psi(\tau_{N,i-1} - \tau_{N,j}, r_{xy}) - \Psi(\tau_{N,i-2} - \tau_{N,j+1}, r_{xy}) + \Psi(\tau_{N,i-2} - \tau_{N,j}, r_{xy}) \} dL_y.$$

Рассматривая разность ИУ с номерами $i-2$ и $i-3$, представленных в форме (1.28), и используя формулу (17) при $p=k, j=i-2$ заключаем, что приведенная сумма сложенная с компонентой $\{f(x, \tau_{N,i-1}) - f(x, \tau_{N,i-2})\}$ не превышает величины $\varepsilon_N h_N$ ($\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_N = 0$). Но это означает, что третья компонента правой части ИУ (22) в сумме с выражением $1/2 \{f(x, \tau_{N,i-1}) - f(x, \tau_{N,i-2})\}$ в норме пространства $C_{w,s}^{1+\mu}(\bar{L})$ не превышает величины $\varepsilon_N h_N$. Первую же компоненту за вычетом выражения $1/2 \{f(x, \tau_{N,i-1}) - f(x, \tau_{N,i-2})\}$ в норме $C_{w,s}^{1+\mu}(\bar{L})$ аналогично предыдущему можно оценить величиной

$$C_{f,2} h_N + w_{f,N} h_N$$

где $w_{f,N} = \sup_{t \geq 0} \varepsilon_f(N,t)$, $\varepsilon_f(N,t) = \sup_{\alpha \in [0, h_N]} \|f'_t(x+\alpha, t) - f'_t(x, t)\|$ $\lim_{N \rightarrow \infty} w_{f,N} = 0$

Суммируя, заключаем, что правая часть ИУ (22) в норме $C_{\omega, S}^{1+\mu}(\bar{D})$ оценивается величиной:

$$C_{f,2} h_N + w_{f,N} h_N + C_0 C_7 C_{f,2} h_N^{5/4} + Z_N h_N + C_0 C_6 C_{f,2} h_N^{7/4} + 2 B_{i-1} C_0 C_2 C_{f,0} h_N^2$$

Поскольку плотность ИУ (22) непрерывно зависит от правой части, заключаем, что имеет место оценка (16) при $p=K, j=i$ причем

$$v_N = w_{f,N} + C_0 C_{f,2} (C_7 h_N^{1/4} + C_6 h_N^{3/4}) + Z_N + 2 B_{i-1} C_0 C_2 C_{f,0} h_N, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} v_N = 0.$$

Для доказательства оценки (17) при $p=K, j=i$ преобразуем \dot{I} -ое ИУ типа (18) следующим образом

$$\int_L q_{N,i}(y) \ln \frac{1}{r_{xy}} dh_y = \{f(x, \tau_{N,i+1}) - f(x, \tau_{N,i}) + \dots + (-1)^{i+1} f(x, \tau_{N,2})\} +$$

$$+ \sum_{j=0,1} \sum_{\ell=1}^{M_2(\dot{I},j)} \int_L \{q_{N,i-2j-2\ell+1}(y) - q_{N,i-2j-2\ell}(y)\} \{\varphi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j}, r_{xy}) -$$

$$- \varphi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j-1}, r_{xy})\} dh_y + \sum_{j=1}^{i-3} \int_L q_{N,j}(y) \{\varphi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,j+1}, r_{xy}) -$$

$$- \varphi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,j}, r_{xy})\} dh_y -$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j=0}^{M_1(K, i-2)} \sum_{\ell=1}^{M_2(\dot{I}, j)} \int_L \left\{ \varrho_{N, i-2j-2\ell}(y) - \varrho_{N, i-2j-2\ell-1}(y) \right\} \left\{ \varphi(\tau_{N, i+1} - \tau_{N, i-2j}, \tilde{r}_{xy}) - \right. \\
 & \left. - 2\varphi(\tau_{N, i+1} - \tau_{N, i-2j-1}, \tilde{r}_{xy}) + \varphi(\tau_{N, i+1} - \tau_{N, i-2j-2}, \tilde{r}_{xy}) \right\} d\tilde{h}_y - \\
 & - B_{i-2} \sum_{j=0}^{M_1(K, i)} \int_L \varrho_{N, i}(y) \left\{ \varphi(\tau_{N, i+1} - \tau_{N, i-2j}, \tilde{r}_{xy}) - \right. \\
 & \left. - 2\varphi(\tau_{N, i+1} - \tau_{N, i-2j-1}, \tilde{r}_{xy}) + \varphi(\tau_{N, i+1} - \tau_{N, i-2j-2}, \tilde{r}_{xy}) \right\} d\tilde{h}_y,
 \end{aligned}$$

(i-1) - ое ИУ представим в виде, аналогичном представлению -го ИУ при доказательстве справедливости формулы (16). Сформируем теперь ИУ, которое состоит из суммы ИУ с номерами $\dot{I}, \dot{I}-2, \dot{I}-1$ причем последнее умножается на коэффициент (-2). В результате получим

$$\begin{aligned}
 & \int_L \left\{ \varrho_{N, i}(y) - 2\varrho_{N, i-1}(y) + \varrho_{N, i-2}(y) \right\} \ln \frac{1}{\tilde{r}_{xy}} d\tilde{h}_y = \left\{ [f(x, \tau_{N, i+1}) - 2f(x, \tau_{N, i}) + \right. \\
 & \left. + f(x, \tau_{N, i-1})] - [f(x, \tau_{N, i}) - 2f(x, \tau_{N, i-1}) + f(x, \tau_{N, i-2})] + \right. \\
 & \left. + (-1)^{i+1} \cdot 4 \cdot f(x, \tau_{N, 2}) \right\} + \sum_{j=0,1} \sum_{\ell=1}^{M_2(\dot{I}, j)} \int_L \left\{ \varrho_{N, i-2j-2\ell}(y) - \varrho_{N, i-2j-2\ell-1}(y) \right\} \times
 \end{aligned}$$

$$\times \{ \varphi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j}, \tau_{xy}) - \varphi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j-1}, \tau_{xy}) \} d\tau_y -$$

$$- 2 \sum_{\ell=1}^{M_2(i-1,0)} \int_L \{ \varrho_{N,i-2\ell}(y) - \varrho_{N,i-1-2\ell}(y) \} \{ \varphi(\tau_{N,i} - \tau_{N,i-1}, \tau_{xy}) - \varphi(\tau_{N,i} - \tau_{N,i-2}, \tau_{xy}) \} d\tau_y +$$

$$+ \sum_{j=1}^{i-3} \int_L \varrho_{N,j}(y) \{ \varphi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,j+1}, \tau_{xy}) - 2\varphi(\tau_{N,i} - \tau_{N,j+1}, \tau_{xy}) +$$

$$+ \varphi(\tau_{N,i-1} - \tau_{N,j+1}, \tau_{xy}) - \varphi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,j}, \tau_{xy}) + 2\varphi(\tau_{N,i} - \tau_{N,j}, \tau_{xy}) -$$

$$- \varphi(\tau_{N,i-1} - \tau_{N,j}, \tau_{xy}) \} d\tau_y - \sum_{j=0}^{M_1(K,L-2)} \sum_{\ell=1}^{M_2(i,j)} \int_L \{ \varrho_{N,i-2j-2\ell}(y) - \varrho_{N,i-2j-2\ell-1}(y) \} \times$$

$$\times \{ [\varphi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j}, \tau_{xy}) - 2\varphi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j-1}, \tau_{xy}) + \varphi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j-2}, \tau_{xy})] -$$

$$- 2 [\varphi(\tau_{N,i} - \tau_{N,i-2j}, \tau_{xy}) - 2\varphi(\tau_{N,i} - \tau_{N,i-2j-1}, \tau_{xy}) + \varphi(\tau_{N,i} - \tau_{N,i-2j-2}, \tau_{xy})] +$$

$$+ [\varphi(\tau_{N,i-1} - \tau_{N,i-2j}, \tau_{xy}) - 2\varphi(\tau_{N,i-1} - \tau_{N,i-2j-1}, \tau_{xy}) + \varphi(\tau_{N,i-1} - \tau_{N,i-2j-2}, \tau_{xy})] \} d\tau_y -$$

$$\begin{aligned}
 & - B_{i-2} \left[\sum_{j=0}^{M_1(k,i)} \int_L g_{N,1}(y) \{ \Psi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j}, \tilde{r}_{xy}) - 2\Psi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j-1}, \tilde{r}_{xy}) + \right. \\
 & \left. + \Psi(\tau_{N,i+1} - \tau_{N,i-2j-2}, \tilde{r}_{xy}) \} dL_y + 2 \sum_{j=0}^{M_1(k,i-1)} \int_L g_{N,1}(y) \{ \Psi(\tau_{N,i} - \tau_{N,i-2j}, \tilde{r}_{xy}) - \right. \\
 & \left. - 2\Psi(\tau_{N,i} - \tau_{N,i-2j-1}, \tilde{r}_{xy}) + \Psi(\tau_{N,i} - \tau_{N,i-2j-2}, \tilde{r}_{xy}) \} dL_y + \right. \\
 & \left. + \sum_{j=0}^{M_1(k,i-2)} \int_L g_{N,1}(y) \{ \Psi(\tau_{N,i-1} - \tau_{N,i-2j}, \tilde{r}_{xy}) - 2\Psi(\tau_{N,i-1} - \tau_{N,i-2j-1}, \tilde{r}_{xy}) + \right. \\
 & \left. + \Psi(\tau_{N,i-1} - \tau_{N,i-2j-2}, \tilde{r}_{xy}) \} dL_y \right].
 \end{aligned}$$

Оценивая правую часть приведенного ИУ по норме $C_{w,s}^{1+\mu}(\bar{K})$, можно показать, что она не превышает величины

$$w_{f,N} h_N + 8c_0 c_7 c_{f,2} h_N^{5/4} + c_0 c_8 c_{f,1} h_N^2 + c_0 c_9 c_{f,2} h_N^{11/4} + 4B_{i-2} c_0 c_2 c_{f,0} h_N^2.$$

При этом, только в оценке слагаемого, содержащего неполную сумму имеется принципиальное отличие по сравнению с предыдущим доказательством. Его уже не нужно суммировать с соответствующей компонентой первого слагаемого, а достаточно прямо оценить его величину. Исходя из полученной оценки можно утверждать справедливость формулы (17) при $p=k, j=i$, причем

$$z_N = w_{f,N} + 8c_0 c_7 c_{f,2} h_N^{5/4} + c_0 c_8 c_{f,1} h_N^2 + c_0 c_9 c_{f,2} h_N^{7/4} + 4B_{i-2} c_0 c_2 c_{f,0} h_N,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} z_N = 0.$$

Поскольку справедливость оценок (I5)-(I7) при конечных значениях j и $K=1$ доказывается аналогично формуле (I4), эти оценки можно считать доказанными с помощью метода индукции.

Лемма 3.2 доказана.

Лемма 3.3. Последовательность функций $Q_N^M(y, \tau)$ при $M = [N^{1/4}]$, $N \rightarrow \infty$ является фундаментальной в банаховом пространстве

$$C_{\omega, S}^M(\bar{L}) \cdot C^1[0, \infty).$$

Доказательство леммы 3.3. Из определения функций $Q_N^M(y, \tau)$ следует, что для доказательства фундаментальности рассматриваемой последовательности достаточно показать, что при $M = [N^{1/4}]$, $N \rightarrow \infty$

$$\| Q_{N+1, m(p, i)}(y) - Q_{N, m(p, i)}(y) \|_{C_{\omega, S}^M(\bar{L})} \leq u_N,$$

$$\| Q_{N+1, m(p, i+1)}(y) - Q_{N, m(p, i)}(y) \|_{C_{\omega, S}^M(\bar{L})} \leq \tilde{u}_N, \quad (23)$$

$$\| (Q_{N+1, m(p, i)}(y) - Q_{N+1, m(p, i-1)}(y)) / h_{N+1} -$$

$$(Q_{N, m(p, i)}(y) - Q_{N, m(p, i-1)}(y)) / h_N \|_{C_{\omega, S}^M(\bar{L})} \leq v_N,$$

$$\| (Q_{N+1, m(p, i+1)}(y) - Q_{N+1, m(p, i)}(y)) / h_{N+1} - \quad (24)$$

$$- (Q_{N, m(p, i)}(y) - Q_{N, m(p, i-1)}(y)) / h_N \|_{C_{\omega, S}^M(\bar{L})} \leq \tilde{v}_N,$$

$$p = \overline{1, M}, \quad i = \overline{0, N},$$

$$\text{где } \lim_{N \rightarrow \infty} u_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{u}_N = \lim_{N \rightarrow \infty} v_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{v}_N = 0.$$

Построим последовательности ИУ вида (I.28) с шагами h_N и h_{N+1} . Рассмотрим разность двух уравнений из этих последовательностей с номером $m(p, i)$. Как следует из доказательства леммы 3.2, разность правых частей этих уравнений в норме пространства $C_{\omega, S}^{1+\mu}(\bar{\Omega})$ не будет превышать величины

$$\frac{1}{2} \| f(x, \tau_{N+1, m(p, i)}) - f(x, \tau_{N, m(p, i)}) \|_{C_{\omega, S}^{1+\mu}(\bar{\Omega})} + C_{10} h^{3/4},$$

где $C_{10} > 0$ и не зависит от N, K, i . В силу того, что $f(x, \tau)$ является непрерывно-дифференцируемой функцией по временной переменной, приведенное выражение при $N \rightarrow \infty$ не превышает величины $(C_{10} + 1)h_N^{3/4} = C_{11}h_N^{3/4}$. Обозначив $C_0 C_{11} h_N^{1/2}$ через U_N и используя свойство непрерывной зависимости решений ИУ с логарифмическим ядром от правой части, приходим к выводу о справедливости первого из утверждений (23). Второе утверждение (23) доказывается аналогично.

Для сетки h_{N+1} рассмотрим разность ИУ с номерами $m(p, i)$ и $m(p, i-1)$, разделенную на шаг сетки. Такое же ИУ образуем для сетки h_N . Рассматриваемое ИУ построим как разность первого и второго из ранее введенных. Оценим правую часть построенного ИУ. Аналогично доказательству леммы 3.2 можно показать, что эта правая часть в норме пространства $C_{\omega, S}^{1+\mu}(\bar{\Omega})$ не превышает величины

$$\frac{1}{2} \| \{ f(x, \tau_{N+1, m(p, i)}) - f(x, \tau_{N+1, m(p, i)-1}) \} / h_{N+1} - \\ - \{ f(x, \tau_{N, m(p, i)}) - f(x, \tau_{N, m(p, i)-1}) \} / h_N \|_{C_{\omega, S}^{1+\mu}(\bar{\Omega})} +$$

$+C_{12}(h_N^{1/2} + z_N + w_{f,N}) \leq w_{f,N} + C_{12}(h_N^{1/2} + z_N + w_{f,N})$, $\lim_{N \rightarrow \infty} w_{f,N} = \lim_{N \rightarrow \infty} z_N = 0$,
 где $C_{12} > 0$ и не зависит от N, i, p . Но тем самым доказывается первое из соотношений (24). Второе соотношение доказывается аналогично. Лемма 3.3 доказана.

Лемма 3.4. Если функция $q(y, \tau) \in Q(y, \tau)$ принадлежит пространству $C_{w, S}^{\mu}(\bar{L})C^1[0, \infty)$, то интегральное представление (I.7) определяет функцию из пространства $C_{w, S}^{1+\mu}(R^2) \cdot C^1[0, \infty)$.

Доказательство леммы 3.4. На основании представления (I.7) и применения замены переменных $\eta = \tau / (t - r_{xy})$, можно записать следующее соотношение

$$u'_t(x, t) = \frac{1}{2} \int_L \frac{\theta(t - r_{xy})}{(t - r_{xy})^{1/2}} dL_y \int_0^1 \frac{q(y, \eta(t - r_{xy})) d\eta}{(1-\eta)^{1/2} [t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{1/2}} - \int_L \theta(t - r_{xy}) \times$$

$$\times (t - r_{xy})^{1/2} dL_y \int_0^1 (1-\eta)^{-1/2} \left\{ \frac{q(y, \eta(t - r_{xy}))(1-\eta)}{2[t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{3/2}} - \frac{q'_t(y, \eta(t - r_{xy}))\eta}{[t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{1/2}} \right\} d\eta.$$

Если $x \in \bar{L}$ или является регулярной точкой контура L , то полученные интегралы существуют, так как содержат интегрируемые особенности. Если x - нерегулярная точка контура L , то интегралы умноженные на $w_S(x)$ являются конечными величинами. Дифференцируя полученное соотношение x_i получаем:

$$u''_{x_i t} = -\frac{1}{2} \int_L \frac{\delta(t - r_{xy})}{(t - r_{xy})^{1/2}} \frac{\partial r_{xy}}{\partial x_i} dL_y \int_0^1 \frac{q(y, \eta(t - r_{xy})) d\eta}{(1-\eta)^{1/2} [t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{1/2}} +$$

$$+ \frac{1}{4} \int_L \frac{\theta(t - r_{xy})}{(t - r_{xy})^{3/2}} \frac{\partial r_{xy}}{\partial x_i} dL_y \int_0^1 \frac{q(y, \eta(t - r_{xy})) d\eta}{(1-\eta)^{1/2} [t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{1/2}} -$$

$$-\int_L \frac{\theta(t-r_{xy})}{(t-r_{xy})^{1/2}} \frac{\partial r_{xy}}{\partial x_i} dh_y \int_0^1 \frac{q'_t(y, \eta(t-r_{xy})) \eta d\eta}{(1-\eta)^{1/2} [t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{1/2}} -$$

$$-\frac{1}{2} \int_L \frac{\theta(t-r_{xy})}{(t-r_{xy})^{1/2}} \frac{\partial r_{xy}}{\partial x_i} dh_y \int_0^1 \frac{q(y, \eta(t-r_{xy})) \eta d\eta}{(1-\eta)^{1/2} [t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{3/2}} -$$

$$-\int_L \theta(t-r_{xy}) (t-r_{xy})^{1/2} \frac{\partial r_{xy}}{\partial x_i} dh_y \int_0^1 \frac{q'_t(y, \eta(t-r_{xy})) \eta^2 d\eta}{(1-\eta)^{1/2} [t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{3/2}} +$$

$$+\frac{3}{4} \int_L \theta(t-r_{xy}) (t-r_{xy})^{1/2} \frac{\partial r_{xy}}{\partial x_i} dh_y \int_0^1 \frac{q(y, \eta(t-r_{xy})) (1-\eta)^{1/2} d\eta}{[t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{5/2}} +$$

$$+\int_L \theta(t-r_{xy}) (t-r_{xy})^{1/2} dh_y \int_0^1 \frac{\frac{\partial}{\partial x_i} (q'_t(y, \eta(t-r_{xy})) \eta d\eta)}{(1-\eta)^{1/2} [t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{1/2}}$$

Покажем, что при конечных значениях t полученные интегралы существуют. Поскольку $q(y, \tau)$ является непрерывно-дифференцируемой по τ функцией и $q(y, 0) = 0$, то $\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-1/2} q(y, \tau) = 0$, а значит равен нулю первый из рассматриваемых интегралов. Аналогично при $\tau \rightarrow 0$ $\tau^{-3/2} q(y, \tau) = O(\tau^{-1/2})$, поэтому второй из рассматриваемых интегралов существует. Третий из рассматриваемых интегралов существует, так как содержит лишь интегрируемые особенности. Четвертый, пятый и шестой интегралы при $r_{xy} \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 1$ со-

держат особенности сингулярного типа и существуют в смысле главного значения, если \mathcal{X} является регулярной точкой. Если же \mathcal{X} - нерегулярная точка контура L , то произведение рассматриваемых интегралов и функции $\omega_s(x)$ будет конечной величиной.

Пусть контур L допускает следующее параметрическое представление

$$L_j : \begin{cases} y_1 = y_{1j}(\alpha), \\ y_2 = y_{2j}(\alpha), \end{cases} \quad u_j \leq \alpha \leq v_j \quad j = \overline{1, \nu}.$$

В этом случае компоненты седьмого интеграла из соотношения (25) с помощью интегрирования по частям могут быть представлены следующим образом

$$\begin{aligned} & \int_{u_j}^{v_j} \theta(t-r_{xy})(t-r_{xy})^{1/2} \frac{\partial r_{xy}}{\partial x_i} J(\alpha) d\alpha \int_0^1 \frac{\frac{\partial}{\partial t} (q'_t(y, \eta(t-r_{xy}))) d\eta}{t(1-\eta)^{1/2} [t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{1/2}} = \\ & = J(\alpha) \theta(t-r_{xy})(t-r_{xy})^{1/2} t^{-1} \frac{\partial r_{xy}}{\partial x_i} \int_0^1 \frac{q'_t(y, \eta(t-r_{xy})) \eta d\eta}{(1-\eta)^{1/2} [t(1-\eta) + r_{xy}(1+\eta)]^{1/2}} \Bigg|_{\alpha=u_j}^{\alpha=v_j} + \\ & + \int_{\alpha_j}^{v_j} J(\alpha) \theta(t-r_{xy})(t-r_{xy})^{1/2} t^{-1} \frac{\partial r_{xy}}{\partial x_i} dL_y \int_0^1 \frac{q'_t(y, \eta(t-r_{xy}))(t-r_{xy})\eta - t \eta d\eta}{[t(1-\eta)^2 + r_{xy}(1-\eta^2)]^{3/2}} \end{aligned}$$

Полученные интегралы существуют в регулярных точках L . В нерегулярных точках интегралы, умноженные на функцию $\omega_s(x)$ являются конечными величинами.

Нетрудно заметить, что все рассматриваемые интегралы существуют и при $t \rightarrow \infty$. Поскольку их подынтегральные функции содержат значения t с суммарным показателем не больше нуля, то стремление t к ∞ не увеличивает значений интегралов.

Вышеуказанные соображения а также гладкость контура L позволяет отнести рассматриваемое представление функции $u(x, t)$ к классу $C_{\omega, \delta}^{1+\mu}(R^2) C^1[0, \infty)$.

Лемма 3.4. доказана.

Лемма 3.5. Если функция $q(y, \tau) \equiv Q(y, \tau)$ принадлежит пространству $C_{\omega, \delta}^m(L) C^1[0, \infty)$, то интегральное представление (I.7) удовлетворяет условию (I.5).

Доказательство леммы 3.5. Пусть t принимает конечные значения. На основании леммы 3.4 можно утверждать, что функция $\frac{\partial u}{\partial \delta}(y, t)$ при $y \in C_m^*(\delta)$ $\delta \rightarrow 0$ имеет особенность порядка не большего: чем $1/2$. Поэтому

$$t^{\delta_1} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_m^*(\delta)} \left| \frac{\partial u}{\partial \delta}(y, t) \right| dC_y = t^{\delta_1} \lim_{\delta \rightarrow 0} O(\delta) = 0$$

и условие (I.5) выполняется.

Рассмотрим случай $t \rightarrow \infty$. Функцию $\frac{\partial u}{\partial \delta}(y, t)$, как показано при доказательстве леммы 1.2, можно оценить следующим образом

$$u'_\delta(x, t) = [-O(t^{-1} \ln t) - O(t^{-1/4}) - O(t^{-\delta_2} \ln t)] \omega_\delta(x) = O(t^{-1/4} \omega_\delta(x)).$$

Поэтому при $t \rightarrow \infty$

$$t^{\delta_1} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_m^*(\delta)} \left| \frac{\partial u}{\partial \delta}(y, t) \right| dC_y = t^{\delta_1 - 1/4} \lim_{\delta \rightarrow 0} O(\delta)$$

и для всех значений $\delta_1 \in [0, 1/4]$ условие (I.5) выполняется.

Лемма 3.5 доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена внешняя смешанная задача Дирихле для волнового уравнения в пространстве с разомкнутыми и замкнутыми граничными поверхностями. Разработанные методики ее решения применены для расчета задач гидроакустики. Решения рассматриваемых задач построены с помощью метода интегральных уравнений (ИУ). Эффективность его применения объясняется рядом факторов: 1) сведение задачи к ИУ позволяет на единицу снизить ее размерность, а значит при имеющихся вычислительных ресурсах рассматривать более сложные классы задач; 2) неизвестные величины определяются на границе, а не во всей области (как это требуется в других методах), что позволяет свести задачу для неограниченной области к задаче на ограниченной области; 3) решение задачи в произвольной точке пространства определяется интегрированием, обладающим сглаживающим свойством.

Основным объектом исследования настоящей работы является приближенное решение гранично-временного ИУ первого рода типа волнового потенциала простого слоя. Резюмируя результаты, полученные в работе, отметим следующее:

I. Рассмотрены вопросы сведения смешанной задачи Дирихле для волнового уравнения в случае как разомкнутых, так и замкнутых граничных поверхностей к соответствующему гранично-временному ИУ первого рода. Показана корректность такого перехода. Доказано существование, единственность и непрерывная зависимость от правой части решения полученного ИУ в случае двух пространственных переменных а также корректность постановки соответствующей смешанной задачи Дирихле.

При доказательстве эквивалентности смешанной задачи соответствующему ИУ используются идеи доказательства такой эквивалент-

ности для уравнения Гельмгольца, изложенные в работах Hayashi [68], [69]. Отличия данного подхода обусловлены наличием дополнительно временной переменной а также существенными отличиями фундаментальных решений волнового уравнения и уравнения Гельмгольца.

Наибольшую трудность в доказательстве корректности постановки задачи для ИУ в случае двух пространственных переменных представляет доказательство существования и непрерывной зависимости решения от правой части. В этом случае производится конструктивное построение решения как предела последовательности некоторых функций, кусочно-постоянных по времени. Стационарными компонентами этих функций служат решения ИУ с ядрами логарифмического типа. Последовательность таких стационарных ИУ строится с помощью дискретизации исходного нестационарного ИУ и некоторых искусственных приемов. При доказательстве сходимости последовательности используются свойства решения ИУ с логарифмической особенностью в ядре.

2. Разработаны две методики сведения гранично-временного ИУ к последовательности стационарных, используемые для построения приближенного решения рассматриваемой задачи. Согласно первой методике к исходному ИУ применяются преобразования Чебышева-Лагерра по временной переменной, а неизвестная плотность представляется в виде разложения в ряд по полиномам Чебышева-Лагерра. Согласно второй методике неизвестная плотность аппроксимируется кусочно-линейной функцией по временной переменной, а ИУ удовлетворяется последовательно лишь в некоторых фиксированных временных узлах.

3. Разработаны алгоритмы решения полученных последовательностей стационарных ИУ. С этой целью применяется метод кусочно-линейной аппроксимации неизвестных функций и коллокации по пространственным переменным. Особенности в ядре ИУ ослабляются методом Канторовича. Кусочно-гладкие граничные поверхности предполагаются

состоящими из набора фрагментов, допускающих параметрическое представление. Смешанная задача рассматривается как в неограниченном, так и в частично-ограниченном пространстве.

4. Предложенные алгоритмы реализованы в виде комплекса программ на алгоритмическом языке Фортран-4 и апробированы на ЭВМ ЕС-1045. Первая из программ комплекса обеспечивает решение осесимметричной задачи для гладких граничных поверхностей методом интегральных преобразований. Вторая программа строит приближенное решение этой же задачи для кусочно-гладких граничных поверхностей пошаговым методом. Эта же программа позволяет рассматривать задачи в полупространстве или в слое, плоскости которого имитируют влияние поверхности и дна океана. Третья программа посвящена решению задачи в пространственном случае пошаговым методом для кусочно-гладких граничных поверхностей. Имеется возможность учета симметрии рассматриваемой задачи относительно четырех заданных плоскостей, что позволяет уменьшить вычислительные затраты.

Экономии используемого машинного времени способствуют также следующие конструктивные особенности и способы реализации рассматриваемых алгоритмов. Используемые для построений приближенных решений последовательности систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) содержат одну и ту же матрицу в левой части. Поэтому матрица представляется в виде произведения треугольных, что позволяет при решении очередной СЛАУ проводить только обратных ход метода Гаусса. С другой стороны, при формировании правых частей последовательности СЛАУ используется тот факт, что они представляют собой скалярное произведения многомерных векторов. Компоненты одного из векторов зависят только от геометрии задачи и вычисляются заранее. Компоненты второго вектора - коэф-

фициенты аппроксимации неизвестной плотности, вычисленные на предыдущих шагах. Эти компоненты формируются в процессе решения последовательности СЛАУ. Такая организация вычислений позволяет избежать ненужного пересчета.

В целом же следует отметить, что проектирование и отладка указанных программ, содержащих несколько тысяч операторов, представляет сложную и трудоемкую задачу.

5. Сравнение эффективности предложенных двух методик проведено на решении ряда задач как тестовых, так и более сложных. При этом обнаружилась большая эффективность пошагового метода. Сопоставление приближенных решений с аналитическими а также сопоставление приближенных решений, построенных с помощью различных методов, показывает корректность программной реализации методик.

Пошаговый временной метод дает возможность решения осесимметричных и пространственных задач с довольно сложной геометрией. Примеры решения таких задач приводятся в § 3.5. Показано также, что с уменьшением длительности граничного импульса погрешность решения задачи возрастает. Так, располагая относительно небольшими ресурсами машинного времени, удалось построить решение задачи для импульса, длительность которого составляет половину наибольшего линейного размера (диаметра) граничной поверхности. Гораздо меньшую чувствительность метод проявляет к увеличению длительности граничного импульса (при тех же затратах рассчитана задача с длительностью граничного импульса равной 50 наибольших линейных размеров граничной поверхности).

Сопоставляется также эффективность пошагового метода с недиагональной матрицей СЛАУ (который применяется в данной работе) и эффективность пошагового метода с диагональной матрицей (такой метод применяется в работе [22] для решения задач из дру-

гой предметной области). Второй подход не требует обращения матрицы, может представляться более перспективным. Однако при решении задач рассматриваемого типа с помощью второго подхода, который можно промоделировать на созданных программах, возникает явление неустойчивости.

Для облегчения использования предложенных в работе методик сделана попытка установления эмпирических соотношений на параметры алгоритмов, которые позволяют решать задачи с точностью, близкой к оптимальной. Такие соотношения установлены для некоторого диапазона значений параметров дискретизации.

6. Составленные программы могут быть использованы при расчете гидроакустических полей, а также других нестационарных полей в средах, близких по своим свойствам к акустическим.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Акустика океана /Под ред. Дж.Де Санто. - М.: Мир, 1982.-320 с.
2. Антоненко О.Ф. Численное решение задачи Дирихле для незамкнутых поверхностей вращения //Вычислительные системы. - Новосибирск, 1964. - Вып.12. С.79-97.
3. Бакалец В.А., Людкевич И.В. Численное решение пространственных задач электронной оптики методом интегральных уравнений. - Львов: Изд.Львов. ун-та, 1986. - 75 с.
4. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. - М.: Мир, 1984, - 494 с.
5. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. - М.: Мир, 1987. - 524 с.
6. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. -М.: Мир, 1982. - 248 с.
7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1981. - 512 с.
8. Воронин В.В., Цецохо В.А. Численное решение интегральных уравнений первого рода с логарифмической особенностью методом интерполяции и коллокации //Журнал вычис. мат. и матем. физики. 1981. Т.21. № 1. С.40-53.
9. Галазюк В.А. Метод полиномов Чебышева-Лагерра в смешанной задаче для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами //Докл.АН УССР. Сер.А. 1981. № 1. С.3-6.
10. Галишникова Т.Н., Ильинский А.С. Численные методы в задачах дифракции. -М.: Изд-во МГУ, 1987. - 208 с.
11. Гладков А.А. Решение смешанной задачи для волнового уравнения с помощью волнового потенциала простого слоя // Уч.зап. ЦАГИ. 1977. Т.8 № 1. С.105-107.

12. Гладков А.А. Решение задачи о дифракции акустического импульса на клине с использованием волновых потенциалов // Журнал вычисл. мат. и матем. физики. 1978. Т.18. № 5. С.1324-1329.
13. Гладков А.А. Численное решение задач с применением интегральных уравнений для волновых поверхностных потенциалов // Журнал вычисл. мат. и матем. физики. 1980. Т.20. № 2. С.522-528.
14. Гладков А.А. Численное решение смешанной задачи для двумерного волнового уравнения // Журнал вычисл. мат. и матем. физики. 1982. Т.22 № 2. С.480-484.
15. Гордийчук В.И. Численное решение пространственных задач теории потенциала методом интегральных уравнений // Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе: Труды научной конференции. Киев, 1974. С.174-179.
16. Гребенников А.И. Сплайн-коллокационный метод решения некоторых интегральных уравнений задач дифракции электромагнитных волн // Применение ЭВМ для решения задач математической физики: сб. науч. ст. М., 1985, С.43-54.
17. Дикасов В.М. Решение некоторых внешних краевых задач для волнового уравнения в случае сферы методом отражения // Дифференциальные уравнения. 1979. Т.15. № 10. С.1863-1872.
18. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма первого рода // Вычислительные методы и программирование. - М., 1968. - Вып. 10. С.49-54.
19. Дыхта В.В. Метод интегральных преобразований в волновых задачах гидроакустики. -К.: Наукова думка, 1981.
20. Дыхта В.В. Нестационарное рассеяние акустических волн не-

- замкнутыми оболочками. - К.: Наукова думка, 1982.
21. Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Численный анализ дифракции радиоволн. - М.: Радио и связь, 1982. - 184 с.
22. Захаров Е.В., Сафронов С.И. О численном решении задач дифракции нестационарных электромагнитных полей на незамкнутых поверхностях вращения методом интегро-дифференциальных уравнений //Применение ЭВМ для решения задач математической физики: сб. науч.ст. - М., 1985, С.57-67.
23. Ильин В.П. Численные методы решения задач электрофизики. - М.: Наука, 1985. - 336 с.
24. Ильинский А.С. Обоснование численного метода решения интегрального уравнения с логарифмической особенностью ядра //Вестн. МГУ. Вычислительная математика и кибернетика.1986. № 4. С. 12-15.
25. Кондратьев В.А., Олейник О.А. Краевые задачи для уравнений с частными производными //УМН. 1983. Т.38. Вып.2. С.3-76.
26. Кравцов В.В. Интегральные уравнения в задачах дифракции //Вычислительные методы и программирование. - М., 1966. - Вып. 5. С.135-151.
27. Крылов В.И., Скобля Н.С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращение преобразования Лапласа. - М.: Наука, 1974. - 224 с.
28. Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. - М.: ГИТТЛ, 1953. - 279 с.
29. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. - М.: Наука, 1973. - 407 с.
30. Лебедев Н.Н., Скальская И.П., Уфлянд Я.С. Сборник задач по математической физике. - М.: Гос.издат.техн.-теорет.

- литературы, 1955. - 420 с.
31. Людкевич И.В. Метод интегральных уравнений в граничных задачах электронной оптики /обзор/ /Львов ун-т, 1984. 30 с. Деп. в УкрНИИНТИ 14.11.84, № 11 Ук-85 Деп.
 32. Людкевич И.В., Музычук А.Е. Численное исследование нестационарных акустических полей для областей со сложной геометрией //Волны и дифракция: Материалы IX Всесоюз. симп. по дифракции и распространению волн. -Тбилиси, 1985.Т.2. С.171-174.
 33. Миндлин Я.А. Решение внешней задачи Коши-Дирихле для волнового уравнения в случае круга //Докл. АН СССР. 1939. Т.25. № 4. С.285-289.
 34. Миндлин Я.А. Дифракция плоской волны относительно круга //Докл. АН СССР. 1940. Т.26. № 6. С.567-571.
 35. Михлин С.Г. Основные краевые задачи для волнового уравнения //Докл. АН СССР. 1940. С.281-285.
 36. Михлин С.Г. Распространение волн в областях с криволинейной границей //Тр. Сейсмологич. ин-та АН СССР. 1941. № 110. С.1-49.
 37. Михлин С.Г., Сапожникова В.Д. Потенциалы волнового уравнения //Изв. вузов. Математика. 1977. № 9. С.48-64.
 38. Михлин С.Г., Сапожникова В.Д. Метод потенциалов в смешанной задаче для волнового уравнения //Изв. вузов. Математика. 1977. № 10. С.100-108.
 39. Мокин Ю.И. Численное решение интегральных уравнений. М., 1985. 81 с. Деп. в ВИНТИ 28.10.85. № 7768-В85.
 40. Музычук А.Е., Пасичник Р.М., Сибиль Ю.Н. Численное решение задач нестационарной дифракции для незамкнутых поверхностей

- //Численные методы решения задач математической физики: Тезисы докл. Всесоюз. шк. молодых ученых. - Львов, 1983. С.30-31.
41. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. -М.: Наука, 1968. - 511 с.
42. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. - М.: Наука, 1984, - 344 с.
43. Остудин Б.А., Пасичник Р.М. Расчет некоторых пространственных электростатических полей //Теоретическая электротехника: Респ. межвед. научно-техн. сборник. Львов: Изд-во при Львов. ун-те, 1982. -Вып. 33. С.16-22.
44. Остудин Б.А., Пасичник Р.М. Численное решение задачи Дирихле для волнового уравнения с помощью метода граничных интегральных уравнений //Интегральные уравнения в прикладном моделировании: Тезисы докл. Республ. науч.конф. - Киев, 1983. Т.2. С.166-167.
45. Остудин Б.А., Пасичник Р.М. Использование метода граничных интегральных уравнений для определения акустического поля, отраженного от мягкой осесимметричной оболочки // Волны и дифракция: Материалы IX Всесоюз. Симп. по дифракции и распространению волн. - Тбилиси, 1985. Т.1. С.125-128.
46. Остудин Б.А., Пасичник Р.М. Численное решение осесимметричной задачи Дирихле для волнового уравнения методом интегральных преобразований. - Львов, 1986. 23 с. Деп. в УкрНИИНТИ 16.09.86 № 2179-Ук86.
47. Остудин Б.А., Пасичник Р.М. Численное решение внешней задачи Дирихле для волнового уравнения //Вычислительные методы и математическое моделирование: Тезисы докл. Всесоюз. шк. молодых ученых. - Красноярск, 1986. С.66-67.

48. Пасичник Р.М. Численное решение гранично-временного интегрального уравнения типа волнового потенциала //Интегральные уравнения в прикладном моделировании: Тезисы докл. 2-й Респ. науч.-техн.конф. - Киев, 1986. Т.2. С.175-176.
49. Самарский А.А. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент // Вестник АН СССР. № 5. С.38-49.
50. Смолицкий Х.Л. Предельная задача для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1950. Т.73 № 3. С.463-466.
51. Справочник по специальным функциям /Под ред. М.Абрамовиц, И.Стиган. - М.: Наука, 1979. - 830 с.
52. Треногин В.А. Функциональный анализ. - М.:Наука, 1980. -496С.
53. Тихонов А.Н., Дмитриев В.И.Метод расчета тока в системе линейных вибраторов и диаграммы направленности этой системы // Вычислительные методы и программирование. - М.,1968. - Вып. 10. С.3-8.
54. Фридлиндер Ф. Звуковые импульсы. -М.: Изд.иностр.литературы, 1962. - 230 с.
55. Хапаев М.М. /мл./ Сравнение методов численного решения интегральных уравнений со слабой особенностью // Вестн. МГУ. Вычислительная математика и кибернетика. 1983. № 1.С.3-7.
56. Хенл Х., Мауэ А., Веспфаль К. Теория дифракции. - М.:Мир, 1964.
57. Хуторянский Н.М., Турилов В.В. О применении неявных численных схем для решения нестационарных граничных интегральных уравнений // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Всесоюзн.межвуз.сборник. - Горький, 1979. С.102-106.
58. Цецохо В.А. Некоторые вопросы обоснования численных методов решения интегральных уравнений первого рода со слабыми осо-

- coefficient de la singularite de la solution d'un probleme elliptique sur un ouvert avec coin// RAIRO Anal.numer. 1980.V14.N3. P.233-248.
- 66.Gladkov A. On the solution of wave equation // Lecture Notes Phys. 1975.N35. P.187-190.
- 67.Groennboom P., Kuijper I., Jong J. Solution of the retarded potential problem and numerical stability // Bound.Elem.6. Berlin,1984.N4.P.57-74.
- 68.Hayashi Y. The Dirichlet problem for an open boundary // J. Math. Anal. and Appl. 1973. V.44. P.489-530.
- 69.Hayashi Y. The expansion theory of the Dirichlet problem for the Helmholtz equation for an open boundary // J.Math. Anal. and Appl. 1977. V.61.N2. P.331-340.
- 70.Ibuki K. On the regularity of solution of a mixed problem for hyperbolic equations of second order in a domain with corners // J.Math. Kyoto Univ. 1976. V.16. N1. P.167-183.
- 71.Saranen I., Wendland W. On the asymptotic convergence of collocation methods with spline function of even degree// Math.Comput.1985. V.45. N171. P.91-108.
- 72.Schmidt G, On spline collocation methods for boundary integral equation in the plane // Math.Meth.Appl. sci. 1985. V.7. N 1. P.74-89.
- 73.Shaw R. Coupling boundary inequal equation method to "other" numerical techniques // Recent.Adv. Boundary Elem.Methods. London-Plymouth.1978.P.133-147.