МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра комп'ютерних наук

# ОПОРНИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни «Інтервальні обчислення»

Тернопіль-2016

ЗМІСТ

# ВСТУП

## Історія розвитку інтервальних обчислень

Інтервальні обчислення є теоретичною основою усіх інтервальних методів моделювання. Своєю чергою інтервальні обчислення побудовані на базі методів інтервального аналізу.

Основи інтервального аналізу були розроблені на вимогу часу – як засіб урахування похибок при розрахунках на ЕОМ і описані у монографії Р. Мура (R. Moore) під назвою “Interval analysis” у 1966 р. Перша праця серед вітчизняних вчених по даному напрямку була опублікована Канторовичем Л.В. у “Сибірському математичному журналі” у 1962 р.

Методи інтервального аналізу дозволяють враховувати похибки введення вхідних даних, які у даному випадку набувають вигляду скінчених інтервалів, а також похибки заокруглень при обчисленнях на ЕОМ. При цьому результат розрахунків подається в інтервальному вигляді.

Усі задачі, які розв’язуються із застосуванням інтервальних обчислень, можна розділити на дві групи: задачі з неточними – інтервальними даними та задачі з точними даними. Перші задачі пов’язані із обчисленням множини розв’язків, а другі - з її поступовим уточненням. Прикладом задачі, яка відноситься до першої групи, є система лінійних рівнянь з інтервальними коефіцієнтами. Для задач з точними даними інтервальний аналіз використовується в методах, які породжують послідовність меж, що збігаються до розв’язку.

При реалізації інтервальних обчислень виникають значні проблеми, коли традиційні чисельні методи безпосередньо переносяться на інтервальні числа. В результаті такого перенесення відбувається значне розширення результуючого інтервалу. Інші проблеми, які стосуються інтервальних обчислень, пов’язані із виконанням операції ділення на інтервали, які включають нуль. Внаслідок розширення інтервалів при реалізації обчислень, такі ситуації виникають досить часто.

Проблеми, пов'язані із застосуванням класичної інтервальної арифметики, часто вдається подолати із застосуванням розширених інтервальних арифметик.

Ширина результуючого інтервалу в інтервальних обчисленнях залежить від порядку виконання операцій.

Розглянуті особливості інтервальних методів вимагають перегляду практично усіх розроблених на даний момент чисельних методів.

Питання дослідження та побудови основ інтервального аналізу, інтервальної арифметики та інтервальних обчислень розглянуті у монографіях російських вчених Калмикова С.А., Шокіна Ю.І., Юлдашева З.Х. (1981-1987) та багаточисленних працях Новосибірської школи.

**Місце інтервальнх обчислень в інтервальному аналізі**

В математичній енциклопедії інтервальний аналіз розглядається як наукова дисципліна, що застосовується для врахування похибок заокруглень при розрахунках на ЕОМ. У довідковій літературі по математичних методах, поняття інтервального аналізу часто хибно трактується як "арифметика інтервалів". Однак розвиток методів інтервального аналізу призвів до певної еволюції його наукової термінології та самого трактування. Наприклад, у низці робіт інтервальний аналіз розглядається у більш ширшому трактуванні - як теоретико-множинний підхід. Найбільш точніше визначення інтервального аналізу наведене у працях новосибірської школи, а саме як наукової дисципліни на стику інформатики та математики, предметом якої є розв'язування задач з інтервальними невизначеностями в даних на вході, виході чи на проміжних етапах.

При розв’язуванні задач експериментального моделювання об’єктів на основі даних з інтервальною невизначеністю, оцінки параметрів моделей часто задаються множинами (областями) різної конфігурації: еліпсоїдні, многогранні області. В інтервальному аналізі традиційно застосовують “інтервальні методи оцінювання”, коли область параметрів задається прямокутним гіперпаралелепіпедом. З іншого боку, запозичення методів та термінів з математичної статистики, зокрема, з регресійного аналізу, що стосуються інтервального аналізу, призвело до застосування та утвердження терміну “аналіз інтервальних даних”. Тому, у межах інтервального аналізу. зручно виділити методи аналізу інтервальних даних, під якими розуміють методи, направлені на розв’язування задач моделювання з інтервальними невизначеностями в експериментальних даних, дослідження механізмів впливу невизначеностей на їх формування, отримання та дослідження математичних моделей об’єктів з множинними оцінками параметрів.

Методи інтервального аналізу та їхній розвиток створили передумови розвитку трьох напрямків наукової та практичної діяльності, пов’язаної з математичним моделюванням об’єктів на основі інтервальних даних. Це:

- <u>математичний</u> - дослідження математичних проблем інтервальних обчислень;
- <u>комп’ютерний</u> - дослідження питань створення та використання інтервальних обчислень;
- <u>прикладний</u> - використання методів інтервального аналізу і відповідних комп’ютерних засобів для побудови та дослідження математичних моделей широкого класу об’єктів.

Опубліковано десятки тисяч праць, присвячених математичному моделюванню об’єктів на основі методів інтервального аналізу.

# ТЕМА 1 Дійсна, машинна та комплексна інтервальна арифметика

## 1.1 Дійсна інтервальна арифметика

Основна ідея інтервальних обчислень полягає у наведені дійсного числа не одним машинним числом, а двома, які задають його гарантовані межі. Позначимо множину дійсних чисел через R, а малі літери a, b,c,…,x, y, z будуть використовуватись для позначення її елементів. Підмножина A множини R така, що

$$A=[a_1,a_2]=\{t|a_1 \le t \le a_2,\ a_1,a_2 \in R\},$$

буде називатись закритим дійсним інтервалом або просто інтервалом.

Множина всіх закритих дійсних інтрвалів позначається через множину I(R), а великі літери A, B, C,…,X, Y, Z позначають її елементи. Будь-яке дійсне число x з R може рахуватись особливим елементом з I(R), яке має вигляд [x,x], що часто називається точним інтревалом.

Визначенння. Два інтервала $A=[a_1,a_2]$ та $B=[b_1,b_2]$ називаються **рівними** (записуються: A=B), якщо вони рівні в теоретико-множинному розумінні, а саме

$$A=B \Leftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2.$$

Відношення рівності між двома елементами з I(R) рефлексивне, симетричне та транзитивне.

Тепер можна узагальними арифметику дійсних чисел ввівши операції на елементами з I(R).

Визначення. Нехай $* \in \{+,-,\cdot,\div\}$ - бінарна операції на множині дійсних чисел. Якщо $A,B \in I(R)$, то

$$A*B=\{z=a*b|\ a\in A,\ b\in B\} \qquad (1.1)$$

визначає бінарну операцію на I(R).

Зазначимо, що символи операцій на множинах R та I(R) співпадають. Це не повинно викликати труднощів, оскільки із контексту завжди ясно, до чого застосовується операція: до дійсного числа чи інтервала.

Результат операцій над інтервалами $A=[a_1,a_2]$ та $B=[b_1,b_2]$ можна представити наявно за допомогою формул:

$$\begin{aligned} &A+B=[a_1+b_1;a_2+b_2], \\ &A-B=[a_1-b_2;a_2-b_1], \\ &A\cdot B=[\min\{a_1b_1,a_1b_2,a_2b_1,a_2b_2\},\max\{a_1b_1,a_1b_2,a_2b_1,a_2b_2\}], \\ &A\div B=[a_1,a_2]\cdot[1/b_2,\,1/b_1]. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Операції інтервальної арифметики можуть бути доповнені іншими традиційними, в основному унарними операціями над інтервалами.

<u>Визначення</u>. Якщо $r(x)$ – неперервна унарна операція на множині дійсних чисел R, то

$$r(X)=[\min_{x\in X} r(x);\ \max_{x\in X} r(x)]$$

визначає відповідну їй операцію на множині I(R).

Прикладами таких унарних операцій можуть слугувати $X^k\,(k\in R), e^x$, $\ln X$, $\sin X$, $\cos X$ і т.д.

До найбільш важливих *властивостей операцій над інтервалами* $A=[a_1,a_2]$ та $B=[b_1,b_2]$ на множині I(R) відносять:

- $\left.\begin{aligned} A+B=B+A \\ A\cdot B=B\cdot A \end{aligned}\right\}$ комутативність
- $\left.\begin{aligned} (A+B)+C=A+(B+C) \\ (A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C) \end{aligned}\right\}$ асоціативність

- $\left.\begin{array}{l} a\cdot(B+C)=a\cdot B+a\cdot C,\ \text{де}\ a\in R, \\ A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C,\ \ \text{якщо}\ b\cdot c\geq 0\ \ \forall\ b\in B,\ c\in C \end{array}\right\}$ дистрибутивність

  $\left.A\cdot(B+C)\subseteq A\cdot B+A\cdot C)\right\}$ субдистрибутивність

- I(R) не має дільників нуля;
- $X=[0,0]$ та $Y=[1,1]$ - єдинні нейтральні елементи відповідно додавання та множення, а саме

$$\begin{array}{l} A=[0,0]+A=A+[0,0] \\ A=[1,1]\cdot A=A\cdot[1,1] \end{array}.$$

Тепер розглянемо знаходження розв'язку лінійного рівняння:

$$[a_1;a_2]\cdot[x_1;x_2]=[b_1;b_2],$$

при цьому $[a_1;a_2]\neq[0,0]$ та $[x_1,x_2]\in I(R)$. У якому випадку дане рівняння має розв'язок?

Відповідь на це запитання дає правило, яке побудоване на допоміжній функції $\chi$ Ратшека:

$$\chi(A)=\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{a_1}{a_2}, & \text{якщо}\ \ |a_1|\leq|a_2| \\ \dfrac{a_2}{a_1}, & \text{в інших випадках} \end{array}\right\}.$$

Рівняння $[a_1;a_2]\cdot[x_1;x_2]=[b_1;b_2]$ має розв'язок відносно $[x_1;x_2]$, якщо

$$\chi(A)\geq\chi(B).$$

При цьому розв'язок не єдиний, якщо $\chi(A)=\chi(B)\leq 0$.

Що означає розв'язок $[x_1;x_2]$ рівняння $[a_1;a_2]\cdot[x_1;x_2]=[b_1;b_2]$?

Це означає, що:

$$\begin{cases} \min\{a_1x_1, a_1x_2, a_2x_1, a_2x_2\} = b_1 \\ \max\{a_1x_1, a_1x_2, a_2x_1, a_2x_2\} = b_2 \end{cases}.$$

Проте в інтервальному аналізі є поняття «алгебраїчного» розв'язку у вигляді $[x_1;x_2]_{alg} = [b_1,b_2]/[a_1,a_2]$ і при цьому справедливим є:

$$[x_1;x_2] \subseteq [x_1;x_2]_{alg}.$$

Як видно, алгебраїчний розв'язок включає інтервал, який забезпечує виконання умови $[a_1;a_2]\cdot[x_1;x_2] = [b_1;b_2]$.

Приклад. Нехай дано рівняння $[1,2]X = [-1,3]$. Рівність виконується лише при $X = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, оскільки $\chi[1,2] = \frac{1}{2} > \chi[-1,3] = -\frac{1}{3}$.

З іншого боку, якщо розглянути множину рішень всіх рівнянь виду $ax = b$, в яких $a \in [1,2]$, $b \in [-1,3]$, то можна отримати загальний розв'язок рівняння

$$\{x = \frac{b}{a} \,\Big|\, a \in [1,2],\ b = [-1,3]\} = \frac{[-1,3]}{[1,2]} = [-1,3] \supset X.$$

Основою всіх чисельних методів, реалізованих у інтервальній арифметиці, є властивість, яка називається "монотонністю включення". Розглянемо суть цієї властивості. Для цього введемо на множині дійсних інтервалів ще одну бінарну операцію. Нехай інтервали $A$ та $B$ належать множині всіх дійсних інтервалів $I(R)$. Тоді відношення

$$[a_1,a_2] \cap [b_1,b_2] = \{C \mid C \in [a_1,a_2],\ C \in [b_1,b_2]\}$$

являє собою теоретико-множинний перетин двох інтервалів. Результат данної операції належить $I(R)$ тільки тоді, коли перетин не пуста множина. В цьому випадку

$$A \bigcap B = [\max\{a_1, b_1\}, \min\{a_2, b_2\}].$$

У наведеному нижче наслідку зібрані важливі властивості операції перетину.

Наслідок. Нехай інтервали $A$, $B$, $C$, $D$ належать множині $I(R)$. Тоді справедлива така *властивість монотонності включення*:

$$A \subset C,\ B \subseteq D \Rightarrow A \bigcap B \subseteq C \bigcap D.$$

Доки операція перетину не виводить з множини $I(R)$ - вона неперервна.

Саме ця властивість дозволяє побудувати ітераційні процедури наближення множин розв'язків для задач з інтервальними (неточними) даними. При цьому розміри множини визначаються шириною інтервалів вхідних даних та можливостями ітераційної процедури.

## 1.2 Метрика, відстань між двома інтервалами, абсолютна величина інтервалу, ширина та середина інтервалу

Введемо поняття відстані на множині дійсних інтервалів.

<u>Визначення</u>. **Відстань (q)** між двома інтервалами $A = [a_1; a_2]$ і $B = [b_1; b_2]$, такими, що належать множині $I(R)$, визначається рівністю:

$$q(A, B) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}.$$

Відображення $q$ задає на множині $I(R)$ метрику та володіє наступними властивостями:

1. $q(A,B) \geq 0$,

2. $q(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$,

3. $q(A,B) \leq q(A,C) + q(B,C)$ - нерівність трикутника.

Якщо застосовувати введену таким чином відстань до точкових інтервалів, то вона зведеться до звичайної відстані між дійсними числами, а саме:

$$q([a,a],[b,b]) = |a-b|.$$

Введення на множині $I(R)$ метрики робить його топологічним простором. При цьому поняття збіжності та неперервності можуть використовуватись звичайним способом, як і в метричному просторі. У зв'язку з цим випливає, що кожна послідовність інтервалів $\{[a_{1,k}, a_{2,k}]\}_{k=0}^{\infty}$ зходиться до інтевалу $A = [a_1, a_2]$ тоді, коли послідовність меж окремих членів послідовності зходиться до його відповідних меж.

Кожна послідовність інтервалів

$$[a_{1,1} ; a_{2,1}] \supseteq [a_{1,2} ; a_{2,2}] \supseteq [a_{1,3} ; a_{2,3}] \supseteq \ldots \supseteq [a_{1,k} ; a_{2,k}]$$

зходиться до інтервалу

$$[a_1; a_2] = \bigcap_{k=0}^{\infty} [a_{1,k} ; a_{2,k}].$$

Для арифметичних та інших визначених вище операцій справедлива наступна теорема.

*Теорема*. Операції додавання, віднімання, множення та ділення інтервалів неперервні.

Доведення приведене тільки для операції додавання.

Нехай $\{[a_{1,k}, a_{2,k}]\}_{k=0}^{\infty}$ та $\{[b_{1,k}, b_{2,k}]\}_{k=0}^{\infty}$ - дві послідовності інтервалів, при чому $\lim_{k\to\infty}[a_{1,k}, a_{2,k}] = A$ та $\lim_{k\to\infty}[b_{1,k}, b_{2,k}] = B$. Тоді послідовність інтервальних сум $\{[a_{1,k}, a_{2,k}] + [b_{1,k}, b_{2,k}]\}_{k=0}^{\infty}$ має межу

$$\lim_{k\to\infty}([a_{1,k},\ a_{2,k}] + [b_{1,k}, b_{2,k}]) = \lim_{k\to\infty}[a_{1,k} + b_{1,k},\ a_{2,k} + b_{2,k}] =$$
$$= [\lim_{k\to\infty}(a_{1,k} + b_{1,k}), \lim_{k\to\infty}(a_{2,k} + b_{2,k})] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] = A + B.$$

Аналогічне твердження для неперервних функцій $r(x)$.

<u>Визначення.</u> Нехай $A = [a_1; a_2]$ належить $I(R)$. **Абсолютною величиною** $|\ |$ даного інтервалу називається величина:

$$|A| = q([a_1; a_2], [0,0]) = \max\{|a_1|, |a_2|\}.$$

Абсолютну величину можна записати і у такому вигляді:

$$|A| = \max_{a\in A}|a|.$$

Очевидно, що якщо $A = [a_1; a_2]$, $B = [b_1; b_2]$ належать $I(R)$, то

$$A \subseteq B \Rightarrow |A| \le |B|.$$

Наведемо деякі властивості введеної метрики $q$ на множині I(R).

Нехай маємо інтервали $A$, $B$, $C$, $D$. Тоді:

1. $q(A+B,\ A+C) = q(B,\ C)$;
2. $q(A+B,\ C+D) \le q(A,C) + q(B,D)$;
3. $q(aB,\ aC) = |a| q(B,C),\ \ a \in R$;
4. $q(AB, AC) \le |A| q(B,C)$.

<u>Визначення</u>. **Шириною (wid)** інтервалу $A = [a_1; a_2]$ називається величина:

$$\text{wid}\ (A) = a^+ - a^- \ge 0\,.$$

Із визначення ширини інтервалу отримуємо наступні властивості:

1. $A \subseteq B \Rightarrow \text{wid}(A) \le \text{wid}(B)$,
2. $\text{wid}(A \pm B) = \text{wid}(A) + \text{wid}(B)$,
3. $\text{wid}(AB) \le \text{wid}(A) \cdot |B| + |A| \cdot \text{wid}(B)$,
4. $\text{wid}(AB) \ge \max\{|A| \cdot \text{wid}(B),\ |B| \cdot \text{wid}(A)\}$,
5. $\text{wid}(aB) = |a| \cdot \text{wid}(B),\ \ a \in R$,
6. $\text{wid}(A) = |A - A|$,
7. $A \subseteq B \Rightarrow \frac{1}{2}(\text{wid}(B) - \text{wid}(B)) \le q(A,B) \le \text{wid}(B) - \text{wid}(A)$.

<u>Визначення</u>. **Серединою (med)** інтервалу $A = [a_1; a_2]$ називається величина:

$$\text{med}(A) = \frac{a_1 + a_2}{2}\,.$$

## 1.3 Машинна інтервальна арифметика

Тепер настав час розглянути реалізацію інтервальних опеацій на ЕОМ. Відомо, що в машині моєе бути представлена лише скінчена множина чисел. Частіш за все вони записуються у напівлогарифмічній формі, точніше – у формі з плаваючою крапкою:

$$x = m \cdot b^{e},$$

де m – мантиса, b – основа степені (основа степені рівна основі системи числення, в якій записана мантиса), е – порядок. Як правило, для внутрішньомашинного представлення вибирається основа b=2, а мантиса нормується, тобто її абсолютне значення належить інтревалу [1/2, 1). В загальному, нормованим називається таке число з плаваючою крапкою, в якому старша цифра мантиси відмінна від нуля. Інтервал, в який потрапляє при цьому $|m|$, залежить від того, між якими розрядами m розуміється точка. Ціле e належить інтервалу $[e_{min}, e_{max}]$.

Множину машинних чисел описаного типу позначають через $R_m$ і покладають, що вона симетрична відносно нуля, тобто $R_m=-R_m$. Для апроксимації дійсних чисел, які лежать в інтервалі $[\min_{y \in R_m} y, \max_{y \in R_m} y]$, можна використовувати машинні числа $\{\tilde{x} | \tilde{x} \in R_m\}$. Апроксимація досягається при застосуванні відображення

$$fl : R \ni x \to \tilde{x} = fl(x) \in R_m. \tag{1.3}$$

Дане відображення називається заокругленням, якщо виконана властивість

$$x \le y \Rightarrow fl(x) \le fl(y) \quad \text{-монотонність}. \tag{1.4}$$

Оптимальним називається заокруглення, яке відображає $R_m$ в $R_m$ так, що

$$x \in R_m \Rightarrow fl(x) = x .$$

Наведене визначення оптимального заокруглення не є стандартним. Зазвичай під оптимальним розуміють заокруглення, яке відображає число x, яке заокруглюють, в число $\tilde{x}$, найближче до x.

Особливий інтерес представляють так звані напрямки заокруглень. Якщо для заокруглення $\downarrow$ справедлива імплікація

$$x \in R \Rightarrow \downarrow x \le x ,$$

то говориться про заокруглення вниз. Аналогічно,

$$\uparrow x : -(\downarrow (-x))$$

визначає заокруглення вверх.

Подібно до того, як дійсні числа наближаються за допомогою м ашинних, можна дійсні інтервали наблизити машинними. В цьому випадку інтервал X з I(R), для якого справедливе співвідношення $X \subseteq [\min_{y \in R_m} y, \max_{y \in R_m} y]$, замінюється відповідним машинним інтервалом з множини

$$I(R_m) = \{[x^-, x^+] \mid x^-, x^+ \in R_m, x^- \le x^+\} \subset I(R) .$$

Для того, щоб основні властивості інтревальних операцій виконувались і для їх машинних аналогів, необхідно провести заокруглення інтревалів (інтервальне заокруглення)

$\updownarrow: I(R) \ni X \to \updownarrow X \in I(R_m)$, причому $X, Y \in I(R) \Rightarrow X \subseteq \updownarrow X$ та $X \subseteq Y \Rightarrow \updownarrow X \subseteq \updownarrow Y$.

Якщо розглядати перехід від інтервалу $X = [x^-, x^+]$ з $I(R)$ до його машинного представлення $\tilde{X} = [\tilde{x}^-, \tilde{x}^+]$, то виявиться, що необхідно здійснити цей перехід шляхом заокруглення кожної з меж X. межі повинні бути заокругленні направленно. Таким чином, заокруглення інтервалу X полягає у знаходженні $\updownarrow X$ за правилом

$$\updownarrow X = \updownarrow [x^-, x^+] = [\downarrow x^-, \uparrow x^+]. \tag{1.5}$$

<u>Визначення</u>. Нехай $A, B \in I(R_m)$, $* \in \{+, -, \cdot, \div\}$, $\updownarrow$ - інтервальне заокруглення. Тоді результат операції $*$, яка виконана над інтревлами A та B із застосуванням інтревального заокруглення $\updownarrow$ є:

$$C = \updownarrow (A * B) \in I(R_m).$$

Основні властивості інтервальної арифметики при виконанні даного визначення зберігаються.

Постає наступне питання: на яку точність результату можна розраховувати, якщо перейти від алгоритму, який використовує машинну інтервальну арифметику з $t_1$ цифрами у мантисі, до алгоритму, який використовує $t_2$-значну арифметику, де $t_2 > t_1$? Покладено, що при такому переході діапазон можливих значень порядку лишається незмінним. Таким чином, всі числа, представлені з $t_1$ цифрами, так само точно записуються і з $t_2$ цифрами.

Згідно з (1.5) при $x > 0$ отримуємо

$$\updownarrow x = \updownarrow [x, x] = [\downarrow x, \uparrow x],$$

де

$$\downarrow x = \left(\sum_{v=-1}^{-t_1} a_v b^v\right) b^e, \quad \uparrow x = \left(\sum_{v=-1}^{-t_1} a_v b^v\right) b^e + b^{-t_1+e}.$$

Ширина $\updownarrow x$ є

$$2d(\updownarrow x) = b^{-t_1+e}.$$

Такий самий результат отримується для ширини $\updownarrow x$ при $x < 0$. В подальшому залежність результату від довжини мантиси буде відображатись за допомогою запису $fl_1(x)$ (відповідно $fl_2(x)$). Під $fl(x)$ розуміють інтервальне зокруглення дійсного числа (або дійсного інтервала). Попередню рівність тепер можна переписати у вигляді

$$d(fl_1(x)) = b^{-t_1+e}$$

та, аналогічно, для мантиси довжиною $t_2 = t_1 + 1$

$$d(fl_2(x)) \le b^{-1} d(fl_1(x)).$$

Для двох машинних інтервалів A та B

$$\updownarrow (A * B) = fl_1(A * B) = [(1-\varepsilon_1)(A * B)_1, (1+\varepsilon_2)(A * B)_2],$$

де $\varepsilon$ - необхідна абсолютна точність.

За допомогою $(A*B)_1$ та $(A*B)_2$ обраховуються межі точного значення результату, причому

$$\begin{gathered}
-\varepsilon_1 (A*B)_1 \le 0, \qquad \varepsilon_2 (A*B)_2 \ge 0, \quad |\varepsilon_1|,|\varepsilon_1| \le b^{1-t_1} \\
\Downarrow \\
fl_1(A*B) = A*B + [-\varepsilon_1 (A*B)_1, \varepsilon_2 (A*B)_2]
\end{gathered}.$$

Оцінкою ширини результату слугує

$$wid(fl_1(A*B)) \le wid(A*B) + 2b^{1-t_1}|A*B|.$$

Ця оцінка показує, що при використанні мантиси фіксованої довжини ріст ширини $wid(fl_1(A*B))$ визначається величиною $|A*B|$.

Абсолютну та відносну похибки наближення числа x, яке заокруглюють, до числа $\tilde{x}$ оцінюють наступним чином:

$$\begin{gathered}
|x - \tilde{x}| \le d(X) =: \Delta(X), \\
\left|\frac{x-\tilde{x}}{\tilde{x}}\right| \le \frac{wid(X)}{\min\{|x| \mid x \in X\}} = \rho(X)
\end{gathered}.$$

На практиці машинні інтервальні операції реалізуються за допомогою відповідних програмно-апаратних засобів. Ці засоби служать підтримкою мови програмування високого рівня.

### 1.4 Комплексна інтервальна арифметика

Тепер розглянемо так звану комплексну інтервальну арифметику.

Більшість властивостей та результатів, отриманих для дійсної інтревальної арифметики, можна перенести на випадок комплексної. Щоб це зробити, необхідно визначити множини комплексних чисел, які будуть використовуватись у якості комплексних інтервалів. Існує два підходи для визначення множин комплексних чисел.

<u>I Прямокутники у якості комплексних інтервалів</u>

<u>Визначення</u>. Нехай $A_1$ та $A_2$ - довільні елементи з I(R). Тоді множина комплексних чисел

$$A = \{a = a_1 + ia_2 \,|\, a_1 \in A_1, a_2 \in A_2,\ i = \sqrt{-1}\}$$

називається **комплексним інтервалом**.

Визначені таким чином множини комплексних чисел можуть бути зображені на комплексній площині у вигляді прямокутників із сторонами, паралельними осям координат. Множину всіх таких інтервалів позначають через R(C), а великі літери A, B, C,…,X, Y, Z використовують для позначення її елементів.

Комплексне число $a = a_1 + ia_2$ можна розглядати як точковий комплексний інтервал

$$A = [a_1, a_1] + i[a_2, a_2] \in R(C),$$

а кожний елемент $A_1$ з I(R) – як суму $A = A_1 + i[0,0]$.

<u>Визначення</u>. Нехай $A = A_1 + iA_2$ та $B = B_1 + iB_2$ - два елементи з R(C). Тоді A та B вважаються рівними (A=B) якщо

$$A_1 = B_1,\ \ A_2 = B_2.$$

Дане відношення рівності рефлексивне, симетричне та транзитивне.

Тепер узагальнемо арифметику комплексних чисел.

Визначення. Нехай $* = \{+,-,\cdot,\div\}$ - бінарна операція над елементами з I(R). Тоді якщо $A = A_1 + iA_2$ та $B = B_1 + iB_2$ маємо:

$$
\begin{aligned}
&A \pm B = A_1 \pm B_1 + i(A_2 \pm B_2) \\
&A \cdot B = A_1B_1 - A_2B_2 + i(A_1B_2 + A_2B_1) \quad . \\
&A \div B = \frac{A_1B_1 + A_2B_2}{B_1^2 + B_2^2} + \frac{i(A_2B_1 - A_1B_2)}{B_1^2 + B_2^2}
\end{aligned}
$$

Вираз $B_1^2 + B_2^2$ слід вираховувати за правилом

$$B_1^2 + B_2^2 = \{b_1^2 \mid b_1 \in B_1\} + \{b_2^2 \mid b_2 \in B_2\}.$$

<u>Приклад</u>. Нехай $B = [-1,1] + i[1,3]$. Тоді $B_1^2 + B_2^2 = [(-1)^2, 1^2] + [1^2, 3^2] = [2,10]$.

Нехай $A = [2,4] + i[1,3]$, $B = [1,1] + i[2,3]$.

Тоді $AB = [2,4] - [2,9] + i([4,12] + [1,3]) = [-7,2] + i[5,15]$.

<u>II Кола у якості комплексних інтервалів</u>

<u>Визначення</u>. Нехай a з C – комплексне число. Множина

$$Z = \{z \in C \mid |z - a| \le r,\ r \ge 0\}$$

називається **колом** або **круговим інтервалом**.

Множина всіх кругових інтервалів позначається через K(C), а великі літери A, B, C,…,X, Y, Z використовують для позначення її елементів. Коло Z з центром a та радіусом r записують як

$$Z = \langle a, r \rangle.$$

<u>Визначення</u>. Два кола $A = \langle a, r_1 \rangle$ та $B = \langle b, r_2 \rangle$ називаються рівними (A=B) якщо вони рівні в теоретико-множинному розумінні.

Дане відношення рівності також рефлексивне, симетричне та транзитивне.

<u>Визначення</u>. Нехай $* = \{+,-,\cdot,\div\}$ - бінарна операція над комплексними числами. Тоді якщо $A = \langle a, r_1 \rangle$ та $B = \langle b, r_2 \rangle$, то

$$\begin{aligned}
&A \pm B = \langle a \pm b,\ r_1 + r_2 \rangle \\
&A \cdot B = \langle ab,\ |a| r_2 + |b| r_1 + r_1 r_2 \rangle \\
&\frac{1}{B} = \left\langle \frac{\overline{b}}{b\overline{b} - r_2^2},\ \frac{r_2}{b\overline{b} - r_2^2} \right\rangle \\
&A \div B = A \cdot \frac{1}{B}
\end{aligned}.$$

В даній формулі $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ позначає евклідову норму комплексного числа $a = a + ia_2$, а $\overline{b} = b_1 + ib_2$ - поєднане з $b = b_1 + ib_2$.

Найбільш важливими властивостями операцій на множинах прямокутних та кругових інтервалів є:

- $\left.\begin{aligned} &A + B = B + A \\ &AB = BA \end{aligned}\right\}$ комутативність
- $\left.\begin{aligned} &(A + B) + C = A + (B + C) \\ &(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \text{ для } A, B, C \in K(C) \end{aligned}\right\}$ асоціативність
- $\left.\begin{aligned} &A \cdot (B + C]) \subseteq AB + AC \\ &a(B + C) = aB + aC \quad \text{для } a \in C \end{aligned}\right\}$ субдистрибутивність
- R(C) та K(C) не мають дільників нуля;

- $\left.\begin{array}{l}[0,0]+i[0,0]\in R(C)\quad (\langle 0,0\rangle \in K(C))\\ [1,1]+i[0,0]\in R(C)\quad (\langle 1,0\rangle \in K(C))\end{array}\right\}$ - єдині нейтральні елементи додавання (нуль) та множення (одиниця).

## ТЕМА 2 Інтервальне оцінювання і множина значень у випадку дійсних функцій

### 2.1 Множина значень у випадку дійсних функцій

Розглянемо дійсні неперервні функції. Запис $y(\vec{x})$ означає обчислювальну процедуру значення функції $y$ для заданих значень змінних $\vec{x}=\left(x_1,...,x_n\right)^T$. Будемо також розглядати функції $y=\eta\left(\vec{x},\vec{b},\vec{z}\right)$, які включають деякі константи, наприклад у такому вигляді $y=\vec{\varphi}^T(\vec{x})\cdot\vec{\beta}$ чи у вигляді, коли константи $\beta_1,...,\beta_m$ замінені деякими множинними оцінками $\vec{b}\in\Omega$. Тоді оцінку діапазону зміни функції за умов $\vec{b}\in\Omega$ та $\vec{x}\in\chi$ отримаємо у вигляді:

$$[\hat{y}(x)]=[\hat{y}^-(x);\hat{y}^+(x)], \tag{2.1}$$

де $\hat{y}^-(\vec{x})=\min\limits_{\vec{b}\in\Omega}\left(\vec{\varphi}^T(\vec{x})\cdot\vec{b}\right)$ та $\hat{y}^+(\vec{x})=\max\limits_{\vec{b}\in\Omega}\left(\vec{\varphi}^T(\vec{x})\cdot\vec{b}\right)$.

### 2.2 Об’єднане інтервальне розширення неперервної дійсної функції

В інтервальній математиці, замість розв’язків інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь у вигляді множини $\Omega$ параметрів моделі, розглядають його локалізацію (наближення) за допомогою інтервального вектора $[\vec{b}]=([b_1^-;b_1^+],...,[b_m^-;b_m^+])^T$, який дозволяє знайти об’єднане інтервальне розширення неперервної дійсної функції. Очевидно властивості об’єднаного інтервального розширення матимуть певні відмінності в порівнянні з коридором інтервальних моделей, побудованим на основі розв’язків системи лінійних інтервальних алгебраїчних рівнянь.

Фактично, об’єднане інтервальне розширення, що являє множину інтервальних моделей, задається коридором $[\hat{y}(\vec{x})]$, коли взамін $\vec{b} \in \Omega$ можна записати $\vec{b} \in [\vec{b}]$. Надалі коридор інтервальних моделей при інтервальному задані їх параметрів (об’єднане інтервальне розширення) будемо позначати так: $[\hat{y}(\vec{x})]\Big|_{\vec{b}\in[\vec{b}]}$.

З іншого боку, замінивши у виразі для множини інтервальних моделей $\hat{y}(\vec{x}) = \vec{\varphi}^{T}(\vec{x}) \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \in \Omega$, побудованій на основі множини розв’язків інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, вектор оцінок $\vec{b}$ на інтервальний вектор $[\vec{b}]$ і виконавши операції інтервальної арифметики, отримаємо оцінку $[\hat{y}(\vec{x},[\vec{b}])]$ прогнозованого значення $\hat{y}(\vec{x})$ в інтервальній арифметиці.

Для загального випадку доведено наступне включення:

$$[\hat{y}(\vec{x})]\Big|_{\vec{b}\in[\vec{b}]} \subseteq [\hat{y}(\vec{x},[\vec{b}])], \forall \vec{x} \in \chi. \tag{2.2}$$

Процедури знаходження оцінок $[\hat{y}(\vec{x},[\vec{b}])]$, у яких застосовується інтервальна арифметика є достатньо надлишковими, а знайдені оцінки часто неточні. Крім того, при побудові інтервальних моделей статичних систем, не залежно від методу локалізації множини параметрів, важливим є не тільки можливість знаходження прогнозованого значення інтервалу виходу з мінімальними обчислювальними витратами, що в даному випадку забезпечується оцінками $[\hat{y}(\vec{x},[\vec{b}])]$, але і забезпечення аналітичності заданя функціональних меж коридору моделей на усій області експерименту. Остання вимога зумовлює необхідність розгляду властивостей меж функціонального коридору $[\hat{y}(\vec{x})]\Big|_{\vec{b}\in[\vec{b}]}$ лінійно-параметричних функцій.

Відмітимо, що для лінійно-параметричних функцій в силу властивості субдистрибутивності інтервальної арифметики, включення (2.2) перетворюється у рівність, тобто оцінки $[\hat{y}(\vec{x})]\Big|_{\vec{b}\in[\vec{b}]}$ та $[\hat{y}(\vec{x},[\vec{b}])]$ співпадають для усіх значень $\vec{x}$.

Коридор інтервальних моделей у випадку локалізації області $\Omega$ оцінок параметрів інтервальним вектором $[\vec{b}]$, що в просторі параметрів є прямокутним паралелепіпедом

$$\Pi^{+}=\{\vec{b}\,\big|\,b_j^{-}\le b_j\le b_j^{+},\ j=1,\ldots,m\},\tag{2.3}$$

запишемо так:

$$[\hat{y}(\vec{x})]\Big|_{\vec{b}\in[\vec{b}]}=[\min_{\vec{b}\in\Pi^{+}}\sum_{j=1}^{m}\varphi_j(\vec{x})\cdot b_j;\max_{\vec{b}\in\Pi^{+}}\sum_{j=1}^{m}\varphi_j(\vec{x})\cdot b_j].\tag{2.4}$$

Зауважимо, що залежність між прогнозованим значенням виходу $\hat{y}$ та оцінками вектора параметрів $\vec{b}$ є лінійною. Тому при фіксованому векторі входів $\vec{x}$ розв’язками задач

$$\min_{\vec{b}\in\Pi^{+}}\sum_{j=1}^{m}\varphi_j(\vec{x})\cdot b_j,\ \max_{\vec{b}\in\Pi^{+}}\sum_{j=1}^{m}\varphi_j(\vec{x})\cdot b_j\tag{2.5}$$

є вершини паралелепіпеда $\Pi^{+}$. Отже, межі коридору інтервальних моделей, як і у випадку застосування множини параметрів $\Omega$, будуються на основі координат вершин області локалізації $\Pi^{+}$.

Введемо такі позначення:

$$b_j^{\min}=\begin{cases}b_j^{-}, \text{якщо } \varphi_j(\vec{x}_i)\ge 0\\ b_j^{+}, \text{якщо } \varphi_j(\vec{x}_i)<0\end{cases},\ b_j^{\max}=\begin{cases}b_j^{+}, \text{якщо } \varphi_j(\vec{x}_i)\ge 0\\ b_j^{-}, \text{якщо } \varphi_j(\vec{x}_i)<0\end{cases}.\tag{2.6}$$

З врахуванням вище зробленого зауваження перепишемо вираз (2.4) так:

$$[\hat{y}(\vec{x})]\Big|_{\vec{b}\in[\vec{b}]} = [\sum_{j=1}^{m}\varphi_j(\vec{x})\cdot b_j^{min}; \sum_{j=1}^{m}\varphi_j(\vec{x})\cdot b_j^{max}]. \qquad (2.7)$$

Перейдемо до аналізу виразу (2.7).

Як видно, для обчислення інтервалу прогнозування $[\hat{y}(\vec{x})]\Big|_{\vec{b}\in[\vec{b}]}$ у фіксованій точці $\vec{x}_i$ необхідно визначити знаки значень усіх базових функцій $\varphi_j(\vec{x}_i),(j=1,...,m)$. Оскільки значення базових функцій в загальному випадку залежать від значень компонент вектора входів $\vec{x}$, то справедлива така властивість інтервальних моделей у випадку інтервальних оцінок їх параметрів.

*Властивість*. У загальному випадку межі коридору (2.7) інтервальних моделей є кусковими функціями.

Дану властивість можна проілюструвати прикладом.

Нехай маємо інтервальну модель $\hat{y}(x) = b_0 + b_1 \cdot x$, де $b_0 \in [2,4], b_1 \in [1,3]$, $x \in [-2,2], \varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = x$ .

Коридор інтервальних моделей (2.7) для даного випадку буде таким:

$$[\hat{y}(\vec{x})]\Big|_{\vec{b}\in[\vec{b}]} = [2,4] + [1,3]\cdot x.$$

Графічна ілюстрація коридору наведена на рисунку 1.

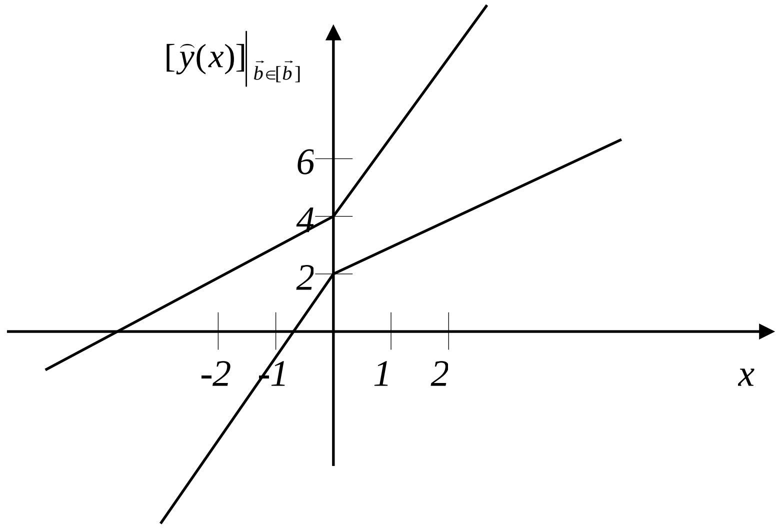


Рис. 2.1. Кусковість меж функціонального коридору

Як видно, на інтервалі [-2,0] значення базисної функції від'ємне, тобто $\varphi_2(\mathrm{x})<0$, а на інтервалі [0,2] $\varphi_2(\mathrm{x})>0$, що є причиною кусковості меж функціонального коридору.

*Властивість*. Нехай на області експерименту $\chi$ усі базові функції $\varphi_j(\vec{x}),(j=1,...,m)$ у лінійно-параметричному рівнянні є неперервними та не кусковими і жодна з них не змінює свій знак на протилежний, тоді функціональні межі коридору інтервальних моделей (2.7) статичної системи на області $\chi$ є неперервними та не кусковими функціями.

Справедливість властивості 2 витікає з формул (2.6), та (2.7), оскільки за умов постійності знаків значень базових функцій $\varphi_j(\vec{x}),(j=1,...,m)$ на області експерименту $\chi$, вибір значень $b_j^{min}, b_j^{max}$ не залежить від зміни значень вектора входів $\vec{x}\in\chi$.

Для поліноміальних моделей зміна знаків значень базових функцій пов'язана з їх "проходженням" через нульову точку $\vec{x}_0=(0,...,0)^T$. Шляхом нормування змінних $\vec{x}$ центр $\vec{x}_0$ області експерименту $\chi$ можна вибрати так, щоб на області експерименту задовольнити умови справедливості властивості 2. У цьому випадку межі коридору інтервальних моделей (2.7) будуть неперервними та не кусковими функціями.

Однак таке нормування не завжди є зручним при розв'язуванні задач активної ідентифікації інтервальних моделей. Переважно для цих задач нормування проводять у такий спосіб, щоб центр $\vec{x}_0$ області експерименту саме співпадав з нульовою точкою $\vec{x}_0 = (0,...,0)^T$.

Похибка прогнозування інтервальної моделі при інтервальних параметрах визначається шириною коридору (2.7):

$$\Delta_{\hat{y}(\vec{x})}\Big|_{\vec{b}\in[\vec{b}]} = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(\vec{x}) \cdot b_j^{max} - \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(\vec{x}) \cdot b_j^{min} . \qquad (2.8)$$

З урахуванням позначень (2.6), формулу (2.8) для визначення похибки прогнозування перепишемо так:

$$\Delta_{\hat{y}(\vec{x})}\Big|_{\vec{b}\in[\vec{b}]} = \left|\vec{\varphi}^T(\vec{x})\right| \cdot (\vec{b}^+ - \vec{b}^-) , \qquad (2.9)$$

де $\left|\vec{\varphi}^T(\vec{x})\right|$ – означає вектор абсолютних значень базових функцій у фіксованій точці $\vec{x}$; $\vec{b}^+$, $\vec{b}^-$ – вектори, компонентами яких є $b_j^+$ та $b_j^-$, відповідно.

Як видно з (2.9), при збільшені розмірів області $\Pi^+$ локалізації $\Omega$ значення похибки прогнозування збільшується.

Врахуємо, що область $\Pi^+$ є симетричною відносно центру

$$\vec{\bar{b}} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{b}^+ + \vec{b}^-) . \qquad (2.10)$$

Тоді формула (2.7) для визначення коридору інтервальних моделей набуде такого вигляду

$$[\hat{y}(\vec{x})]\Big|_{\vec{b}\in[\vec{b}]} = [\vec{\varphi}^T(\vec{x})\cdot\vec{\bar{b}} - \frac{1}{2}\cdot\Delta_{\hat{y}(\vec{x})}\Big|_{\vec{b}\in[\vec{b}]}; \vec{\varphi}^T(\vec{x})\cdot\vec{\bar{b}} + \frac{1}{2}\cdot\Delta_{\hat{y}(\vec{x})}\Big|_{\vec{b}\in[\vec{b}]}]. \qquad (2.11)$$

Розглянемо тепер співвідношення між похибкою прогнозування (2.9) та похибкою прогнозування $\Delta_{\hat{y}(\vec{x})}$ інтервальної моделі при $\vec{b}\in\Omega$, тобто коли вона обчислюється як різниця меж коридору (2.6).

У силу виконання (2.2) – як рівності для лінійно-параметричних функцій у вигляді, а також монотонності включення інтервальних обчислень, справедлива така нерівність:

$$\Delta_{\hat{y}(\vec{x})} \le \Delta_{\hat{y}(\vec{x})}\Big|_{\vec{b}\in[\vec{b}]} \ \forall\vec{x}\in\chi . \qquad (2.12)$$

Дійсно, оскільки $\vec{b}\in\Omega$, а $\Omega\subseteq\Pi^+$, то оцінка $[\hat{y}(\vec{x},[\vec{b}])]$ виходу $\hat{y}$ у інтервальній арифметиці (в силу монотонності включення інтервальних обчислень) включає коридор $[\hat{y}(\vec{x})]$. Виконання рівності (2.2) у цьому випадку забезпечує справедливість включення:

$$[\hat{y}(\vec{x})] \subseteq [\hat{y}(\vec{x})]\Big|_{\vec{b}\in[\vec{b}]} . \qquad (2.13)$$

Звідси витікає справедливість нерівності (2.12).

Отже, нерівність (2.12) показує, що значення похибки прогнозування інтервальної моделі з параметрами, що належать множині розв’язків інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь ($\vec{b}\in\Omega$), у будь-якій точці області $\chi$ експерименту менше або дорівнює значенню похибки прогнозування інтервальної моделі при інтервальній локалізації вектора $\vec{b}$ її параметрів.

Для лінійної інтервальної моделі ($\vec{\varphi}^{T}(\vec{x}) = (x_1, x_2, ..., x_m)^{T}$) значення похибки $\Delta_{\hat{y}(\vec{x})}$ пропорційне відстані від центру області експерименту $\chi$, а її максимальне значення досягається на межі області $\chi$. Із формули (2.9) витікає, що дана властивість справедлива для інтервальних моделей з інтервальними параметрами $\vec{b} \in [\vec{b}]$, у яких усі базисні функції $\varphi_j(\vec{x})\,(j = 1, ..., m)$ є монотонно зростаючими по модулю, коли відстань від центру $\vec{x}_0$ експерименту збільшувати у будь-якому напрямку. Якщо пронормувати незалежні змінні $x_1, ..., x_n$ так, щоб центр експерименту збігався з нульовою точкою $\vec{x}_0 = (0, ..., 0)^{T}$, то розглянута властивість стає справедливою для поліноміальних моделей.

Для інтервальних моделей з інтервальними оцінками параметрів, заданих лінійно-параметричними функціями, у яких базові функції не відповідають розглянутій властивості, картина зміни похибки прогнозування на області експерименту як і у випадку інтервальних моделей при $\vec{b} \in \Omega$, може бути достатньо складною. Для підтвердження цього факту розглянемо графік залежності похибки прогнозування від вхідних змінних для інтервальних моделей з коридору

$$[\hat{y}(x_1, x_2)] = [4;3] \cdot x_1 + [1;3,5] \cdot \sin(x_2) + [1;2] \cdot x_2^2 + [-2;3] \cdot \cos(x_2).$$

На рисунку 2 наведена функція похибки прогнозування, отримана для інтервальних моделей розглянутого коридору.

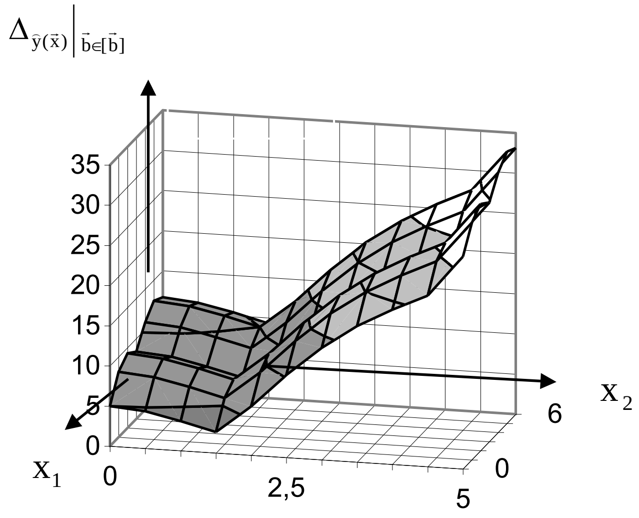


Рис. 2.2. Функція похибки прогнозування

Отже, проведений порівняльний аналіз дозволяє зробити висновок, що за умови локалізації параметрів $\vec{b}$ інтервальної моделі у вигляді інтервального вектора $[\vec{b}]$, у загальному випадку значення похибки прогнозування отриманих інтервальних моделей збільшується, а межі функціонального коридору прогнозування (2.7) в просторі експерименту залишаються кусковими функціями. Виграш при цьому в порівнянні із інтервальними моделями полягає у суттєвому зменшенні обчислювальних витрат в зв’язку із спрощенням алгоритму розрахунку інтервальних значень виходу $\hat{y}$ у фіксованих точках, а для інтервальних моделей, які задовольняють умовам справедливості властивості 2 – у гладкості границь функціонального коридору.

## 2.3 Інтервальна оцінка за умов апроксимації множини коефіцієнтів n-вимірними еліпсоїдами

Нехай для множини параметрів $\Omega$ інтервальних моделей отримана оптимальна еліпсоїдальна оцінка $Q_m$. Під оптимальною в даному випадку будемо розуміти оцінку:

$$Q_m = \{\vec{b} \in R^m \middle| (\vec{b} - \bar{\vec{b}})^T \cdot H \cdot (\vec{b} - \bar{\vec{b}}) = \gamma\}, \tag{2.14}$$

яка в просторі параметрів $\vec{b}$ моделі є $n$-вимірним еліпсоїдом мінімального об'єму і при цьому справедливе таке включення:

$$\Omega \subseteq Q_m. \tag{2.15}$$

Як і у випадку інтервальної локалізації параметрів, для побудови моделей систем із застосуванням методів локалізації множини параметрів еліпсоїдальними множинами, важливим є вивчення та застосування властивостей отриманого при цьому коридору моделей.

Коридор інтервальних моделей $[\hat{y}(\vec{x})]\Big|_{\vec{b}\in Q_m}$, у випадку локалізації множини $\Omega$ $n$-вимірним еліпсоїдом, називається наближенням коридору $[\hat{y}(x)] = [\hat{y}^-(x); \hat{y}^+(x)],$.

Враховуючи симетричність еліпсоїда, цей коридор матиме такий вигляд:

$$[\hat{y}(\vec{x})]\Big|_{\vec{b}\in Q_m} = [\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \bar{\vec{b}} - \frac{1}{2} \cdot \Delta_{\hat{y}(\vec{x})}\Big|_{\vec{b}\in Q_m}; \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \bar{\vec{b}} + \frac{1}{2} \cdot \Delta_{\hat{y}(\vec{x})}\Big|_{\vec{b}\in Q_m}], \tag{2.16}$$

де $\Delta_{\hat{y}(\vec{x})}\Big|_{\vec{b}\in Q_m}$ – похибка прогнозування.

Користуючись формулою $\Delta_{y(\vec{x})}\Big|_{\vec{b}\in Q_m} = 2 \cdot \sqrt{\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot (F^T \cdot E^{-2} \cdot F)^{-1} \cdot \vec{\varphi}(\vec{x}) \cdot m}$ для знаходження верхньої оцінки $\Delta_{y(\vec{x})}\Big|_{\vec{b}\in Q_m}$ функції $\Delta_{y(\vec{x})}$ похибки прогнозування інтервальної моделі, а також з врахуванням заміни $F^T \cdot E^{-2} \cdot F = H$ та $m = \gamma$, для похибки прогнозування отримаємо наступну формулу:

$$\Delta_{y(\vec{x})}\Big|_{\vec{b}\in Q_m} = 2\cdot\sqrt{\vec{\varphi}^{T}(\vec{x})\cdot H^{-1}\cdot\vec{\varphi}(\vec{x})\cdot\gamma}\,. \qquad (2.17)$$

Як видно з виразів (2.16) та (2.17), функції похибки прогнозування та меж коридору інтервальних моделей для даного випадку є неперервними та не кусковими, що забезпечує аналітичність розрахунку інтервалу прогнозування у заданій точці області експерименту. Ця властивість є достатньо вагомою на користь застосування еліпсоїдальних методів локалізації.

Як і у випадку інтервальної локалізації множини параметрів, похибка прогнозування при локалізації еліпсоїдом $\Delta_{\hat{y}(\vec{x})}\Big|_{\vec{b}\in Q_m}$ не менша (переважно більша) від похибки прогнозування $\Delta_{\hat{y}(\vec{x})}$ на усій області експерименту, тобто

$$\Delta_{\hat{y}(\vec{x})}\Big|_{\vec{b}\in Q_m} \ge \Delta_{\hat{y}(\vec{x})},\ \forall\vec{x}\in\chi\,. \qquad (2.18)$$

Цей факт витікає із включення $\Omega\subseteq Q_m$ та лінійності за параметрами інтервальної моделі.

# ТЕМА 3 Локалізація нулів функцій однієї дійсної змінної

## 3.1 Загальна постановка задачі

В даному розділі розглядаються методи локалізації нулів дійсної функції $f(x)$ однієї дійсної змінної x. Ці методи дозволяють знаходити множину інтервалів найменшої можливої ширини, таких, що кожен інтервал включає один, або декілька нулів функції із заданого початкового інтервалу. При розробці таких методів звертають увагу на дві обставини. З однієї сторони, методи повинні мати застосування до широкого класу функцій при умовах, які можна легко перевірити. З уншої сторони, повинна бути гарантована локалізація нулів і в тому випадку, коли дані методи реалізуються на ПЕОМ, де замість звичайної інтервальної арифметики виникає машинна інтервальна арифметика. Прості реалізації таких методів задаються за допомогою так званих методів ділення. Це - інтервальні варіанти методу двійкового пошуку або інших методів пошуку. Коротко опишемо таку процедуру. Для неї необхідно лише існування інтервального обчислення функції $f(x)$ на інтервалі $X_0$. Щоб покращити локалізацію нулів (звузити інтервал $X_0$**)**, його ділять навпіл точкою

$$m(X_0) = \frac{(x_{1,0} + x_{2,0})}{2}$$

на два інтервали $U_0$ та $V_0$, такі, що

$$X_0 = U_0 \cup V_0 = [x_{1,0}, m(X_0)] \cup [m(X_0), x_{2,0}].$$

Якщо $0 \in f(U_0)$, то $U_0$ включає нуль функції $f(x)$, і тому процедура половинного поділу повторюється для інтервалу $U_0$. Або, якщо $0 \in f(V_0)$, то процедура поділу повторюється для $V_0$. В протилежних випадках відкидаємо відповідні інтервали. Дана процедура породжує послідовність підінтервалів, які належать $X_0$ і можуть містити нулі функції $f(x)$. Ширина цих інтервалів прямує до нуля, так як вона зменшується вдвічі на кожному кроці. Дана процедура може призвести до породження великої кількості підінтервалів, що є її основним недоліком. Тому, щоб уникнути цього, на кожному кроці пропонується розглядати або тільки праву, або тільки ліву половину інтервалу.

### 3.2 Методи ньютонівського типу

В даному і наступних розділах розглянемо інтервальні модифікації методу Ньютона. Для цього розглянемо неперервну функцію $f(x)$, яка має нуль на заданому інтервалі $X_0 = [x_{1,0}; x_{2,0}]$, тобто

$$f(\xi) = 0$$

для деякого $\xi \in X_0$. Нехай

$$f(x_{1,0}) < 0 \text{ та } f(x_{2,0}) > 0$$

для межових точок інтервалу $X_0$.

Нехай $m_1$ та $m_2$ – межі різницевих відношень

$$0 < m_1 \le \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \frac{f(x)}{x - \xi} \le m_2 < \infty, \quad \xi \ne x \in X_0.$$

Ці межі визначають інтервал $M=[m_1;m_2]\in I(R)$. Аналогічне справджується для випадку $f(x_{1,0})>0$, $f(x_{2,0})<0$ та $m_2<0$.

Очевидно, що для заданих допущень функція $f(x)$ не має інших коренів на інтервалі $X_0$.

Починаючи із вихідного локалізаційного інтервалу $\xi\in X_0$ обчислюються ітераційно нові інтервали $X_k, k\ge 1$ відповідно до такої процедури:

$$X_{k+1}=\left\{m(X_k)-\frac{f(m(X_k))}{M}\right\}\bigcap X_k,\quad k\ge 0, \tag{3.1}$$

де $m(X_k)\in X_k$.

Одна ітерація процесу проілюстрована на рисунку 3.1.

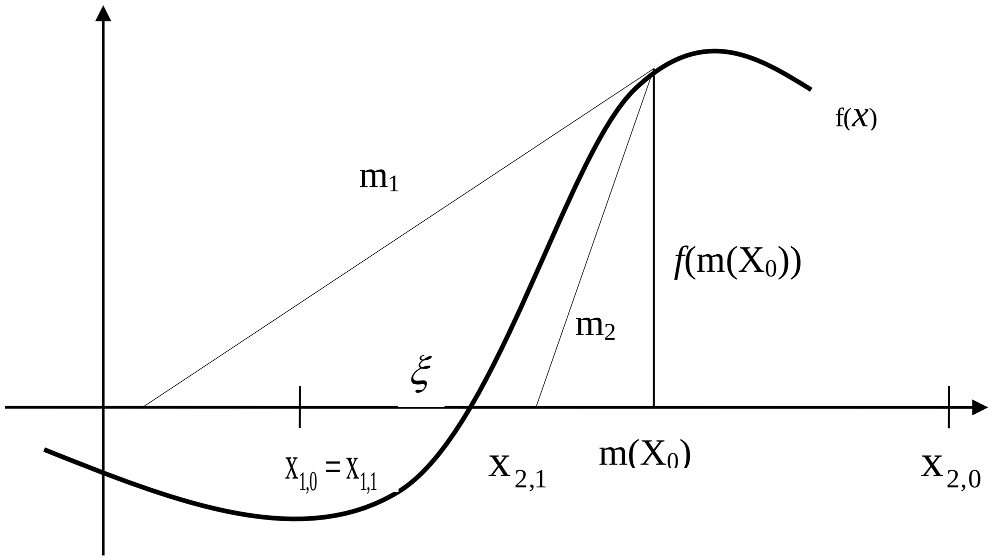


Рис. 3.1. Ілюстрація однієї ітерації методу Ньютона

Формулу 3.1 можна записати і без використання інтервальних операцій:

$$x_{1,k+1} = \begin{cases} \max\left\{x_{1,k}, m(X_k) - \dfrac{f(m(X_k))}{m_1}\right\}, & \text{якщо} \quad f(m(X_k)) \ge 0 \\ m(X_k) - \dfrac{f(m(X_k))}{m_2}, & \text{якщо} \quad f(m(X_k)) \le 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

$$x_{2,k+1} = \begin{cases} m(X_k) - \dfrac{f(m(X_k))}{m_2} \;,{}_{2} & \text{якщо} \quad f(m(X_k)) \ge 0 \\ \min\left\{x_{2,k}, m(X_k) - \dfrac{f(m(X_k))}{m_1}\right\}, & \text{якщо} \quad f(m(X_k)) \le 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Слід зауважити *важливі властивості послідовності ітерацій* $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$, яка обчислена по формулам (3.1)-(3.3):

1) $\xi \in X_k$, $k \ge 0$;

2) $X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots$, де $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = \xi$, або дана послідовність стабілізується за кінцеву кількість кроків у точці $[\xi;\xi]$];

3) $d(X_{k+1}) \le \left(1 - \dfrac{m_1}{m_2}\right) d(X_k)$;

4) якщо $m(X_k) = \dfrac{x_{1,k} + x_{2,k}}{2}$, то для послідовності наближень $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$ вірна нерівність $d(X_{k+1}) \le \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{m_1}{m_2}\right) d(X_k)$, яка уточнює властивість 3.

Четверта властивість показує, що якщо вибрати середину інтервалу за $m(X_k)$, то ширина локалізаційного інтервалу буде зменшуватись вдвічі на кожній ітерації.

Зауважимо, що інтервал $[m_1; m_2]$ можна локалізувати для випадку неперервно диференційованої функції $f(x)$ найменшим та найбільшим значенням її першої похідної

$$M = [\inf\ f'(x),\ \sup f'(x)].$$

## 3.3 Оптимальний метод вибору

У попередньому методі ітерацій локалізації нулів дійсної функції, залежно від вибору точок $m(X_k)$ на інтервалах $X_k$ отримуються різні послідовності локалізаційних інтервалів $X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots$. Тому надалі ставиться задача вибору $m(X_k)$ у такий спосіб, щоб ширина окремих елементів послідовності була найменшою.

Проведемо математичну формалізацію даного уточнення.

Нехай $f(x)$ належить класу функцій $\varphi[X]$, які володіють наступними властивостями:

а) $f(x_1) < 0$ та $f(x_2) > 0$;

б) для інтервалу $M = [m_1; m_2]$**,** такого, що $m_1 > 0$, справедливо

$$m_1 \le \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \le m_2 \text{ для усіх } x \ne y,\ x, y \in [X].$$

Очевидно, що будь яка функція $f(x) \in \varphi[X]$, як і у попередньому методі, має тільки один корінь $\xi$ на інтервалі $X = [x_1, x_2]$**.** Для його локалізації можна використати метод побудови послідовності за формулою (3.1).

Процес вибору необхідного $m(X_k) \in X_k$ розглядається покроково.

Як видно із ітераційного методу локалізації нуля функції за формулами (3.1)-(3.3), для обчислення нового наближення $X_{k+1}$ необхідні величини $m(X_k)$ та $f(m(X_k))$. Якщо зафіксувати величину $m(X_k) = x \in X_k$, то $X_{k+1}$ буде залежати тільки від $f(m(X_k))$. Але таке значення $f(x)$ може змінюватися лише в межах від $f(x_{1,k})$ до $f(x_{2,k})$, то значення $f(m(X_i)), 0 \le i \le k$ також зафіксовані. Це дозволяє визначити найбільш можливу ширину для $X_{k+1}$:

$$\max\{\,\mathrm{wid}\,(X_{k+1})\big|m(X_k) = x, \quad f(x_{1,k}) \le f(m(X_k)) \le f(x_{2,k})\}.$$

Це буде «найгірший» випадок для функції $f(x)$, а «найкращий», тобто оптимальне значення $\tilde{x} = m(X_k)$ вибирається за формулою:

$$\min_{x \in X_k}\{\,\max \mathrm{wid}(X_{k+1})\big|m(X_k) = x, \quad f(x_{1,k}) \le f(m(X_k)) \le f(x_{2,k})\},$$

тобто із умови мінімізації найбільшої ширини для найгіршого випадку.

Нехай метод ітерацій застосовується до функцій $f(x) \in \varphi[X]$. Якщо використовується правило

$$m(X_k) = \frac{x_{1,k} + x_{2,k}}{2}, \quad 0 \le k \le i, \quad i \ge 0,$$

то максимальна ширина $\mathrm{wid}(X_{i+1})$ для функцій $f(x) \in \varphi[X]$ менше, ніж для будь-яких інших виборів точки $m(X_k)$:

$$\mathrm{wid}(X_{i+1}) \le \frac{1}{2^{i+1}}\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right)^{i+1} \mathrm{wid}(X_0).$$

### 3.4 Квадратично збіжні методи

В методі ітерацій використовується фіксована пара $m_1, m_2$ меж для різницевих відношень функції $f(x)$. Ця процедура відповідає інтервальному варіанту спрощеного методу Ньютона. Якщо ж допустити, що $f(x)$

неперервно диференційована і для похідної $f'(x)$ є інтервальна оцінка $f'(X)$, то можна визначити інтервальний варіант і для звичайного методу Ньютона. Нову процедуру можна отримати шляхом модифікації методу ітерацій, якщо замінити інтервал $M$ на інтервал

$$M_k = f'(X_k) \tag{3.4}$$

на $k$-ому кроці ітерації. Якщо відомі апріорні оцінки

$$0 < l_1 \le f'(x) \le l_2,$$

то можна гарантувати оцінку $m_1 > 0$ і використовувати вираз

$$M_k = [m_{1,k}, m_{2,k}] = f'(X_k) \cap L, \quad L = [l_1, l_2]. \tag{3.5}$$

Таким чином отримуємо

$$X_{k+1} = \left\{ m(X_k) - \frac{f(m(X_k))}{M_k} \right\} \cap X_k. \ m(X_k) \in X_k \tag{3.6}$$

Тоді послідовність інтервалів $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$ або задовільняє співвідношенням:

1) $\xi \in X_k,\ k \ge 0$;

2) $X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots$ та $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = \xi$

або стабілізується на значені $[\xi;\xi]$ через кінцеву кількість кроків.

$$\mathrm{wid}(X_{k+1}) \le \left(1-\frac{m_{1,k}}{m_{2,k}}\right)\mathrm{wid}(X_k) \le \beta(\mathrm{wid}(X_k))^2, \quad \beta \ge 0$$

$$\mathrm{wid}(X_{k+1}) \le \left(1-\frac{m_{1,k}}{m_{2,k}}\right)\mathrm{wid}(X_k) = \frac{m_{2,k}-m_{1,k}}{m_{2,k}}\mathrm{wid}(X_k).$$

Тепер модифікуємо даний метод далі. Відмітимо, що якщо $f(m(X_k)) > 0$ (відповідно $f(m(X_k)) < 0$), то шуканий нуль $\xi$ повинен належати інтервалу $\lfloor x_{1,k}, m(X_k)\rfloor$ (відповідно $\lfloor m(X_k), x_{2,k}\rfloor$. Якщо $f(m(X_k)) = 0$, то $m(X_k) = \xi$, і ітераційний процес пошуку нуля функції завершується. Тому у формулі (3.6) досить прийняти

$$M_k = f(Y_k) \cap L, \quad L = [l_1, l_2],$$

де

$$Y_k = \begin{cases} [x_{1,k}, m(X_k)], & \text{якщо } f(m(X_k)) > 0, \\ [m(X_k), x_{2,k}], & \text{якщо } f(m(X_k)) < 0, \\ X_k & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Якщо $0 \in f'(X_0)$, то процедуру пошуку $X_{k+1}$ неможливо навіть почати. Для цього перед початком ітерацій необхідно виконати декілька кроків методу розбиття інтервалів (інтервальні варіанти методу подвійного пошуку або інших методів пошуку). Таким чином буде знайдено інтервал $Y_0 \subset X_0$, для якого вірно $0 \notin f'(Y_0)$.

Існує ще одна модифікація методу Ньютона, яка застосовується навіть у випадку, коли $0 \in f'(X_0)$. У даному методі інтервал $X_0$ розбивається на підінтервали

$$U_1 = \left[ x_{1,0}, m(X_0) - \frac{|f(m(X_0))|}{m_{2,0}} \right],$$

$$V_1 = \left[ m(X_0) + \frac{|f(m(X_0))|}{m_{2,0}}, x_{2,0} \right],$$

поклавши, що $f(m(X_0)) \neq 0$. Всі нулі функції $f(x)$ на інтервалі $X_0$ повинні належати також і $U_1 \cup V_1$. Дійсно, нуль $\xi \in X_0$ повинен задовільняти нерівність

$$\left| \frac{f(m(X_0))}{\xi - m(X_0)} \right| \leq m_{2,0},$$

звідки випливає

$$\frac{|f(m(X_0))|}{m_{2,0}} \leq |\xi - m(X_0)|$$

та

$$\xi \geq m(X_0) + \frac{|f(m(X_0))|}{m_{2,0}}$$

або

$$\xi \leq m(X_0) - \frac{|f(m(X_0))|}{m_{2,0}}.$$

З останньої нерівності випливає, що $\xi \in U_1 \cup V_1$. Крім того, при умові $f(m(X_0)) \neq 0$ маємо

$$\mathrm{wid}(U_1 \cup V_1) = \mathrm{wid}(X_0) - 2\frac{|f(m(X_0))|}{m_{2,0}} < \mathrm{wid}(X_0).$$

Тепер цю процедуру можна повторити для підінтервалів $U_1$ та $V_1$ і т.д. Сумарна ширина цих інтервалів наближається до нуля. Якщо $f(x)$ має на інтервалі $X_0$ тільки прості нулі, то після деякого кроку ітерації всі вони виявляться у інтервалах, які не перетинаються. Потім, після деякого кроку процедура перетворюється в ітерацію квадратично збіжного методу (3.6). Після цього або підінтервали наближаються до інтервала, який містить нуль, або в деякий момент отримується пустий перетин.

### 3.5 Інтерполяційні методи

У противагу описаним вище методам вони використовують розділені різності Ньютона. Коротко опишемо.

Припустимо, що функція подвійно неперервно диференційована на інтервалі $X$ та має на цьому інтервалі єдиний та простий нуль $\xi$. Після цього отримуємо інтервали $H, K$, які відповідають умовам

$$\begin{array}{l} f'(x) \in H, \quad x \in X, \quad \text{де } 0 \notin H \\ f''(x) \in K, \quad x \in X \end{array}.$$

Інтервальний метод regula falsi (RF) (хибної підстави) має наступний алгоритм:

$$X_0 = X,\ \ x_0 = m(X_0)\quad \text{(середина інтервалу } X_0\text{)},$$

$$X_1 = \left\{ x_0 - \frac{f(x_0)}{H} \right\} \bigcap X_0,$$

$$\mathrm{RF} \begin{cases} x_k = m(X_k)\quad \text{(середина інтервалу } X_k\text{)}, \\ Z_{k+1} = \left\{ x_k - \dfrac{f(x_k)}{H} \right\} \bigcap X_k, \\ X_{k+1} = \begin{cases} \left\{ x_k - \dfrac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \left( f(x_k) + \dfrac{1}{2} K(Z_{k+1} - x_k)(Z_{k+1} - x_{k-1}) \right) \right\} \bigcap Z_{k+1}, & \text{якщо } f(x_k) \neq 0 \\ Z_{k+1} & \text{в протилежному випадку} \end{cases} \end{cases}$$

Властивості алгоритму RF наступні:

1) $\xi \in X_k,\ k \geq 0$;

2) $X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots$ та $\lim\limits_{k \to \infty} X_k = \xi$

або стабілізується на значені $[\xi; \xi]$ через кінцеву кількість кроків.

Для деякого $\gamma \geq 0$ має місце співвідношення

$$\mathrm{wid}(X_{k+1}) \leq \gamma \mathrm{wid}(X_k) \mathrm{wid}(X_{k-1}).$$

Будують також інтервальні варіанти методів, використовуючи інтервальний метод RF. Ці методи мають вищий порядок збіжності, хоча використовують значення тільки самої функції. В них задається параметр $p \geq 1$ -ціле число. Тоді параметричний метод RF ($p\mathrm{RF}$) формулюється наступним чином:

$X_0 = X,\ \ x_0 = m(X_0)$ (середина інтервалу $X_0$),

$$X_1 = \left\{ x_0 - \frac{f(x_0)}{H} \right\} \bigcap X_0,$$

для $k \ge 1$ обчислюються наближення за наступними формулами:

$x_k = m(X_k)$ (середина інтервалу $X_k$),

$$X_{k+1,0} = \left\{ x_k - \frac{f(x_k)}{H} \right\} \bigcap X_k,$$

$$X_{k+1,1} = \begin{cases} \left\{ x_k - \dfrac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \left( f(x_k) + \dfrac{1}{2} K\left(X_{k+1,0} - x_k\right)\left(X_{k+1,0} - x_{k-1}\right) \right) \right\} \bigcap X_{k+1,0}, & \text{якщо } f(x_k) \ne 0 \\ X_{k+1,0} & \text{в протилежному випадку} \end{cases}$$

після того проводять обчислення для $i = 2, 3, \ldots, p$ (ттільк для $p \succ 1$)

$z_i = m(X_{k+1,i-1})$,

$$X_{k+1,i} = \begin{cases} \left\{ z_i - \dfrac{z_i - x_k}{f(z_i) - f(x_k)} \left( f(z_i) + \dfrac{1}{2} K\left(X_{k+1,i-1} - z_i\right)\left(X_{k+1,i-1} - x_k\right) \right) \right\} \bigcap X_{k+1,i-1}, & \text{якщо } f(x_k) \ne 0 \\ X_{k+1,i-1} & \text{в протилежному випадку} \end{cases}$$

$X_{k+1} = X_{k+1,p}$

Властивості алгоритму pRF наступні:

1) $\xi \in X_k,\ k \ge 0$;

2) $X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots$ та $\lim\limits_{k \to \infty} X_k = \xi$

або стабілізується на значені $[\xi; \xi]$ через кінцеву кількість кроків.

Для деякого $\gamma \ge 0$ має місце співвідношення

$$\mathrm{wid}(X_{k+1}) \le \gamma \,\mathrm{wid}(X_k)^p \,\mathrm{wid}(X_{k-1}).$$

## ТЕМА 4 Інтервальні вектори та матриці

### 4.1 Основні визначення та твердження

Визначення. **Інтервальний вектор** – це впорядкований кортеж інтервалів, який розміщюється вертикально (вектор-стовпчик) або горизонтально (вектор-стрічка).

Таким чином, якщо $A_1, A_2, ..., A_n$ - деякі інтервали, то

$$[a] = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$ - інтервальний вектор-стовпчик,

$[a] = [A_1, A_2, ..., A_n]$ - інтервальний вектор-стрічка.

Множина інтервальних векторів, компоненти яких належать множині дійсних інтервалів IR, позначається через $IR^n$, а множина інтервальних векторів, компоненти яких належать множині комплексних інтервалів KR, позначається через $KR^n$. При цьому нульові вектори, всі компоненти яких нулі, традиційно позначаються через «0».

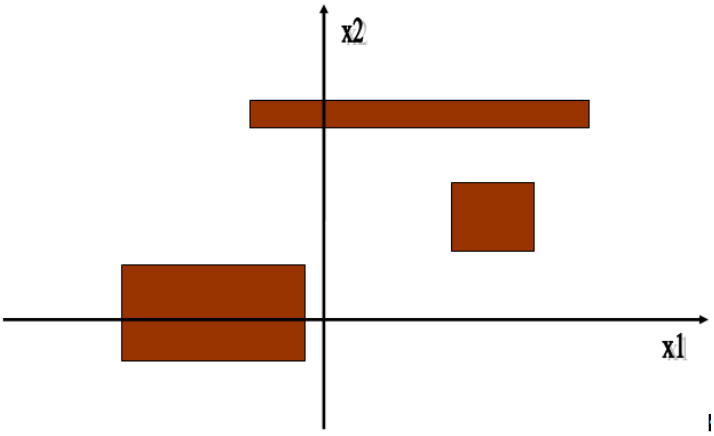


Рис. 4.1. Інтервальні вектори-бруски в $R^2$

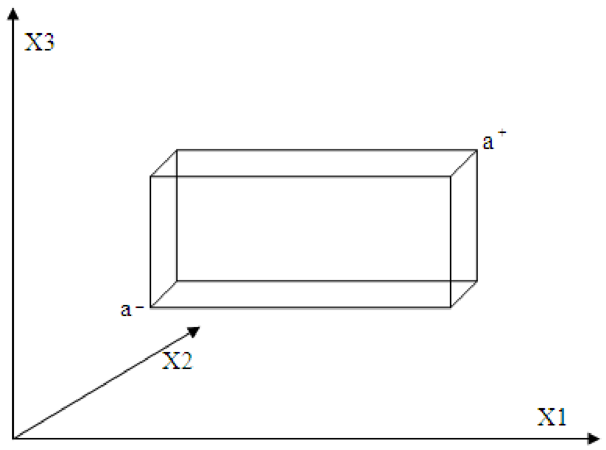


Рис. 4.2. Інтервальний вектор-брусок в $R^3$

Інтервальні вектори з $IR^n$ нероздільні від своїх геометричних образів – прямокутних паралелепіпедів в просторі $R^n$ зі сторонами, паралельними координатним осям (рис. 4.1-4.2). Для кратності їх називають *брусками*.

Визначення. **Інтервальна матриця** $[A]=[A_{ij}]$ – це прямокутна таблиця, складена з інтервалів IR або KR:

$$[A]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}.$$

Як і в класичній лінійній алгебрі, інтервальні вектори утотожнюються з інтервальними матрицями розміру $n \times 1$ (вектор-стовпці) або $1 \times n$ (вектор-стрічки).

У випадку, коли нульові та ненульові елементи в інтервальній матриці $[A]=[A_{ij}]$ структуровані певним чином, по відношенню до $[A]=[A_{ij}]$ вживаються ті ж терміни, що і в традиційній лінійній алгебрі. Наприклад,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \text{ та } \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

- це інтервальні верхньотрикутна та нижньотрикутна матриці відповідно (іноді їх називають правою трикутною та лівою трикутною матрицями).

Якщо $[a] = [A_1, A_2, ..., A_n]$ - інтервальний вектор, то $\underline{a}$ та $\overline{a}$ - точкові вектори, утворені відповідно з нижніх та верхніх меж інтервалів $A_1, A_2, ..., A_n$:

$$\underline{a} = (\underline{A}_1, \underline{A}_2, ..., \underline{A}_n) \quad \text{та} \quad \overline{a} = (\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n).$$

Таким самим чином визначають точкові матриці $\underline{A}$ та $\overline{A}$ як матриці, утворені відповідно елементами $\underline{A}_{ij}$ та $\overline{A}_{ij}$ інтервальної матриці A.

Операції взяття середини інтервалу, його радіусу та ширини, абсолютного значення до інтервальних векторів та матриць застосовуються покомпонентно та поелементно:

$$\text{mid}\,(A) = \frac{1}{2}(\overline{A} + \underline{A}) \quad \text{та} \quad \text{rad}\,(A) = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A}).$$

Операції $\cup$ та $\cap$ по відношенню до інтервальних векторів та матриць також застосовуються покомпонентно та поелементно, для прикладу:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \cup B_1 \\ A_2 \cup B_2 \\ \vdots \\ A_n \cup B_n \end{bmatrix} \quad \text{та} \quad \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \cap B_1 \\ A_2 \cap B_2 \\ \vdots \\ A_n \cap B_n \end{bmatrix}.$$

Аналогічно, в покомпонентному та поелементному змісті розуміються відношення «$\le$», «$\ge$», «$<$» та «$>$» як для точкових, так і для інтервальних векторів та матриць.

Визначення. Якщо S – непуста обмежена множина в $R^n$ або $R^{mxn}$ то її **інтервальною оболочкою** $\omega S$ називається найменший по включенню вектор (або матриця), який містить S.

Інтервальна оболочка множини S – це перетин всіх інтервальних векторів (матриць), які містить S.

Інтервальна оболочка – це інтервальний об'єкт, який як найкраще наближає ззовні множину, а компонентеми $\omega S$ є проекції множини S на координаті вісі простору.

Визначення. Дві інтервальні матриці $[A]=[A_{ij}]$ та $[B]=[B_{ij}]$ розмірності $m\times n$ рівні, якщо рівні їх відповідні компоненти:

$$[A]=[B]\Leftrightarrow [A_{ij}]=[B_{ij}],\quad 1\le i\le m, 1\le j\le n\,.$$

Визначення. Нехай $[A]=[A_{ij}]$ та $[B]=[B_{ij}]$ - інтервальні матриці розмірності $m\times n$. Тоді

$$[A]\subseteq[B]\Leftrightarrow[A_{ij}]\subseteq[B_{ij}].$$

Відношення $[A]\subset[B]$ вводиться аналогічним поелементним визначенням. Якщо при цьому $A_p=(a_{ij})$ - точкова матриця, то $A_p\in[B]$. Кожну інтервальну матрицю можна розглядати як множину точкових матриць. Відношення $\subseteq$ та $\subset$ між множинами точкових матриць розуміють у звичайному теоретико-множинному змісті.

Визначення. Нехай $[A]=[A_{ij}]$ та $[B]=[B_{ij}]$ - інтервальні матриці розмірності

$m \times n$. Тоді відношення

$$[A] \pm [B] = ([A_{ij}] \pm [B_{ij}]).$$

Визначають відповідно додавання та віднімання інтервальних матриць.

Визначення. Нехай $[A] = [A_{ij}]$ - інтервальна матриця розмірності $m \times r$ та $[B] = [B_{ij}]$ - інтервальна матриця розмірності $r \times n$. Тоді відношення

$$[A] \cdot [B] = \left( \sum_{v=1}^{r} [A_{iv}] \cdot [B_{vi}] \right)$$

визначає множення інтервальних матриць. Зокрема, для інтревальної матриці $[A] = [A_{ij}]$ розмірності $n \times r$ та інтервального вектора $[u] = [U_i]$ розмірності $r$ маємо

$$[A] \cdot [u] = \left( \sum_{v=1}^{r} [A_{iv}] \cdot [U_v] \right).$$

Нехай $[A] = [A_{ij}]$ - інтервальна матриця та X – інтервал, тоді

$$X[A] = [A]X = [XA_{ij}].$$

Властивості операцій над інтервальними матрицями:

1. $[A] + [B] = [B] + [A]$
2. $[A] + ([B] + [C]) = ([A] + [B]) + [C]$
3. $[A] + O_p = O_p + [A] = [A] \quad O_p -$ нульова матриця

4. $[A]\cdot I_p = I_p\cdot[A]=[A]$ $\quad I_p$ – одинична матриця

5. $\begin{cases}([A]+[B])[C]\subseteq[A][C]+[B][C]\\ [C]([A]+[B])\subseteq[C][A]+[C][B]\end{cases}$ субдистрибутивність

6. $([A]+[B])C_p = [A]C_p + [B]C_p$

7. $C_p([A]+[B]) = C_p[A]+C_p[B]$

8. $\begin{cases}[A](B_pC_p)\subseteq([A]B_p)C_p,\\ (A_p[B])[C]\subseteq A_p([B][C]) \text{ для } [C]=-[C],\\ A_p([B]C_p)=(A_p[B])C_p,\\ [A]([B][C])=([A][B])[C] \text{ для } [B]=-[B],\ [C]=-[C].\end{cases}$

Однією з особливостей операцій над інтервальними матрицями є відсутність властивостей комутативності та асоціативності множення (якої немає і у точковому варіанті) та дистрибутивності множення матриць по сумі.

Визначення. Нехай $[A]=[A_{ij}]$ та $[B]=[B_{ij}]$ - інтервальні матриці. Тоді

1) дійсна невід’ємна матриця

$$\operatorname{wid}([A]) = (\operatorname{wid}(A_{ij}))$$

називається **шириною інтервальної матриці** $[A]=[A_{ij}]$;

2) дійсна невід’ємна матриця

$$|[A]| = (|A_{ij}|)$$

називається матрицею абсолютних величин або **абсолютною величиною інтервальної матриці** $[A]=[A_{ij}]$;

3) дійсна невід’ємна матриця

$$\mathrm{mid}([A]) = (\mathrm{mid}(A_{ij}))$$

називається **серединою інтервальної матриці** $[A] = [A_{ij}]$;

4) дійсна невід'ємна матриця

$$\mathrm{rad}([A]) = \left(\frac{1}{2}\mathrm{wid}(A_{ij})\right)$$

називається **радіусом інтервальної матриці** $[A] = [A_{ij}]$;

5) дійсна невід'ємна матриця

$$q\,([A],[B]) = \left(q(A_{ij}, B_{ij})\right)$$

називається **матрицею відстаней** або відстаню між матрицями $[A]$та $[B]$.

Властивості середини та радіуса інтервальних матриць:

1) $\mathrm{mid}\,([A] \pm [B]) = \mathrm{mid}([A]) \pm \mathrm{mid}([B])$;

2) $\mathrm{mid}\,(A_p[B]) = A_p \cdot \mathrm{mid}([B]), \quad \mathrm{mid}\,([A]B_p) = \mathrm{mid}([A]) \cdot B_p$;

3) $\mathrm{rad}\,([A] \pm [B]) = \mathrm{rad}([A]) + \mathrm{rad}([B])$;

4) $\mathrm{rad}\,(A_p[B]) = \left|A_p\right| \cdot \mathrm{rad}([B]), \quad \mathrm{rad}\,([A]B_p) = \mathrm{rad}([A]) \cdot \left|B_p\right|$

5) $\mathrm{rad}([A]) \cdot \|[B]\| \le \mathrm{rad}\,([A][B]) \le \mathrm{rad}\,([A]) \cdot \|[B]\| + \left|\mathrm{mid}([A])\right| \cdot \mathrm{rad}([B])$;

6) $\|[A]\| \cdot \mathrm{rad}([B]) \le \mathrm{rad}\,([A][B]) \le \|[A]\| \cdot \mathrm{rad}([B]) + \mathrm{rad}([A]) \cdot \left|\mathrm{mid}([B])\right|$.

### 4.2 Норми інтервальних векторів та матриць

Традиційним атрибутом більшості лінійних просторів, який використовується в практиці математичного моделювання, є поняття норми вектора. Воно є узагальненням на багатовимірний випадок поняття абсолютної величини числа та формалізує такі інтуїтивно зрозумілі властивості як «довжина» вектора, «розмір» об'єкта і т.д.

Лінійний простір, в якому задана норма, називається нормованим.

Наведемо приклади норм на множині дійсних чисел:

1) $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$ - $l$ –норма;

2) $\|x\|_2 = \left(\sum_i |x_i|^2\right)^{1/2}$ - евклідова норма;

3) $\|x\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p}$ - норма Гельдера або $l_p$ -норма;

4) $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ - чебишевська норма або c –норма.

На множині дійсних чисел $l$ –норма, евклідова норма та c –норма еквівалентні.

Визначення. **Нормою інтервального вектора** називають дійсну величину, яка позначається як $\|[a]\|$ та задовільняє наступні аксіоми:

1) $\|[a]\| \geq 0$ - невід'ємність;

2) $\|\alpha[a]\| = |\alpha| \cdot \|[a]\|, \quad$ для $\alpha \in R$ - абсолютна однорідність;

3) $\|[a]+[b]\| \leq \|[a]\| + \|[b]\|$ - «нерівність трикутника».

Пригадаємо, що норма точкового вектора називається абсолютною, якщо вона залежить тільки від абсолютних значень його компонент. Норма називається монотонною, якщо з покомпонентної нерівності $|a| \leq |b|$ випливає нерівність норм $\|[a]\| \leq \|[b]\|$ для будь-яких векторів a та b, і ця властивість є рівносильною абсолютності норми.

Норму інтервального вектора $[a] = [A_i]$ можна визначити як

$$\|[a]\|_1 = |[A_1]| + |[A_2]| + \ldots + |[A_n]|$$

або

$$\|[a]\|_\infty = \max_i |[A_i]|$$ - чебишевська норма або максимум-норма.

<u>Визначення</u>. **Нормою інтервальної матриці** називають дійсну величину $\|[A]\|$, яка володіє наступними властивостями:

1) $\|[A]\| \geq 0$ - невід'ємність;

2) $\|\alpha[A]\| = |\alpha| \cdot \|[A]\|$, для $\alpha \in R$ - абсолютна однорідність;

3) $\|[A]+[B]\| \leq \|[A]\| + \|[B]\|$ - «нерівність трикутника»;

4) $\|[A][B]\| \leq \|[A]\| \cdot \|[B]\|$ - субмультиплікативність.

Норму інтервальної матриці $[A] = [A_{ij}]$ можна визначити як

$$\|[A]\|_1 = \max_j \left( \sum_i |[A_{ij}]| \right)$$

або

$$\|[A]\|_\infty = \max_i \left( \sum_j |[A_{ij}]| \right).$$

<u>Визначення</u>. **Сингулярними числами** матриці називаються невід'ємні квадратні корені з власних чисел матриці $A^T A$.

<u>Визначення</u>. **Спектральним радіусом** $\rho(A)$ точкової матриці називається найбільше з абсолютних значень власних чисел матриці A:

$$\rho(A) = |\lambda_{max}|,$$

де $|\lambda_{\max}|$ - максимальне власне число матриці A.

Визначення. Інтервальна матриця $[A]=[A_{ij}]$ називається **неособливою**, якщо неособливі всі точкові матриці $A=(a_{ij})\in[A]=[A_{ij}]$. Інтервальна матриця називається **особливою**, якщо вона містить особливу точкову матрицю.

Інтервальна матриця $[A]=[A_{ij}]$ неособлива тоді, коли визначники всіх її крайніх матриць мають однаковий знак, тобто

$$(\det A')(\det A'')>0.$$

Інтервальна матриця $[A]=[A_{ij}]$ особлива тоді, коли система нерівностей

$$|(\mathrm{mid}([A]))x|\le(\mathrm{rad}([A]))|x|,\quad x\in R^n$$

має ненульове рішення.

Ознака Ріса-Бека. Нехай інтервальна матриця така, що її середина $\mathrm{mid}[A]$ неособлива та

$$\rho\left(\left|(\mathrm{mid}([A]))^{-1}\right|\cdot\mathrm{rad}([A])\right)<1.$$

Тоді матриця $[A]=[A_{ij}]$ - неособлива.

### 4.3 Інтервальні M-матриці

Монотонні або матриці монотонного типу (M-матриці) цікаві тим, що для систем лінійних рівнянь $Ax=b$ з таким матрицями вплив збурень правої частини на рішення можна просто визначити: якщо $b'\le b''$, то з $Ax'=b'$ та $Ax''=b''$ випливає $x'\le x''$.

Визначення. Матриця $A=(a_{ij})$ називається **M-матрицею** (**монотонною** або **матрицею монотонного типу**), якщо $a_{ij} \le 0, i \ne j$ та виконується одна з еквівалених умов:

1) $\det A \ne 0$ та $A^{-1} \ge 0$;

2) $a_{ii} > 0, i = 1,...,n$ та $\rho(E - D^{-1}A) < 1$, де $D$ - діагональ матриці;

3) всі власні значення матриці мають додатні дійсні частини;

4) позадіагональні елементи A недодатні та існує додатній вектор $u > 0$ такий, що $Au > 0$;

5) позадіагональні елементи A недодатні та всі її головні мінори додатні.

Визначення. Інтервальна матриця $[A] = [A_{ij}]$ називається **інтервальною M-матрицею**, якщо кожна дійсна матриця з інтервальної матриці є M-матрицею.

Інтервальна матриця $[A] = [A_{ij}]$ є M-матрицею тоді, коли $\underline{A}$ та $\overline{A}$ - M-матриці.

Будь-яка інтервальна M-матриця неособлива та

$$[A]^{-1} = [\overline{A}^{-1}, \underline{A}^{-1}].$$

### 4.4 Інтервальні H-матриці

Подальшим узагальненням M-матриць є так звані H-матриці. Вони отримуються з M-матриць послабленням умови на знаки діагональних та позадіагональних елементів. При цьому монотонність та додатність обертання зникають.

Визначення. **Компарантом** дійсної матриці називають матрицю того ж розміру, яка позначається як $\langle A \rangle$, така що

$$\text{ij} - \text{елемент}\langle A \rangle = \begin{cases} |a_{ij}|, \text{ якщо } i = j \\ -|a_{ij}|, \text{ якщо } i \neq j \end{cases}.$$

Операція отримання компаранта матриці – це примусове призначення «необхідних» знаків для елементів матриці, додатніх для діагональних елементів та від’ємних для позадіагональних.

Визначення. Дійсна матриця називається **Н-матрицею**, якщо її компарант є М-матриця.

Визначення. Інтервальна матриця є **інтервальною Н-матрицею**, якщо кожна дійсна матриця з інтервальної є Н-матрицею.

Визначення. Дійсна матриця $\langle A_p \rangle$ є **компарантом інтервальної матриці** $[A] = [A_{ij}]$ якщо

$$\text{ij} - \text{елемент}\langle A_p \rangle = \begin{cases} \langle [A_{ij}] \rangle, \text{ якщо } i = j \\ -|[A_{ij}]|, \text{ якщо } i \neq j \end{cases}.$$

Отже

$$\langle A_p \rangle = \min_{A \in [A]} \langle A \rangle,$$

де мінімум розуміється в поелементному змісті. Тому завжди $\langle A_p \rangle = \langle A \rangle$ для деякої $A \in [A]$, зокрема

$$\langle A_p \rangle = \underline{A}$$

для інтервальної М-матриці $[A]$.

Інтервальна матриця є Н-матрицею тоді, коли:

1) її компарант $\langle A_p \rangle$ є М-матрицею;

2) існує додатній вектор $v > 0$ такий, що $\langle A_p \rangle \cdot v > 0$.

Основні властивості дійсних та інтервальних матриць.

Нехай [A], [B] та [C] – інтервальні матриці, причому [A] та [B] – квадратні.. Тоді:

1) $\langle [A] \rangle \geq \langle \mathrm{mid}([A]) \rangle - \mathrm{rad}([A])$;

2) $\langle [A] \pm [B] \rangle \geq \langle [A] \rangle - |[B]|$,

3) $|[A] \pm [B]| \geq \langle [A] \rangle - \langle [B] \rangle$,

4) $|[A][C]| \geq \langle [A] \rangle |[C]|$,

5) $[A] \subseteq [B] \Rightarrow \langle [A] \rangle \geq \langle [B] \rangle$.

## ТЕМА 5 Ітераційна локалізація нерухомої точки для систем нелінійних рівнянь

Нехай в деякій області $\Omega \subset R^n$ задано відображення $\varphi : R^n \to R^n$, причому для будь-яких $X, Y \in \Omega$ виконується нерівність

$$p(\varphi(x) - \varphi(y)) \le \alpha p(X - Y), \text{ де } 0 \le \alpha \le 1.$$

Відображення, яке відповідає даній властивості називається стисненим.

<u>Визначення</u>. Точка $x^*$ називається **нерухомою точкою** відображення $\varphi$, $\varphi(x^*) = x^*$. Іншими словами, нерухома точка – це рішення рівняння

$$\varphi(x) = x.$$

Розглянемо систему нелінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases}$$

або у вигляді вектора

$$X = \varphi(X).$$

Якщо відображення $\varphi$ стиснене, то для знаходження рішення системи нелінійних рівнянь застосовують метод простих ітерацій:

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \varphi(X_0),\\
&X_2 = \varphi(X_1),\\
&\vdots\\
&X_n = \varphi(X_{n-1}).
\end{aligned}
$$

Допускається, що вектор-функція $\varphi$ має неперервні частинні похідні по $x_1, x_2, ..., x_n$ та позначається $A = (a_{ij})$, де

$$a_{ij} = \max\left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right|.$$

Якщо $X, Y \in \Omega$, то

$$\rho(\varphi_i(X) - \varphi_i(Y)) \le \|A\|\rho(X - Y).$$

Якщо $\|A\| \le 1$, то ітераційний процес сходиться.

В інтервальному вигляді метод простої ітерації записується

$$X_{i+1} = \varphi(X_i) \cap X_i.$$

Причому для начального наближення $X_0$ повинно виконуватись включення $X^* \subseteq X_0$.

### 5.1 Інтервальний метод Ньютона

Відомо, що $x^* \subseteq X_0$ - корінь рівняння $f(x^*) = 0$. Нехай $f'(\xi) \ne 0, \forall\xi \in X_0$.

Інтервальний метод Ньютона записується

$$\mathrm{mid}(X_{k+1}) = \left(\mathrm{mid}(X_k) - \frac{f(\mathrm{mid}(X_k))}{f'(X_k)}\right) \cap X_k.$$

## 5.2 Метод Кравчика

Розглянемо оператор К:

$$K(X,x,y) = x - yf(x) + (1 - yf'(X))(X - x).$$

Нехай $x^* \in X_0$, тоді

$$X_{k+1} = K(X_k, x_k, y_k) \bigcap X_k,$$

де $x_k \in X_k$, $y_k$ - довільні. Тоді:

1) $x^* \in X_k, \forall k$;

2) $\mathrm{wid}(X_k) \to 0$ при умові $1 - yf'(X_k) \supset [0,q],\ q < 1,\ \forall k$.

На практиці у якості $x_k$ беруть $\mathrm{mid}\, X_k$, а $y_k \approx (\mathrm{mid}(f'(X_0)))^{-1}$ або $(\mathrm{mid}(f'(X_k)))^{-1}$.

## ТЕМА 6 Інтервальна система лінійних алгебраїчних рівнянь (ІСЛАР)

### 6.1 Особливості загальної постановки задачі

Розглянемо основні припущення, на яких базуються методи аналізу інтервальних даних у випадку побудови моделей систем.

В літературі ці гіпотези вперше були сформульовані в рамках теоретико-множинного підходу до задач параметричної ідентифікації:

H1. Система (об'єкт) описується лінійно-параметричним рівнянням

$$y_o = \beta_1 \cdot \varphi_1(\vec{x}) + \ldots + \beta_m \cdot \varphi_m(\vec{x}), \tag{6.1}$$

де $y_o$ – невідоме значення виходу системи; $\vec{x} \in R^n$ – вектор вхідних змінних; $\vec{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_m)^T$ – вектор невідомих параметрів; $\vec{\varphi}^T(\vec{x}) = (\varphi_1(\vec{x}), ..., \varphi_m(\vec{x}))^T$ – вектор відомих базисних функцій.

H2. Результати експерименту представлені у вигляді матриці $X$ значень вхідних змінних і відповідних інтервальних значень вихідної змінної $y$:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} \ldots x_{1n} \\ \vdots \\ x_{i1} \ldots x_{in} \\ \vdots \\ x_{N1} \ldots x_{Nn} \end{pmatrix}; \left[\vec{Y}\right] = \begin{pmatrix} \left[y_1^-; y_1^+\right] \\ \vdots \\ \left[y_i^-; y_i^+\right] \\ \vdots \\ \left[y_N^-; y_N^+\right] \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Припускають, що в довільному $i$-му спостереженні істинне значення виходу $y_{oi} = \vec{\varphi}^T(\vec{x}_i) \cdot \vec{\beta}$ належить інтервалу $[y_i^-, y_i^+]$, тобто $y_i^- \le y_{oi} \le y_i^+$.

Інтервальні значення виходу $[y_i^-, y_i^+]$ можуть бути одержані на основі моделей інтервальних похибок.

Завданням аналізу інтервальних даних є оцінювання невідомого вектора $\vec{\beta}$ так, щоб значення функції $y = \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{\beta}$ в точках експерименту належали відповідним інтервалам виходу. Якщо оцінка $\vec{b}$ вектора $\vec{\beta}$ існує, то одержану функцію $\hat{y}(\vec{x}) = \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b}$ називають моделлю системи.

Згідно сформульованих гіпотез, шуканий вектор $\vec{b}$ повинен задовольняти таку систему $N$ нерівностей з $m$ невідомими:

$$\begin{cases} y_1^- \le b_1\varphi_1(\vec{x}_1) + \ldots + b_m\varphi_m(\vec{x}_1) \le y_1^+; \\ \vdots \\ y_i^- \le b_1\varphi_1(\vec{x}_i) + \ldots + b_m\varphi_m(\vec{x}_i) \le y_i^+; \\ \vdots \\ y_N^- \le b_1\varphi_1(\vec{x}_N) + \ldots + b_m\varphi_m(\vec{x}_N) \le y_N^+; \end{cases} \qquad (6.3)$$

Оскільки кожна $i$-та нерівність у системі (6.3) забезпечує належність значення функції $\hat{y}(\vec{x})$ в $i$-тій точці експерименту, відповідному $i$-тому інтервалу виходу, то одночасне виконання умов, заданих нерівностями системи, означає існування розв'язку задачі, тобто "проходження" функції $\hat{y}(\vec{x})$ через усі інтервали.

Розглянемо деякі важливі властивості системи (6.3) та її розв'язків.

Система (6.3) є системою $N$ лінійних нерівностей відносно $m$ невідомих $b_1, \ldots, b_m$.

Нелінійність функцій $\varphi_j(\vec{x}_i)$ в (6.3) не суперечить попередньому твердженню, тому, що при відомому аргументі $\vec{x}_i$ вони стають відомими коефіцієнтами.

Якщо згадані коефіцієнти позначити через $\phi_{ij} = \varphi_j(\vec{x}_i)$, то систему (6.3) можна переписати у такому вигляді:

$$\begin{cases} y_1^- \le \phi_{11} b_1 + \ldots + \phi_{1m} b_m \le y_1^+ \\ \vdots \\ y_N^- \le \phi_{N1} b_1 + \ldots + \phi_{Nm} b_m \le y_N^+, \end{cases}$$

звідки очевидна її лінійність. Систему (6.3) зручно розглядати в матричному вигляді

$$\vec{Y}^- \le F \cdot \vec{b} \le \vec{Y}^+, \tag{6.4}$$

де $\vec{Y}^- = \{y_i^-, i = 1, \ldots, N\}, \vec{Y}^+ = \{y_i^+, i = 1, \ldots, N\}$ – вектори, складені із верхніх та нижніх меж інтервалів $[y_i^-, y_i^+]$, відповідно;

$F = \{\phi_{ij}, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, m}\}$ – відома матриця значень базисних функцій.

Система (6.4) може не мати жодного розв'язку, тобто бути несумісною або мати багато розв'язків.

Стосовно задач аналізу інтервальних даних, несумісність системи (6.4) означає, що не виконуються припущення методу, тобто або невірно задано вигляд функції (6.1), або невірно визначені інтервали $[y_i^-, y_i^+]$. Обидва порушення гіпотез не забезпечують належність значень функції $\hat{y}(\vec{x})$ в точках експерименту до відповідних інтервалів виходу.

Нехай система (6.4) є сумісною. Позначимо через $\Omega$ множину її розв'язків, тобто

$$\Omega = \left\{\vec{b} \in R^m \middle| \ \vec{Y}^- \le F \cdot \vec{b} \le \vec{Y}^+ \right\} \tag{6.5}$$

Властивості цієї множини, розглядалися у багатьох працях. Наведемо основні із них, важливі для моделювання систем.

1. У просторі параметрів $\beta_1, \ldots, \beta_m$ множина $\Omega$ є опуклий

многогранник. Це означає, що довільна точка множини $\Omega$ є розв'язком системи (6.4).

2. Довільний розв'язок $\vec{b} \in \Omega$ системи породжує інтервальну модель $\hat{y}(\vec{x}) = \vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b}$, що "проходить" через усі інтервали $[y_i^-, y_i^+]$.

3. Множина розв'язків $\Omega$ породжує множину рівнозначних (з точки зору наявної інтервальної невизначеності) інтервальних моделей, кожна з яких задовольняє умовам задачі. При цьому, всі інтервальні моделі знаходяться у коридорі:

$$[\hat{y}(x)] = [\hat{y}^-(x); \hat{y}^+(x)], \tag{6.6}$$

де $\hat{y}^-(\vec{x}) = \min\limits_{\vec{b}\in\Omega}\left(\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b}\right)$ та $\hat{y}^+(\vec{x}) = \max\limits_{\vec{b}\in\Omega}\left(\vec{\varphi}^T(\vec{x}) \cdot \vec{b}\right)$ – нижня та верхня межі функціонального коридору.

4. Істинний невідомий вектор $\vec{\beta}$ є одним із розв'язків системи (6.4), тобто $\vec{\beta} \in \Omega$. Тому можна стверджувати, що довільна точка множини $\Omega$ може бути істинним вектором параметрів. Ця властивість множини розв'язків $\Omega$ дозволяє трактувати її як множину можливих значень невідомих параметрів $\beta_1, ..., \beta_m$.

Звідси випливає, що чим "ширша" множина $\Omega$, тим більша невизначеність відносно істинних параметрів статичної системи.

Розмір множини $\Omega$ характеризується діаметром $d$, який визначається як відстань між двома найбільш віддаленими точками множини:

$$d = \max_{\vec{b}_p, \vec{b}_s} \left\| \vec{b}_p - \vec{b}_s \right\|, \tag{6.7}$$

де $\vec{b}_p$, $\vec{b}_s$ – відповідні вершини області $\Omega$.

Діаметр множини $\Omega$ тісно пов'язаний з матрицею $F$ системи (6.4). Зокрема, якщо кількість різних точок $\vec{x}_i$ спостережень у матриці $F$ буде менша від кількості невідомих параметрів $m$, то множина $\Omega$ буде "розірвана". Тобто, якщо $\mathrm{rang}(F) < m$, то $d \to \infty$. З іншого боку, якщо $\mathrm{rang}(F) = m$, то діаметр $d$ обмежений.

## 6.2.Особливості застосування традиційних алгоритмів розв'язку СЛАР

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Ax = b,$$

де $b = (b_i)$ - відомий вектор, $A = (a_{ij})$ - відома невироджена матриця. Тоді $x = A^{-1}b$ - рішення системи. Нехай в силу похибок $[A] = [A_{ij}]$ - інтервальна матриця, $[b] = [B_i]$ - інтервальний вектор, обернення $A_p^{-1}$ існує для всіх $A_p \in [A]$. Необхідно знайти множину:

$$\Omega = \left\{x_p \;\middle|\; A_p x_p = b_p,\ A_p \in [A], b_p \in [b]\right\}.$$

Дана множина в загальному випадку не має простого опису. Тому обмежуються її локалізацією за допомогою інтервального вектора $[x] = [X_i]$.

Самим простим способом рішення даної ІСЛАР є **метод Крамера**. Дійсно, для системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) $A = (a_{ij}),\ b = (b_i),\ i, j = 1{,}2$ рішення знаходиться за формулами

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{6.8}$$

де

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$
$$\Delta_1 = b_1 a_{22} - b_2 a_{21},$$
$$\Delta_2 = a_{11}b_2 - a_{12}b_1.$$

Для рішення ІСЛАР виконується інтервальне розширення формул Крамера.

Проте застосовувати формули Крамера для рішення систем великої розмірності не раціонально. В обчислювальній математиці для таких випадків використовують прямі методи: метод Гауса, $LU-$, $QR-$розклад тощо.

**Метод Гауса**

Інтервальний метод Гауса являє собою інтервальне розширення методу Гауса для СЛАР.

Нехай для ІСЛАР побудована наступна таблиця коефіцієнтів:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} & B_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} & B_n \end{bmatrix}.$$

Метод Гауса складається з двох напрямів: прямого та зворотнього. Під час прямого напряму за допомогою елементарних перетворень таблиця коефіцієнтів зводиться до верхньотрикутного виду матриці.

Застосовуючи формули

$$[A'_{1j}]=[A_{ij}],\quad 1\le j\le n,\quad [B'_1]=[B_1],$$

$$[A'_{ij}]=[A_{ij}]-[A_{1j}]\left(\frac{[A_{i1}]}{[A_{11}]}\right),\ \ 2\le i,\ j\le n,$$

$$[B'_i]=[B_i]-[B_1]\left(\frac{[A_{i1}]}{[A_{11}]}\right),\qquad 2\le i\le n,$$

$$[A'_{i1}]=0,\qquad\qquad 2\le i\le n,$$

із врахуванням того, що $0\notin[A_{11}]$, обчислюємо нову таблицю коефіцієнтів:

$$\begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & \cdots & A'_{1n} & B'_1 \\ 0 & A'_{22} & \cdots & A'_{2n} & B'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & A'_{n2} & \cdots & A'_{nn} & B'_n \end{bmatrix}.$$

Припустимо, що $A_p\in[A]$ та $b_p\in[b]$ і розглянемо систему лінійних рівнянь

$$A_p x_p=b_p.$$

Будуємо матрицю $A'_p=(a'_{ij})$ та вектор $b'_p=(b'_i)$, де

$$a'_{1j}=a_{ij},\quad 1\le j\le n,\quad b'_1=b_1,$$

$$a'_{ij}=a_{ij}-a_{1j}\left(\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right),\quad 2\le i,\ j\le n,$$

$$b'_i=b_i-b_1\left(\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right),\quad 2\le i\le n,$$

$$a'_{i1}=0,\qquad 2\le i\le n.$$

Якщо описаний вище крок провести $n-1$ разів, то початкова таблиця коефіцієнтів перетворюється у верхньотрикутну матрицю:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \cdots & \tilde{A}_{1n} & \tilde{B}_1 \\ & \tilde{A}_{22} & \cdots & \tilde{A}_{2n} & \tilde{B}_2 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \tilde{A}_{nn} & \tilde{B}_n \end{bmatrix},$$

для якої виконується включення:

$$\{x_p \mid A_p x_p = b_p,\ \text{для } A_p \in [A],\ b_p \in [b]\} \subseteq \{\tilde{x}_p \mid \tilde{A}_p \tilde{x}_p = \tilde{b}_p,\ \text{для } \tilde{A}_p \in [\tilde{A}],\ \tilde{b}_p \in [\tilde{b}]\}.$$

Зворотній напрямок методу Гауса: використовуючи формули

$$[X_n] = \frac{[\tilde{B}_n]}{[\tilde{A}_{nn}]}, \tag{6.9}$$

$$[X_i] = \frac{\left([\tilde{B}_i] - \sum_{j=i+1}^{n} [\tilde{A}_{ij}][X_j]\right)}{[\tilde{A}_{ii}]}, \quad 1 \le i \le n-1, \tag{6.10}$$

отримуємо інтервальний вектор $[x] = [X_i]$, який задовольняє умові:

$$\{x_p \mid A_p x_p = b_p,\ \ A_p \in [A],\ b_p \in [b]\} \subseteq [x].$$

$LU-$**розклад матриці на трикутні**

Матрицю $[A]$ можна представити у вигляді добутку двох трикутних матриць $[L]$ та $[U]$:

$$[L]=\begin{bmatrix} L_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix}, \quad [U]=\begin{bmatrix} 1 & U_{12} & \cdots & U_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & U_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Коефіцієнти матриць $[L]$ та $[U]$ знаходяться за формулами:

$$[L_{i1}]=[A_{i1}] \text{ для } i=1,...,n,$$

$$[U_{1i}]=\frac{[A_{1i}]}{[L_{11}]} \text{ для } i=2,...,n.$$

Справедливі наступні рекурентні співвідношення:

$$\begin{matrix} [L_{is}]=\left([A_{is}]-\sum_{k=1}^{s-1}[L_{ik}][U_{ki}]\right), \ i=s,...,n; \quad s=2,3,...,n \\ [U_{si}]=\dfrac{[L_{is}]}{[L_{ss}]}, \ i=s+1,...,n; \ s=2,...,n-1 \end{matrix}. \qquad (6.11)$$

Коли матриці $[L]$ та $[U]$ побудовані, пропонується наступний алгоритм. Спочатку розв’язується допоміжна система

$$[L]y=[b].$$

Так як матриця $[L]$ - трикутна, то справедливі наступні співвідношення:

$$
\begin{aligned}
&[Y_1]=\frac{[B_1]}{[L_{11}]},\\
&[Y_2]=\frac{[B_2]-[L_{12}][Y_1[}{[L_{22}]},\\
&\vdots\\
&[Y_n]=\frac{[B_n]-\sum_{i=1}^{n-1}[L_{ni}][Y_i]}{[L_{nn}]}.
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

Визначивши $[y]$, знаходиться рішення ІСЛАР за допомогою трикутної матриці $[U]$:

$$[U]x=[y],$$

де

$$
\begin{aligned}
&[X_n]=[Y_n],\\
&[X_{n-1}]=[Y_{n-1}]-[U_{n-1}][X_n],\\
&\vdots\\
&[X_1]=[Y_1]-\sum_{i=2}^{n}[U_{1i}][X_i].
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

Найчастіше використання методу $LU-$розкладу відбувається тоді, коли систему лінійних алгебраїчних рівнянь необхідно розв'язувати для різних правих частин. Тоді просто потрібно один раз знайти матриці $L$ та $U$, а потім використовувати зворотній хід для знаходження векторів $Y$ та X.

### 6.3.Ітераційні методи знаходження розв'язків ІСЛАР

Система лінійних інтервальних алгебраїчних рівнянь має вигляд:

$$x=Ax+b,$$

де $A = [A_{ij}]$ - інтервальна матриця розмірності $n \times n$, яка містить інтервальні коефіцієнти системи, $b = [B_i]$ - інтервальний вектор, який містить інтервальні праві частини системи.

Теорема 1. **Метод послідовного наближення**

$$x_{k+1} = Ax_k + b, \ \ k \geq 0, \tag{6.14}$$

прямує до єдиної нерухомої точки $x^*$ рівняння $x = Ax + b$ для будь якого $x_0$ тоді, коли $\rho(|A|) < 1$.

Умова $\rho(|A|) < 1$ є достатньою для збіжності методу і єдинності нерухомої точки.

В силу збіжності наближень $x_{k+1} = Ax_k + b, \ k \geq 0$, до $x^*$ при будь якому початковому векторі $x_0$ випливає, що послідовність $\{wid(x_k)\}_{k=0}^{\infty}$ збігається до $wid(x^*)$.

Теорема 2. Для нерухомої точки $x^*$ рівняння $x^* = Ax^* + b$ (яка існує і єдинна) вірне співвідношення:

$$\{y_p = (I_p - A_p)^{-1} b_p \mid A_p \in A, b_p \in b\} \subseteq \{x_p \mid x_p \in x^*\}.$$

Якщо $A = [A_{ij}] \in M_{nn}(I(R)), b \in V_n(I(R))$ і нерівність $i[A_{ij}] \geq 0$ справедлива для $A_{ij} = [i(A_{ij}), s(A_{ij})]$, то $x^*$ оптимальна в наступному розумінні. Не існує інтервального вектора $x \in V_n(I(R))$ такого, що $x \subseteq x^*, \ x \neq x^*$, але

$$\{y_p = (I_p - A_p)^{-1} b_p \mid A_p \in A, b_p \in b\} \subseteq \{x_p \mid x_p \in x\}.$$

Метод ітерації, розглянутий в теоремі 1, називається **повнокроковим** (**T**) по аналогії до відповідного методу для «точкової» системи рівнянь.

Аналогічно **короткокроковий метод** (**S**) отримується шляхом розкладу інтервальної матриці A на суму

$$A = L + D + U,$$

де $L$ - строго нижньотрикутна матриця, $D$ - діагональна матриця та $U$ - строго верхньотрикутна матриця. Тоді короткокроковий ітераційний метод визначається формулами

$$x_{k+1} = Lx_{k+1} + (D + U)x_k + b,\ k \geq 0. \tag{6.15}$$

Короткокроковий ітераційний метод з довільним початковим вектором $x_0 \in V_n(I(C))$ збігається до єдиної нерухомої точки $x^*$ тоді, коли

$$\rho((I_p - |L|)^{-1}(|D| + |U|)) < 1.$$

Так як умови збіжності повнокрокового та короткокрокового методів необхідні та достатні, тоді отримується тревдження.

Теорема 3. Повнокроковий метод (6.14) збігається для будь якого початкового значення $x_0 \in V_n(I(C))$ до єдиної нерухомої точки тоді, коли короткокроковий метод (6.15) збігається до єдиної нерухомої точки для будь якого початкового значення $x_0 \in V_n(I(C))$.

Розглянемо тепер симетричний короткокроковий метод (SS), в якому матриця А розкладається на суму

$$A = L + U,$$

де $L$ - строго нижньотрикутна матриця та $U$ - строго верхньотрикутна матриця. Метод (SS) визначається співвідношеннями:

$$\begin{aligned} x_{k+1/2} &= Lx_{k+1/2} + Ux_k + b, \\ x_{k+1} &= Lx_{k+1/2} + Ux_{k+1} + b, \quad k \ge 0. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Якщо $\rho((I_p - |U|)^{-1}|L|(I_p - |L|)^{-1}|U|) < 1$, то рівняння $x = Ax + b$ має єдину нерухому точку $x^*$.

В силу рівності

$$Ax^* = (L + U)x^* = Lx^* + Ux^*$$

послідовність, вирахована за формулами (6.16), збігається до $x^*$ для будь якого початкового вектора $x_0$.

<u>Теорема 4</u>. Нехай інтервальна матриця А розкладена на суму $A = L + U$ двох інтервальних матриць, для яких виконується

$$|A| = |L| + |U| \text{ та } \rho(|L|) < 1, \quad \rho(|U|) < 1.$$

Тоді нерівність

$$\rho((I_p - |U|)^{-1}|L|(I_p - |L|)^{-1}|U|) < 1$$

еквівалентна нерівності

$$\rho(|A|) < 1.$$

Тепер розглянемо швидкість, з якою збігається до $x^*$ послідовність $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ інтервальних векторів, які утворюються ітераційною процедурою

$$x_{k+1} = f_p(x_k), \quad k \ge 0. \tag{6.17}$$

<u>Визначення</u>. Нехай $x^* = f_p(x^*)$ та $\Omega$ - множина всіх послідовностей $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, вирахованих за формулою (6.17). Тоді величина

$$\alpha = \sup\{\lim_{k\to\infty}\sup \|q(x_k, x^*)\|^{1/k} \mid \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Omega\}$$

називається **асимптотичним фактором збіжності ітерації** (6.17) до точки $x^*$.

<u>Теорема 5</u>. Нехай дано рівняння $x = Ax + b$, де A – інтервальна матриця ($\rho(|A|) < 1$) та $b$ - інтервальний вектор. Тоді асимптотичний фактор збіжності $\alpha_T$ для повнокрокового методу відповідає нерівності

$$\alpha_T \le \rho(|A|),$$

фактор $\alpha_S$ для короткокрокового методу відповідає нерівності

$$\alpha_S \le \rho((I_p - |L|)^{-1}(|D| + |U|)),$$

фактор $\alpha_{SS}$ для симетричного короткокрокового методу відповідає нерівності

$$\alpha_{SS} \le \rho((I_p - |U|)^{-1}|L|(I_p - |L|)^{-1}|U|).$$

**Метод релаксації (R)**

Як і в короткокроковому методі, матрицю A розкладають на суму $A = L + D + U$, де $L$ - строго нижньотрикутна матриця, $D$ - діагональна матриця та $U$ - строго верхньотрикутна матриця. Потім будуються послідовні наближення

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{i,k+1} &= \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} X_{j,k+1} + \sum_{j=i}^{n} A_{ij} X_{j,k} + B_i, \\
X_{i,k+1} &= (1-\omega) X_{i,k} + \omega \tilde{X}_{i,k+1}, \ \ 1 \le i \le n, \ \ k \ge 0,
\end{aligned}$$

починаючи з довільного інтервального вектора $x_0$. За допомогою векторних позначень ці формули можна переписати у вигляді

$$x_{k+1} = (1-\omega) x_k + \omega\{L x_{k+1} + (D + U) x_k + b\}, \ \ k \ge 0,$$

де $0 < \omega < \dfrac{2}{1 + \rho(|A|)}$ - параметр. Умова

$$\rho((I_p - \omega|L|)^{-1}\{|1-\omega|\, I_p + \omega(|D| + |U|)\}) < 1$$

є необхідною та достатньою для збіжності методу до єдиної нерухомої точки при довільному початковому векторі.

Якщо1 повнокроковий метод збігається та $\omega$ відповідає накладеній умові, то метод релаксації також збігається до нерухомої точки $\tilde{x}^*$

$$\tilde{x}^* = (1-\omega)\tilde{x}^* + \omega(A\tilde{x}^* + b).$$

Тепер розглянемо деякі модифікації повнокрокового, короткокрокового та симетричного короткокрокового методів. Якщо повнокроковий метод

$$x_{k+1} = Ax_k + b$$

має початковий вектор $x_0$ для якого $x^* \subseteq x_0$, то з монотонності включення випливає, що

$$x^* = Ax^* + b \subseteq Ax_0 + b = x_1.$$

Це показує, що і $x_1$ містить нерухому точку, і вектор $x_0$, а значить і їх перетин $x_0 \cap x_1$. Тому природньо продовжувати ітерацію, використовуючи нове включення, і це приводить до ітераційної процедури

$$x_{k+1} = \{Ax_k + b\} \cap x_k, \quad k \geq 0,$$

яку називають **повнокроковим методом із взяттям перетину на кожному кроці (TI)**.

Якщо провести ті ж перетворення для короткокрокового методу, тоді отримається ітераційна процедура

$$x_{k+1} = \{Lx_{k+1} + (D+U)x_k + b\} \cap x_k, \quad k \geq 0,$$

яку називають **короткокроковим методом із взяттям перетину на кожному кроці** (**SI**).

У випадку короткокрокового методу існує ще одна можливість:

$$X_{i,k+1} = \{\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} X_{j,k+1} + \sum_{j=i}^{n} A_{ij} X_{j,k} + B_i\} \cap X_{i,k}, \; 1 \leq i \leq n, \; k \geq 0.$$

Після того, як порахована перша компонента, утворюється перетин із старим наближенням, яке породжує нове наближення. Це нове наближення використовується для обчислення нового наближення для другої компоненти і т.д. Дана модифікація називається **короткокроковим методом із взяттям перетину після кожної компонети** (**SIC**).

Для випадку, коли всі діагональні елементи матриці А обертаються в нуль, розглядається ітераційна процедура

$$X_{i,k+1/2} = \{\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} X_{j,k+1/2} + \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} X_{j,k} + B_i\} \cap X_{i,k}, \; 1 \leq i \leq n,$$
$$X_{i,k+1} = \{\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} X_{j,k+1/2} + \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} X_{j,k+1} + B_i\} \cap X_{i,k+1/2}, \; 1 \leq i \leq n, \; k \geq 0.$$

Дана процедура називається **симетричним короткокроковим методом із взяттям перетину після кожної компонети** (**SSIC**).

Теорема. Нехай А – інтревальна матриця та $\rho(|A|) < 1$. Якщо $x^*$ - нерухома точка рівняння $x = Ax + b$ та $x_0 \supseteq x^*$, то ітераційні методи (**TI**), (**SI**), (**SIC**) та (**SSIC**) збігаються до $x^*$.

Теорема. Нехай послідовності $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ та $\{\tilde{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$ обраховані згідно ітераційних методів (T) та (TI) у припущенні, що $x_0 \supseteq \tilde{x}_0 \supseteq x^*$. Тоді має місце

$$x_k \supseteq \tilde{x}_k \supseteq x^* \text{ для всіх } k \geq 0.$$

Отже

$$(TI) \leq (T) \text{ та } (SI) \leq (S).$$

Таке ж твердження справедливе для послідовностей, обрахованих відповідно до ітераційних методів (S) та (SI).

Теорема. Нехай послідовності $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ та $\{\tilde{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$ обраховані згідно ітераційних методів (TI) та (SIC) у припущенні, що $x_0 \supseteq \tilde{x}_0 \supseteq x^*$. Тоді має місце

$$x_k \supseteq \tilde{x}_k \supseteq x^* \text{ для всіх } k \geq 0.$$

Отже

$$(SIC) \leq (TI) \text{ та } (SIC) \leq (SI).$$

Таке ж твердження справедливе для послідовностей, обрахованих відповідно до ітераційних методів (S) та (SIC).

Теорема. Нехай послідовності $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ та $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ обраховані згідно ітераційних методів (SIC) та (SSIC) у припущенні, що $z_0 \supseteq x_0 \supseteq x^*$. Тоді має місце

$$z_k \supseteq x_k \supseteq x^* \text{ для всіх } k \geq 0.$$

Отже

$$(SSIC) \le (M),$$

де $(M)$ - будь який із розглянутих ітераційних методів.

<u>Теорема</u>. Якщо почати обрахунок по одному з методів (**TI**), (**SI**), (**SIC**) та (**SSIC**) з вектора $x_0 \supseteq x^* = Ax^* + b$, то метод (**SSIC**) завжди дасть найменшу (у змісті включення) локалізацію послідовності для $x^*$.

# ТЕМА 7 Метод Хансена та процедура Купермана-Хансена

Визначення. Інтервальна матриця $A=[A_{ij}]$, компоненти якої $A_{ij}=[a_{ij},r_{ij}]$ є дійсними інтервалами або круговими комплексними інтервалами, має сильно домінуючу діагональ, якщо

$$|a_{ii}|-r_{ii} > \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |A_{ij}|, \quad 1\le i\le n.$$

Очевидно, що елементи сильно домінуючої діагоналі не містять нулів і що для будь якої точкової матриці $\hat{A}_p=(\hat{a}_{ij})\in A$ виконано співвідношення

$$|\hat{a}_{ii}| > \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |\hat{a}_{ij}|, \quad 1\le i\le n.$$

Якщо в системі лінійних інтервальних рівнянь діагональ не є сильно домінуючою, то її можна розв'язувати за допомогою перетворення Хансена. Мета даного перетворення – зробити систему інтервальних рівнянь системою із сильно домінуючою діагоналлю. Нехай дана інтервальна матриця $A=[A_{ij}]$, де $A_{ij}=[a_{ij},r_{ij}]$ - елементи з $I(R)$ або $K(C)$. Допускається, що існує обернення всіх точкових матриць $A_p\in A$. Береться обернення точкової матриці $m(A)=(a_{ij})$ і за допомогою $m(A)^{-1}$ будується інтервальна матриця

$$\tilde{A}=m(A)^{-1}A$$

та інтервальний вектор

$$\tilde{b} = m(A)^{-1} b .$$

Ідея такого перетворення полягає в тому, що якщо елементи матриці A мають не дуже велику ширину, то діагональ матриці A буде сильно домінуючою. Тоді можна застосовувати метод Гауса. В межах мають $wid(A) = O_p$, тобто $\tilde{A} = I_p$, так що в цьому випадку матриця $\tilde{A}$ напевно має сильно домінуючу діагональ. Якщо ж ширина компонент матриці A невелика, то $\tilde{A}$ несильно відмінна від $I_p$.

Зрозуміло, що сильне домінування діагоналі для матриці $\tilde{A} = m(A)^{-1} A$ залежить не тільки від ширини компонент матриці A. Якщо представити компоненти цієї інтервальної матриці (які можуть бути дійсними інтервалами або круговими комплексними) у вигляді

$$A_{ij} = [a_{ij}, r_{ij}],\ 1 \le i, j \le n ,$$

ввівши ще матрицю $D = [D_{ij}],\ D_{ij} = [0, r_{ij}],\ 1 \le i, j \le n$, отримаємо

$$\tilde{A} = m(A)^{-1} A = m(A)^{-1}(m(A) + D) = I_p + m(A)^{-1} D = I_p + \left|m(A)^{-1}\right| D = I_p + H ,$$

де

$$H = \left|m(A)^{-1}\right| D .$$

Так як

$$\|H\| \le \left\|m(A)^{-1}\right\| \cdot \|D\| = \frac{1}{2}\left\|m(A)^{-1}\right\| \|wid(A)\| \le \frac{1}{2}\left\|m(A)^{-1}\right\| \cdot \frac{\|wid(A)\|}{\|m(A)\|} .$$

Звідси видно, що при точковій матриці $m(A)$ діагональ матриці A буде тим сильніше домінувати, чим менше число

$$\tilde{\kappa} = \|m(A)^{-1}\| \|m(A)\|,$$

де $\tilde{\kappa}$ - добре відома величина як обумовленість матриці $m(A)$.

Нехай $\Omega = \{x_p \mid A_p x_p = b_p,\ A_p \in A,\ b_p \in b\}$ - множина всіх рішень інетрвальної системи лінійних рівнянь. Метод Хансена вираховує в загальному випадку тільки деяку підмножину вектора $h$, який має компоненти

$$H_k = \{h_k \mid (h_1, ..., h_k, ..., h_n)^T \in \Omega\}.$$

Куперман ввів неінтервльну процедуру, яка в деяких випадках дає кращу локалізацію множини $\Omega$. Згодом Хансен узагальнив цу процедуру до інтервального методу.

Розглядається множина лінійних рівнянь

$$A_p x_p = b_p, \quad x_p = (x_i),$$

де $A_p$ - неособлива точкова матриця та $b_p$ - дійсний вектор. Якщо частинна похідна невід’ємна

$$\frac{\partial x_k}{\partial a_{ij}} \geq 0,$$

то $x_k$ - неспадна функція від $a_{ij}$. Якщо тепер $a_{ij}$ може змінюватись в дійсному інтервалі $A_{ij} = [a_{1,ij}, a_{2,ij}]$, то величина $x_k$, яка розглядається як функція від $a_{ij}$ на інтервалі $A_{ij} = [a_{1,ij}, a_{2,ij}]$, приймає своє найменше значення при $a_{ij} = a_{1,ij}$, а найбільше – при $a_{ij} = a_{2,ij}$. Те ж саме можна сказати і про залежність компонент $x_k$ від $b_i$.

Нехай тепер $A = [A_{ij}]$; $A_{ij} = [a_{1,ij}, a_{2,ij}]$ - дана дійсна інтервальна матриця та $b = [B_i]$; $B_i = [b_{1,i}, b_{2,i}]$ - даний інтервальний вектор. Питання: як локалізувати інтервал

$$H_k = [h_{1,k}, h_{2,k}], \quad 1 \le k \le n.$$

Для цього будуються інтервальні матриці

$$\tilde{A} = [\tilde{A}_{ij}] \text{ та } \hat{A} = [\hat{A}_{ij}]$$

та інтервальні вектори

$$\tilde{b} = [\tilde{B}_i] \text{ та } \hat{b} = [\hat{B}_i]$$

відповідно до правил:

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{cases} [a_{1,ij}, a_{1,ij}], \text{ якщо} \dfrac{\partial x_k}{\partial a_{ij}} \ge 0 \text{ для всіх } A_p \in A,\ b_p \in b \\ [a_{2,ij}, a_{2,ij}], \text{ якщо} \dfrac{\partial x_k}{\partial a_{ij}} \le 0 \text{ для всіх } A_p \in A,\ b_p \in b \\ A_{ij} \text{ в протилежному випадку} \end{cases}$$

$$\hat{A}_{ij} = \begin{cases} [a_{2,ij}, a_{2,ij}], \text{ якщо} \dfrac{\partial x_k}{\partial a_{ij}} \ge 0 \text{ для всіх } A_p \in A,\ b_p \in b \\ [a_{1,ij}, a_{1,ij}], \text{ якщо} \dfrac{\partial x_k}{\partial a_{ij}} \le 0 \text{ для всіх } A_p \in A,\ b_p \in b \\ A_{ij} \text{ в протилежному випадку} \end{cases}$$

$$\tilde{B}_i = \begin{cases} [b_{1,i}, b_{1,i}], \text{ якщо } \dfrac{\partial x_k}{\partial b_i} \geq 0 \text{ для всіх } A_p \in A,\ b_p \in b \\ [b_{2,i}, b_{2,i}], \text{ якщо } \dfrac{\partial x_k}{\partial b_i} \leq 0 \text{ для всіх } A_p \in A,\ b_p \in b \\ B_i \ \text{ в протилежному випадку} \end{cases}$$

$$\hat{B}_i = \begin{cases} [b_{2,i}, b_{2,i}], \text{ якщо } \dfrac{\partial x_k}{\partial b_i} \geq 0 \text{ для всіх } A_p \in A,\ b_p \in b \\ [b_{1,i}, b_{1,i}], \text{ якщо } \dfrac{\partial x_k}{\partial b_i} \leq 0 \text{ для всіх } A_p \in A,\ b_p \in b \\ B_i \ \text{ в протилежному випадку} \end{cases}$$

Після цього обчислюються локалізуючі інтервали

$$X_k = [x_{1,k}, x_{2,k}] \text{ та } Y_k = [y_{1,k}, y_{2,k}]$$

для інтервалів

$$H_k(\tilde{A}, \tilde{b}) = [\tilde{h}_{1,k}, \tilde{h}_{2,k}] \text{ та } H_k(\hat{A}, \hat{b}) = [\hat{h}_{1,k}, \hat{h}_{2,k}],$$

використовуючи, наприклад, метод Хансена.

Для побудови інтервальних матриць $\tilde{A}, \hat{A}$ та інтервальних векторів $\tilde{b}, \hat{b}$ при фіксованому $k$ необхідні частинні похідні $\dfrac{\partial x_k}{\partial a_{ij}}, \dfrac{\partial x_k}{\partial b_i}$. Формули для них наступні: при $A_p^{-1} = (\bar{a}_{ij})$

$$\frac{\partial x_k}{\partial a_{ij}} = -\bar{a}_{ki} x_j \ , \ \frac{\partial x_k}{\partial b_i} = \bar{a}_{ki} .$$

Метод Купермана-Хансена дає кращу локалізацію. Його недолік –

великий об’єм обчислень. В загальному випадку необхідно знаходити не тільки інтервальну матрицю $\overline{A}$, яка містить обертання всіх матриць $A_p \in A$, але й розв’язувати дві системи інтервальних рівнянь для кожної компоненти $H_k(A,b)$.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ


1. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления: Пер. с англ.- М.: Мир, 1987. – 360с.
2. Астафьев Н.М. Линейные неравенства и выпуклость. – М.: Наука, 1982. – 153 с.
3. Бакан Г.М., Куссуль Н.Н. Теоретико-множественная идентификация линейных объектов в классе размытых эллипсоидальных множеств // Автоматика.- 1990. - №3.- С. 29-40..
4. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1975. – 631 с.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
6. Бочков А. Ф., Милевский М. В. Оценивание параметров модели для объектов с интервальной неопределенностью в выходных параметрах. - Москва, 1988. - 23 с. – Деп. в ВИНИТИ, №92б-В88.
7. Бочков А. Ф., Милевский М. В. Интервальные модели – один подход к описанию неопределенностей. – В кн.: Вопросы кибернетики. Устройства и системы. Сб. научных трудов / Под ред. Евтихиева Н.Н. – М.: 1987. – С. 19-27.