**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**Тернопільський національний педагогічний університет**

**імені Володимира Гнатюка**

**Чорний В.З., Хохлова Л.Г., Хома-Могильська С.Г.**

# ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

***Навчальний посібник***

**ТЕРНОПІЛЬ–2016**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Тернопільський національний педагогічний університет

імені Володимира Гнатюка

**Чорний В.З., Хохлова Л.Г., Хома-Могильська С.Г.**

# ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

*Рекомендовано науково-методичною радою*

*Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка*

*як навчальний посібник*

**ТЕРНОПІЛЬ–2016**

**УДК 517.2(075.8)**

**ББК 22.161.11**

**Ч-75**

*Рекомендовано до друку науково-методичною радою Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка*

*(протокол № 4 від 22 листопада 2016року)*

Рецензенти: **Петрик М.Р.**-доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри програмної інженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.

**Горбатюк Р.М.**-доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерних технологій Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка.

**Хома Н.Г.**-кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри економічної кібернетики та інформатики Тернопільського національного економічного університету.

**Чорний В.З., Хохлова Л.Г., Хома-Могильська С.Г.**

Ч-75 Прикладні аспекти диференціального числення: Навчальний посібник.-Тернопіль: "Тайп", 2016.-72с.

Посібник написано відповідно до вимог програми дисципліни "Математичний аналіз" для студентів фізико-математичних спеціальностей вищих навчальних закладів. Містить матеріали з розділу математичного аналізу "Диференціальне числення функції однієї змінної ". Демонструється застосування похідної функції однієї змінної у математиці, фізиці, економіці, хімії. біології. Наведено приклади детального розв'язання типових задач, вправи для самостійної роботи студентів.

Для студентів вищих навчальних закладів III і IV рівнів акредитації.

**УДК 517.2(075.8)**

**ББК 22.161.11**

# ЗМІСТ

**ВСТУП**

**РОЗДІЛ 1.** ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ У МАТЕМАТИЦІ……….. 5

**1.1.** Приклади текстових задач на екстремуми…………........ 7

**1.2.** Застосування похідної при порівнянні значень функцій…. 12

**1.3.** Застосування похідної при розв'язанні задач на порівняння без використання калькулятора…..................................... 15

**1.4.** Побудова графіків та геометричні задачі………………….. 17

**1.5.** Застосування похідної при розв’язуванні рівнянь………... 26

**1.6.** Доведення нерівнстей …………………………………... 33

**1.7.** Розв'язування нерівностей з використанням похідної…… 40

**1.8.** Доведення тотожностей з використанням похідної ……… 42

**РОЗДІЛ 2.** ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ В ФІЗИЦІ, ЕКОНОМІЦІ, ХІМІЇ ТА БІОЛОГІЇ…………………………………………… 48

**2.1.** Застосування похідної у фізиці…………………………….. 48

**2.2.** Застосування похідної в економіці………………………… 53

**2.3.** Застосування похідної в хімії та біології………………….. 64

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ……………………………… 69

# ВСТУП

Похідна – основний інструмент диференціального числення, який є фундаментальним методом математики, про що свідчать слова видатного математика Андрія Колмогорова: «Сила і загальність методу диференціального числення така, що без нього неможливо повністю оцінити всю красу і придатність самої математики». Цей метод виник у зв'язку з проблемами вивчення змінних динамічних процесів. Виникнувши з практики, поняття похідної отримало узагальнювальний абстрактний зміст, що збільшило її прикладне значення. Створення диференціального числення розширило можливість застосування математичних методів у природознавстві та техніці.

За допомогою похідної досліджують процеси і явища в природничих та економічних науках. У згаданих процесах та явищах стан тіл та їхні властивості неперервно змінюються. Задача про визначення швидкості, з якою змінюється величина, і приводить до поняття похідної.

Відкриттю похідної і основ диференціального числення передували роботи французького математика і юриста П'єра Ферма, який у 1629 році запропонував способи знаходження найбільших і найменших значень функції, проведення дотичних до довільних кривих за допомогою похідної. Цьому сприяли також роботи Рене Декарта, який розробив метод координат і основи аналітичної геометрії. Лише в 1666 році англійський математик і механік Ісаак Ньютон і, дещо пізніше, видатний німецький філософ і математик Готфрід Лейбніц незалежно один від одного відкрили теорію диференціального числення. Ісаак Ньютон прийшов поняття похідної, розв'язуючи задачі про миттєву швидкість, а Г. Лейбніц – розглядаючи геометричну задачу про проведення дотичної до кривої. Термін «похідна» та його сучасне позначення ввів у 1797 році французький математик Жозеф Луї Лагранж. Визначну роль у розвитку диференціального числення відіграв Леонард Ейлер, який у праці «Диференціальне числення» (1755р.)

використовував локальний екстремум, найбільші та найменші значення функції. Він перший почав використовувати грецьку букву Δ (дельта) для позначення приросту аргумента і приросту функції.

За допомогою диференціального числення було розв'язано цілу низку задач теоретичної механіки, фізики та астрономії. Зокрема, використовуючи методи диференціального числення, вчені передбачили повернення комети Галлея, що стало тріумфом науки XVIII ст. За допомогою саме цих методів математики у XVIII та XIX ст. вивчали різні криві, знайшли криву найшвидшого спуску матеріальної точки, навчилися визначати кривизну ліній. І сьогодні поняття похідної знаходить широке застосування в різних сферах науки та техніки.

# РОЗДІЛ 1
# ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ У МАТЕМАТИЦІ
## 1.1 Приклади текстових задач на екстремум

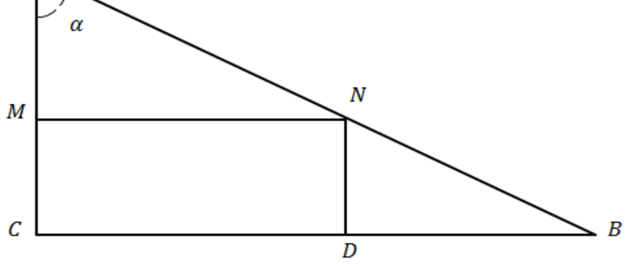
*Приклад 1.* Яке із десяти чисел $1^{10}, 2^9, 3^8, 4^7, 5^6, 6^5, 7^4, 8^3, 9^2, 10^1$ найбільше?

*Розв'язання:* Зрозуміло, що це число міститься в середині цієї скінченної послідовності чисел і його можна знайти безпосереднім обчисленням.

Знайдемо це число за допомогою похідної. Для цього розглянемо функцію $f(x) = x^{11-x}$.

Знайдемо її похідну, записавши функцію в такому вигляді: $f(x) = e^{(11-x)\ln x}$. Тоді $f'(x) = e^{(11-x)\ln x}\left(\frac{11-x}{x} - \ln x\right)$. Знак похідної залежить лише від виразу, що знаходиться у дужках. Функція $g(x) = \frac{11}{x} - \ln x - 1$ спадає на інтервалі $(0; +\infty)$, причому $g(4) = 1{,}75 - \ln 4 > 0$, а $g(5) = 1{,}2 - \ln 5 < 0$. Тому на інтервалі $(0; x_0)$ функція $f$ зростає, а на інтервалі $(x_0; +\infty)$ – спадає. Тоді найбільше число буде $f(4) = 4^7$ або $f(5) = 5^6$. Безпосереднє обчислення дає відповідь на поставлене в задачі запитання: $4^7$ є найбільшим серед десяти даних чисел.

*Приклад 2.* Знайти найменшу площу прямокутного трикутника, описаного навколо прямокутника з основою $a$ і висотою $b$ так, що катети трикутника і основа та висота прямокутника лежать відповідно на одних і тих самих прямих.




*Розв'язання:* Нехай маємо прямокутний трикутник $ACB$, описаний навколо прямокутника $CMND$.

Позначимо $AM = x, BD = y$. Тоді $AC = b + x$, $CB = a + y$. Площа трикутника запишеться в такому вигляді: $S = \frac{1}{2}(a+y)(b+x)$. Виразимо $y$ через $x$. Трикутники $ACB$ і $DNB$ подібні. Складемо відношення: $\frac{AC}{CB} = \frac{ND}{BD}$. Тоді $\frac{b+x}{a+y} = \frac{b}{y}$, $b + x = \frac{ab+by}{y}$, $b + x = \frac{ab}{y} + b$, $y = \frac{ab}{x}$.

Отже, площу трикутника запишемо у такому вигляді:

$$S = \frac{1}{2}\left(a + \frac{ab}{x}\right)(b+x) = \frac{1}{2}\left(ab + \frac{ab^2}{x} + ax + ab\right) = \frac{1}{2}\left(2ab + \frac{ab^2}{x} + ax\right).$$

Розглянемо функцію $S(x) = \frac{1}{2}\left(2ab + \frac{ab^2}{x} + ax\right)$.

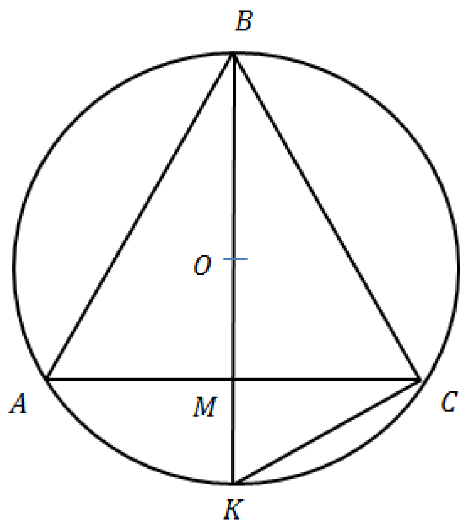
Знайдемо її похідну : $S'(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{ab^2}{x^2} + a\right) = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{b^2}{x^2}\right)$.

Оскільки за умовою задачі $b > 0$, то функція $S(x)$ має лише одну критичну точку $x = b$, яка для неї буде точкою мінімуму, бо зліва від точки $b$ $S'(x) < 0$, а справа - $S'(x) > 0$.

Підставляючи значення $x = b$ у формулу площі трикутника, дістанемо: $S(b) = \frac{1}{2}(2ab + ab + ab) = 2ab$ .

*Відповідь:* $S = 2ab$.

*Приклад 3*. В коло радіуса $R$ вписати рівнобедрений трикутник найбільшої площі.




*Розв'язання:* Нехай в коло радіуса $R$ вписано рівнобедрений трикутник $ABC$, в якому $BM -$ висота, яку позначимо через $h$, $BK -$діаметр кола, $MC = \frac{a}{2}$. Площа трикутника буде $S = MC \cdot BM = MC \cdot h$.

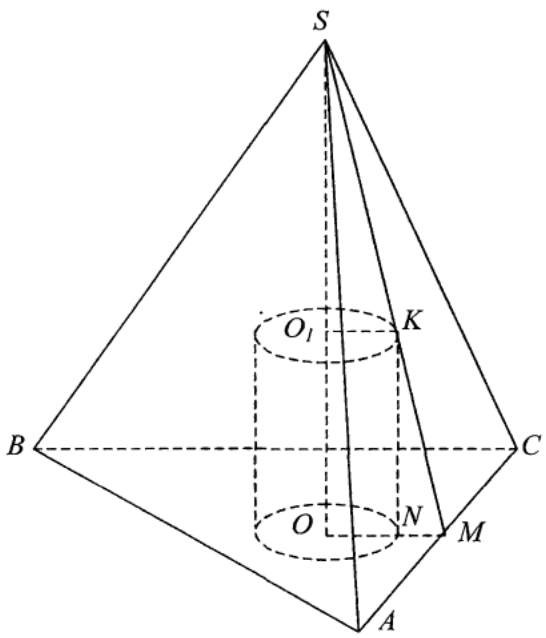
Виразимо $MC$ через $R$ і $h$. З прямокутного трикутника $BCK$ маємо $MC = \sqrt{h(2R-h)}$.

Тоді площу трикутника як функцію $h$ запишемо у такому вигляді: $S(h) = \sqrt{h(2R-h)} \cdot h$. Знайдемо її похідну: $S'(h) = \frac{(R-h)h}{\sqrt{h(2R-h)}} + \sqrt{h(2R-h)} = \frac{(R-h)h + h(2R-h)}{\sqrt{h(2R-h)}} = \frac{h(3R-2h)}{\sqrt{h(2R-h)}}$.

Оскільки $0 < h < 2R$, то на інтервалі $(0; 2R)$ функція $S(h)$ має лише одну критичну точку $h = \frac{3}{2}\, R$, в якій вона досягає максимуму. Тоді $MC = \sqrt{\frac{3}{2}\, R(2R - \frac{3}{2}\, R)} = \frac{\sqrt{3}}{2} R$, а $S = \frac{\sqrt{3}}{2} R \cdot \frac{3}{2} R = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$.

*Відповідь*: $S = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$.

*Приклад 4.* Серед усіх правильних трикутних пірамід, описаних навколо кругового циліндра висоти $h$ і радіуса основи $r$ так, що нижня основа циліндра і основа піраміди лежать в одній площині, коло верхньої основи циліндра має по одній спільній точці з кожною бічною гранню піраміди, а висота піраміди і вісь циліндра лежать на одній прямій, знайти ту, яка має найменший об'єм.




*Розв'язання:* Нехай маємо правильну трикутну піраміду $SABC$, яка описана навколо циліндра висоти $h$ і радіуса основи $r$.

Об'єм піраміди знаходимо за формулою:

$V = \frac{1}{3} BH$, де $B -$ площа основи піраміди, а $H -$її висота.

Оскільки в основі лежить правильний трикутник, то $B = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Тоді $V = \frac{\sqrt{3}}{12} a^2 H$.

Виразимо тепер $H$ через $a$, розглянувши подібні трикутники $OSM$ і $MKN$:

$$\frac{OS}{OM} = \frac{KN}{MN}.$$

Позначимо $SO$ через $H$, $OM -$ це є третина висоти правильного трикутника, тому $OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $KN = h$, $MN = \frac{a\sqrt{3}}{6} - r$.

Отже, $\frac{H}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \frac{h}{\frac{a\sqrt{3}}{6} - r}$. Звідси $H = \frac{ah\sqrt{3}}{a\sqrt{3}-6r}$. Тоді

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{ah\sqrt{3}}{a\sqrt{3} - 6r} = \frac{h}{4} \cdot \frac{a^3}{a\sqrt{3} - 6r}.$$

Розглянемо функцію $V(a) = \frac{h}{4} \cdot \frac{a^3}{a\sqrt{3}-6r}$. Знайдемо її похідну:

$$V'(a) = \frac{h}{4} \cdot \frac{3a^2(a\sqrt{3}-6r) - a^3\sqrt{3}}{(a\sqrt{3}-6r)^2} = \frac{h}{4} \cdot \frac{a^2(3\sqrt{3}a - 18r - a\sqrt{3})}{(a\sqrt{3}-6r)^2} =$$

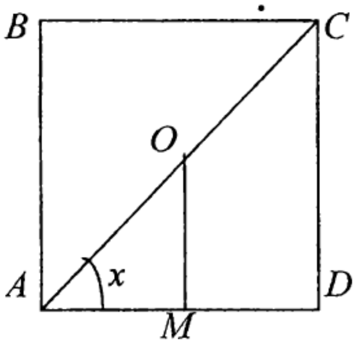
$$\frac{h}{2} \cdot \frac{a^2(a\sqrt{3}-9r)}{(a\sqrt{3}-6r)^2}.$$

Оскільки за умовою задачі $a > 0$, то функція $V(a)$ має лише одну критичну точку $a = 3\sqrt{3}r$. Знайдемо тепер $H$: $H = \frac{3\sqrt{3}\cdot r \cdot \sqrt{3}h}{3\sqrt{3} \cdot r \cdot \sqrt{3} - 6r} = 3h$.

Отже, основа піраміди $a = 3\sqrt{3}r$, а висота $H = 3h$. Тоді $V = \frac{27\sqrt{3}}{4}r^2h$.

*Відповідь:* $V = \frac{27\sqrt{3}}{4}r^2h.$

*Приклад 5.* Діагональ $d$ осьового перерізу циліндра утворює з основою кут $x$. Для якого значення $x$ циліндр має найбільший об'єм?




*Розв'язання:* Нехай осьовим перерізом циліндра буде прямокутник $ABCD$, в якого діагональ $AC = d$ утворює з основою $\angle DAC = x$.

Позначимо $AM = R$, $AB = H$. Об'єм циліндра: $V = \pi R^2 H$. Виразимо тепер $R$ і $H$ через

$d$ і $x$: $R = \frac{d}{2}\cos x,\ H = 2 \cdot OM = d\sin x$. Тоді об'єм циліндра запишемо в такому вигляді:

$V = \frac{\pi}{4} d^3 cos^2\, x \cdot \sin x.$

Розглянемо функцію: $V(x) = \frac{\pi}{4} d^3 cos^2\, x \cdot \sin x$.

Знайдемо її похідну: $V'(x) = \frac{\pi}{4} d^3 \left(-2\cos x \cdot \sin^2 x + \cos^3 x\right) = \frac{\pi}{4} d^3 \cos x (3\, cos^2\, x - 2\big)$.

Оскільки $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то функція $V(x)$ має лише одну критичну точку

$x = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$, яка є для неї точкою максимуму.

Отже, об'єм циліндра при сталому $d$ буде найбільшим, якщо кут нахилу діагоналі осьового перерізу до основи дорівнює $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$. Знайдемо значення об'єму циліндра для знайденого кута: $V = \frac{\pi}{4} d^3 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\pi d^3\sqrt{3}}{18}$.

*Відповідь:* $x = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}, V = \frac{\pi d^3\sqrt{3}}{18}$.

*Завдання для самоперевірки*

1. Сума квадратів двох додатних чисел дорівнюють 108. Підберіть ці числа так, щоб добуток квадратів цих чисел був найбільшим.

2. Висота прямокутного трикутника дорівнює 15 см. Якою повинна бути довжина гіпотенузи, щоб трикутник мав найменшу площу?

3. Знайти прямокутний трикутник найбільшої площі, якщо сума катетів постійна.

4. Який із чотирикутників, вписаних в коло радіуса $R$, має найбільшу площу?

5. Знайдіть найменше значення суми трьох сторін прямокутника, площа якого дорівнює $S$.

## 1.2 Застосування похідної при порівнянні значень функцій

На практиці доводиться порівнювати значення диференційовної функції для аргументів $x$ і $x+\alpha$, де $\alpha$ −будь-яке додатне число, тобто треба порівнювати значення функцій $f(x)$ і $f(x+\alpha)$. Зрозуміло, що $x$ і $x+\alpha$ повинні належати проміжку диференційовності функції $f$.

Нерідко для порівняння зручно скористатися похідною функції $f$.

Дійсно, якщо $f'(x)>0$ на деякому відкритому проміжку, то функція $f$ на ньому зростає, а тому $f(x)<f(x+\alpha)$.

Якщо ж на розглядуваному відкритому проміжку $f'(x)<0$, то функція $f$ спадає, а тому $f(x)>f(x+\alpha)$, де $x$ і $x+\alpha$ з цього ж проміжку.

*Приклад 1*. Що більше $\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\frac{\pi}{7}}$ чи $\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\frac{\pi}{5}}$?

*Розв'язання:* Оскільки $0<\frac{\pi}{7}<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$, то розглядаємо функцію $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ на проміжку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Знайдемо її похідну:

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x\,(x-\operatorname{tg} x)}{x^2}.$$

Оскільки для всіх $0<x<\frac{\pi}{2}$, $x<\operatorname{tg} x$, то $f'(x)<0$, і тому на цьому проміжку функція спадає. Звідси випливає, що $\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\frac{\pi}{7}}>\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\frac{\pi}{5}}$. У загальному випадку можна сказати, що для будь-яких $x_1, x_2$, таких, що $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$, виконується нерівність $\frac{\sin x_1}{x_1}>\frac{\sin x_2}{x_2}$.

*Відповідь*: $\frac{\sin x_1}{x_1}>\frac{\sin x_2}{x_2}$.

*Приклад 2.* Що більше $\log_{10} 14$ чи $\log_{11} 15$?

*Розв'язання:* Розглянемо більш загальну задачу, а саме: що більше $\log_x(x+\alpha)$ чи $\log_{x+\beta}(x+\alpha+\beta)$, де $x>1$, а $\alpha$ і $\beta -$ будь-які додатні числа?

Розглянемо функцію $f(x)=\log_x(x+\alpha)$. Покажемо, що функція $f$ на проміжку $]1;+\infty[$ спадає.

Дійсно, $f'(x)=(\log_x(x+\alpha))'=(\frac{\ln(x+\alpha)}{\ln x})'=\frac{\frac{1}{x+\alpha}\ln x-\frac{1}{x}\ln(x+\alpha)}{\ln^2 x}=$ $\frac{x\ln x-(x+\alpha)\ln(x+\alpha)}{x(x+\alpha)\ln^2 x}<0$, бо $x<x+\alpha$, $\ln x<\ln(x+\alpha)$.

Оскільки функція $f$ спадна для $x>1$, то $\log_x(x+\alpha)>\log_{x+\beta}(x+\alpha+\beta)$.

Отже, $\log_{10} 14>\log_{11} 15$ (тут $x=10, \alpha=4, \beta=1$).

*Приклад 3.* Що більше $\frac{x}{\arcsin x}$ чи $\frac{y}{\arcsin y}$, якщо $0<x<y<1$?

*Розв'язання:* Розглянемо функцію $f(x)=\frac{x}{\arcsin x}$. Покажемо, що вона на заданому проміжку спадає. Знайдемо її похідну

$$f'(x)=\frac{\arcsin x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{(\arcsin x)^2}.$$

Нам треба показати, що $f'(x)<0$ для всіх $0<x<1$. А це рівносильне тому, що функція $g(x)=\arcsin x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ приймає лише від'ємні значення.

Знайдемо похідну функції $g$:

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)}$$
$$=\frac{-x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}<0$$

для всіх $x\in\ ]0;1[$. Отже, функція $g(x)$ спадає.

Оскільки $g(0)=0$, то для $0<x<1$ $g(x)<0$. А тоді і $f'(x)<0$. І тому функція $f$ спадає. Звідси випливає, що $\frac{x}{\arcsin x}>\frac{y}{\arcsin y}$ для $0<x<1$.

*Відповідь:* $\frac{x}{\arcsin x}>\frac{y}{\arcsin y}$.

*Приклад 4.* Показати, що для будь-якого $x$ і додатного $\alpha$ виконується нерівність $\sin x < \alpha + \sin(x + \alpha)$.

*Розв'язання:* Додавши до обох частин нерівності $x$, матимемо

$x + \sin x < x + \alpha + \sin(x + \alpha)$ і розглянемо функцію $f(x) = x + \sin x$. Покажимо, що вона є зростаючою на всій числовій осі.

Оскільки, похідна набуває значень, що дорівнюють нулю лише в ізольованих точках $x = \pi + 2k\pi$, а в усіх решта $f'(x) > 0$, то $f$ зростає на всій числовій осі, тому $x + \sin x < x + \alpha + \sin(x + \alpha)$. Звідси $\sin x < \alpha + \sin(x + \alpha)$.

Аналогічно доводиться і нерівність

$$\cos x < \alpha + \cos(x + \alpha) \text{ для } \alpha > 0.$$

*Приклад 5.* Довести нерівність

$$tg\ \frac{\pi}{7} < tg\ \frac{13}{42}\pi - \frac{\pi}{6}.$$

*Розв'язання:* Віднімемо від обох частин нерівності $\frac{\pi}{7}$, дістанемо

$$tg\ \frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{7} < tg\ \frac{13}{42}\pi - \frac{13}{42}\pi.$$

Розглянемо функцію $f(x) = \operatorname{tg} x - x$ на проміжку $(0; \frac{\pi}{2})$. Очевидно, що $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0$ для всіх $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Отже, функція $f$ зростає на цьому проміжку, тому:

$$tg\ \frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{7} < tg\ \frac{13}{42}\pi - \frac{13}{42}\pi.$$

Звідси

$$tg\ \frac{\pi}{7} < tg\ \frac{13}{42}\pi - \frac{\pi}{6}.$$

Відповідь: $tg\ \frac{\pi}{7} < tg\ \frac{13}{42}\pi - \frac{\pi}{6}$.

*Завдання для самоперевірки*

1. Що більше:

   a) $\sqrt[4]{4}$ чи $\sqrt[5]{5}$;

b) $\sqrt[100]{100}$ чи $\sqrt[101]{101}$;

c) $1983^{1984}$ чи $1984^{1983}$.

2. Що більше:

a) $\log_9 10$ чи $\log_{10} 11$;

b) $\log_{6,1} 7{,}7$ чи $\log_{6,4} 8$;

c) $\log_{1,2} 1{,}8$ чи $\log_{1,3} 1{,}9$.

3. Що більше:

a) $\frac{1{,}2}{\sin 1{,}2}$ чи $\frac{1{,}3}{\sin 1{,}3}$;

b) $\frac{0{,}007}{\sin 0{,}007}$ чи $\frac{0{,}008}{\sin 0{,}008}$;

c) $\frac{\sin 1{,}4}{1{,}4}$ чи $\frac{\sin 1{,}5}{1{,}5}$.

4. Відомо, що $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$. Доведіть, що $\frac{tg\, x}{x} < \frac{tg\, y}{y}$.

5. Доведіть нерівності:

a) $\sin 1000 < 1 + \sin 1001$;

b) $\cos 45 < 1 + \cos 46$.

## 1.3 Застосування похідної при розв'язанні задач на порівняння без використання калькулятора

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$. $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$; $f'(x) > 0$ при $x \in (0; e)$ $f'(x) < 0$ при $x \in (e; +\infty)$ $\Rightarrow x = e$ – є точкою максимуму $\Rightarrow$ якщо $0 < x_1 < x_2 \leq e \Rightarrow \frac{\ln x_1}{x_1} < \frac{\ln x_2}{x_2} \Rightarrow {x_1}^{x_2} < {x_2}^{x_1}$. Якщо $e < x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{\ln x_1}{x_1} > \frac{\ln x_2}{x_2} \Rightarrow {x_1}^{x_2} > {x_2}^{x_1}$.

*Приклад 1.* Порівняти:

*a.* $14^{25}$ і $25^{14}$;

*b.* $1{,}2^{2{,}7}$ і $2{,}7^{1{,}2}$;

*c.* $e^{\pi}$ і $\pi^{e}$.

*Розв'язання:*

a. $e \leq 14 < 25 \Rightarrow 14^{25} > 25^{14}$.

b. $0 < 1{,}2 < 2{,}7 \Rightarrow 1{,}2^{2{,}7} > 2{,}7^{1{,}2}$.

c. $\pi > e \Rightarrow e^{\pi} > \pi^{e}$.

*Приклад 2.*Порівняти $\sqrt{2004} + \sqrt{2007}$ і $\sqrt{2005} + \sqrt{2006}$.

*Розв'язання:* Нехай $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, де $x \geq 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x(x+1)}}.$$

Очевидно, що при $x \geq 0$ $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) -$ спадна функція.

$$f(2006) = \sqrt{2007} - \sqrt{2006};$$

$$f(2004) = \sqrt{2005} - \sqrt{2004}.$$

Оскільки $2006 > 2004 \Rightarrow f(2006) < f(2004) \Leftrightarrow \sqrt{2007} - \sqrt{2006} < \sqrt{2005} - \sqrt{2004} \Rightarrow \sqrt{2004} + \sqrt{2007} < \sqrt{2005} + \sqrt{2006}$.

*Приклад 3.*Порівняти $log_3 4$ і $log_4 5$.

*Розв'язання:* Нехай $f(x) = \log_x(x+1) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$ $\begin{pmatrix} x > 0; \\ x \neq 1 \end{pmatrix}$.

$f'(x) = \dfrac{\frac{\ln x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x}}{\ln^2 x} = \dfrac{x\ln x - (x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x} < 0 \Rightarrow f(x)$ - спадна функція $\Rightarrow$

$$f(3) > f(4) \Rightarrow log_3 4 > log_4 5.$$

*Приклад 4.*Порівняти $4\, tg\, 5° \cdot tg\, 9°$ і $3\, tg\, 6° \cdot tg\, 10°$.

*Розв'язання:* Нехай $f(x) = \frac{tg\, x}{x}$ $\left(x \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right)$,

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^2} = \frac{x - \frac{1}{2}\sin 2x}{x^2 cos^2 x} = \frac{2x - \sin 2x}{2x^2 cos^2 x}.$$

При $x > 0$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) -$ функція зростаюча $\Rightarrow \frac{tg\, 5°}{5°} < \frac{tg\, 6°}{6°}$, $\frac{tg\, 9°}{9°} < \frac{tg\, 10°}{10°}$. Перемноживши останні дві нерівності отримаємо:

$$4\, tg\, 5° \cdot tg\, 9° < 3\, tg\, 6° \cdot tg\, 10°.$$

*Завдання для самоперевірки*

Порівняти:

a. $(\sin\frac{\pi}{4})^{\sin\frac{\pi}{3}}$ і $(\sin\frac{\pi}{3})^{\sin\frac{\pi}{4}}$;

b. $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$ і $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$

c. $(\sqrt{11})^{\sqrt{15}}$ і $(\sqrt{15})^{\sqrt{11}}$

d. $(\ln 20)^3$ і $3^{\ln 20}$.

## 1.4 Побудова графіків та геометричні задачі

*Приклад 1.*Дослідити функцію $y = -x^4 + 4x^2$ та побудувати графік.

*Розв'язання:*

1) Область визначення: $D(y) = R$.

2) Парність, непарність: $y(-x) = -(-x)^4 + 4(-x)^2 = -x^4 + 4x^2 = y(x)$.

Отже, функція парна, її графік симетричний відносно осі $Oy$.

1) Точка перетину графіка з осями координат $Ox$: $y = 0$,

$$-x^4 + 4x^2 = 0,$$

$$x^2(-x^2 + 4) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

$$Oy: x = 0, y = 0.$$

2) Критичні точки функції.

$$y' = -4x^3 + 8x,$$

$$y' = 0,$$

$$-4x^3 + 8 = 0,$$

$$-4x(x^2 - 2) = 0,$$

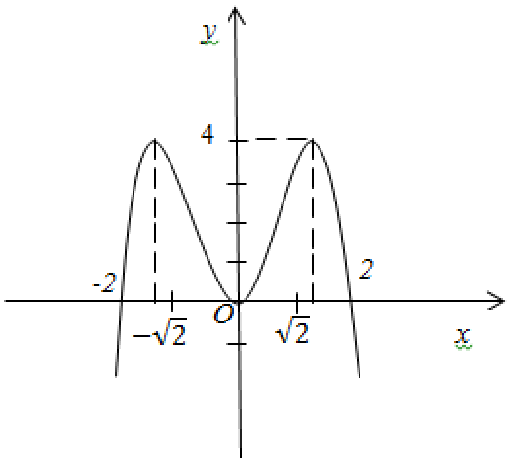
$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

3) Проміжки зростання, спадання. Точки екстремуму.(табл.1)

Таблиця 1

| $x$ | $(-\infty;-\sqrt{2})$ | $-\sqrt{2}$ | $(-\sqrt{2};0)$ | 0 | $(0;\sqrt{2})$ | $\sqrt{2}$ | $(\sqrt{2};+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - |
| $y$ | ↗ | 4 | ↘ | 0 | ↗ | 4 | ↘ |
| | | max | | min | | max | |

4) Графік функції.




*Приклад 2*. Дослідити функцію $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

*Розв'язання:*

1. Знаходимо область визначення функції. Функція існує при всіх значеннях *x* за винятком значення *x* = 1. Звідси її область визначення $\{-\infty<x<1; 1<x<+\infty\}$.

2. Точка *x* = 1 є точкою розриву функції. Дослідимо її характер:

$$\lim_{x\to1\pm0} y=\lim_{x\to1\pm0}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to1\pm0}(x-1)^2}=+\infty.$$

Як ліворуч, так і праворуч точки *x* = 1 маємо нескінченний розрив. Точка *x* = 1 — точка розриву другого роду.

3. Вертикальні асимптоти. Пряма *x* = 1 є вертикальною асимптотою.

4. Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат:

з віссю *Ox*: $y=0, \frac{2x-1}{(x-1)^2}=0,\ 2x-1=0,\ x=\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2};0\right)$;

з віссю $Oy$: $x = 0, y = \frac{-1}{1} = -1, (0; -1)$.

5. Знаходимо точки екстремуму та інтервали зростання і спадання функції, результати заносимо у табл.:

$$y' = \frac{2(x-1)^2 - 2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{2x}{(x-1)^3};\ y' = 0 \ \Rightarrow\ -2x = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 - \text{критична точка.}$$

При $x = 1$ $y'$ не існує, але у цій точці сама функція теж не існує. Дослідимо критичну точку $x = 0$ на екстремум:

при $x = -1,\ y' = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4} < 0(-)$;

при $x = \frac{1}{2},\ y' = \frac{-1}{-\frac{1}{8}} = 8 > 0\ (+)$.

| $(-\infty; 0)$ | 0 | (0, 1) | 1 | $(1; +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| – | 0 | + | Не існує | – |
| ↘ | $y_{\min}$ (–1) | ↗ | Не існує | ↘ |

Проходячи через критичну точку зліва направо, похідна змінює знак з «–» на «+», через це в точці $x = 0$ функція має мінімум:

$$y_{min} = \frac{-1}{1} = -1.$$

У точці $x = 1$ функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'(x) < 0$, отже, функція на цьому інтервалі спадає.

6. Точки перегину та інтервали опуклості й вгнутості графіка функції знаходимо за допомогою другої похідної:

$$y'' = \frac{-2(x-1)^3 + 6x(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4};\ y'' = 0\ \Rightarrow$$

$$2(2x+1) = 0\ \Rightarrow x = -\frac{1}{2};$$

при $x = 1$ $y''$ не існує, але в цій точці не існує і сама функція.

Дослідимо точку $x=-\frac{1}{2}$: при $x=1$ $y''=\frac{2(-2+1)}{(-2)^4}=-\frac{1}{8}<0\ (-)$; при $x=1$ $y''=\frac{2}{1}=2>0\ (+)$.

Друга похідна, проходячи через $x=-\frac{1}{2}$, змінює знак, отже, точка перетину кривої з цією абсцисою є точкою перегину.

Знайдемо її ординату: $y=\frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)-1}{(-\frac{1}{2}-1)^2}=-\frac{8}{9}\approx -0{,}9.$

Таким чином, точка $(-\frac{1}{2};-\frac{8}{9})$ — точка перегину.

У точці $x=1$ функція не визначена. При $1<x<+\infty$ $y''>0$, значить, графік функції вгнутий.

Результати дослідження заносимо у табл. 2.

Таблиця 2.

| | $(-\infty;-\frac{1}{2})$ | $-\frac{1}{2}$ | $(-\frac{1}{2};1)$ | 1 | $(1;+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | + | 0 | + | Не існує | + |
| | $\cap$ | Перегин (– 8/9) | $\cup$ | Не існує | $\cup$ |

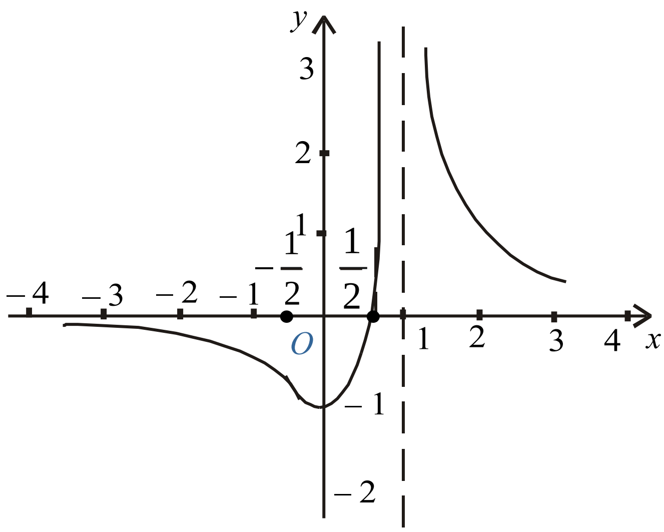
7. Рівняння похилої асимптоти знаходимо у вигляді $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\frac{2x-1}{x(x-1)^2}=0$$

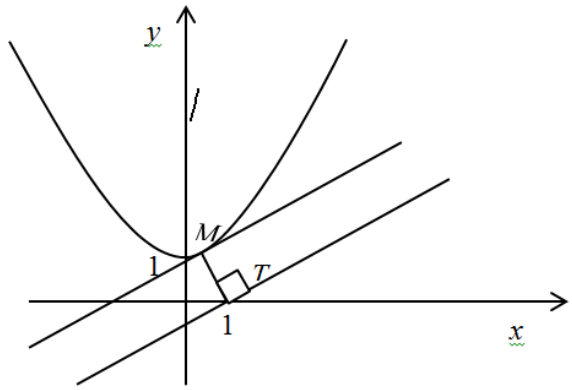
Таким чином, похилою асимптотою є $y=0$ (вісь $Ox$).

На підставі результатів дослідження будуємо графік функції. Для точнішої побудови візьмемо додатково точки на рис. : $(-5;-0{,}3)$, $\left(\frac{2}{3};3\right)$, $(2;3)$, $(3;1{,}3)$.




*Приклад 3.* Знайти координату точки *M*, що лежить на параболі $y = x^2 + 1$ і найменш віддалена від прямої $y - x + 1 = 0$. Знайти відстань від цієї точки до заданої прямої.

*Розв'язання:* Оскільки парабола $y = x^2 + 1$ опукла вниз, то вона лежить вище будь-якої її дотичної. Отже, шукана точка $M(x_0, y_0)$ лежить на




дотичній, проведеній до неї і паралельній до прямої $y - x + 1 = 0$ $y'(x_0) = 1, 2x_0 = 1,\ x_0 = \frac{1}{2}$.

$$y_0 = (\frac{1}{2})^2 + 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2};\ \frac{5}{4}\right).$$

$$d = \frac{\left|\frac{5}{4} - \frac{1}{2} + 1\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{7}{4\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}.$$

Відповідь: $M\left(\frac{1}{2};\ \frac{5}{4}\right);\ d = \frac{7\sqrt{2}}{8}$.

*Приклад 4.* Написати рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = -x^2 - 5x - 6$, що проходить через точку $M(-1;-1)$.

*Розв'язання:* Оскільки $f(-1) \neq -1$, то $M \notin f(x)$. Нехай $(x_0; y_0)$ – точка дотику $\Rightarrow$ $y_0 = f(x_0) = -{x_0}^2 - 5x_0 - 6$. $f'(x_0) = -2x_0 - 5 \Rightarrow$ рівняння дотичної має вигляд: $y = f(x_0) = -{x_0}^2 - 5x_0 - 6 + (-2x_0 -$

$5)(x - x_0)$. Оскільки дотична проходить через точку $M(-1;1)$, то $-1 = -x_0{}^2 - 5x_0 - 6 + (-2x_0 - 5)(-1 - x_0)$; $\left[\begin{array}{l} x_0 = 0, \\ x_0 = 2. \end{array}\right.$ ⇒ можливі два випадка:

1) Якщо $x_0 = 0$, то $y = -5x + 6$;

2) Якщо $x_0 = -2$, то $y = -x - 2$.

*Відповідь:* $y = -5x + 6$ або $y = -x - 2$.

*Приклад 5.* Знайти рівняння спільної дотичної до графіків функцій $f(x) = x^2 - 2x + 5$ та $g(x) = x^2 + 2x - 11$.

*Розв'язання:* Нехай $y = kx + b -$ шукана спільна дотична і $x_1$ та $x_2 -$ абсциси точок дотику з графіками $f(x)$ та $g(x)$ відповідно. $f'(x) = 2x - 2$, $g'(x) = 2x + 2$. Рівняння дотичної до графіка $f(x)$ в точці $x_1$: $y = x_1{}^2 - 2x_1 + 5 + (2x_1 - 2)(x - x_1)$. Рівняння дотичної до графіка $g(x)$ в точці $x_2$: $y = x_2{}^2 + 2x_2 - 11 + (2x_2 + 2)(x - x_2)$.

Кутовий коефіцієнт дотичної $k = f'(x_1) = g'(x_2)$. Розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2 = 2x_2 + 2, \\ x_1{}^2 - 2x_1 + 5 - x_1(2x_1 - 2) = x_2{}^2 + 2x_2 - 11 - x_2(2x_2 + 2). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - 2, \\ -x_1{}^2 + 5 = -x_2{}^2 - 11, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 - x_1 = -2 \\ -x_1{}^2 - x_2{}^2 = -16, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

$$k = f'(x_1) = 8b = -20;$$

$$y = 8x - 20.$$

*Відповідь:* $y = 8x - 20$.

*Приклад 6.* Який кут з віссю абсцис утворює дотична до графіка функції $f(x) = \frac{x}{x - x^2 - 1}$ в точці (2;$-\frac{2}{3}$).

*Розв'язання:* Спочатку переконуємося, що точка (2;$-\frac{2}{3}$) належить графіку даної функції. Знайдемо похідну

$$f'(x) = \frac{x - x^2 - 1 - x + 2x^2}{(x - x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 - 1}{(x - x^2 - 1)^2}.$$

$$tg\ \alpha = tg\ f'(2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3};\ \alpha = arctg\ \frac{1}{3}.$$

*Відповідь*: $\alpha = arctg\ \frac{1}{3}$.

Приклад 7. Знайти найменшу величину кута, під яким видно параболу $y = x^2 - 2x + 2$ з точки $A(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$.

*Розв'язання:* Таким кутом буде кут, утворений двома дотичними до параболи, що продять через задачу точку $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$. Позначимо шуканий кут через $\alpha$, а кути, що утворюють дотичні до осі $Ox$, через $\alpha_1$, $\alpha_2$. Тоді $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$, і

$$tg\ \alpha = tg\ (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\ \alpha_2 - tg\ \alpha_1}{1 + tg\ \alpha_1\ tg\ \alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

де $k_1, k_2$ означають кутові коефіцієнти дотичних. Для їх знаходження необхідно знайти абсциси точок дотику.

Позначимо точку дотику через $A(x_0, y_0)$, тобто $A(x_{0,}{x_0}^2 - 2x_0 + 2)$, і запишемо рівняння дотичної

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0),$$

$$y = {x_0}^2 - 2x_0 + 2 + (2x_0 - 2)(x - x_0).$$

Оскільки ця пряма проходить через точку $A(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$, то її координати задовольняють дане рівняння. Тоді

$$-\frac{1}{2} = {x_0}^2 - 2x_0 + 2 + (2x_0 - 2)\left(\frac{1}{2} - x_0\right),$$

$$-\frac{1}{2} = {x_0}^2 - 2x_0 + 2 + x_0 - 2{x_0}^2 - 1 + 2x_0\,, \qquad -\frac{1}{2} = {x_0}^2 + x_0 + 1,$$

$${x_0}^2 - x_0 - \frac{3}{2} = 0, \qquad (x_0)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

Отже,

$$k_1 = y'\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right) = 2\,\frac{1+\sqrt{7}}{2} - 2 = \sqrt{7} - 1$$

$$k_2 = y'\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right) = 2\,\frac{1-\sqrt{7}}{2} - 2 = -\sqrt{7} - 1.$$

Тоді $tg\ \alpha = \frac{-\sqrt{7}-1-\sqrt{7}+1}{1-(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)} = \frac{2}{5}\sqrt{7}, \alpha = arctg\ 0{,}4\sqrt{7}.$

*Відповідь:* $\alpha = arctg\ 0{,}4\sqrt{7}$ .

*Приклад 8.* Дотична до графіка функції $y = x^2 - 3x + 4$ нахилена до осі абсцис під кутом $\frac{\pi}{4}$. Знайти координати точки дотику.

*Розв'язання:* Знайдемо похідну функції $y = x^2 - 3x + 4$:

$$y' = 2x - 3.$$

За умовою $y'(x_0) = tg\,\frac{\pi}{4} = 1$ маємо:

$$2x_0 - 3 = 1, x_0 = 2,$$

$$y_0 = 4 - 6 + 4 = 2.$$

Отже, дотична до параболи проходить через точку $A(2; 2)$.

*Відповідь:* $A(2; 2)$.

*Приклад 9.* Чи дотикається пряма $y - 2x + 4 = 0$ до параболи $y = x^2 - 4x + 5$?

*Розв'язання:* Спочатку з'ясуємо, чи має пряма спільні точки з параболою. Для цього розв'яжемо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} y - 2x + 4 = 0 \\ y - x^2 + 4x - 5 = 0; \end{cases}$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0, \qquad x = 3, \qquad y = 2.$$

Отже, пряма і парабола мають спільну точку (3;2).

Знайдемо похідну функції $y = x^2 - 4x + 5$: $y' = 2x - 4$.

Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної до параболи в точці (3;2): $y'(3) = 2$. Оскільки кутовий коефіцієнт дотичної такий, як і в прямої $y - 2x + 4 = 0$, то вона дотикається до параболи.

*Відповідь:* так.

*Приклад 10.* Знайти довжину піддотичної до графіка функції $f(x) = \frac{x}{x^2+1} - \sqrt{x}$, якщо $x_0 = 1$ – абсциса точки дотику.

*Розв'язання:* Знаходимо похідну, її значення і значення функції в точці $x_0 = 1$:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}, f'(1) = -\frac{1}{2}, f(1) = -\frac{1}{2}.$$

Тоді $d = \left|\frac{f(1)}{f'(1)}\right| = 1.$

*Відповідь:* $d = 1$.

*Завдання для самоперевірки*

1.Дослідити функцію $y = \frac{2x}{1+x^2}$ та побудувати її графік.

2. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 2x^2 + 2$, що проходить через точку *M(0;1)*.

3. Скласти рівняння спільної дотичної до графіків функцій $y = f(x)$ та $y = \varphi(x)$:

А) $f(x) = x^2 + 4x + 8;\ \varphi(x) = \ x^2 + 8x + 4;$

Б) $f(x) = \frac{1}{4}x^2;\ \varphi(x) = \ -x^2 + 3x - 2;$

В) $f(x) = x^2 + 2x + 5;\ \varphi(x) = x^2 + 6x + 2;$

Г) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 5x - 2;\ \varphi(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 3x;$

Д) $f(x) = x^2;;\ \varphi(x) = x^3.$

4. Знайти рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$, якщо відома точка *N(a;b)*, яка не належить графіку:

1). $f(x) = \frac{1}{2x-1}, N\left(1; \frac{1}{2}\right);$

2). $f(x) = \left|x^2 - |x|\right|, N\left(0; \frac{1}{3}\right);$

3). $f(x) = 2x^2 - 3x + 8, N\ (0; 0);$

4). $f(x) = 2x^3 + 2, N(1; 3).$

5. Знайдіть кут між дотичною до графіка функції $y = f(x)$ і віссю $Ox$ у точці з абсцисою $x_0$:

1). $f(x) = x - x^2, x_0 = 1;$

2). $f(x) = \frac{4}{3}(\frac{x-1}{x+2})^2, x_0 = 3;$

3). $f(x) = \ \frac{1}{1+x^2}, x_0 = 2;$

4). $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 - x + 5, x_0 = -1.$

6. Під яким кутом графік функції $y = f(x)$ перетинає вісь абсцис:

1). $f(x) = (x-1)^3;$

2). $f(x)=\frac{1-x}{x}$;

3). $f(x)=\ln(x-1)$;

4). $f(x)=\sqrt{x-1}-1$.

7. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$, яка паралельна даній прямій:

1). $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-x+1, y=2x-1$;

2). $f(x)=\sqrt{1+x^2}, y=\frac{x}{2}+1$;

3). $f(x)=x^2-3x+2,\ y=4$;

4). $f(x)=\frac{1}{(x-1)^4}, y=\frac{1}{4}x-1$.

8. Знайти довжину піддотичної графіка функції $y=f(x)$, абсциса якої дорівнює $x_0$:

1). $f(x)=x^3-2x^2+4x+1,\ x_0=2$;

2). $f(x)=ax^2, x_0=4$;

3). $f(x)=a\sqrt{x},\ x_0=9$;

4). $f(x)=\ln x, x_0=e$.

## 1.5 Застосування похідної при розв’язуванні рівнянь

Поняття похідної використовується при розв’язуванні окремих типів рівнянь, в яких виникає потреба в дослідженні функції на монотонність і знаходження її екстремальних значень.

При розв’язанні рівнянь скористаємося деякими властивостями монотонних і неперервних функцій:

Якщо функція $f$ зростає або спадає на деякому проміжку, то на цьому проміжку рівняння $f(x)=0$ має не більше одного кореня. Ця властивість безпосередньо випливає з означення зростаючої і спадної функції. Корінь рівняння $f(x)=0$ дорівнює абсцисі точки перетину графіка функції $y=f(x)$ з віссю $Ox$.

Якщо функція $f$ визначена і неперервна на відрізку $[a; b]$ і на його кінцях її значення протилежні за знаком $(f(a) \times f(b) < 0)$, то існує хоча б одна точка $c \in (a; b)$ така, що $f(c) = 0$. Це відома теорема Больцано-Коші.

Якщо функція $f$ визначена і неперервна на відрізку $[a; b]$, диференційована в інтервалі $(a; b)$ і на кінцях відрізка набуває однакових значень $f(a) = f(b)$, то існує хоча б одна точка $c \in (a; b)$ така, що $f^{`}(c) = 0$. Це відома теорема Ролля.

Геометрично це означає, що при виконанні умов теореми Ролля на графіку функції $y = f(x)$ знайдеться принаймні одна точка C з координатами $(c; f(c))$, в якій дотична до графіка функції паралельна до осі $Ox$[12, с.32].

*Приклад 1.* Розв’язати рівняння:

$arctg\, x = x - \frac{x^3}{3}$.

*Розв’язання:* $OB$ рівняння: $x \in R$. Очевидно, що $x = 0$ – корінь рівняння. Доведемо, що інших коренів це рівняння не має.

Дослідимо монотонність функції: $f(x) = arctg\, x - x + \frac{x^3}{3}$, яка визначена для всіх $x \in R$. Знайшовши її похідну, отримаємо:

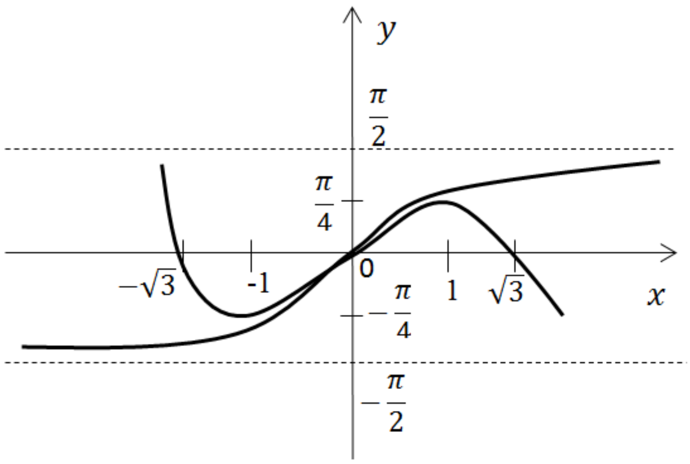
$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - 1 + x^2 = \frac{x^4}{1 + x^2} > 0$$

для всіх $x \neq 0$. А це означає, що функція $f$ зростає на проміжку $(-\infty; +\infty)$, при чому вісь $Ox$ вона перетинає лише один раз у точці $x = 0$. Легко побачити, що $f(x) \to -\infty$, якщо $x \to -\infty$, і $f(x) \to +\infty$, якщо $x \to +\infty$. За властивістю про корінь рівняння $f(x) = 0$ має не більше одного кореня. Отже, $x = 0$ – єдиний корінь рівняння.

*Відповідь:* $\{0\}$.

*Зауваження*: Перевірити, що $x = 0$ – єдиний корінь рівняння, можна також за допомогою графіків функцій $y_1 = arctg\, x, y_2 = x - \frac{x^3}{3}$. Для цього потрібно дослідити на екстремум непарну функцію $y_2 = x - \frac{x^3}{3}$. Її похідна

$y_2' = 1 - x^2$. Звідси маємо: $y_2' = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Якщо $x_1 = -1$ – точка мінімуму, $y_{min} = y(-1) = -\frac{2}{3}$, то $x_2 = 1$ – точка максимуму, $y_{max} = y(1) = \frac{2}{3}$. Значення функції $y_1$ в цих точках $y_1(\pm 1) = arctg(\pm 1) = \pm \frac{\pi}{4}$ і $|y_1(\pm 1)| > |y_2(\pm 1)|$. Для всіх $x \in (0; 1)$ виконується нерівність $y_2(x) < y_1(x)$. Оскільки $y_2'' = -2x$, то графік функції $y_2$ обернений опуклістю вгору, якщо $x > 0$, і вниз, якщо $x < 0$. Корені функції є $\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$ .




*Приклад 2.* Довести, що рівняння $3x^3 - 2x^2 + 4x = 2$ має не більше одного дійсного кореня.

*Розв'язання:* Функція $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 2$ визначена і диференційована для всіх $x \in R$. При $x \to -\infty, f(x) \to -\infty$ , а при $x \to +\infty, f(x) \to +\infty$. Похідна функції $f'(x) = 9x^2 - 4x + 4 > 0$ для всіх $x \in R$ (бо дискримінант квадратного тричлена $D = 16 - 36 \times 4 < 0$). Тоді за властивістю про корінь функція $f$ зростає для всіх $x \in R$, причому $f(0) = -2 < 0, f(1) = 3 > 0$. Отже, рівняння має один дійсний корінь.

*Приклад 3.* Розв'язати рівняння:

$x^2 + 2x + \sqrt{x+1} = 89.$

*Розв'язання:* $OB$ рівняння: $x \geq -1$. Видно, що розв'язання даного ірраціонального рівняння відомими способами (відокремленням радикала і піднесення до степеня, підстановка, зведення до системи раціональних рівнянь, множення обох частин рівняння на спряжений множник) приводить до громіздких викладок і певних труднощів. Тому використаємо спосіб підбору.

Оскільки права частина рівняння – число натуральне, то шукатимемо корінь рівняння серед натуральних чисел, розглядаючи лише ті, для яких вираз $\sqrt{x+1}$ є натуральним числом, наприклад 3, 8, …. Якщо $x = 3$, то при підстановці в рівняння дістанемо: $9 + 6 + 6 \neq 89$. Поклавши $x = 8$, матимемо:

$8^2 + 16 + 3\sqrt{8+1} = 64 + 16 + 9 = 89$. Отже, $x = 8$ – корінь рівняння.

Рівняння буде розв'язане тільки у тому випадку, коли ми доведемо, що інших коренів воно не має. Для цього дослідимо на монотонність функцію

$f(x) = x^2 + 2x + \sqrt{x+1} - 89$, визначену і неперервну на проміжку $[-1; +\infty)$ і диференційовану в інтервалі $(-1; +\infty)$. Оскільки її похідна $f'(x) = 2x + 2 + \frac{3}{2\sqrt{x+1}} > 0$ для всіх $x > -1$, то за властивістю про корінь $x = 8$ – єдиний корінь.

*Відповідь:* $\{8\}$.

*Приклад 4.* Знайти корені рівняння:

$$(9x+5)\left(1+\sqrt{(9x+5)^2+7}\right) + (x-1)\left(1+\sqrt{(x-1)^2+7}\right) = 0$$

*Розв'язання: ОВ* рівняння: $x \in R$. Якщо позначати $9x + 5 = u, 1 - x = v$, то рівняння можна записати у вигляді:

$f(u) = f(v)$, де $f(t) = t(1 + \sqrt{t^2+7})$.

Дослідимо цю функцію на монотонність. Отримаємо:

$$f'(t) = \left(1+\sqrt{t^2+7}\right) + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+7}} > 0, t \in R,$$

тобто функція $f(t)$на множині $R$ зростає. А тому рівність $f(u) = f(v)$ виконується тільки тоді і тільки тоді, коли $u = v$, тобто коли

$$9x + 5 = 1 - x \Leftrightarrow 10x = -4 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$$

Отже, $x = -\frac{2}{5}$ – єдиний корінь рівняння.

*Відповідь:* $\left\{-\frac{2}{5}\right\}$

*Приклад 5.* Знайти корені рівняння:

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{21-x}=x^2-24x+150$$

*Розв'язання:* $OB$ рівняння: $3 \leq x \geq 21$. Дослідимо на екстремум функції $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{21-x}$ і $g(x)=x^2-24x+150$.

Обидві ці функції в ОВ неперервні. Додатні, причому функція $f(x)$ опукла вгору і $f(3)=f(21)=3\sqrt{2}$, а функція $g(x)$ опукла вниз і $g(3)=g(x21)=87$.

Тому варто знайти найбільше значення функції $f(x)$ і найменше значення функції $g(x)$ та порівняти їх.

Знайдемо критичну точку функції $f(x)$. Отримаємо:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-3}}-\frac{1}{2\sqrt{21-x}}=\frac{\sqrt{21-x}-\sqrt{x-3}}{2\sqrt{x-3}\sqrt{21-x}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{21-x}=\sqrt{x-3}$$
$$\Leftrightarrow x=12.$$

Критична точка $x=12$ розбиває ОВ на два інтервали. В інтервалі $(3;12)$ похідна $f'(x)>0$ і функція $f(x)$ зростає, а в інтервалі $(12;21)$ $f'(x)<0$ і функція $f(x)$ спадає. Отже, в точці $x=12$ функція $f(x)$ має максимум, при- чому $f_{max}=f(12)=6$. Оскільки функція $f(x)$ диференційована в інтервалі $(3;21)$ і має єдиний максимум, то це буде її найбільшим значенням.

Виділивши повний квадрат, функцію $g(x)$ подамо у вигляді

$$g(x)=(x-12)^2+6.$$

Звідси $g(12)=6$, причому $x=12$ –точка єдиного мінімуму функції $g(x)$. Отже, в точці $x=12$ функції $f(x)$ і $g(x)$ набувають однакових значень. А це означає, що $x=12$ – єдиний корінь.

*Відповідь*: $\{12\}$.

*Приклад 6.* При яких дійсних значеннях $a$ має розв'язок рівняння:

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{12-2x}=a.$$

*Розв'язання:* ОВ рівняння: $3 \le x \le 6$. На цьому відрізку функція $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{12-2x} > 0$ і неперервна, а в інтервалі $(3;6)$ диференційовна. Тоді $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} - \frac{1}{\sqrt{12-2x}} = \frac{\sqrt{12-2x}-2\sqrt{x-3}}{2\sqrt{x-3}\sqrt{12-2x}}$.

Знайдемо її критичні точки. Отримаємо:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{12-2x} - 2\sqrt{x-3} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{12-2x} = 2\sqrt{x-3} \Leftrightarrow 6x = 24 \Leftrightarrow x = 4.$$

Отже, $x = 4$ –єдина критична точка функції $f(x)$. Якщо $x \in (3;4)$, то $f'(x) > 0$ і функція $f(x)$ зростає, а якщо $x \in (4;6)$, то $f'(x) < 0$ і функція $f(x)$ спадає. Отже, в точці $x = 4$ функція $f(x)$ має максимум $f_{max} = f(4) = 3$. У цій точці функція набуває найбільшого значення $f(4) = 3$, у кінцевих точках ОВ маємо: $f(3) = \sqrt{6}(\approx 2{,}449\ldots), f(6) = \sqrt{3}(\approx 1{,}732\ldots)$. Функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[3;6]$, а її областю значень є відрізок $[\sqrt{3};3]$.

Отже, задане рівняння має розв'язки, якщо $\sqrt{3} \le a \le 3$, причому один розв'язок, якщо $a \in [\sqrt{3};\sqrt{6}) \cup \{3\}$, два розв'язки – якщо $a \in [\sqrt{6};3)$ і зовсім не має розв'язків, якщо $a \in (-\infty;\sqrt{3}) \cup (3;+\infty)$ .

*Відповідь:* $\sqrt{3} \le a \le 3$.

*Приклад 7.* Довести, що рівняння

$$(2x-1)\cos(\alpha x+\beta) + \alpha x\sin(\alpha x+\beta)\cdot(1-x) = 0$$

має корінь між 0 і 1.

*Розв'язання:*Розглянемо функцію $f(x) = x^2\cos(\alpha x+\beta) - x cos(\alpha x+\beta)$, яка визначена і диференційовна для всіх $x \in R$. Зокрема, вона визначена і неперервна на відрізку $[0;1]$і диференційована в інтервалі (0;1). Причому її похідна $f'(x) = 2x cos(\alpha x+\beta) - \alpha x^2\sin(\alpha x+\beta) - \cos(\alpha x+\beta) + \alpha x sin(\alpha x+\beta) = (2x-1)\cos(\alpha x+\beta) + \alpha x(1-x)\sin(\alpha x+\beta)$. Значення функції $f(x)$ на кінцях відрізка рівні: $f(0) = 0\cdot cos\beta - 0\cdot cos\beta = 0$ $f(1) = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 0$. Тому за теоремою Ролля існує хоча б одна точка $c \in (0;1)$, в якій похідна дорівнює нулю.

*Приклад 8.*Розв'язати рівняння:

$$1 + \ln(1 + x) = e^x$$

*Розв'язання:*ОВ рівняння $x > -1$. В ОВ дане рівняння рівносильне такому:

$$\ln(1 + x) = e^x - 1$$

Функції, що стоять у різних частинах цього рівняння – взаємно обернені. Дійсно, нехай $y = \ln(1 + x)$ – пряма функція; вона неперервна і зростаюча в інтервалі $(-1; +\infty)$, при чому $-\infty < \ln(1 + x) < +\infty$. Тому в інтервалі $(-\infty; +\infty)$ існує обернена до неї функція $x + 1 = e^y \Leftrightarrow x = e^y - 1$. Після заміни $x$ на $y$, а $y$ на $x$ отримаємо обернену функцію $y = e^x - 1$, яка неперервна і зростаюча в інтервалі $(-\infty; +\infty)$, при чому $-1 < e^x - 1 < +\infty$. Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно бісектриси першого і третього координатних кутів. А однакових значень вони набувають в точках, які лежать на цій бісектрисі. Тому рівняння $\ln(1 + x) = e^x - 1$ рівносильне такому: $e^x - 1 = x \Leftrightarrow e^x = x + 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Залишається довести, що інших коренів дане рівняння не має. Для цього дослідимо на монотонність функцію $f(x) = e^x - 1 - x$. Її похідна $f'(x) = e^x - 1 = 0$, якщо $x = 0$. Якщо $x > 0$, то $e^x - 1 > 0$, а якщо $x < 0$, то $e^x - 1 < 0$, це означає, що $x = 0$ - єдиний корінь рівняння $e^x - 1 = x$, а значить і вихідного рівняння.

*Завдання для самоперевірки*

Знайти корені таких рівнянь:

1. $x^2 + 3x + 5\sqrt{x + 5} = 43;\ \{4\}$
2. $\frac{1}{2}x^2 + 4x + 2\sqrt{x + 3} = 48;\ \{6\}$
3. $(5x + 2) \cdot \left(5 + \sqrt{(5x + 2)^2 + 4}\right) + (3x - 7) \cdot \left(5 + \sqrt{(3x - 7^2) + 4}\right) = 0;\ \left\{\frac{5}{8}\right\}$
4. $\sqrt{x - 4} + \sqrt{12 - x} = x^2 - 16x + 68;\ \{8\}$
5. $\sqrt[3]{x - 10} = (x - 4)^3 + 6;\ \{2\}$

При яких значеннях $a \in R$ мають розв'язки рівняння:

6. $\sqrt{4x+1} - \sqrt{x-2} = a$; $a \in \left[\frac{3\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$.

7. $\frac{x^2+x-6}{x^2+x-2} = a$; $a \in \left[-\frac{25}{7}; 1\right)$.

Скільки розв'язків для різних значень $a \in R$ мають рівняння:

8. $\sqrt{x-3} + \sqrt{30-2x} = a$; 1 розв'язок. Якщо $a \in \{6\} \cup [2\sqrt{3}; 2\sqrt{6})$; 2 розв'язки, якщо $a \in [2\sqrt{6}; 6)$; немає розв'язків для інших значень $a$.

9. $\frac{2x^2-3x+2}{x^2+1} = a$; 1 розв'язок, якщо $a \in \left\{\frac{1}{2}; 2; \frac{7}{2}\right\}$; 2 розв'язки, якщо $a \in \left(\frac{1}{2}; 2\right) \cup \left(2; \frac{7}{2}\right)$; немає розв'язків для інших значень $a$.

10. $|x^2 - 2x - 8| = a$; 2 розв'язки, якщо $a \in \{0\} \cup (10; +\infty)$; 4 розв'язки, якщо $a \in (0; 10)$; 3 розв'язки, якщо $a = 10$; немає інших розв'язків, якщо $a < 0$.

11. $|2x - a| = \frac{3x+2}{x-2}$; 1 розв'язок, якщо $a \in \left(-\frac{4}{3}; 15\right)$; 2 розв'язки, якщо $a \in \left\{-\frac{4}{3}; 15\right\}$;3 розв'язки, якщо $a \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup (15; +\infty)$.

12. $|x^5 - 18x^3 + 81x| = a$; немає розв'язків, якщо $a < 0$; 3 розв'язки, якщо $a = 0$; 6 розв'язків, якщо $0 < a < \frac{3888\sqrt{5}}{125}$; 4 розв'язки, якщо $a = \frac{3888\sqrt{5}}{125}$; 2 розв'язки, якщо $a > \frac{3888\sqrt{5}}{125}$.

## 1.6. Доведення нерівностей

Почнемо розгляд практичних завдань з твердження, що описує поведінку монотонності функції.

*Теорема:* Нехай функцію $f$ задано на проміжку $[a; +\infty)$, причому $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, $b \in R$.

а) Якщо $f'(x) > 0$, $x \in [a; +\infty)$, *то* $f(x) < b$ при всіх $x \geq a$.

б) Якщо $f'(x) < 0, x \in [a; +\infty)$, *то* $f(x) > b$ при всіх $x \leq a$.

*Зауваження:* Прикладами функцій $f$, які задовольняють умови теореми, є $f(x) = -\frac{1}{x} + b$ на проміжку $[a; +\infty)$ та $f(x) = \frac{1}{x} + b$ на проміжку $[a; +\infty)$, де $a > 0, b \in R$ .

*Доведення:* Обмежимося доведенням пункту *а)*; пункт *б)* доводиться аналогічно.

За умовою функція $f$ прямує до дійсного числа $b$ при $x \to +\infty$ та має додатну похідну. Тоді $f$ зростає на своїй області визначення. Доведемо шукану нерівність методом від супротивного.

Припустимо, що в деякій точці $x_0 \geq a$ маємо $f(x_0) \geq b$. Розглянемо довільну точку $x_1 > x_0$. Тоді внаслідок зростання функції $f$ отримаємо $f(x_1) > f(x_0) \geq b$, тому $f(x_1) > b$. При $x \geq x_1$ виконується $f(x) > f(x_1)$, тому за властивістю границі $b = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \geq f(x_1) > b$, тобто $b > b$. Отримали протиріччя. Отже, $f(x) < b$ при всіх $x \geq a$. Твердження пункту *а)* доведено.

*Приклад 1.* Довести подвійну нерівність

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \qquad n \geq 1$$

*Доведення*: 1) Розглянемо функцію

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}, x \geq 1.$$

Маємо

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0, \qquad f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x(x+1)} < 0.$$

Згідно з теоремою дістанемо $f(x) > 0$, тому

$$\ln(1 + \frac{1}{x}) > \frac{1}{x+1}, \qquad \frac{1}{n+1} < \ln\frac{1}{n+1}, n \geq 1$$

2)Нехай тепер $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}, x \geq 1$

Маємо $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$=0, $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x(x+1)} > 0$

За теоремою дістанемо $f(x) < 0$. Отже,

$$\ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x};\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},\ n \geq 1.$$

*Приклад 2.*Довести, що послідовність $\left\{a_n = (1+\frac{1}{n})^n, n \geq 1\right\}$ зростає.

*Доведення:*Розглянемо функцію $y(x) = (1+\frac{1}{x})^x, x \geq 1$. Тоді

$$\ln y(x) = xln\left(1+\frac{1}{x}\right);\ \ \frac{y'(x)}{y(x)} = (lny)'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} > 0$$

згідно прикладу 1. Далі, оскільки $y(x) > 0$, то $y'(x) > 0$, функція $y$ зростає, а разом з нею зростає і послідовність $\{a_n = y(n)\}$.

*Приклад 3.* Довести, що послідовність $\left\{b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}, n \geq 1\right\}$ спадає.

*Доведення:* Нехай $y(x) = (1+\frac{1}{x})^{x+1},\ x \geq 1$.

Тоді $\ln y(x) = (x+1)\ln(1+\frac{1}{x})$; $\frac{y'(x)}{y(x)} = (\ln y)'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} < 0$

згідно з прикладом 1. Звідси $y'(x) < 0$, функція спадає, а тоді спадає і послідовність $\{b_n = y(n)\}$.

*Приклад 4.* Довести, що для $p \in [4, +\infty)$ послідовність

$\left\{a_n = \left(1+\frac{1}{pn}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n \geq 1\right\}$ зростає.

*Доведення:* При $p \geq 4$ розглянемо функцію

$$y(x) = \left(1+\frac{1}{px}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^x, x \geq 1.$$

Маємо $\ln y(x) = \ln\left(1+\frac{1}{px}\right) + xln\left(1+\frac{1}{x}\right)$,

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x(1+px)} - \frac{1}{1+x} =: z(x)$$

( тут і нижче запис $" =: z(x)"$ означає, що функцію $z(x)$ задано виразом, який стоїть зліва від знака $" =: "$). Бачимо, що

$$\lim_{x\to+\infty} z(x) = 0, z'(x) = -\frac{x\left(p^2 - 2p - \frac{2p+1}{x} - \frac{2p+1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}{(1+x^2)(1+px)^2}.$$

Нехай тепер $x \geq 2$. Тоді при $p \geq 4$ маємо:

$$p^2-2p-\frac{2p+1}{x}-\frac{2p+1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\geq p^2-2p-\frac{2p+1}{2}-\frac{2p+1}{4}-\frac{1}{8}$$
$$=p^2-\frac{7}{2}p-\frac{7}{8}\geq 16-\frac{7}{2}\cdot 4-\frac{7}{8}=2-\frac{7}{8}>0.$$

Отже, $z'(x)<0$ при $x\geq 2$. За теоремою при таких $x$ виконується нерівність $z(x)>0$, а тому $y'(x)>0$. Таким чином, $y$ зростає при $x\geq 2$. Отже, $a_n=y(n)$ зростає при $n\geq 2$. Крім того, нерівність $a_1=2\left(1+\frac{1}{p}\right)<a_2=\frac{9}{4}(1+\frac{1}{2p})$ рівносильна нерівності $p>\frac{7}{2}$, що виконується при $p\geq 4$. Отже, послідовність $\{a_n,n\geq 1\}$ зростає.

*Приклад 5.* Довести, що послідовність $\left\{a_n=(1-\frac{1}{n^2})^n,\ n\geq 1\right\}$ зростає.

*Доведення:* Маємо $a_1=0<a_2=\frac{9}{16}$. Нехай

$$y(x)=(1-\frac{1}{x^2})^x\,,x\geq 2.$$

Тоді

$$\ln y(x)=x\ln(1-\frac{1}{x^2});\ \frac{y'(x)}{y(x)}=\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{2}{x^2-1}=:z(x).$$

Далі, $\lim\limits_{x\to+\infty}z(x)=0,\ z'(x)=-\frac{2(x^2+1)}{x(x^2-1)^2}<0.$

За теоремою дістанемо $z(x)>0,x\geq 2$, тому $y'(x)>0$, $y$ зростає і $\{a_n,n\geq 2\}$ зростає. Отже, і вся послідовність $\{a_n,n\geq 1\}$ зростає.

*Приклад 6.* Послідовність $\left\{a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p},\ n\geq 1\right\}$ є спадною тоді і тільки тоді, коли $p\geq\frac{1}{2}$.

*Доведення:* Нехай $p$ – довільне дійсне число, $y(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+p},x\geq 1.$

Тоді $\ln y(x)=(x+p)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right),\ \frac{y'(x)}{y(x)}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x+p}{x(1+x)}=:z(x).$

Далі, $\lim\limits_{x\to+\infty}z(x)=0,\ z'(x)=\frac{(2p-1)x+p}{x^2(1+x)^2}.$

1). Якщо $p\geq\frac{1}{2}$, то $z'(x)>0$. Звідси за теоремою отримаємо $z(x)<0$, а отже, $y'(x)<0$, функція $y$ та послідовність $\{a_n,n\geq 1\}$ спадають.

2). Якщо $p < \frac{1}{2}$, то при $x > \frac{p}{1-2p}$ (зараз $1 - 2p > 0$) дістане, що $z'(x) > 0$, а тому $z(x) > 0$, $y'(x) > 0$, тобто функція $y$ зростає. Тоді і послідовність $\{a_n, n \geq n_0\}$ зростає за умови, що $n_0 \geq \frac{p}{1-2p}$. Таким чином, при $p < \frac{1}{2}$ послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ не є спадною.

*Приклад 7.* Послідовність $\left\{a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{k}{n}\right),\ n \geq 1\right\}$ є спадною тоді і тільки тоді, коли $k \geq \frac{1}{2.}$

*Доведення:* Нехай $k -$ довільне дійсне число. Розглянемо функцію

$$y(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(1 + \frac{k}{x}\right),$$

визначену при $x \geq 1$. Ця функція є додатною при $x > max\{1; -k\}$, причому $\ln y(x) = \ln(1 + \frac{k}{x}) + x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, $\frac{y'(x)}{y(x)} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{k}{x(k+x)} - \frac{1}{1+x} =: z(x),\ x > max\{1, -k\}$. Маємо $\lim\limits_{x \to +\infty} z(x) = 0$,

$$z'(x) = \frac{(2k-1)x^3 + (2k+k^2)x^2 + (2k+k^2)x + k^2}{x^2(1+x)^2(k+x)^2}. \qquad (1)$$

1) Якщо $k \geq \frac{1}{2}$, то $2k - 1 \geq 0$ та $z'(x) > 0.$ За теоремою отримуємо $z(x) < 0, x \geq 1$, тому $y'(x) < 0$, функція $y$ спадає, а отже і послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ спадає.

Якщо $k < \frac{1}{2}$, то $2k - 1 < 0$. Чисельник виразу (1) прямує до -∞ при $x \to +\infty$, тому $z'(x) < 0$ при $x \geq x_0(k)$, де $x_0(k) -$ деяке достатньо велике натуральне число, що залежить від $k$. За теоремою при $x \geq x_0(k)$ дістанемо, що $z(x) > 0$, а тому $y'(x) > 0$, функція $y$ зростає, а разом з нею зростає і послідовність $\{a_n, n \geq x_0(k)\}$. Таким чином, при $k < \frac{1}{2}$ послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ не є спадною.

*Приклад 8.* Довести подвійну нерівність

$$\frac{2}{2x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{2x+1}{2x(x+1)}, x > 0.$$

*Доведення*: 1) Нехай $y(x) = \frac{2}{2x+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

Тоді $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0,\ y'(x) = \frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2} > 0,\ x > 0.$ Згідно з теоремою маємо $y(x) < 0$ та $\frac{2}{2x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

2)Нехай тепер $y(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{2x+1}{2x(x+1)}, x > 0$. Тоді

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0,\ y'(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2(1+x)^2} > 0.$$

За теоремою отримуємо $y(x) < 0$. Отже, $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{2x+1}{2x(x+1)}$.

*Зауваження:* Оскільки при $x > 0$ маємо

$$\frac{1}{x+1} < \frac{2}{2x+1}, \qquad \frac{2x+1}{2x(x+1)} < \frac{1}{x},$$

то доведена у прикладі 8 нерівність є посиленням подвійної нерівності з прикладу 1.

*Приклад 9.* Довести, що при дійсному $k > -2, k \neq 0$, послідовність $\left\{a_n = (1 + \frac{k}{n})^n,\ n \geq 2\right\}$ зростає.

*Доведення:* При $k \in (-2; 0) \cup (0; +\infty)$ розглянемо додатну функцію

$$y(x) = (1 + \frac{k}{x})^x, x \geq 2.$$

Тоді $\ln y(x) = x \ln\left(1 + \frac{k}{x}\right), \frac{y'(x)}{y(x)} = \ln\left(1 + \frac{k}{x}\right) - \frac{k}{k+x} =: z(x).$

Далі $\lim\limits_{x \to +\infty} z(x) = 0,\ \ z'(x) = -\frac{k^2}{x(k+x)^2} < 0$. Отже, $z(x) > 0, y'(x) > 0$, $y$ зростає і послідовність $\{a_n\}$ також зростає.

*Приклад 10.* Довести нерівність $x\left(\frac{\pi}{2} - arctg\ x\right) < 1$.

*Доведення:* При $x \leq 0$ ліва частина від'ємна або дорівнює 0, тому дана нерівність виконується. Залишилося розглянути проміжок $x > 0$.

Нехай $y(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - arctg\ x\right) = xarcctgx, x > 0$. При знаходженні границі $y(x)$ при $x \to +\infty$ робимо заміну $t = arcctgx, t \to 0, x = ctg\ t$. Маємо

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{t\to 0} t\, ctg\, t = \lim_{t\to 0} \frac{t\cos t}{\sin t} = \frac{\lim\limits_{t\to+0} \cos t}{\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}} = \frac{\cos 0}{1} = 1.$$

У цьому випадку ми використали неперервність функції $cos\, t$ в точці $t_0 = 0,$ а також одну з цікавих границь. Далі,

$$y'(x) = \frac{\pi}{2} - arctg\, x - \frac{x}{1+x^2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} y'(x) = 0.$$

Знаходимо другу похідну: $y''(x) = -\frac{2}{(1+x^2)^2} < 0.$ За теоремою отримаємо: $y'(x) > 0$, і знову за теоремою маємо $y(x) < 1$ при $x > 0$.

*Приклад 11.* При $a > 0$ довести нерівність

$x\left(\sqrt{x^2+a} - x\right) < \frac{a}{2}$. (3)

*Доведення:* При $x \le 0$ ліва частина від'ємна або дорівнює 0. Тому нерівність (3) виконується. Далі розглянемо $x > 0$. Замість того, щоб застосовувати теорему, перетворимо ліву частину:

$$x\left(\sqrt{x^2+a} - x\right) = \frac{x(\sqrt{x^2+a} - x)(\sqrt{x^2+a} + x)}{\sqrt{x^2+a} + x} = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x^2}} + 1} < \frac{a}{2}.$$

Як видно, інколи штучні прийоми спрощують розв'язання.

*Завдання для самоперевірки*

Довести рівності:

a) $\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2} < 1;$

b) $x\left(\frac{\pi}{4} - arctg\, \frac{x}{x+1}\right) < 1$ при $x > 0;$

c) $\frac{\ln(3x^2+x+2)}{\ln(7x^{10}+x^2+x+1)} < \frac{1}{5};$

d) $\sqrt[3]{n^3+3n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+2n^2+1} < \frac{1}{3};$

e) $\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) < \frac{1}{2}.$

## 1.7. Розв'язування нерівностей з використанням похідної

Розв'язування певного класу нерівностей базується на властивостях монотонної функції на всій області її визначення або на деякому проміжку. А дослідження функції на монотонність якраз проводиться за допомогою похідної.

Якщо функція $y = f(x)$ на інтервалі $(a; b)$ зростає (спадає) і $\alpha \in (a; b)$ є коренем рівняння $f(x) = c$, тобто $f(\alpha) = c$, то для $a < x < b$ виконується нерівність $f(x) > c$ $(f(x) < c)$, і, навпаки, для $a < x < \alpha$ виконується нерівність $f(x) < c$ $(f(x) > c)$.

Якщо функція $y = \varphi(x)$ зростає (спадає) на інтервалі $(a; b)$, а функція $y = g(x)$ спадає (зростає) на цьому ж інтервалі і $\alpha \in (a; b)$ є коренем рівняння $\varphi(x) = g(x)$, тобто $\varphi(\alpha) = g(\alpha)$, то для $a < x < b$ виконується нерівність $\varphi(x) > g(x)$ $(\varphi(x) < g(x))$, а для $a < x < \alpha$ виконується нерівність $\varphi(x) < g(x)$ $(\varphi(x) > g(x))$.

Зауважимо, що нерівність $\varphi(x) > g(x)$ $(\varphi(x) < g(x))$ можна розглядати як нерівність виду $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$, де $f(x) = \varphi(x) - g(x)$. Але на практиці інколи зручніше досліджувати на монотонність окремо функції $y = \varphi(x)$ і $y = g(x)$, а не їх різницю.

*Приклад 1.* Розв'язати нерівність:

$$2^{x+\sin x} + 3^{x+\sin x} + 4^{x+\sin x} > 3.$$

*Розв'язання:* Область визначення нерівності $X = R$. Переконаємося, що функція $f(x) = 2^{x+\sin x} + 3^{x+\sin x} + 4^{x+\sin x}$ зростає на всій області визначення. Для цього знайдемо її похідну:

$$f'(x) = 2^{x+\sin x}\ln 2\,(1 + \cos x) + 3^{x+\sin x}\ln 3\,(1 + \cos x) + 4^{x+\sin x}\ln 4\,(1 + \cos x) = (2^{x+\sin x}\ln 2 + 3^{x+\sin x}\ln 3 + 4^{x+\sin x}\ln 4)(1 + \cos x) \geq 0.$$

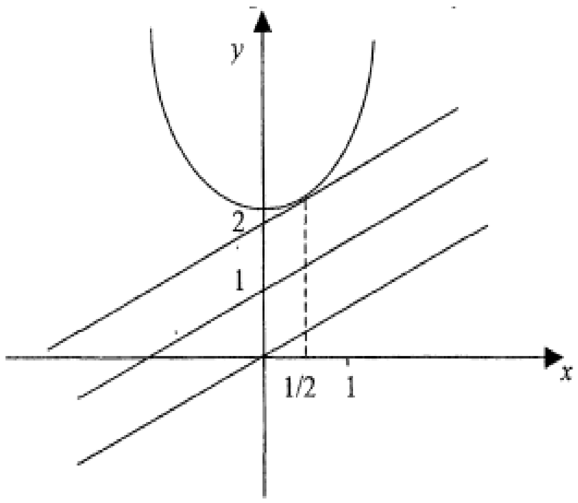
Причому $f'(x) = 0$ лише в точках $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$. Отже, на всій області визначення функція $f(x)$ зростає.

Оскільки $f(0) = 3$, то розв'язком нерівності буде $x > 0$.

*Відповідь:* $(0; +\infty)$.

*Приклад 2*. Для яких значень параметра $a$ має розв'язки нерівність

$$x^2 + 2 < x + a?$$




*Розв'язання:* Графіком функції $\varphi(x) = x^2 + 2$ є парабола, направлена вітками вгору, а графіком функції $g(x) = x + a$ є пряма. Очевидно, умова задачі не виконуватиметься. Якщо парабола буде знаходитися вище прямої. Таким чином, розв'язання задачі зводиться до проведення дотичної до кривої під даним кутом.

Маємо $\varphi'(x) = 2x, g'(x) = 1$.

Звідси $2x = 1, x = \frac{1}{2}$, тобто пряма $g(x) = x + a$ дотикається параболи в точці з абсцисою $x = \frac{1}{2}$, а $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$.

Рівняння дотичної $y - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0)(x - x_0)$,

$$y - \frac{9}{4} = 1\left(x - \frac{1}{2}\right), \qquad y = x + \frac{7}{4}.$$

Отже, для $a > \frac{7}{4}$ нерівність має розв'язок.

*Відповідь:* $a > \frac{7}{4}$.

*Приклад 3.* Розв'язати нерівність

$$\arcsin(\arcsin x) < \operatorname{arcctg} x - \frac{\pi}{2}.$$

*Розв'язання:* Область визначення нерівності $X = [-\sin 1 ; \sin 1]$. Позначимо функції: $\varphi(x) = \arcsin(\arcsin x)$, $g(x) = \operatorname{arcctg} x - \frac{\pi}{2}$.

Функція $g(x) = \operatorname{arcctg} x - \frac{\pi}{2}$ спадає на проміжку $[-\sin 1 ; \sin 1]$. Покажимо, що функція $(x) = \arcsin(\arcsin x)$ зростає в області визначення. Знайдемо похідну функції $\varphi(x)$: $\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\arcsin x)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Для $x \in (-\sin 1 ; \sin 1)$ $\varphi'(x) > 0$. Отже, на цьому інтервалі функція $\varphi(x)$ зростає. А враховуючи неперервність функції $f$ на проміжку $[-\sin 1 ; \sin 1]$, робимо висновок, що на всьому цьому відрізку функція $\varphi(x)$ зростає.

Оскільки $\varphi(0) = g(0)$, то нерівність виконується для $-\sin 1 \leq x < 0$

Відповідь: $[-\sin 1 ; 0)$ .

*Завдання для самоперевірки*

1. Розв'язати нерівність:
   a) $x + \sin x > \frac{3}{2}\pi - 1$;
   b) $2^{x+\sin x} + 5^{x+\sin x} + 8^{x+\sin x} < 3$;
   c) $\arcsin x > \frac{4}{\pi} arctg\, x - \frac{2}{3}$.
2. Розв'язати нерівність:
   a) $(\frac{x-2}{x+2})^2 < \log_2(x+1) + 1$;
   b) $\frac{1}{\lg x} < \arcsin x$ ;
   c) $\frac{1}{1+\sin x} < \frac{2}{\pi}\arccos(-x)$.
3. Знайти значення параметра $a$, при яких для будь-якого значення змінної $x$ з області визначення має місце нерівність

$$\sqrt{4x} - 1 \leq 2x + a \leq x^2 + x + 3.$$

*4.* Для яких значень параметра $b$ нерівність $\arcsin x < 2x + b$ має розв'язок?

## 1.8. Доведення тотожностей з використанням похідної

Певний клас тотожностей може з успіхом бути доведеним, якщо скористатися ознакою сталості неперервної функції на деякому проміжку або на всій області визначення, а саме: якщо функція $\varphi$ неперервна на проміжку

$X$ і в кожній точці цього проміжку її похідна : $\varphi'(x) = 0$, то функція : $\varphi$ стала на цьому проміжку, тобто $\varphi(x) = c$.

Або інакше, якщо функція $f$ і $g$ неперервні на даному проміжку $X$ і мають однакові похідні для будь-якої внутрішньої точки проміжку $X$, то різниця цих функцій на $X$ стала, тобто $\varphi(x) = f(x) - g(x) = c$.

Отже, щоб довести, що $f(x) = g(x)$, де $f$ і $g$ диференційовані на $X$, є тотожністю на проміжку $X$, достатньо переконатися, що

$f'(x) = g'(x)$ і $f(\alpha) = g(\alpha)$, де $\alpha -$ будь-яке значення з $X$.

*Приклад 1.* Довести тотожність

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

*Розв'язання:* Позначимо $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$. Обидві функції диференційовані на множині $R$. Знайдемо їх похідні:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad g'(x) = -\frac{-1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Отже, $f'(x) = g'(x)$.

Візьмемо тепер будь-яке дійсне число, наприклад, $x = 0$ і знайдемо значення обох функцій у цій точці $f(0) = 0$, $g(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$.

Отже, $\forall\, x \in R$ виконується тотожність $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$.

Використовуючи вище приведені міркування, інколи за допомогою похідної можна з однієї формули ( тотожності) легко дістати іншу необхідну формулу (тотожність). Це базується на тому, що коли $f(x) = g(x)$ є тотожністю, то $f'(x) = g'(x)$ також тотожність.

*Приклад 2.* З формули (тотожності) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ знайти формулу для $\cos 2x$.

*Розв'язання:* Для цього достатньо від обох частин даної формули взяти похідну

$$(\sin 2x)' = (2\sin x \cos x)'$$

$$2\cos 2x = 2(\cos x \cos x - \sin x \sin x),$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

За допомогою похідної можна доводити тотожності, які містять не одну, а декілька змінних. У цьому випадку одну з них беремо за аргумент, а інші фіксуємо як параметри.

Якщо функція $f(x)$ диференційована на деякому проміжку $X$ і $f(x) = c$, де $c -$ стала, є тотожністю на цьому проміжку, то $f'(x) = 0$.

З цього рівняння знаходять шуканий проміжок. А щоб знайти її значення на цьому проміжку, достатньо знайти $f(x_0)$, де $x_0$ −будь-яке значення з даного проміжку.

Зауважимо, що у випадку, коли $f'(x) = 0$ в області визначення функцій $f$, але $f$ така, що в деяких точках цієї області терпить розрив, то в різних проміжках неперервності функція $f$ може набувати різних значень. У цьому випадку треба обчислити значення функції для кожного проміжку неперервності.

Очевидно, що для того, щоб показати незалежність значення виразу від змінної, достатньо показати, що похідна функції $f$, яка задана цим виразом, дорівнює нулю в області її визначення.

*Приклад 3.* Знайти проміжки, на яких функція $f(x) = arctg\, x + arctg\, \frac{1-x}{1+x}$ набуває сталого значення, і обчислити їх відповідні значення.

*Розв'язання:* Функція $f$ визначена на проміжках $(-\infty; -1), (-1; +\infty)$, а в точці $x = -1$ терпить розрив. Знайдемо похідну:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Отже, в кожній точці з області визначення функції $f$ її похідна дорівнює нулю, тобто $f'(x) = 0$. Оскільки функція $f$ терпить розрив в точці $x = -1$, то на інтервалі $(-\infty; -1)$ $f(x) = c_1$, а на інтервалі $(-1; +\infty)$ $f(x) = c_2$. Знайдемо $c_1, c_2$:

$$c_1 = f(-2) = arctg\,(-2) + arctg\,(-3) = -(arctg 2 + arctg\,3) = -\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\frac{3}{4}\pi, \qquad c_2 = f(0) = acrtg\,0 + arctg 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, $arctg\,x + arctg\,\frac{1-x}{1+x} = \left[\begin{array}{l} -\frac{3}{4}\pi, \text{якщо } x < -1 \\ \frac{\pi}{4}, \text{ якщо } x > -1. \end{array}\right.$

*Приклад 4.* Довести тотожність

$$2(2x-a)^3 - 27a^2x = (x-2a)(4x+a)^2.$$

*Розв'язання:* Нехай $f(x) = 2(2x-a)^3 - 27a^2x, g(x) = (x - 2a)(4x+a)^2$, де $a$ –довільне, але фіксоване дійсне число. Обидві функції диференційовані на множині $R$. Знайдемо їх похідні:

$$f'(x) = 6(2x-a)^2 \cdot 2 - 27a^2 = 48x^2 - 48ax - 15a^2,$$

$$g'(x) = (4x+a)^2 + 8(x-2a)(4x+a) = 48x^2 - 48ax - 15a^2.$$

Отже, $\forall\, x \in R \quad f(x) = g(x) + c$.

Нехай $x = 0$. Тоді $f(0) = -2a^3$, $g\,(0) = -2a^3$. Тому $c = 0$.

Отже, $\forall\, x \in R \quad f(x) = g(x)$.

*Відповідь:* $\forall\, x \in R \quad f(x) = g(x)$.

*Приклад 5.* Довести тотожність

$$(b+d)^3 + (a+d)^3 + (a+b)^3 - 3(b+d)(a+d)(a+b)$$
$$= 2(a^3 + b^3 + d^3 - 3abd).$$

*Розв'язання:* Нехай $f(a) = (b+d)^3 + (a+d)^3 + (a+b)^3 - 3(b+d)(a+d)(a+b)$, $g(a) = 2(a^3 + b^3 + d^3 - 3abd)$, де $a$ – аргумент, $b$ і $d$ –довільні, але фіксовані числа. Обидві функції диференційовані на множині $R$. Знайдемо їх похідні:

$$f'(a) = 3(a+d)^2 + 3(a+b)^2 - 3(b+d)(a+b) - 3(b+d)(a+d) = 6a^2 - 6bd, \qquad g'(a) = 6a^2 - 6bd.$$

Отже, $f(a) = g(a) + c$.

Нехай $a = 0$. Тоді $f(0) = 2(b^3 + d^3)$, $g(0) = 2(b^3 + d^3)$. Отже, $c = 0$.

Тоді , $\forall\, x \in R$ , $f(a) = g(a)$.

*Приклад 6*. Спростити вираз

$$sin^2 2\alpha + sin^2\beta + \cos(2\alpha+\beta)\cos(2\alpha-\beta).$$

Розв’язання: Розглянемо функцію $f(\alpha) = sin^2 2\alpha + sin^2\beta + \cos(2\alpha+\beta)\cos(2\alpha-\beta)$, яка диференційована на множині $R$. Знайдемо її похідну $f'(\alpha) = 2\sin 4\alpha - 2\sin(2\alpha+\beta)\cos(2\alpha-\beta) - 2\cos(2\alpha+\beta)\sin(2\alpha-\beta) = 2\sin 4\alpha - 2\sin 4\alpha = 0$. Отже, для $\forall\ \alpha\ \in R\ \ f(\alpha) =\ c$.

Знайдемо $c$. Для цього знайдемо значення функції для $\alpha = 0$

$$f(0) = sin^2\beta + cos^2\beta = 1.$$

Отже, для будь-якого $\alpha, \beta\ \in R\ \ f(\alpha) = 1$, тобто

$$sin^2 2\alpha + sin^2\beta + \cos(2\alpha+\beta)\cos(2\alpha-\beta) = 1\ .$$

Відвовідь: $sin^2 2\alpha + sin^2\beta + \cos(2\alpha+\beta)\cos(2\alpha-\beta) = 1$.

*Завдання для самоперевірки*

1. Доведіть тотожність:
   - $3(sin^4\beta + cos^4\beta) - 2(sin^6\beta + cos^6\beta) = 1$;
   - $\sin(a+b)\sin(a-b) = sin^2 a - sin^2 b$;
   - $\cos(a+b) - \sin(a-b) = (\cos a + \sin a)(\cos b - \sin b)$;
   - $\sin\alpha - tg\ \frac{\alpha}{2} = \cos\alpha\ tg\ \frac{\alpha}{2}$.
2. Доведіть тотожність:
   - $(a+b+c)(bc+ac+ab) - abc = (a+b)(a+c)(b+c)$;
   - $(x-y)(x+y)^3 = x(x-2y)^3 + y(2x-y)^3$;
   - $(a^2+b^2)(x^2+y^2) - (ax+by)^2 = (ay-bx)^2$;
3. Доведіть тотожність:
   - $\arcsin\sqrt{\frac{2x+1}{2}} + arcctg\ \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}} = \frac{\pi}{2}, -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$;
   - $\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = arctg\ x, x > 0$;
   - $\arccos\sqrt{1-x^2} = arctg\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;
   - $\sin(arcctg\ x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
4. Спростити вираз:

- $(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$;
- $cos^2\alpha + cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + cos^2(\frac{2\pi}{3} - \alpha)$;
- $sin^2\left(\frac{15\pi}{8} - 2\alpha\right) - cos^2(\frac{17\pi}{8} - 2\alpha)$.

5. З формули $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4sin^3\alpha$ дістаньте формули для $\cos 3\alpha$.

6. Для яких значень параметрів $a$ і $b$ значення функції

$f(x) = \frac{asin^2x + bsin\,x + 1}{sin^2 + bsin\,x + a}$ не залежать від аргументу $x$?

7. Для яких значень параметрів $k$ і $b$ рівність $karcsin(x+b) = \arcsin(kx+b)$ є тотожністю на множині дійсних чисел?

# РОЗДІЛ 2
# ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ В ФІЗИЦІ, ЕКОНОМІЦІ, ХІМІЇ ТА БІОЛОГІЇ

## 2.1 Застосування похідної в фізиці

Таблиця 1.

| Фізична величина | Формули |
|---|---|
| Швидкість | $v = \frac{d}{x} = x'$<br>a) $x = vt, v = (vt)' = v$;<br>b) $x = v_0 t + \frac{at^2}{2}, v = v_0 t + (\frac{at^2}{2})' = v_0 + at$ |
| Прискорення | $a = \frac{d}{v} = v'\ v = at,\ a = a$ |
| Потужність | $P = \frac{dA}{dt} = A', dA = Fdx.$<br>$P = \frac{Fdx}{dt} = F\frac{dx}{dt} = Fv$ |
| Сила | $F = ma,\ a = \frac{dv}{dt},$<br>$F = m\frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}$ |
| Сила струму | $i = \frac{dq}{dt} = q'$ |
| ЕРС індукції | $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\Phi'$ |

*Приклад 1.* На якій відстані слід розмістити предмет від збиральної лінзи, щоб відстань від предмета до його дійсного зображення була найменшою?

*Розв'язання:*

Використавши формулу лінзи $\frac{1}{f} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F}$, знайдемо

$$f = \frac{Fd}{d-F}, \qquad f + d = \frac{Fd}{d-F} + d = \frac{d^2}{d-F} \quad (1)$$

У нашому випадку $d > F$, оскільки зображення дійсне. Вираз у правій частині рівняння (1) перетворимо так:

$$f + d = \frac{d^2}{d-F} = \frac{((d-F)+F)^2}{d-F} = \frac{((d-F)-F)^2 + 4F(d-F)}{d-F}$$

$$= \frac{(d-2F)^2}{d-F} + 4. \qquad (2)$$

Вираз у правій частині рівнянні (2), а отже, і відстань між предметом та його дійсним зображенням найменше тоді, коли $d = 2F$.

Значно простіше розв'язується задача, якщо скористатися поняттям похідної для знаходження критичних значень функції. Оскільки $y = f + d = \frac{d^2}{d-F}$ є функцією однієї змінної $d$, то вона може мати екстремум. Знайдемо похідну:

$$y' = \frac{2d(d-F) - d^2}{(d-F)^2} = \frac{d(d-2F)}{(d-F)^2}.$$

Функція має екстремум, якщо $y' = 0$. Отже, за $d = 0$ або $d - 2F = 0$ функція набуває екстремальних значень. Умову задачі задовольняє значення $d = 2F$. Легко довести, що при цьому значення $y(d)$ набуває найменшого значення.

*Приклад 2.* Два учні граються м'ячем, кидаючи його один одному. Якої найбільшої висоти досягає м'яч, коли від одного гравця до другого він летить 2 сек.?

*Розв'язання:*

Координата $y$ змінюється за законом:

$$y = v_{0y}t + \frac{g_y t^2}{2}.$$

Максимальне значення $y$ знайдемо з умови: $y'(t) = 0$,

$y'(t) = v_{0y} - gt$, тоді $v_{0y} = gt$. Отже, $y_{max} = gt \cdot t - \frac{gt^2}{2} = \frac{gt^2}{2}$.

Оскільки найбільшої висоти тіло досягає через 1 секунду, то $y_{max} =$ 4,9 м.

*Приклад 3.*Два автомобілі їдуть рівномірно з однаковими за модулем швидкостями по дорогах, що перетинаються під кутом $\alpha$. На яку мінімальну відстань наближаються автомобілі в русі, якщо спочатку вони знаходилися на відстанях $l_1$ і $l_2$ від перехрестя доріг?

*Розв'язання:*

Координати тіл змінюються за законом $y = l_1 - vt, x = l_2 - vt.$ За теоремою косинусів визначимо відстань $s$.

$$s = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\,cos\alpha}$$

$$= \sqrt{(l_2 - vt)^2 + (l_1 - vt)^2 - 2(l_2 - vt)(l_1 - vt)\cos\alpha}\,.$$

Найменшу відстань між тілами знайдемо для моменту часу $t.$ При цьому $s'(t) = 0.$

$$s' = \frac{2\left[v(vt - l_2) + v(vt - l_1) - \big(v(vt - l_2) + v(vt - l_1)\big)\cos\alpha\right]}{2\sqrt{(l_2 - vt)^2 + (l_1 - vt)^2 - 2(l_2 - vt)(l_1 - vt)\cos\alpha}}.$$

Виконавши спрощення й прирівнявши вираз до нуля, матимемо:

$(l_1 + l_2 - 2vt)(1 - \cos\alpha) = 0.$ Звідси $t = \frac{l_1 + l_2}{2v}$. Тоді

$$s_{min} = |l_2 - l_1|\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}.$$

Відповідь: $s_{min} = \left\{|l_2 - l_1|\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\right\}.$

*Приклад 4.* Батарея складається з $N = 600$ однакових елементів так, що $n$ груп з'єднано послідовно і в кожній із них є $m$ елементів, з'єднаних паралельно. ЕРС кожного елемента $\varepsilon = 2$В, його внутрішній опір $r_1 = 0{,}4$ Ом. За яких значень $m$ і $n$ батарея, якщо замкнути її на зовнішній опір $R =$ 0,6 Ом, віддасть у зовнішнє коло максимальну потужність?

*Розв'язання:*

Потужність, яку буде віддано в зовнішнє коло,

$$P = I^2R = \frac{\varepsilon^2}{(R+r)^2}R.$$

Споживана потужність буде максимальною, якщо $P'(R) = 0$.

$$P'(R) = \varepsilon^2 \frac{(R+r)^2 - (R+r)R}{(R+r)^4} = \varepsilon^2 \frac{(R+r)(r-R)}{(R+r)^4} = \varepsilon^2 \frac{(r-R)}{(R+r)^3}.$$

Отже, $r - R = 0$, $r = R$, зовнішній опір дорівнюватиме внутрішньому. У цьому випадку споживана потужність буде максимальною.

Оскільки $r = n\frac{r_1}{m}$ і $N = mn$, то $r = \frac{n^2 r_1}{N}$. Тоді $\frac{n^2 r_1}{N} = R$, звідси $n = \sqrt{\frac{RN}{r_1}}$.

Отже, $m = 20; n = 30$ .

*Відповідь:* $m = \{20\}; n = \{30\}$.

*Приклад 5.*На абсолютно гладкій горизонтальній поверхні знаходяться два пружні бруски масами $M$. Скріплені пружиною довжиною $l$. Жорсткість пружини дорівнює $k$. На один із брусків, наприклад на лівий, налітає зі швидкістю $v$ третій брусок, який має масу $M$. Показати, що скріплені бруски завжди будуть рухатися в одну сторону. Визначити швидкості брусків у той момент, коли пружина найбільш розтягнута.

*Розв'язання:*У результаті пружиного удару лівий брусок набуває швидкості $v$. Правий брусок у цей момент часу перебуває у стані спокою. Позначимо через $u_1$ і $u_2$ швидкості лівого й правого бруска в довільній момент часу. На основі законів збереження імпульсу й енергії маємо:

$$M(u_1 + u_2) = Mv, \qquad \frac{Mu_1^2}{2} + \frac{Mu_2^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{Mv^2}{2}.$$

Тоді $v = u_1 + u_2,\ kx^2 = M\big(v^2 - (u_1^2 + u_2^2)\big)$.

Отже, $u_1 \cdot u_2 = \frac{kx^2}{2M}$. З цього виразу можна зробити висновок, що $u_1$ і $u_2$ матимуть той самий знак, бо права частина рівняння додатна. Отже, бруски рухатимуться в один бік.

Видовження пружини буде найбільшим, якщо добуток, $u_1 \cdot u_2$ буде максимальним. Але $u_1 \cdot u_2 = u_1(v - u_1) = u_1 v - {u_1}^2$.Позначимо через $y$ цей добуток: $y = u_1(v - u_1) = u_1 v - {u_1}^2$. Вираз набуває максимального значення, якщо $y'(u_1) = 0$.

$$y'(u_1) = v - 2u_1;\ \ v - 2u_1 = 0;\ u_1 = \frac{v}{2}, u_2 = \frac{v}{2}.$$

*Відповідь:* $\left\{\frac{v}{2}\right\}$.

*Приклад 6.* Знайдіть швидкість і прискорення в момент часу $t$ і в момент, коли $t = 1$с., для точки, що рухається прямолінійно за законом: $s'(t) = 2t^3 - 3t$.

*Розв'язання:* Враховуючи механічний зміст похідної, отримаємо:

$$v(t) = s'(t) = 6t^2 - 3.$$

Якщо $t = 1$, то $v(1) = 6 \cdot 1 - 3 = 3\ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$.

Аналогічно: $a(t) = v'(t) = 12t$. Якщо $t = 1$, то $a(1) = 12 \cdot 1 = 12\ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)$.

*Відповідь:* $v = 3\ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right);\ a = 12\ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)$.

*Приклад 7.* Прямокутна рамка площею 500 $\text{см}^2$, яка складається з 200 витків дроту, рівномірно обертається в однорідному магнітному полі навкруги осі, що проходить через її центр, паралельно одній із її сторін, з частотою 10 с. При цьому в рамці індукується ЕРС, максимальне значення якої - 150 В. Визначити індукцію магнітного поля.

*Розв'язання:* За законом Фарадея, у рамці, яка складається з $N$ витків та обертається в магнітному полі, виникає ЕРС індукції:

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt} \tag{1}$$

де $\Phi = BS\cos\omega t$ і $\omega = 2\pi v$.

Підставляючи ці вирази у формулу (1) й диференціюючи, отримаємо:

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt}Bscos\ 2\pi v = NBS2\pi v \sin 2\pi vt.$$

ЕРС індукції максимальна, коли $\sin 2\pi vt = 1$. $\varepsilon = \varepsilon_{max} = NBS2\pi v$, звідки

$$B = \frac{\varepsilon_{max}}{NS2\pi v}.$$

Підставивши значення отримаємо 0,24 Тл.

*Відповідь:* $\{0{,}24\}$.

*Завдання для самоперевірки*

1. Колесо обертається за законом $y = 4 + 5t - t^3$. Визначити наприкінці першої секунди обертання кутову швидкість колеса, а також лінійну швидкість та повне прискорення точок, що лежать на ободі колеса. Радіус колеса – 2 см.

2. Залежність потенціальної енергії від координати $x$ задається у вигляді: $W(x) = -5x^2 + 4x - 3$. Знайти координату точки, що відповідає положенню рівноваги цієї системи. Виявити характер рівноваги.

3. В електричному колі напруга на конденсаторі змінюється за законом $U_c = 0{,}01 \sin \omega t$. Знайти миттєве значення сили струму, а також миттєву напругу на конденсаторі й котушці через $\frac{1}{6}$ періоду, якщо ємність конденсатора – 0,02 мкФ, а а індуктивність котушки - 10 мГн.

## 2.2 Застосування похідної в економіці

Економічні знання допомагають нам правильно витрачати ресурси та кошти.. Поняття граничних величин дозволили створити новий інструмент дослідження та опису економічних явищ, через що стало можливим розв'язувати наукові проблеми, які раніше мали незадовільні рішення.

Похідна виступає як швидкість зміни деякого економічного об'єкта (процесу) за часом або відносно іншого об'єкта дослідження. Саме поняття «похідна в економіці» тісно пов'язане з виробничими завданнями, граничними величинами та еластичністю функцій. В економіці дуже часто необхідно знайти значення показників, таких як гранична продуктивність праці, максимальний прибуток, максимальний обсяг випуску продукції, мінімальні витрати. Кожен показник є функцією від однієї або кількох змінних, знаходження яких зводиться до визначення похідної.

*Економічний зміст похідної. Використання поняття похідної в економіці*

Розглянемо задачу про продуктивність праці. Нехай функція $u = u(t)$ відображає кількість виробленої продукції $u$ за час $t$ і необхідно знайти продуктивність праці в момент $t_0$.

За період часу від $t_0$ до $t_0 + \Delta t$ кількість виробленої продукції зміниться від значення $u_0 = u(t_0)$ до значення $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$; тоді середня продуктивність праці за цей період часу $z_{\text{сер}} = \frac{\Delta u}{\Delta t}$. Очевидно, що продуктивність праці в момент $t_0$ можна визначити як граничне значення середньої продуктивності за період часу від $t_0$ до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, тобто

$$z = \lim_{\Delta t \to 0} z_{\text{сер}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = u'(t_0).$$

Таким чином, продуктивність праці є похідна від обсягу виробленої продукції по часу.

Розглянемо ще одне поняття, яке ілюструє економічний зміст похідної.

Витрати виробництва $y$ будемо розглядати як функцію кількості продукції $x$, що виробляється. Нехай $\Delta x$— приріст продукції, тоді $\Delta y$ — приріст витрат виробництва і $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ — середній приріст витрат виробництва продукції на одиницю продукції. Похідна $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ виражає граничні витрати виробництва і характеризує наближено додаткові затрати на виробництво одиниці додаткової продукції.

Граничні витрати залежать від рівня виробництва (кількість продукції, що випускається) $x$ і визначаються не постійними виробничими затратами, а лише змінними (на сировину, паливо та ін.). Аналогічним чином можуть бути визначені гранична виручка, граничний дохід, граничний продукт, гранична корисність, гранична продуктивність та інші граничні величини.

Застосування диференціального числення для дослідження економічних об'єктів та процесів на основі аналізу цих граничних величин дістало назву *граничного аналізу*. Граничні величини характеризують не стан (як сумарна чи середня величини), а процес зміни економічного об'єкта. Таким чином, похідна виступає як швидкість зміни деякого економічного об'єкта (процесу) за часом або відносно іншого об'єкта дослідження. Але необхідно врахувати, що економіка не завжди має змогу використовувати граничні величини у зв'язку з неподільністю багатьох об'єктів економічних розрахунків та перервністю економічних показників у часі (наприклад, річних, квартальних, місячних та ін.). Водночас у деяких випадках можна знехтувати дискретністю показників і ефективно використовувати граничні величини.

Розглянемо, наприклад, співвідношення між середнім та граничним доходом в умовах монопольного та конкурентного ринків.

Сумарний дохід (виручка) від реалізації продукції $r$ можна визначити як добуток ціни одиниці продукції $p$ на кількість продукції $q$, тобто $r = pq$.

В умовах монополії одна або кілька фірм повністю контролюють пропозицію певної продукції, а отже, і її ціну. При цьому, як правило, зі збільшенням ціни попит на продукцію падає. Вважаємо, що цей процес проходить по прямій, тобто крива попиту $p\ (q)$ є лінійна спадна функція $p = aq + b$, де $a < 0, b > 0$. Звідси сумарний дохід від реалізованої продукції складає $r = (aq + b)q = aq^2 + bq$ (див. рис. 1). У цьому разі середній дохід на одиницю продукції $r_{\text{сер}} = \frac{r}{q} = aq + b$, а граничний прибуток, тобто додатковий дохід від реалізації одиниці додаткової продукції, складатиме $r'_q = 2aq + b$ (див. рис. 2.1). Звідси, в умовах монопольного ринку зі зростанням кількості реалізованої продукції граничний прибуток зменшується, внаслідок чого відбувається зменшення (з меншою швидкістю) середнього прибутку.

В умовах досконалої конкуренції, коли на ринку функціонує велика кількість учасників і кожна фірма не здатна контролювати рівень цін, стабільна реалізація продукції можлива при домінуючій ринковій ціні, наприклад, $p = b$. При цьому сумарний прибуток становитиме $r = bq$ і відповідно середній прибуток $r_{\text{сер}} = \frac{r}{q} = b;$ граничний прибуток $r'_q = b$ (див. рис. 2.2). Таким чином, в умовах ринку вільної конкуренції, на відміну від монопольного ринку, середній та граничний прибутки збігаються.

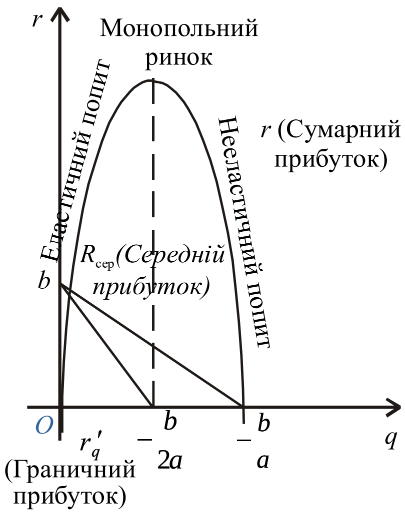



Рис. 2.1

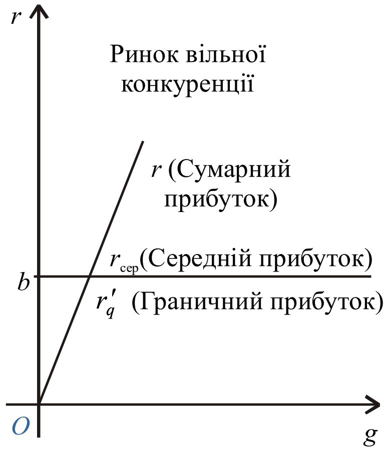



Рис. 2.2

Для дослідження економічних процесів та розв'язування інших прикладних задач використовується поняття еластичності функції.

*Означення: Еластичністю функції* $E_x(y)$ називається границя відношення відносного приросту функції $y$ до відносного приросту змінної $x$ при $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} \div \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}y'. \quad (1)$$

Еластичність функції наближено показує, на скільки відсотків зміниться функція $y = f(x)$ при зміні незалежної змінної $x$ на 1%.

Визначимо геометричний зміст еластичності функції. За означенням (1) $E_x(y) = \frac{x}{y}y' = \frac{x}{y}\, tg\,\alpha$, де $tg\,\alpha$ — тангенс кута нахилу дотичної в точці $M$ ($x$, $y$) (див. рис. 2.3). Враховуючи, що з трикутника $MBN$ $MN = x\,tg\,\alpha, MC = y$, а з подібності трикутників $MBN$ та $AMC$ $\frac{MN}{MC} = \frac{MB}{MA}$ дістанемо $E_x(y) = \frac{MB}{MA}$, тобто еластичність функції (за абсолютною величиною) дорівнює відношенню відстаней по дотичній від даної точки графіка функції до точок її перетину з осями $Ox$ та $Oy$. Якщо точки перетину дотичної до графіка функції $A$ і $B$ містяться по один бік від точки $M$, то еластичність $E_x(y)$ додатна (див. рис. 2.3), якщо по різні боки, то $E_x(y)$ від'ємна (див. рис. 2.4).

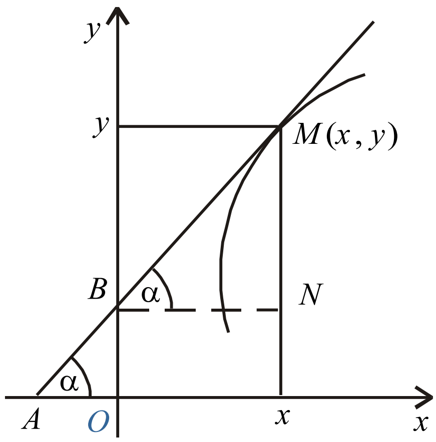



Рис. 4.3

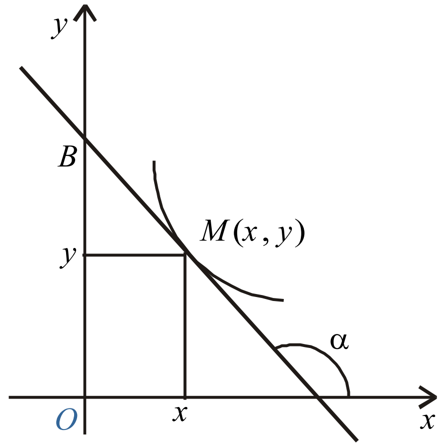



Рис. 2.4

*Властивості еластичності функції.*

1. Еластичність функції дорівнює добутку незалежної змінної на темп зміни функції $T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$, тобто

$$E_x(y) = x \cdot T_y.$$

2. Еластичність добутку (частки) двох функцій дорівнює сумі (різниці) еластичностей цих функцій:

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v), E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v).$$

3. Еластичності взаємно обернених функцій — взаємно обернені величини:

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}. \qquad (2.1)$$

Еластичність функції застосовується при аналізі попиту та пропозиції. Наприклад, еластичність попиту $y$ відносно ціни $x$ (або доходу $x$) — коефіцієнт, що визначається за формулою (1) і наближено показує, на скільки відсотків зміниться попит (обсяг пропозиції) при зміні ціни (або доходу) на 1%.

Якщо еластичність попиту (за абсолютною величиною) $|E_x(y)| > 1$, то попит вважають еластичним, якщо $|E_x(y)| < 1$ — нееластичним відносно ціни (або доходу). Якщо $|E_x(y)| = 1$, то йдеться про попит з одиничною еластичністю.

*Приклад 1.* Залежність між собівартістю одиниці продукції y (тис. грош. од.) та випуском продукції $x$ (млрд грош. од.) виражається функцією $y = -0{,}5x + 80$ . Знайти еластичність собівартості за умови випуску продукції в розмірі 60 млрд грош. од.

*Розв'язання:* За формулою $E_x(y) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} \div \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}y'$. еластичність собівартості

$$E_x(y) = \frac{-0{,}5x}{-0{,}5x+80} = \frac{x}{x-160}.$$

При $x$ = 60 $E_{x=60}(y) = -0{,}6$, тобто при виробництві продукції в розмірі 60 млн грош. од., збільшення її на 1% викличе зменшення собівартості на 0,6%.

*Приклад 2.* За допомогою досліду були встановлені функції попиту $q = \frac{p+8}{p+2}$ та пропозиції $s = p + 0{,}5$, де $q$ та $s$ — кількість товарів, відповідно що купується і пропонується для продажу за одиницю часу, $p$ — ціна товару. Знайти: а) рівноважну ціну, тобто ціну, за якої попит та пропозиція врівноважуються; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни; в) зміну доходу при збільшенні ціни на 5% від рівноважної.

*Розв'язання:*

а) Рівноважна ціна визначається з умови $q = s, \frac{p+8}{p+2} = p + 0{,}2$, звідки $p$ = 2, тобто рівноважна ціна дорівнює 2 грош. од.

б) Знайдемо еластичності попиту та пропозиції за формулою (2.1):

$$E_p(q) = -\frac{6p}{(p+2)(p+8)};\ E_p(s) = \frac{2p}{2p+1}.$$

Для рівноважної ціни $p$ = 2 маємо $E_{p=2}(q) = -0{,}3;\ E_{p=2}(s) = 0{,}8$.

Оскільки отримані значення еластичності за абсолютною величиною менші 1, то попит і пропозиція даного товару за рівноважної (ринкової) ціни нееластичні відносно ціни. Це означає, що зміна ціни не приведе до різкої зміни попиту та пропозиції. Так, при збільшенні ціни $p$ на 1% попит зменшиться на 0,3%, а пропозиція збільшиться на 0,8%.

в) При збільшенні ціни $p$ на 5% від рівноважної попит зменшиться на 5 · 0,3 = 1,5%, тобто прибуток зросте на 3,5%.

*Приклад 3.* Обсяг продукції в цеху протягом робочого дня є функцією $a = -x^3 - 6x^2 + 80x + 500$, де $x -$ час. Знайти продуктивність праці через 2 години від початку роботи.

*Розв'язання:*

Продуктивність праці – це показник трудової діяльності працівників. Характеризує кількість продукції, виробленої за одиницю часу, або витрати часу на виробництво одиниці продукції.

Продуктивність праці визначається похідною від часу - $a'(x)$. Тоді:

$$a'(x) = (-x^3 - 6x^2 + 80x + 500)' = -3x^2 - 12x + 80,$$

Знаходимо продуктивність праці в момент часу $x = 2$, тоді

$a'(2) = 20{,}8 \text{ (од.)}.$

*Відповідь:* $\{20{,}8\}$.

*Приклад 4.* Знайти об'єм виробництва, при якому фірма, що діє на ринку досконалої конкуренції, буде отримувати максимальний прибуток, якщо $p = 15, TC(q) = q^3 + 3q$.

*Розв'язання:* Прибуток фірми, що діє на ринку досконалої конкуренції, максимізує при рівності граничної виручки і граничних витрат: *MR* = *MC*.

Оскільки при досконалої конкуренції спостерігається рівність ціни та граничної виручки: *P* = *MR*, то можна стверджувати, що фірма максимізує прибуток при *P* = *MC*. Знайдемо граничні витрати:

$$MC = TC' = 3q^2 + 3;$$

$$3q^2 + 3 = 15;$$

$$3q^2 = 12;$$

$$q = 2.$$

Отже, ми з'ясували, що при ціні $p = 15$ фірма запропонує на продаж 2 одиниці продукції.

*Відповідь*: $\{2\}$

*Приклад 5.* Знайти оптимальний обсяг виробництва фірми, функція прибутку якої задана таким чином: *П (q) = TR (q) - TC (q) =* $q^{2}$ *-* $8q$ *+ 10.* *Розв'язання:* Знайдемо похідну даної функції:

$$\Pi' = TR'(q) - TC'(q) = 2q - 8.$$

Прирівняємо похідну до нуля і знайдемо точку екстремуму:

$$\Pi' = 2q - 8 = 0 \Rightarrow q_{extr} = 4$$

Чи є обсяг випуску, рівний чотирьом одиницям продукції, оптимальним для фірми? Щоб відповісти на це питання, треба проаналізувати характер зміни знака похідної при переході через точку екстремуму.

При $q < q_{extr} = 4 \rightarrow \Pi'^{(q)<0}$ і прибуток зменшується.

При $q < q_{extr} = 4 \rightarrow \Pi'^{(q)>0}$ і прибуток зростає.

Як бачимо, при переході через точку екстремуму похідна змінює свій знак з мінуса на плюс. Отже, в точці екстремуму $q_{extr} = 4$ прибуток приймає мінімальне значення, і таким чином, цей обсяг виробництва не є оптимальним для фірми. Яким же все-таки буде оптимальний обсяг випуску для даної фірми? Відповідь на це питання залежить від додаткового дослідження виробничих можливостей фірми. Якщо фірма не може виробляти за аналізований період більше 8 одиниць продукції *(П (q = 8) = П (q = 0) = 10),* то оптимальним рішенням для фірми буде взагалі нічого не виробляти, а отримувати дохід від здачі в оренду приміщень і / або обладнання. Якщо ж фірма здатна виробляти за аналізований період більше 8 одиниць продукції, то оптимальним рішенням для фірми буде випуск на межі своїх виробничих можливостей.

*Приклад 6.* Нехай $TC(q) = \frac{1}{2}q^2$- витрати фірми-монополіста, $Q_D(p) = 40 - 2p$ - функція попиту. Знайти оптимальний для даної монополії обсяг виробництва і відповідну ціну одиниці продукції.

*Розв'язання:* Виразимо залежність ціни від кількості виробленої продукції:

$$p = \frac{40 - q}{2} \Rightarrow p = 20 - \frac{1}{2}q.$$

Тоді прибуток $\pi(q)$ буде дорівнює:

$$\pi(q) = \left(20 - \frac{1}{2}q\right)q - \frac{1}{2}q^2 = 20q - \frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}q^2 = 20q - q^2.$$

У точці $q_0$ максимуму прибутку виконується рівність $\pi'(q_0) = 20 - 2q_0 = 0.$ Звідси оптимальний для монополіста обсяг виробництва дорівнює $q_0$=10. Відповідна ціна буде:

$$p_0 = p_{q_0} = 20 - \frac{1}{2}q_0 = 20 - \frac{1}{2} \cdot 10 = 15.$$

При цьому граничні витрати $MC(q_0) = TC'(q_0) = 10$ Таким чином, ціна, найбільш вигідна для даної монополії, в півтора рази вище її граничних витрат.

*Відповідь:* ціна більша у 1,5 рази.

*Приклад 7.* Обсяг продукції $u$ цеху протягом робочого дня представляє функцію $u = -t^3 - 5t^2 + 75t + 425,$ де $t$- час (год). Знайти продуктивність праці через 2 години після початку роботи.

*Розв'язання:* За період часу від $t_0 = 2$ до $(t_0 + Dt)$ кількість виробленої продукції зміниться від $u_0 = u(t_0)$ до значення $u_0 + Du = u(t_0 + Dt)$. Середня продуктивність праці за цей період часу складе $\frac{Du}{Dt}$. Отже, продуктивність праці в момент $t_0$ можна визначити, як граничне значення середньої продуктивності праці за період часу від $t_0$ до $(t_0 + Dt)$ при $Dt$ *=0,* тобто

$$\Pi T = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = u'(t).$$

$$u'(t) = -3t^2 - 10t + 75 \Rightarrow$$

$$u(t_0) = -3 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 75 = -12 - 20 + 75 = 43.$$

Отже, продуктивність праці в момент часу через 2 години після початку роботи складе 43 одиниці продукції на годину. *Відповідь:*$\{43\}$.

*Приклад 8.* Яка максимальна виручка монополіста, якщо попит аж до перетину з осями описується лінійною функцією $Q = b - ap,$ де $p$ - ціна товару, що випускається монополістом; $a$ і $b$ - коефіцієнти функції попиту? *Розв'язання:* Виручка $TR = Qp = p(b - ap)$ досягне максимуму при рівності нулю похідної за ціною:

$$TR' = (p(b - ap))' = 0.$$

$$TR' = p' \cdot (b - ap) + (b - ap)'p = b - ap - ap = b - 2ap = 0,\ p = \frac{b}{2a}$$

$$Q = b - ap = b - a\frac{b}{2a} = \frac{b}{2}.$$

При цьому максимум виручки складе

$$TR = Qp = \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2a} = \frac{b^2}{4a}.$$

*Відповідь:* $\left\{\frac{b^2}{4a}\right\}$.

*Завдання для самоперевірки*

1. Задана функція корисності від споживання пельменів

$TU = 130Q - 2{,}5Q^2$ Знайти точку насичення споживання.

2. Виробляючи праски, конкурентний виробник має такі функції загального виторгу і загальних витрат:

$$TR = -1{,}5Q^2 + 250Q;$$

$$TC = Q^2 + 1400 - 10Q,$$

де $Q -$ кількість прасок.

1) Яка кількість прасок зробить максимальним прибуток фірми?

2) Яка ціна відповідає цій кількості?

3. Пасажир економ-класу і бізнес-класу летять рейсом «Київ-Дортмунд» авіакомпанією WIZZ-air, з'ясували, що перший заплатив за квиток майже вдвічі менше, ніж другий. Визначте:

1) Обсяги пасажирських перевезень авіакомпанії (тис. осіб), якщо попит на економ клас описується рівнянням $Q_1^D = 10 - 2P_1$, а попит бізнесменів $Q_1^D = 30 - 2 = P_{2,}$ сукупні витрати авіакомпанії $TC = 20 + 2Q$.

2) Величину сукупного прибутку авіакомпанії.

3) Якими були б обсяги перевезень, якби вона встановлювала одну ціну за квитки.

4. На ринку досконалої конкуренції діють фірми, які мають однакові загальні витрати $TC = 0{,}1Q^3 - 4Q^2 + XQ$. Попит на продукцію галузі заданий рівнянням $Q_Д = 680 - 5P$. Відомо, що в галузі залишається 24 фірми, Визначити параметр х.

5. Функція попиту на продукцію монополіста має вигляд $Q_Д = \frac{100}{P^3} + 1$, а функція загальних витрат $TC == 2Q$. Визначте оптимальний обсяг випуску й ціну монополіста.

## 2.3. Застосування похідної у хімії та біології

Таблиця 3.

| Функція | Приріст аргументу | Приріст функції | Середня швидкість зміни функції | Миттєва швидкість зміни функції |
|---|---|---|---|---|
| $= C(t) -$ концентрація речовини, яка вступила в хімічну реакцію в момент часу $t$; [моль/л] | $\Delta t$ | $\Delta C = C(t + \Delta t) - C(t)$ | $v_c = \dfrac{\Delta C}{\Delta t} = \dfrac{C(t+\Delta t) - C(t)}{\Delta t}$ | $v_p = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_c$ – швидкість хімічної реакції |
| $P = P(t) -$ чисельність популяції в момент часу $t$; [особин] | $\Delta t$ | $\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t)$ | $v_{cn} = \dfrac{\Delta P}{\Delta t} = \dfrac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}$ | $v_n = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{cn}$ – швидкість зростання популяції |

*Приклад 1.* Кількість бактерій $N$ у деякій біомасі змінюється за законом $N(t) = 450 + 52t + 2t^2$. Скільки бактерій було у біомасі у початковий момент $t = 0$? Яка швидкість приросту кількості бактерій в момент часу 3,5 хв?

*Розв'язання:* Зрозуміло, що у початковий момент часу $t = 0$ у біомасі було 450 бактерій. Оскільки швидкість приросту кількості бактерій є похідною від чисельності популяції, тобто $v(t) = N'(t)$, то для відповіді на друге питання використаємо правило знаходження похідної.

1) Надамо $t$ приросту $\Delta t$.

2) Знайдемо приріст залежної змінної $\Delta N$:

$$\Delta N = N(t+\Delta t) - N(t)$$
$$= 450 + 52(t+\Delta t) + 2(t+\Delta t)^2 - (450 + 52t + 2t^2)$$
$$= 52\Delta t + 4t\Delta t + 2(\Delta t)^2 = \Delta t(52 + 4t + 2\Delta t).$$

3) Складемо відношення:

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} \div \frac{\Delta N}{\Delta t} = 52 + 4t + 2\Delta t.$$

4) Знайдемо границю цього відношення, якщо $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0}(52 + 4t + 2\Delta t) = 52 + 4t.$$

Ця границя і є швидкістю приросту кількості бактерій в момент часу $t$. Тому коли $t = 3{,}5$ хв, то $v = 66\,\text{бакт.}/\text{хв}.$

*Відповідь:* 450 бактерій, 66 бакт./хв.

*Приклад 2.* Розчинення лікарської речовини з пігулки описується рівнянням $m = m_0 e^{-kt}$, де $m_0$ – початкова маса на момент часу $t = 0$, $m$ – нерозчинена маса на момент часу $t$; $k$ –стала розчинення при заданих зовнішніх умовах. Визначте швидкість розчинення.

*Розв'язання:* Масу лікарської речовини, що розчинилася в момент часу $t$, запишемо у вигляді $M = m_0 - m = m_0(1 - e^{-kt})$. Використовуючи хімічний зміст похідної, визначимо швидкість розчинення:

$$M' = m_0(-e^{-kt})(-k) = km_0 e^{-kt} = km.$$

*Відповідь:* $km$ – швидкість розчинення лікарської речовини $[15, \text{с}. 5]$.

*Приклад 3.* Чисельність популяції бактерій у момент часу $t$ (у годинах) задається формулою $p(t) = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2$. Протягом якого часу популяція зростає? Починаючи з якого моменту часу її чисельність почне зменшуватися?

*Розв'язання:* Знайшовши похідну функції $p(t)$ і розв'язавши нерівність $10^4 - 2 \cdot 10^3 t > 0$, на основі ознаки зростання функції на проміжку робимо висновок про те, що протягом 5 год. Чисельність популяції збільшуватиметься. А оскільки $p'(t) < 0$ при $t > 5$, то на основі ознаки спадання функції стверджують, що після 5 години чисельність популяції почне зменшуватися .

*Відповідь:* Протягом 5 год чисельність популяції збільшуватиметься, а після 5-ої години чисельність популяції почне зменшуватись.

*Приклад 4.* Реакція організму на введені ліки може виявлятися підвищенням кров'яного тиску, зменшенням температури тіла, зміною пульсу чи іншими фізіологічними показниками. Припустимо, що через $x$ позначено дозу призначених ліків. А ступінь реакції $y$ визначається функцією $y = f(x) = x^2(a - x)$, де $a -$ деяка додатна стала. При якому значенні $x$ реакція максимальна?

*Розв'язання:* Знайшовши похідну функції. Яка є математичною моделлю наведеної задачі і розв'язавши рівняння $2ax - 3x^2 = 0$, з'ясуємо, що ця функція має єдину критичну точку $x_0 = \frac{2a}{3}$. Оскільки при переході через цю точку знак похідної змінюється з «+» на «-», то на основі достатньої умови існування екстремуму в точці робимо висновок, що точка $x_0 = \frac{2a}{3}$ є точкою максимуму функції $y$.

*Відповідь:* Реакція максимальна при $x = \frac{2a}{3}$.

*Приклад 5.* За якої кислотності сума концентрації гідроген-іонів $\mathrm{H}^+$ і гідроксид-іонів $\mathrm{OH}^-$ в одиниці об'єму води буде найменшою?

*Розв'язання:* Введемо позначення: $x -$ концентрації гідроген-іонів $\mathrm{H}^+$; $y -$ гідроксид-іонів $\mathrm{OH}^-$. Пригадаємо хімічний закон: $xy = k$, де $k -$ стала для води (при 25°C $k = 10^{-14}$). Задача зводиться до знаходження найменшого значення функції $u = x + y = x + \frac{k}{x}$. Продиференціювавши функцію $u(x) = x + \frac{k}{x}$, знаходимо: $u'(x) = 1 - \frac{k}{x^2}, u'(x) = 0$ при $x = \pm\sqrt{k}$.

Оскільки $x > 0$, то функція має єдину критичну точку на всій області визначення. Знайшовши другу похідну $u''(x) = \frac{2k}{x^3}$ та її значення в критичній точці $u''(\sqrt{k}) = \frac{2}{\sqrt{k}} > 0$, на основі достатньої умови існування екстремуму функції робимо висновок, що точка $x=\sqrt{k}$ є точкою мінімуму. Завдяки єдиності стаціонарної точки функція $u(x)$ досягає в ній найменшого значення. За згаданим законом $y=\sqrt{k}$. Отже, сума концентрацій іонів води буде найменшою, якщо концентрація йонів $\mathrm{H}^+$ і $\mathrm{OH}^-$ будуть рівні між собою, тобто за нейтральної реакції .

Відповідь: При $x=y=\sqrt{k}$ (за нейтральної реакції).

*Завдання для самоперевірки*

1. Дріжджі ростуть у цукровому розчині так, що їх маса збільшується на 3% за кожну годину. Визначте масу дріжджів через $t$ годин, якщо її початкове значення дорівнює 1г. Знайдіть швидкість зміни маси при: а) $t=1$ год.; б) $t=2$ год.

Відповідь: $m(t)=1{,}03^t$; а) 0,0304 г/год; б) 0,0314 г/год.

2. Деяка інфекційна хвороба поширюється за законом $p(t)=0{,}005(15t^2-t^3)$, де $t\in\ [0;15]$ $p(t)$ –відсоток тих, хто захворів протягом $t$ діб, від загального числа мешканців. Протягом скількох діб відсоток тих. Хто захворів. Зростатиме, а протягом скількох діб – спадатиме?

Відповідь: Відсоток тих, хто захворів, буде збільшуватися протягом перших 10 діб, з 10-ої до 15-ої доби відсоток тих, хто захворів буде зменшуватися. Швидкість зміни відсотка тих, хто захворів, буде збільшуватися протягом перших 5 діб, а потім буде зменшуватися.

3. Швидкість зростання $y$ популяції, чисельність якої в момент часу $t$ (час виражено в днях) дорівнює $p(t)$, задана формулою $y=0{,}001x(100-x)$. При якій чисельності популяції ця швидкість максимальна? Скільки особин містить рівноважна популяція, для якої швидкості зростання дорівнює нулю?

Відповідь: 50 особин, 100 особин.

4. Реакція організму на два вида ліків як функції часу $t$ (час виражено в годинах) складають $r_1(t)=te^{-t}$ і $r_2(t)=t^2e^{-t}$. У якого виду ліків максимальна реакція вища? Ліки якого виду діють повільніше?

Відповідь: $r_1(1) = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$; $r_2(2) = \frac{4}{e^2} \approx 0{,}54$. У другого виду ліків максимальна реакція вища, але вони діють повільніше.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бобовець, З. М. Похідна функції / З. М. Бобовець // Все для вчителя. – 2007. – № 1. – С. 31–33.

2. Бондаренко, Т. Бондаренко В. Механічний зміст похідної. Похідна у фізиці і техніці. 11-й клас / Т. Бондаренко, В. Бондаренко // Математика в школі. – 2004. – №7. – С.26–29.

3. Бороденко, В. Похідна та її застосування : дидактичні матеріали для 11-го класу : [алгебра] / Валентина Бороденко // Математика. Шкільний світ. – 2014. – № 2. – С. 33–37.

4. Булах, Т. П. Застосування похідної в прикладах із математики та в задачах із фізики / Т. П. Булах, О. В. Назаренко // Все для вчителя. – 2013. – № 1. – С. 25–26.

5. Бурмистренко, Т. Похідна функції. Геометричний та механічний зміст похідної : 11 клас гуманітарного профілю / Т. Бурмистренко // Математика. Шкільний світ. – 2010. – № 2. – С. 16–19.

6. Вайнтрауб, М. Застосування похідної при розв'язуванні задач шкільного курсу : методика, досвід, пошук / М. Вайнтрауб, М. Каган, Л. Каган // Математика в школі. – 2006. – № 9. – С. 33–37.

7. Євтодьєва, Т. Застосування похідної до розв'язування прикладних задач : алгебра та початки аналізу : 11 клас / Тетяна Євтодьєва // Математика. Шкільний світ. – 2013. – № 3. – С. 8–13.

8. Карпік, В. В. Застосування похідної до знаходження сум / В. В. Карпік // Математика в школах України. – 2009. – № 29. – С. 22–28.

9. Когаловский, С. Р. Производная и задачи элементарной математики / С. Р. Когаловский, В. В. Солдатова // Математика в школе. – 2012. – № 3. – С. 44–49.

10. Матощук, Т. Б. Похідна. Застосування похідної : завдання на встановлення відповідності / Т. Б. Матощук // Математика в школах України. – 2013. – № 16/18. – С. 73–74.

11. Пиріжок, О. Г. Застосування похідної в математиці, економіці й фізиці : 11 клас : [позакласний виховний захід] / О. Г. Пиріжок, С. І. Діденко, Т. В. Прибилович // Фізика в школах України. – 2013. – № 8. – С. 17–20.

12. Рафальська, М. В. Застосування похідної при розв`язуванні рівнянь / М. В. Рафальська // У світі математики. – 2004. – № 4. – С. 32–41.

13. Рижов, Ю. М. Похідна та її застосування / Ю. М. Рижов. – К. : Вища шк., 1977. – 83 с. – (Бібліотечка фізико-математичної школи. Математика).

14. Сидоренко, В. І. Використання похідної для розв'язування задач : [задачі з фізики підвищеного рівня складності] / В. І. Сидоренко // Фізика в школах України. – 2012. – № 6. – С. 6–7.

15. Соколенко, Л. Різні типи прикладних задач, що призначені для вивчення похідної та її застосувань у курсі алгебри і початків аналізу / Л. Соколенко, В. Швець // Математика в рідній школі. – 2014. – № 9. – С. 2–10. – Бібліогр. в кінці ст.

16. Тригубець, Л. Застосування похідної : відкрите заняття з початків аналізу / Тригубець // Математика. Шкільний світ. – 2009. – № 38. – С. 20–24.

17. Ушаков, Р. П. Похідна допомагає доводити нерівності / Р. П. Ушаков // У світі математики. – 2010. – № 2. – С. 24–30.

18. Федорченко, О. О. Формування компетентностей учнів через використання групових форм роботи на уроках математики. Застосування похідної / О. О. Федорченко // Математика в школах України. – 2008. – № 30. – С. 16-1 – 16-16.

19. Цибулько М. Множина точок розриву похідної / Михайло Цибулько // Студентський науковий вісник Тернопільського державного педагогічного університету імені В. Гнатюка. – Тернопіль : ТДПУ, 2004. – Вип. 8. – С. 51–53. – Бібліогр. в кінці ст.

20. Шевченко, В. Г. Комплекс задач і вправ, пов'язаних з геометричним змістом похідної / В. Г. Шевченко // Математика в школах України. – 2014. – № 33. – С. 6–11.

21. Колтовська О., Вязнікова Л., Андрух Ю. Використання міжпредметних зв'язків на уроках математики/Олена Колтовська, Лариса Вязнікова, Юлія Андрух//Математика. – 2013. – №3(687). – С. 3-7.

22. Шунда Н.М. Застосування похідної до розв'язування задач: Посібник. –К.:Техніка. 1991. – 240с.:іл..

23. Освітній портал - http://www.osvita.org.ua

24. Вища математика для студентів економічних спеціальностей http://moodle.ipo.kpi.ua/moodle/mod/resource/view.php?id=29538

25. Вивчаємо математику - http://www.testmath.com.ua/%28S%280aue35ndqol3cg55rgaryweu%29A%28v3Vlmmo-zAEkAAAANGE1NjAyZGMtMTI0NC00NjlhLTg4ZjctZTMyMzcwZjE1YzhjcpKe3GJHQomawl605-3SUX4djOA1%29%29/Doc/Para61.aspx?AspxAutoDetectCookieSupport=1

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

***Чорний*** *Віктор Зіновійович*

***Хохлова*** *Лариса Григорівна*

***Хома-Могильська*** *Світлана Григорівна*

# ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

***Навчальний посібник***

Підписано до друку 27.11.16 р.
Папір офсетний. Формат 60x84 $^1/_{16}$ .
Гарнітура Times New Roman.
Умов. друк. арк. 4,3.
Обл.-вид. арк. 4,6.
Наклад 300 прим.

Віддруковано з готових діапозитивів в СМП «Тайп»
46006, м. Тернопіль, вул. Чернівецька, 44 б,
тел. (0352) 52-00-75; (0352) 52-61-61