Опорний конспект лекцій

з дисципліни

«Теорія прийняття рішень»

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Підґрунтя цілеспрямованої діяльності людини – процеси прийняття рішень, які дають змогу виділяти найважливіші наукові проблеми та зазначати способи їх розв'язання, організовувати раціональне функціонування виробничих і господарських організацій, установ і фірм, а також підвищувати якість і збільшувати швидкість виконання робіт зі створення нової техніки та впровадження прогресивних технологій.

У будь-якій ситуації прийняття рішення ми маємо насамперед відповісти на запитання: *чого ми прагнемо?У чому полягає наша мета?* Звичайно, складно дати однозначну відповідь, якщо мати на увазі глобальну мету існування окремої людини чи всього людства, проте в чітко окресленій ситуації це не лише можливо, але й украй потрібно. Починаючи аналізувати таку ситуацію для ухвалення конкретного (у певному розумінні якнайкращого) рішення, треба вже мати не лише достатньо чіткий, але, можливо, формальний опис мети. Зазвичай для формалізації мети в математичних моделях прийняття рішень задають критерій (функцію мети, критерій якості рішення), за допомогою якого для кожного можливого результату можна дати числову оцінку його «корисності» для *децидента* – особи, яка приймає рішення. При цьому мету ототожнюють з обранням альтернативи, що має якомога більше (чи менше) значення критерію якості. Однак далеко не завжди можна ввести таку функцію. Звичайно, числовий опис результатів дуже зручний: роботу цілого підприємства зручно характеризувати одним числом – скажімо, відсотком виконання плану, якість праці науковця – кількістю опублікованих статей, ефективність роботи викладача – оцінкою успішності його студентів. Проте це не завжди можливо та, головне, не має сенсу: не все можна звести до числа чи системи чисел. Тут ми стикаємося з так званим «*принципом несумісності*». Суть його така: *що складніша система, то важче точно описати її кількісно*. У реальних же завданнях прийняття рішень ми якраз і маємо справу зі складними системами: технічними, економічними, біологічними, соціальними тощо.

Тому постає природне запитання: *як чинити тоді, коли, з одного боку, потрібно точно, навіть формально, описати мету, а з іншого – такого опису може зовсім не бути?* Розв'язання цієї проблеми полягає в тому, що поняття формального і кількісного опису не тотожні – *довільний кількісний опис формальний, але довільний формальний опис не має бути кількісним*. Це твердження ґрунтується на тому, що математика – це наука не так про кількість, як про формальні (знакові) моделі об'єктивної дійсності. Отже, можна побудувати математичну модель ситуації прийняття рішення, на основі формального, але не обов'язково кількісного опису її компонент. Наприклад, можна формально описати мету, виходячи з пов'язаних з нею переваг. Для цього досить виділити множину всіх пар альтернатив, у яких одна більше відповідає меті, ніж інша, тобто задати в явному вигляді відношення переваги, що залежить від мети. Зробити це простіше, ніж задати функцію мети, бо тоді потрібно не чисельно оцінювати результати, виходячи з того, у скільки разів (на скільки) один результат кращий (або гірший) за інший, а лише зазначати, які результати кращі, а які гірші. Такий спосіб формального опису мети загальніший за своєю природою та логічно простіший, аніж завдання її у вигляді функції мети, але водночас він дає змогу побудувати достатньо змістовну, математичну теорію прийняття рішень.

Пошук екстремумів функцій однієї та багатьох змінних без обмежень у математичному аналізі – найпростіші задачі пошуку найкращих способів дії в неперервному середовищі. Моделі дослідження операцій ближчі до реальності. Вони окрім функціональних зв’язків містять іще й обмеження як у детермінованому, так і в стохастичному середовищі. Однак у більшості задач дослідження операцій є один-єдиний критерій, який має достатньо точно відповідати телеологічному аспекту функціонування системи чи децидента (особи, яка приймає рішення).

На практиці доволі часто постають багатоаспектні проблеми, якість розв’язання яких можна відобразити певного множиною критеріїв або ж пошук розв’язків яких покладено на групу експертів, котрі мають власні уявлення та фахові знання з конкретної проблемної області. Крім того, у деяких ситуаціях інтереси сторін, які мають синтезувати рішення, неузгоджені й, можливо, у чомусь або загалом протилежні, що ще більше ускладнює пошук задовільного рішення. Теорія прийняття рішень має теоретично формально обґрунтовувати й описувати такі ситуації, виявляти наявні парадокси та пропонувати можливі способи пошуку прийнятних рішень.

З огляду на викладене вище вивчення теорії прийняття рішень надзвичайно важливе для студентів, що навчаються за базовими напрямами «Системний аналіз» та «Комп’ютерні науки», а знання основних положень цієї теорії буде корисним усім.

ЛЕКЦІЯ 1. ЗАГАЛЬНІ АСПЕКТИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Ще Аристотель сформулював первісний категорійний апарат і розробив базовий концепт, що описує ухвалення рішень. Під час Другої світової війни, виходячи з військових потреб, в межах теорії дослідження операцій було достатньо повно реалізовано формальний математичний підхід. Наука ж про вибір найкращого варіанта рішення як самостійна дисципліна – теорія прийняття рішень – склалася порівняно недавно, на початку 1960–х років. Тоді ж було сформульовано головну мету цієї теорії – раціоналізувати процес ухвалення рішень. Структуризація дає змогу апроксимувати первісну слабо структуровану проблему певною структурованою проблемою, яка в тому чи іншому сенсі досить близька до первинної та належить до певного класу, вибір якого залежить від постановки задачі прийняття рішення. Вивчаючи суть окремих етапів процесу прийняття рішення, можна оцінити можливості формалізації окремих складових проблеми. Формальна ж постановка задачі прийняття рішень має самостійну цінність, бо забезпечує початкові умови для розроблення нових класів методів і моделей прийняття рішень. За умови поєднання апарату теорії прийняття рішень і досвіду прийняття практичних рішень виникає можливість удосконалювати рішення на основі збалансованих підходів до формалізації проблем управління.

1.1. Історія розвитку та загальна характеристика проблеми

Історія розвитку концепції прийняття рішень

Життя щоденно ставить перед нами завдання, вимагаючи обирати певні варіанти дій. Люди завжди ухвалювали рішення, ґрунтуючись на власному досвіді, інтуїції та здоровому глузді. Ухвалення ефективних і раціональних рішень завжди було мистецтвом, і лише порівняно недавно з’ясувалося, що це мистецтво можна значною мірою перетворити на науку, у якій застосовуються математичні методи дослідження. Звичайно,відразу ж постає питання про правомірність використання математики в галузі, де прийняття рішень здавна було прерогативою людини.

Зрозуміло, що в найширшому діапазоні ситуацій, у яких людям доводиться ухвалювати рішення – від планування робочого дня до вибору життєвого шляху — неможливо передбачити, коли формальні методи мають перевагу над інтуїцією. Потреба в ширшому застосуванні формальних методів зумовлена насамперед тим, що дедалі частіше наслідки схвалюваних рішень стосуються багатьох осіб і пов’язані з величезними матеріальними витратами (наприклад, вибір місця побудови великого підприємства чи автомобільного маршруту). Тому суттєво зросла відповідальність особи за наслідки схвалюваних рішень. Випадково сформовані рішення можуть бути дуже вартісними та мати незворотні наслідки.

Питання ухвалення державних рішень, підготовки доцільних законів та інших актів здавна привертали увагу філософів. Вагомий внесок у становлення теорії державного управління зробив **Платон** та інші мислителі давнини, а першість у розробці спеціальної концепції ухвалення рішень, вірогідно, належить **Аристотелю**. Саме він сформулював первісний категорійний апарат і розробив базовий концепт, що описує ухвалення рішень. У своєму аналізі мислитель виходив з категорій «*розсудливість*» і «*свідомий вибір*», уважаючи, що є два типи розумових здібностей людини: теоретична мудрість і практична розсудливість, на яких ґрунтуються, відповідно, фундаментальне та прикладне знання. *Розсудливість* пов'язана з практичною діяльністю людей (зокрема, державним управлінням), і вона має бути властива людським вчинкам, що базуються на істинних думках і орієнтовані на досягнення утилітарної користі у формі суспільного чи особистого блага.

Рис. 1.2. Арістотель

(384 до Р.Х. – 322 до Р.Х.) – старогрецькийфілософ, учень Платона, с. 343 до Р.Х. вихователь ОлександраМакедонського. Основоположник формальноїлогіки. Створив понятійнийапарат, якийдосіпронизуєфілософський лексикон і сам стиль науковогомислення

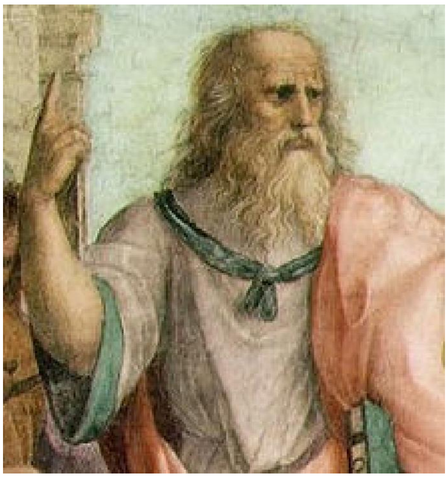


Рис. 1.1.Платон

(428 або 427 до р.х. – 348 або 347 до р.х.) – старогрецькийфілософ, учень Сократа, учитель Арістотеля

За **Аристотелем**, розсудливість у державному управлінні відрізняється від інших її проявів тим, що політичне знання виявляється подвійно: з одного боку, воно керівне (законодавче), з іншого – пов'язане з окремими питаннями. Це державна наука, що досліджує вчинки й ухвалення рішень, бо все вирішене за допомогою голосування як остаточна даність реалізується у вчинках. Інакше кажучи, ухвалення державних рішень ґрунтується на практично-політичному (у сучасному розумінні) прикладному типі знання, що містить постановку цілей (певне благо) та способи їх реалізації (вчинки, дії).

Інша базова категорія — «*свідомий вибір*» — відображає певну довільність і невизначеність людської діяльності, скерованої на пошук способів досягнення певних цілей. «Предмет рішення», як зазначав **Аристотель**, стосується не лише остаточної мети, а й засобів її реалізації. Оскільки суб'єктом дій (вчинків) є особа, то рішення пов'язане з тим, що вона сама вчиняє щось заради чогось іншого. Отже, *ухвалення державних рішень*, за **Аристотелем**, — *це розумово-практична діяльність і прикладна наука*, орієнтовані, по-перше, на свідомий і розумний вибір засобів, адекватних до сформульованих цілей, а по-друге — на виявлення раціональних і можливих дій (вчинків) для досягнення таких цілей в умовах невизначеності ситуації та свободи вільного вибору.

Рис. 1.3. Ніколо Макіавеллі (1469 – 1527) – італійський мислитель, філософ, письменник, політичний діяч, автор військово-теоретичних праць. Виступав прибічником сильної державної влади

Рис. 1.4. Жан Боден (1529 або 1530 – 1596) – французький політик, філософ, економіст, юрист. Вважається засновником науки про політику із-за розробленої їм теорії «державного суверенітету»

Питання раціонального й ефективного ухвалення державних рішень досить інтенсивно досліджували політичні мислителі доби Відродження (**Н.Макіавеллі**,**Ж.Боден** та ін.) і Просвітництва (**Т.Гоббс**, **Б.Спіноза**, **Ж.-Ж.Руссо** та ін.). Найактивніше вони розробляли такі теми: види державних актів (**Т.Гоббс**), роль радників і рад при правителях (**Т.Гоббс**, **Н.Макіавеллі**), особливості голосування в представницьких органах і народних зборах (**Б.Спіноза**, **Ж.-Ж.Руссо**), урахування ресурсів і соціальних обставин у ході ухвалення рішень (**Ж.Боден**). У працях згаданих авторів є багато ідей, що не втратили своєї актуальності й донині.

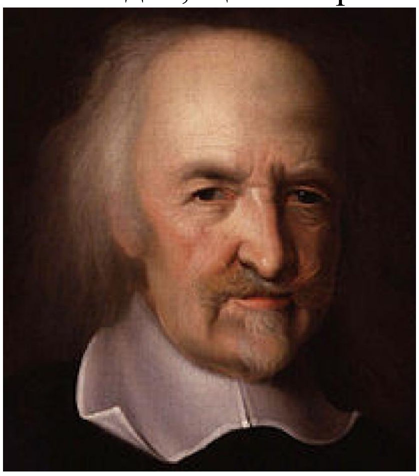


Рис. 1.5. Томас Гоббс (1588 – 1679) – англійський філософ-матеріаліст, один із засновників теорії громадського договору і теорії державного суверенітету

Рис. 1.6. Бенедикт Спіноза (1632 – 1677) – нідерландський філософ-раціоналіст, натураліст, один з головних представників філософії Нового часу

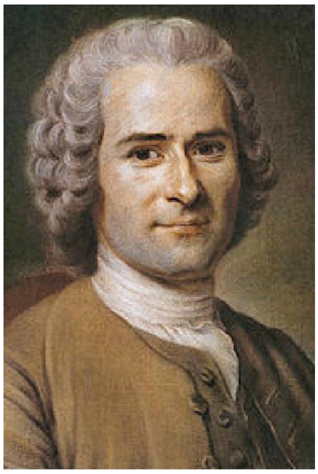


Рис. 1.7. Жан-Жак Руссо (1712 – 1778) – французький письменник, мислитель, композитор. Розробив пряму форму правління народу державою – пряму демократію

Передумови *теорії раціонального вибору* виникли ще в середині XVIII – на початку XIX ст. у працях представників шотландської школи моралі, які вперше запропонували індивідуалістичну концепцію раціональної поведінки людей і звернули увагу на її плідність для пояснення інших суспільних явищ. Майбутній основоположник класичної політичної економії **Адам Сміт**, який належав до цієї школи, застосував зазначену концепцію для пояснення ринкових відносин. Інше джерело даної концепції – ідеї прихильників школи утилітаризму, які відмовилися розглядати поведінку людей, ґрунтуючись лише на апріорних ідеях і упереджених думках. На противагу цьому утилітаристи почали пояснювати вчинки та поведінку людей винятково тими наслідками, які вони зумовлюють. Тому вони насамперед не оцінювали дії людей як добрі чи погані, поки не будуть відомі їх результати.

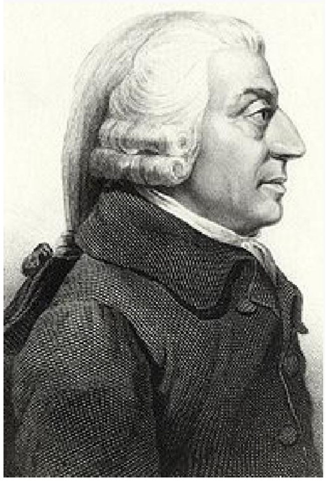


Рис. 1.8.Адам Сміт

(1723 -1790) – шотландськийекономіст, філософ, один з основоположниківсучасноїекономічноїтеорії

Засновник школи утилітаризму **І.Бентам** висунув основний принцип, згідно з яким етика має бути орієнтована на досягнення щастя для якнайбільшої кількості людей. На його думку, це щастя можна математично обчислити як баланс задоволень і страждань за умови певної поведінки.

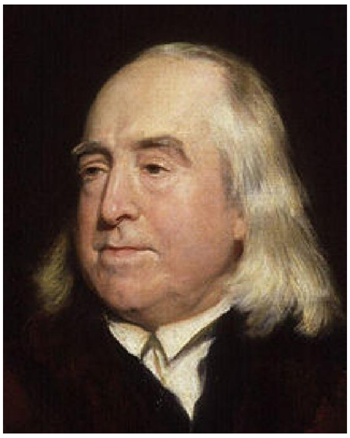


Рис. 1.9. Ієремія Бентам
(1748 – 1832) – англійськийсоціолог, юрист, один з видатнихтеоретиківполітичноголібералізму, родоначальник одного з напрямівванглійськійфілософії – утилітаризму

Представники неокласичної теорії в економіці, що виникла пізніше, замінили вищеназваний принцип оцінювання поведінки принципом взаємного обміну товарами, якщо цей обмін чесний. Словом, ідеї індивідуалізму, раціонального (розумного) вибору в ході ухвалення рішень було застосовано для аналізу економічної діяльності, насамперед вивчення ринкових відносин. Тому надалі теорія раціонального вибору розвивалася переважно в економічних дослідженнях, і її стали розглядати як чисто економічну. Пізніше її під назвою *теорії суспільного вибору* застосовували в політології, соціології, історії та інших суспільних науках.

Свідомо чи несвідомо виконуючи певні дії, ми досягаємо успіху лише тоді, коли наші рішення, вчинки та дії раціональні, або розумні. Це означає, що з усіх можливих способів пошуку рішення альтернативних дій нам удалося знайти раціональний або ефективний варіант рішення.

У повсякденному житті найчастіше ми навіть не замислюємося над цими питаннями і діємо успішно, спираючись на здоровий глузд, інтуїцію та нагромаджений практичний і життєвий досвід. Безперечно, інтуїція, досвід і раціональні міркування цілком достатні для виконання простих практичних завдань у повсякденному житті та навіть управлінській діяльності, бо для цього не потрібен точний аналіз і розрахунок. Розв'язуючи ж складні проблеми, люди все менше покладаються на повсякденний досвід, інтуїцію та здоровий глузд, а вдаються до точного аналізу обчислень, і побудови математичних моделей. Математичний підхід до ухвалення рішень, по суті, розвиває положення, найважливіші для розв'язання задач у будь-якій конкретній діяльності, тому що математика абстрагується від специфічних особливостей, властивих конкретним рішенням.

У 1838 р. було опубліковано книгу французького економіста **Антуана Курно** «Дослідження математичних принципів теорії багатства», у якій уперше сформульовано умови економічної конкурентної рівноваги. У 1906 р. італійський математик і соціолог, інженер за освітою **Вільфредо Парето** видав у Мілані «Підручник політичної економії» та математичний додаток до нього, у якому викладено основні положення аналітичної теорії ігор. Подальший значний внесок у розвиток ігрових моделей зробив у 1937 р. вчений-емігрант із Угорщини **Джон фон Нойман**, який працював у США. Він запропонував багатосекторну модель економіки, що розширяється, за умови досконалої конкуренції, у якій уперше було введено поняття динамічної рівноваги.

Рис. 1.10. Антуан Огюст Курно (1801 – 1877) – французький економіст, філософ і математик

Рис. 1.11. Вільфредо Парето (1848 – 1923) – італійський інженер, економіст і соціолог; один з основоположників теорії еліт

Рис. 1.12. Джон фон Нейман (1903 – 1957) – угорсько-американський математик, що зробив важливий вклад в інформатику, економіку та інші галузі науки. Найбільш відомий як прабатько сучасної архітектури комп'ютерів, як творець теорії ігор і концепції клітинних автоматів

Отже, питання про раціональний вибір і прийняття рішень постало в економіці задовго до виникнення математичної теорії. Теоретичні передумови класичної політичної економії було сформовано не лише під впливом суто економічних досліджень. Їх виникнення зумовлене також впливом уявлень про раціональну поведінку людей, які вперше з’явилися в рамках нової *індивідуалістичної концепції моралі*. Подібний індивідуалістичний підхід до пояснення економічних явищ і процесів продемонстрував **А.Сміт** у своїй фундаментальній праці «Дослідження про природу та причини багатства народів»: «*Кожна окрема людина має лише власний інтерес, орієнтована лише на власну вигоду, причому в цьому разі вона невидимою рукою прямує до мети, яка не входила в її наміри. Обстоюючи свої приватні інтереси, вона часто дієвіше служить інтересам суспільства, ніж тоді, коли свідомо прагне служити їм*».

Вислів «невидима рука» використано як метафору, що позначає механізм ринку, який регулює ціни та встановлює рівновагу між попитом і пропонуванням. Така рівновага, або спонтанний порядок, виникає внаслідок взаємодії багатьох продавців і покупців, які беруть участь у ринковому обміні. Уявлення про таку рівновагу та самодостатність ринкового регулювання панувало в класичній економічній теорії майже до Великої депресії 1929–1933 рр. У цій теорії раціональною вважається така поведінка індивіда, яка дає йому найбільшу вигоду чи користь. На думку **А.Сміта** та інших класиків політичної економії, раціональна поведінка індивіда має сприяти багатству і добробуту всього суспільства. На цьому понятті ґрунтується уявлення про «економічну людину» (*Homoeconomicus*), яка завжди діє розумно, не схильна до емоцій, не зважає на сторонній вплив і прагне досягнути якнайбільшої вигоди, приймаючи власні рішення.

Якщо **А.Сміт** уважав також, що добробут суспільства залежить і від чинних у ньому законів і наявних лише суспільних інститутів, то його послідовники зосередилися на аналізі найкращої діяльності індивіда. Після Великої депресії 30–х років XX ст. економічні теорії було піддано радикальній ревізії, але основні принципи, на яких ґрунтується раціональна модель вибору, залишилися незмінними.

Рис. 1.13. Максиміліан Карл Еміль Вебер

(1864 – 1920) – німецький соціолог, історик, економіст. Вніс істотний науковий внесок в соціальні науки, творець «розуміючої соціології» і теорії соціальних дій

До них належать, по-перше, фундаментальний принцип раціональності, який, проте, спричиняє багато дискусій. Якщо прихильники класичної економічної теорії вірили в об’єктивність раціональності, то їх послідовники – неокласики – припускали можливість суб’єктивної її інтерпретації. Одним із перших щодо такої інтерпретації висловився **М.Вебер**. На його думку, суб’єктивна інтерпретація вкрай потрібна для розкриття мотивів дійових осіб; проте він не відмовлявся від можливості об'єктивного її тлумачення. З іншого боку, **В. Парето** вважав раціональність об'єктивним критерієм знання та дії, оскільки вона характеризує досягнення мети з погляду не лише активного суб'єкта, але й тих, хто володіє значно більшою інформацією. Однак за такого погляду на раціональність чимало виконуваних у суспільстві дій виявляються неусвідомленими, тому що безпосередні учасники дії зазвичай не мають повної інформації. Такий висновок не можна вважати правильним, бо він ґрунтується на зіставленні традиційного поняття раціональності та її сучасного розуміння.

Якщо колишні уявлення про раціональність здебільшого були тотожні формально-логічній можливості доводити знання в математиці та емпірично підтверджувати його в природознавстві, то тепер їх усе ширше використовують для дослідження різних типів доцільних дій не лише в науковому пізнанні, але й у практичній діяльності, зокрема суспільній.

У межах соціально-економічного та гуманітарного дослідження раціональність виявляється як певна форма цілеспрямованої, розумної діяльності та поведінки людей в найрізноманітніших суспільних умовах. Якщо закони природи не залежать від волі, свідомості та прагнень людей, то суспільні закони зрештою, хоча й опосередковано, відображають їхні загальні потреби та цілі.

Важливою з цього погляду видається класифікація раціональності, розроблена німецьким філософом і методологом науки **Куртом Хюбнером**. Характеризуючи наукові міркування як раціонально обґрунтовані, він виділяє серед них такі:

- ті, що означають зрозумілі та загальновживані поняття;
- емпірично інтерсуб'єктивні, що спираються на підтверджені та загальноприйняті факти;
- виведені логічного;
- за допомогою яких описано певний спосіб діяльності;
- ті, що характеризують певні норми діяльності.

Раціональний вибір пов'язаний із логічними міркуваннями, оскільки він описує індивідуальний спосіб вибору варіантів дій з максимальною корисністю чи вигодою. Утвердження суб'єктивної раціональності пояснюється тим, що вибір учасників ринку та інших суспільних структур ґрунтується тут зрештою саме на перевагах індивідуальних суб'єктів. Наприклад, якщо мета окремого підприємця – отримання якнайбільшого прибутку від власного бізнесу, то саме її досягнення він уважає раціональним зі свого суб'єктивного погляду. Проте такий підхід може суперечити спільній, колективній меті, якщо підприємство погіршуватиме навколишнє природне середовище.

Із принципом суб'єктивної раціональності нерозривно пов'язаний *принцип методологічного індивідуалізму*, згідно з яким саме індивідам відведена вирішальна роль в економічному житті суспільства. Соціальні ж інститути та структури, які встановлюють правила гри в економіці — вторинні, тому що їх створюють і змінюють реальні індивіди. Такий підхід цілком доречний і заслуговує на увагу, бо він скерований проти телеологічного підходу (від гр. *teleos* – мета), який переважав упродовж багатовікової історії людства. Відповідно до телеологічного погляду, розвиток суспільства залежить від цілей та ідеалів, заданих йому ззовні.

У протилежність до цього прихильники теорії вільного вибору доводять, що кожен індивід, підприємець, суб'єкт господарювання, політик, по-перше, встановлює свої власні цілі, визначає можливі альтернативи дій і впорядковує їх за пріоритетністю; по-друге, за всіх умов індивід поводиться раціонально, тобто прагне досягти індивідуальної максимальної вигоди, хоча би в чому її не було б виражено. Згідно з цим принципом на реальну поведінку індивіда впливають не якісь високі ідеї та суспільні інтереси, а лише прагнення максимізувати свою вигоду чи інтерес.

Коли індивід навіть проголошує альтруїстичні погляди, то, по-перше, така поведінка для нього в чомусь вигідна. По-друге, діючи у групі, він піклується не так про її інтереси,як про власні. По-третє, максимізуючи свою вигоду чи інтерес, індивід прагне оптимальної корисності. По-четверте, позаяк індивіду, котрий діє раціонально, доводиться взаємодіяти в суспільстві з іншими індивідами, він має дотримуватися відповідних правил або певного порядку. Отже, його раціональний вибір залежить також від сукупності чинних правил, хоча він разом із іншими у змозі якось змінювати їх, якщо вони дуже суперечать його інтересам. Проте в цьому разі він діє не сам, а разом із іншими індивідами.

Захисники свободи ринку та раціонального вибору, починаючи від **Адама Сміта** і закінчуючи **Фрідріхом Хайєком**, завжди обстоювали переваги індивідуального вибору та порядку, що виникає на його основі. Вони твердили, що оптимальний вибір індивідів зрештою завжди сприяє зростанню суспільного багатства та добробуту громадян, а тому настійно виступали проти будь-якого втручання держави в регулювання ринку.

Рис. 1.14. Фрідріх Август фон Хайєк(1899 – 1992) – австрійський економіст і філософ, прибічник ліберальної економіки і вільного ринку. Лауреат Нобелівської премії з економіки (1974)

Про ілюзорність таких уявлень тепер висловлюються і визначні представники економічної еліти. Життя було б набагато простішим, твердить **Джордж Сорос**, якщо б **Фрідріх Хайєк** мав рацію, і загальний інтерес випливав би як ненавмисний результат дій людей у їх власних інтересах. Проте підсумовування вузьких власних інтересів за допомогою ринкового механізму спричиняє ненавмисні негативні наслідки.

У правдивості цих слів економісти могли переконатися ще після Великої депресії 1929-1933 рр., коли принципи класичної теорії виявилися непридатними для аналізу кризової ситуації, що виникла, а тим паче – пошуку способів виходу з неї.

У другій половині XX ст. в США склалася нова галузь знання — *політичне управління*; воно поступово розгортається в цілий комплекс політико-управлінських дисциплін. Цей складний науковий комплекс утворився на перетині трьох кластерів соціально-гуманітарних дисциплін:

- соціально-політичного (політична, соціологічна та економічна науки);
- коґнітивно-епістеміологічного (філософія, психологія та інформаційно-комунікативні дослідження);
- менеджерського (державне адміністрування, організаційна теорія, загальний менеджмент, військова наука).

Інакше кажучи, відбувся інтеграційний синтез різних сфер соціально-гуманітарного знання, до якого з часом додалися математичні та кібернетичні дослідження і методи опрацювання інформації. Піонерами цього міждисциплінарного синтезу наприкінці 1950–х років стали **Г.Лассуел** і **Г.Саймон**. Перший (разом із **Д.Лернером**) підготував новаторську працю «Політико-управлінські науки», а другий 1947-го опублікував монографію «Адміністративна поведінка: дослідження процесів ухвалення рішень в адміністративних організаціях», що отримала Нобелівську премію.

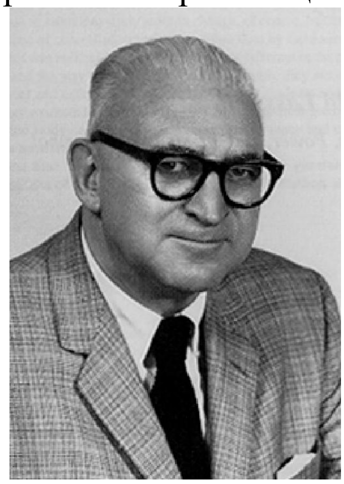


Рис. 1.15. Гарольд Дуайт Лассуел
(1902-1978) – американський політолог, один з основоположників сучасної політології, представник біхевіориського підходу в політичній науці і один із засновників чикагської школи соціології, теоретик міждисциплінарного підходу до дослідження поведінки особи в різних сферах діяльності.

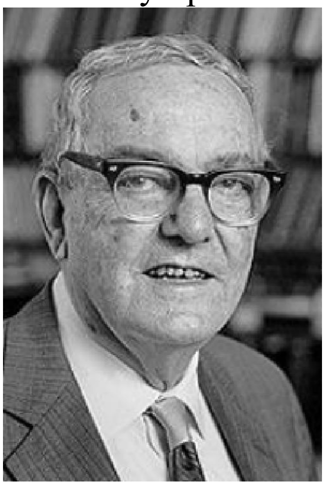


Рис. 1.16. **Герберт Александер Саймон**
(1916 – 2001) – видатний американський учений в області соціальних, політичних і економічних наук. Зробив помітний вплив на розвиток теорії організації, менеджменту і управлінських рішень. Його роботи в області обчислювальної техніки і штучного інтелекту зробили істотний вплив на розвиток кібернетики. Лауреат Нобелівської премії по економіці «за новаторські дослідження процесу ухвалення рішень в економічних організаціях, у фірмах» (1978)

Г.Саймон пов'язує поняття розумного вибору не з отриманням максимальної вигоди, а з досягненням задовільного результату: «*Підприємця може зовсім не турбувати максимізація, він може просто мати бажання одержати той дохід, який уважає достатнім для себе*». Для обґрунтування своїх висновків учений посилається не лише на емпіричні економічні факти, але й на результати емпіричних досліджень психологів. Згідно з їхніми висновками, спонукання до дії виникає внаслідок незадоволених прагнень і зникає після їх задоволення: «*Якщо ми хочемо пояснити поведінку на основі* *цієї теорії, то маємо вважати, що мета фірми – не максимізація, а досягнення певного рівня прибутку, утримання певної частки ринку та певного рівня продажів*».

Принцип досягнення задовільного результату **Г.Саймон** не лише застосував до ухвалення рішень в економічних науках, але й надав йому універсального характеру.

Застосування методів раціонального вибору в політичних дослідженнях почалося в 60–х роках XX ст., хоча і раніше було багато спроб розглядати політиків і виборців як суб'єктів, що прагнуть максимально використовувати свої вигоди та інтереси. Початок застосування сучасних методів раціонального вибору в політичних науках пов'язують із появою 1951 р. книги **Кеннета Ерроу** «Соціальний вибір та індивідуальні цінності».

Рис. 1.17. Кенет Джозеф Ерроу (1921) – американський економіст, лауреат Нобелівської премії з економіки за 1972 р. «за новаторський вклад в загальну теорію рівноваги і теорію добробуту»

Щоб політичний вибір сприяв досягненню добробуту всього суспільства, **К.Ерроу** пропонує реформувати суспільство на засадах конституційного та контрактного підходів. Якщо в конституції визначено основні загальні правила поведінки всіх громадян надовго, то контрактний підхід встановлює правила гри для учасників контракту з цивільних питань на нетривалий термін (наприклад, різноманітні ринкові контракти).

Основна ідея такого підходу до політики полягає в тому, що правила, якими керуються у виборі, доступні для суспільства, і тому їх можна змінити за допомогою колективних зусиль індивідів, які становлять громадянське суспільство, хоча індивідуальний вибір і його результати можуть бути непідконтрольні суспільству. Щоб запобігти корисливим та іншим небажаним діям груп, які можуть проникнути до владних державних структур, треба запровадити конституційні закони, що гарантуватимуть безпеку суспільства від таких посягань. Зазначений підхід до політичних процесів узгоджується із загальними принципами дослідження систем зі складною організацією в межах системного аналізу та синергетики.

Рис. 1.18. Джеймс МакгиллБ'юкенен-молодший

(1919) – американськийекономіст, лауреат Нобелівськоїпремії (1986) «За дослідженнядоговірних і конституційних основ теоріїухваленняекономічних і політичнихрішень». Є одним іззасновниківшколиновоїполітичноїекономії

Важливі дослідження виконали представники вірджинської школи на чолі з її засновником, лауреатом Нобелівської премії в галузі економіки **Д.Б'юкененом**. Вони вважають, що індивідуальний вибір і ухвалення рішень відбувається на мікрорівні, а встановлення загальних правил вибору – на макрорівні. Завдяки цьому громадянське суспільство може впливати на політичні процеси. На думку **Д.Б'юкенена**, методи аналізу ринкової поведінки можна застосувати до будь-якої діяльності, пов'язаної з вибором особи.

Правила, згідно з якими діє ринок і які відбивають позитивний аспект взаємодії людей, розглянуто в праці **Д.Б'юкенена** та **Г.Бренана** «Обґрунтування правил». Відмінність ринкових правил від інших (наприклад, правил дорожнього руху) полягає ось у чому: якщо позитивні правила ринкового обміну виникають у процесі вільної взаємодії покупців і продавців, то правила дорожнього руху встановлено директивно. Проте автори слушно зауважують, що ринкові методи не можна механічно переносити з економіки в політику.

Зазвичай на поведінку виборців, поза сумнівом, впливають соціальні структури та інститути суспільства, тому що виборець має зважати на них. Зовсім інші правила регулюють обмін на ринку та підприємницьку діяльність. Політика, за **Д.Б'юкененом**, – це складна система обміну між індивідами, у якій вони прагнуть досягнути своїх особистих цілей колективно, оскільки не можуть реалізувати їх за допомогою звичного обміну на ринку. Успіхи раціонального вибору в економіці дають можливість не лише встановити аналогію між економікою та політикою, але й виявити істотну відмінність між ними. Основна відмінність між ринком і політичною системою полягає не у відмінних типах цінностей та інтересів людей, а в умовах, у яких вони реалізують свої переконання.

Отже, політика ґрунтується на ухваленні колективних рішень щодо суспільних благ, які вигідні для багатьох. Виборець голосує за якогось кандидата чи партію, програма якої відповідають його інтересам. Політичні партії максимізують свій інтерес, прагнучи здобути якнайбільше голосів виборців. У парламенті утворюються коаліції та блоки різних партій, щоб забезпечити максимальний успіх для ухвалення певних законопроектів. Тому раціональний вибір у політиці багато в чому аналогічний ринковому, коли також прагнуть досягнути максимальної вигоди, хоча в політиці для цього доводиться об'єднуватися в партії, коаліції та блоки.

Політична боротьба дуже схожа на гру двох або кількох партнерів, і для описання деяких її аспектів можна застосовувати *теорію ігор*, яку було розроблено насамперед для пояснення економічної поведінки. Згодом її стали використовувати для аналізу процесів голосування та переговорів, формування коаліцій і т.ін. Важливість теорії ігор полягає в тому, що вона припускає вільний вибір учасниками альтернативних підходів, які ґрунтуються на їхніх перевагах, і врахуванні можливих випадковостей.

Загалом застосування методів раціонального вибору дало можливість пояснити низку цікавих результатів щодо голосування виборців, розкрити механізми формування коаліцій у парламенті, а також розподілення влади між політичними партіями, що перемогли на виборах. Проте критично налаштовані дослідники звертають увагу на те, що багато політичних теорій вибору дуже спрощують достатньо складні політичні ситуації, на які суттєво впливають невизначеності та випадковості, тому висновки таких теорій недостатньо підтверджені емпіричними даними, а прогнози виявляються дуже нестійкими. Головна вада подібних моделей і політичних теорій полягає в тому, що вони спираються на загальні припущення та гіпотези, які важко перевірити емпірично та які інтерпретуються багатозначно.

Ініціатором створення нового підходу не лише до трактування раціональності, але й до засад соціального управління став Г.Саймон. Замість моделі «*економічної людини*» він висунув модель «*адміністративної людини*», згідно з якою управлінець або адміністратор, ґрунтуючись на відомій інформації, ставить за мету знайти не оптимальний, а лише задовільний розв’язок проблеми. Такий підхід краще відповідає дійсності, ніж строго раціональний, бо особа, яка приймає рішення (*децидент*), вимушена зважати на випадкові та непередбачувані обставини, що не дають їй можливості ухвалити оптимальне рішення. У цій ситуації децидент прагне виявити лише найістотніші особливості ситуації вибору, що складається, і тому вимушений обмежувати раціональність за рахунок невизначених, випадкових та інших непередбачених обставин.

Саме тому, а також унаслідок обмежень на пізнавальні можливості особи (її сприйняття, увагу та інтелектуальні здібності) децидент ухвалює не оптимальні, а раціональні (задовільні) рішення. Він не в змозі однаково ретельно та глибоко охопити весь процес прийняття рішення та навіть окремі його етапи. Щоб поліпшити ситуацію, децидент залучає компетентних консультантів і експертів. Окрім того, на рішення як самого керівника, так і його консультантів впливають їхні переконання та переваги, навколишнє середовище, традиції тощо. Обмеження раціональності залежать також від політичних і організаційних чинників. Рішення, яке ухвалить конкретна група чи організація, залежить зазвичай не від окремої людини, а від певних груп, колективів або об’єднань, що ставлять перед собою незбіжні цілі та мають різні інтереси.

Тому *добір цілей і ухвалення відповідних раціональних рішень в організації чи колективі – це результат компромісу різних індивідів і окремих груп*. Конфлікти та розбіжності, що неминуче виникають у такому процесі, часто не вдається подолати повністю, тому їх намагаються пом’якшити, ухвалюючи компромісне рішення. Нарешті, не можна не брати до уваги і те, що люди набувають знань, досвіду та навичок щодо вибору рішень у процесі розв’язанні проблем, особливо нестандартних. Широкий і різнобічний досвід, нагромаджений у практиці управління, як наголошує **Г.Саймон**, свідчить про те, що *найкращих успіхів в ухваленні рішень досягають ті фахівці, які прагнуть насамперед до змістовного наповнення своїх моделей, гіпотез і теорій, їх адекватності, а не до витонченості математичної форми*.

Звичайно, індивідуальний раціональний вибір може призвести й до небажаних і навіть суто негативних наслідків для суспільства. Наприклад, одні й ті самі принципи організації ринкової економіки за одних умов виявляються досить ефективними, за інших – супроводжуються шахрайством і корупцією. Зрозуміти все це можна, не лише досліджуючи процеси індивідуального вибору, а й за допомогою глибокого та всебічного аналізу чинних у конкретному суспільстві правових, етичних та інших норм, а також його історичних традицій, культури і менталітету.

Висунення на перший план ідеї раціонального вибору не лише в економічній теорії, але й в інших науках дає можливість повніше та точніше вивчити реальні дії індивідів на мікрорівні. Проте будь-який вибір може стати дійсно раціональним лише за умови, що насамперед буде глибоко досліджено якісні, специфічні особливості явищ і процесів, які вивчають конкретні науки. Отже, теорія вибору й ухвалення рішень – цілком певний спосіб дослідження доцільної діяльності за допомогою побудови пристосованих до неї формальних моделей. У таких моделях множину змінних зазвичай подають у точному кількісному вимірі.

Формальний математичний підхід уперше достатньо повно було реалізовано в **теорії дослідження операцій**. Термін «дослідження операцій» виник під час Другої світової війни. У 1935 р. у Великій Британії розпочали розробляти систему виявлення літаків (радіолокаційну систему), що було пов’язано із загрозою з боку військово-повітряних сил Німеччини. Упродовж наступних трьох років було підтверджено технічну працездатність спроектованих засобів виявлення та розроблено практичні методи слідкування за літаками та генерації повідомлень про їх появу. Однак для підвищення ефективності операцій перехоплення британська винищувальна авіація відчувала потребу в системі супроводу та наведення літаків-перехоплювачів. Тому незалежно (унаслідок секретності) від робіт зі створення системи виявлення на початку 1936 – наприкінці 1937 рр. було почато експерименти з виявлення моделей ворожих літаків і, з іншого боку, відслідковування та наведення власних літаків-перехоплювачів.

До кінця 1937 р. обидві системи – виявлення та супроводу одиночного літака противника, що атакує і супроводу та наведення перехоплювачів, що взаємодіють, – розробляли сумісно, щоб забезпечити узгоджені операції всіх учасників бойових дій у повітрі та на землі. У той самий час (1938 р.) у групі дослідників, якою керував **А.Раув**, почали вживати термін «*операційне дослідження*». У 1942 р., коли до війни долучилися США, аналогічну групу було створено й там (керував проектом **Ф.Морз** – фізик із Массачусетського технологічного інституту, а керівником дослідницької групи було призначено **У.Шоклі** з компанії «Bell Telephone Laboratories», який пізніше отримав у співавторстві Нобелівську премію як винахідник транзистора). Аналогічний відділ було сформовано і у

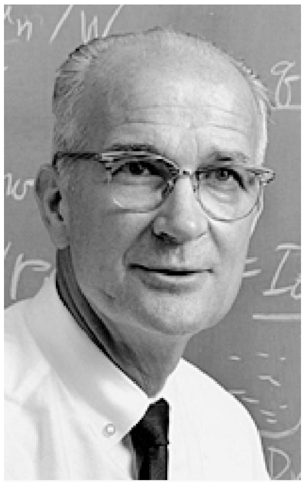


Рис. 1.19. Вільям БредфордШоклі (1910 – 1989)

– американський фізик, дослідник напівпровідників, лауреат Нобелівської премії з фізики (1956). У роки Другої світової війни Шоклі брав участь в створенні американської школи дослідження операцій

Канаді. У часи Другої світової війни зазначеною тематикою в цих країнах займалися близько 700 учених.

Діяльність дослідників не обмежувалася лише елементами технічних рішень. Вона стосувалася і застосування відповідних знань у плануванні тактичних операцій і розробці військової стратегії. Звідси бере початок і назва дисципліни – «*дослідження операцій*». Найважливішим для майбутнього в тогочасних дослідженнях було те, що багато фахівців побачили у військових розробках зародження нової науки про функціональні системи, а також можливості застосування отриманих знань у мирний час.

Мистецтво прийняття якнайкращих рішень (децидування), що ґрунтується на досвіді та інтуїції, є сутністю будь-якої людської діяльності. Виникнення математичної теорії прийняття рішень нагадує процес, що проходив під час формування кібернетики. Хоча до виникнення кібернетики існували конкретні теорії управління в техніці, військовій справі, економіці та соціальному житті, потрібна була абстрактна теорія, що розглядала б процеси управління з єдиної, загальної точки зору, щоб глибше зрозуміти основні їх принципи та закономірності. Те саме можна сказати й про теорію прийняття рішень.

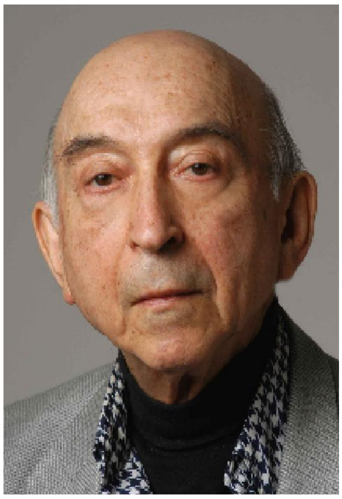


Рис. 1.20. ЛотфіЗаде (1921) – американський (етнічно – азербайджанець) математик, засновник теорії нечітких множин і нечіткої логіки, професор Каліфорнійського університету (Берклі)

Наука про вибір найкращого варіанта рішення як самостійна дисципліна – **теорія прийняття рішень (ТПР)** – склалася порівняно недавно, на початку 1960–х років. Тоді ж була сформульовано і **головну мету** – *раціоналізувати процес ухвалення рішень*. Математичні методи прийняття рішень одержали суттєвий розвиток в опублікованій 1944 р. видатним математиком **Джоном фон Нойманом** і економістом **Оскаром Морґенштерном** фундаментальній праці, яку було присвячено теорії ігор і економічній поведінці. Ця теорія дає рекомендації, як раціонально виконати вибір в економіці за умов невизначеності та ризику. Із такими ситуаціями доводиться часто зустрічатися в економіці, коли конкуренцію між суб’єктами господарювання можна розглядати в термінах теорії ігор. У політиці боротьбу між лідерами, партіями та коаліціями також можна описати як своєрідну гру.

Пізніше було створено й прикладну **теорію статистичних рішень**, яка дала змогу проаналізувати і виконати широкий клас управлінських завдань, пов’язаних з обмеженим ризиком (проблем вибору, розміщення, розподілу тощо). Невизначеність і суб’єктивні аспекти прийняття рішень доволі успішно враховує апарат **теорії нечітких множин**, запропонований Л.Заде, що написав свою основоположну працю про нечіткі множини в 1965 р. Зазначена праця має не лише історичне значення. У ній започатковано новий науковий напрям у цій галузі, з’явилося безліч публікацій, багато з яких присвячені практичним застосуванням.

Отже, поряд із практичним досвідом, здоровим глуздом та інтуїцією не лише в економіці, але й у політиці, соціальному управлінні та інших царинах суспільної діяльності все ширше застосовують **системний аналіз** проблем із подальшим точним аналізом можливих способів раціонального вибору та розв’язання задач, ґрунтуючись на побудові математичних моделей. З ускладненням задач виникли різноманітні напрями ТПР, які розглядають одну й ту саму проблему аналізу можливих способів дій для знаходження оптимального – у певному розумінні найкращого за наявних умов розв’язання проблеми.

У наш час теорію прийняття рішень застосовують переважно для аналізу тих проблем, які можна відносно легко й однозначно формалізувати, а результати досліджень адекватно інтерпретувати. Так, методи ТПР використовують у різних галузях управління: проектуванні складних технічних і організаційних систем, плануванні розвитку міст, доборі програм розвитку економіки й енергетики регіонів, організації нових економічних зон тощо.

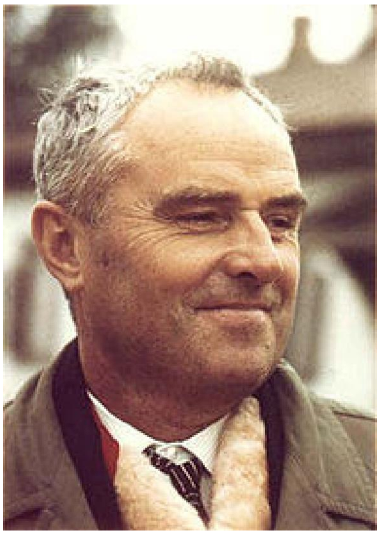


Рис. 1.21. Івахненко Олексій Григорович (1913 – 2007) – відомий український учений, фахівець в області систем автоматичного управління. Розробив метод групового обліку аргументів, який використовується при рішенні практичних завдань моделювання, розпізнавання образів в екології, гідрометеорології, економіці

Рис. 1.22. Глушков Віктор Михайлович (1923 – 1982) – видатний український математик, кібернетик. Засновник і директор київського Інституту кібернетики. Ініціатор і головний ідеолог розробки і створення загальнодержавної автоматизованої системи обліку і обробки інформації, призначеної для автоматизованого управління усією економікою держави в цілому

Рис. 1.23. Михалевич Володимир Сергійович (1930 -1994) – відомий український учений, фахівець в області оптимальних статистичних рішень, системного аналізу, теоретичній і економічній кібернетиці. У 1982-1994 рр. директор Інституту кібернетики імені В.М.Глушкова НАНУ. Був науковим керівником автоматизованої системи планових розрахунків

Потреба в застосуванні засобів і методів ТПР в управлінні очевидна: швидкий розвиток і ускладнення економічних зв’язків, виявлення залежностей між окремими складними процесами та явищами, які раніше здавалися не пов’язаними один з одним, призводять до різкого зростання труднощів під час ухвалення обґрунтованих рішень. Витрати на прийняття рішень зростають, наслідки помилок стають усе серйознішими, а звернення до фахового досвіду й інтуїції не завжди зумовлює вибір найкращої стратегії. Застосування методів ТПР дає змогу розв’язати цю проблему, до того ж швидко й достатньо точно.

У світі широко відомі праці українських учених **О.Г.Івахненка**, який запропонував і розробив метод групового врахування аргументів, що знайшов застосування в різноманітних галузях, **В.М.Глушкова**, котрий зробив величезний внесок у розроблення та впровадження оптимізаційних задач і методів прийняття оптимальних рішень в АСУ, **В.С.Михалевича** й **І.В.Сергієнка**, які досягли вагомих успіхів у галузі дискретної оптимізації, **В.П.Гладуна**, котрий багато зробив для розвитку теорії прийняття рішень, евристичного пошуку рішень у складних середовищах, і багатьох інших.

Проблеми структуризації прийняття рішень

Проблема прийняття рішень лежить в основі будь-якої цілеспрямованої людської діяльності. Водночас вона, попри все різноманіття можливих умов і ситуацій вибору, достатньо універсальна. Формалізація власне процесу прийняття рішень – достатньо складна проблема, але частково розв’язна за допомогою сучасних математичних методів. Проте, залишається відкритим очевидне, здавалося б, питання: *яке рішення вважати найкращим, або правильним?*

Змоделювавши процес ухвалення рішень, залишається лише обрати за певними неформальними чи формальними ознаками один із варіантів дій. Таке рішення має бути в певному сенсі найкращим для конкретної ситуації. Ознаки, на підставі яких виробляють порівняльну оцінку можливих рішень, є складовими **критеріїв оптимальності**. Формально описати ці критерії «правильності рішення» виявляється складним завданням із таких причин:

1) об’єкти, які розглядає теорія прийняття рішень, такі різноманітні, що неможливо визначити єдині принципи оптимальності для всіх класів задач;
2) цілі учасників процесу ухвалення рішення різні та незбіжні;
3) критерії правильності рішення залежать не лише від характеру задачі, її мети і т.ін., але й від того, наскільки неупереджено їх обрано, бо в іншому разі це буде лише підлаштовування під потрібну тій або іншій стороні відповідь. Отже, треба зважати на такий суб’єктивний аспект, як система переваг певного децидента;
4) труднощі вибору рішення можуть бути приховані й у самій постановці задачі, якщо потрібно досягнути нереальних результатів (отримати «максимальний прибуток за мінімального ризику», завершити будівництво «в мінімальні терміни з максимальною якістю», завдати «максимального збитку противникові у військових діях за мінімальних власних втрат» і т.ін). У всіх таких ситуаціях

бажано знайти розв'язок, оптимальний у розумінні А.Джофріона, тобто водночас за всіма критеріями. Найчастіше такого розв'язку не існує.

Загалом, усі принципи оптимальності, застосовувані в теорії прийняття рішень, безпосередньо чи побічно відображають ідеї стійкості, вигідності та справедливості. Поняття стійкості й вигідності формалізувати достатньо легко. Одержане рішення *стійке*, якщо учасникам процесу його ухвалення не вигідно відхилятися від нього, і *вигідне*, коли всі прагнуть збільшити свій можливий виграш або зменшити програш. Таке рішення називається **рівноважним**. Воно забезпечує всім учасникам максимальний гарантований виграш. Тут не взято до уваги такі суб'єктивні характеристики децидента, як схильність або несхильність до ризику.

Якщо реалізація принципів вигідності та стійкості ґрунтується на початкових умовах задачі, то принцип *справедливості* визначають ззовні. Учасники процесу ухвалення рішення повинні наперед обговорити його. Часто компромісне рішення, що ґрунтується на принципі справедливості, не збігається з рівноважним, тобто виникає парадоксальна ситуація – «справедливий» розв'язок проблеми нестійкий.

В угоді між учасниками може брати участь іще одна стороння особа – *арбітр*, який пропонує компромісне рішення, що відповідає певним «принципам справедливості», часто сформульованими у вигляді набору аксіом. Це важке та важливе завдання, оскільки на основі такої системи аксіом будується арбітражне рішення. Ця система має відповідати нормам моралі суспільства, значною мірою відображеним у чинному законодавстві, бути повною та несуперечливою, тобто давати змогу одержати рішення, до того ж єдине. Арбітр, як і кожний суддя, повинен бути авторитетним і мати моральне право ухвалювати рішення, тобто користуватися безумовною довірою всіх учасників. В іншому разі ухвалене рішення не виконуватиметься, бо єдиний стимул до його виконання – це згода, домовленість сторін. Якщо систему аксіом обрано та схвалено учасниками, то можна отримати рішення за допомогою формальних методів.

У процесі прийняття рішення децидент має обрати один або кілька варіантів рішень (дій, планів, поведінки). Потреба в такому виборі зумовлена певною проблемною ситуацією, у якій є два стани: бажаний і дійсний, – а способів досягнення бажаної мети – стану – не менше ніж два. Отже, децидент у такій ситуації має свободу вибору між кількома варіантами дій, кожен із яких зумовлює певний результат. У децидента є власні уявлення про переваги та вади окремих результатів, своє ставлення до них, а отже, і до варіантів рішень. Словом, він має власну систему переваг, у якій можна виділити статичну та динамічну складові.

Отже, **рішення** – *це вибір*. Насамперед зауважимо, що спочатку у нас може не бути навіть множини альтернатив, серед яких потрібно зробити вибір. Наприклад, ми бажаємо обміняти квартиру. У цьому разі передусім доведеться дібрати варіанти обміну. Це і є *формування множини варіантів рішень – альтернатив*. Спочатку множина альтернатив найчастіше аморфна, тобто не має структури, і ми не можемо відразу сказати, яка альтернатива краща, а яка гірша. Справді, задачу вибору можна розв'язати, якщо певним способом структурувати множину альтернатив.

Організаційне рішення – це вибір, який має зробити децидент, щоб виконати обов'язки згідно з посадою, яку він займає. Тому найефективніше організаційне рішення – це вибір, який буде реалізований і дасть найбільший внесок у досягнення остаточної мети.

Програмоване рішення – це результат реалізації певної послідовності кроків або дій, подібних до тих, які приймають у ході розв'язання математичного рівняння. Визначивши, яким має бути рішення, керівництво зменшує ймовірність помилки, а також економить час, який було б витрачено на обрання альтернатив. Такі рішення застосовують для проблем, що повторюються з певною регулярністю та виникають здебільшого в технічних галузях.

Непрограмоване рішення потрібне в ситуаціях, які певною мірою нові, внутрішньо не структуровані чи пов'язані з невідомими чинниками. Оскільки наперед неможливо уявити собі конкретну послідовність потрібних кроків, децидент має ухвалювати рішення, виходячи з інших критеріїв. Він повинен стимулювати ініціативність у підлеглих, які ухвалюватимуть рішення згідно з їх компетенцією. До непрограмованих належать рішення такого типу: визначення цілей організацій, поліпшення якості продукції, удосконалення структури управлінських підрозділів, посилення мотивації підлеглих.

Ухвалити добре рішення важко. Ухвалення рішень – це також і психологічний процес. Для ухвалення рішень децидент використовує різні засоби: від спонтанних до високо логічних. Проте головне, що допомагає децидентові ухваленні рішень – це знання та досвід.

Інтуїтивне рішення. Повністю інтуїтивне рішення – це вибір, зроблений лише на основі відчуття того, що він правильний. Те, що ми називають «осяянням», або «шостим відчуттям», і є інтуїтивним рішенням. У складній організаційній ситуації можливі тисячі варіантів вибору. У децидента, який покладається лише на інтуїцію, шанси на правильний вибір без будь-якої логіки з погляду статистики невисокі.

Рішення, що ґрунтується на міркуваннях – це вибір, зумовлений знаннями чи нагромадженим досвідом. Децидент використовує знання про те, що трапилося в подібних ситуаціях раніше, щоб спрогнозувати результат альтернативних варіантів вибору в конкретній ситуації. Спираючись на здоровий глузд, він обирає альтернативу, яка була успішною в минулому (тобто мислить за аналогією). Міркування за аналогією як основа організаційного рішення корисні, тому що багато ситуацій в організаціях повторюються. У цьому разі ухвалене раніше рішення знову може працювати не гірше, ніж раніше (це основна перевага програмованих рішень).

Позаяк рішення на основі міркувань формується в голові децидента, воно має суттєву перевагу – швидкість і дешевизну його ухвалення. Самі лише міркування можуть бути недостатніми для ухвалення рішень, коли ситуація унікальна чи дуже складна. Міркування не можна зіставити з новою ситуацією, бо в децидента немає досвіду, яким він міг би обґрунтувати логічний вибір. У складній ситуації вони можуть виявитися неефективними, оскільки чинників, на які слід зважати, може бути дуже багато, і децидент не в стані осягнути й зіставити їх.

Надмірна орієнтація на досвід зміщує рішення в напрямках, знайомих децидентові за його колишніми діями, тому що роздум завжди спирається на досвід. Через такий зсув децидент може випустити з поля зору нову альтернативу, яка мала б стати ефективнішою, ніж відомі варіанти вибору. Окрім того децидент, надмірно схильний до роздумів і використання нагромадженого досвіду, може свідомо чи несвідомо уникати вторгнення в нові галузі, що може призвести до катастрофи. Адаптуватися до нового та складного непросто. Можливі невдачі через ухвалення поганих рішень. Проте часто децидент може істотно підвищити ймовірність правильного вибору, раціоналізуючи його.

Раціональне рішення. Головна відмінність між раціональним рішенням і тим, що ґрунтується на міркуваннях, полягає в тому, що раціональне рішення *не залежать від минулого досвіду. Його обґрунтовують у ході об'єктивного аналітичного процесу.*

Зазвичай активні суб'єкти, що беруть участь у процесі прийняття рішення, – децидент і його контрагенти – мають різні інтереси та прагнуть впливати на цей процес у своїх цілях. Це може виявлятись у приховуванні дійсної думки та намірів під час ухвалення рішення, спотворенні інформації тощо. Така поведінка учасників може привести до рішення, далекого від раціонального чи справедливого.

Учасники цього процесу мають володіти такими якостями:

- пам'яттю (здатністю нагромаджувати інформацію),
- здатністю до прогнозу (можуть використовувати інформацію для передбачення результатів рішення),
- індивідуальними перевагами (різні результати оцінюють по-різному),
- можуть бути доброзичливими (із двох рівнозначних для себе рішень суб'єкт може обрати те, що влаштує і суперника).

У ході прийняття рішень аналізована ситуація зазвичай слабоструктурована, тобто можна формалізувати лише окремі фрагменти проблеми. Первинна інформація найчастіше неповна чи суперечлива, бо для її збирання використовують не лише об'єктивні вимірювання, але й оцінки експертів; для коректного прийняття рішень потрібно прямо чи побічно додатково структурувати проблему, поповнювати наявну інформацію й усувати (хоча б частково) наявні суперечності. Завдяки такому опрацюванню первісна проблема виявляється апроксимованою певною добре структурованою проблемою, яка в певному розумінні досить близька до первісної та належить до певного класу, вибір якого залежить від постановки задачі прийняття рішення.

Ситуації, у яких відбувається вибір рішень, мають такі структурні елементи.

- **Проблема і проблемна ситуація.** *Проблема* – це складне теоретичне або практичне питання, що вимагає вивчення, вирішення. Важливою передумовою успішного рішення проблеми служить її правильна постановка. Суть проблеми для людини така, що вимагає аналізу, оцінки, формування ідеї, концепції для пошуку відповіді (вирішення проблеми) з перевіркою і підтвердженням досвіду. Проблемою переважно називається питання, що не має однозначного рішення (міра невизначеності). Проблема відрізняється від завдання тим, що для її вирішення не досить власних ресурсів, які притягуються з боку.

  У бізнесі проблема – це перешкода на шляху до досягнення поставленої мети. Для вирішення проблеми вимагається провести її аналіз і враховувати в проекті як поточні умови, так і риски.

  Проблемна ситуація – це ситуація, коли діяльність не реалізується прийнятими раніше способами, і досягнення результату діяльності в умовах, що змінилися, непрогнозоване (ускладнено або виключено). Її виникнення – стимулятор-рушій процесу прийняття рішення. Проблемна ситуація спонукає на пошуки способів її вирішення.
- **Децидент** – це особа чи група осіб, які приймають (ухвалюють) рішення та впроваджують його. Децидент відповідає за реалізацію прийнятого рішення, тому в нього мають бути навички організаційного управління. Є певна різниця між *ухваленням* і *прийняттям* рішень, хоча це майже синоніми. Якщо йдеться про одну особу – децидента, то доцільно вживати термін «*прийняти рішення*»; якщо ж децидентів декілька (особливо, коли застосовують процедуру голосування), то прийнятніший термін «*ухвалити рішення*».
- **Мета**. *Мета* – це ідеальний або реальний предмет свідомого або несвідомого прагнення суб'єкта; кінцевий результат, на який навмисно спрямований процес. Проблема прийняття рішення ґрунтується на телеологічному підході, тобто має бути *головна мета системи*. Рішення, яке ухвалюють або приймають має бути скероване на досягнення поставленої мети Якщо мети немає, то не виникає і потреби ухвалювати рішення.
- **Керування.** Надзвичайно важливо, чи може децидент впливати на певний процес, у перебігу якого він зацікавлений. Якщо децидент відчуває проблемність ситуації та може ідентифікувати її, але не має важелів впливу на неї, то проблеми прийняття рішення немає, і децидент по суті перетворюється на пасивну сторону, яка лише спостерігає за тим, що відбувається.
- **Варіанти рішень.** Цей структурний елемент є похідним від керованості: якщо є керованість, то існує й проблема вибору між кількома варіантами дій децидента з більш-менш передбачуваними наслідками. Рішення приймають тоді, коли існує більше ніж один

спосіб досягнення поставленої мети. Кожен зі способів можна характеризувати різною ймовірністю досягнення мети й витратами.

- **Обмеження.** Наявність обмежувальних чинників природна для ситуацій прийняття рішення. Децидент ніколи не може мати необмежених ресурсів для впливу на ситуацію, що склалася, чи перебіг певного процесу. Природно, що можливості децидента скінченні.
- **Зовнішнє середовище.** Це все те, що безпосередньо впливає на ситуацію, а також те, на що впливає розв’язання проблеми прийняття рішення. Якщо всі дії середовища можна однозначно прогнозувати, то ситуація *детермінована*; коли ж це неможливо, і на середовище не впливають дії децидента, то залежно від ступеня невизначеності виникають *стохастичні ситуації* та *ситуації з невизначеністю*. Якщо ж середовище цілеспрямовано реагує на дії децидента, то ситуація *ігрова*, і процедури пошуку найкращих у певному розумінні рішень значно ускладнюються.

Мета відображає призначення системи, яке не є детерміністично фіксованим. Воно може розвиватися в часі, і не обов’язково єдиним способом.

Мета конкретизується за допомогою *аспектів* і *цілей*. Цілі в часовому аспекті поділяють на *тактичні цілі* (objectives), *макроцілі* (goals) й *ідеали* (ideals).

Тактичні цілі — це бажані результати, досягнення яких відбувається за певний порівняно короткий період часу. Для досягнення **макроцілей** потрібно більше часу, а також досягнення хоча б однієї тактичної цілі. **Ідеали** — це такі цілі, яких ніколи не досягають, але до яких система постійно наближається, реалізуючи деякі тактичні цілі та макроцілі.

Категорія мети пройшла довгий шлях розвитку від найпростіших форм до складних структурно-функціональних подань. Мета відображає те, що може чи має виникнути, прообраз майбутнього, стан, якого бажано досягнути. Вона має кілька аспектів. *Пізнавальний* аспект мети відповідає прогнозу майбутнього, а *конструктивний* – можливим способам переходу до бажаного майбутнього чи плану дій.

Коли мета відносно проста, її усвідомлення містить і спосіб досягнення. Для складної ж мети самостійного значення набуває *план* як елемент постановки мети. У ньому задають послідовність етапів досягнення мети, визначають засоби та методи, терміни дій. Отже, мета виражається за допомогою множини аспектів (рис. 1.24).

За наявністю інформації про способи досягнення цілей їх поділяють на функціональні цілі, цілі-аналоги та цілі розвитку.

Функціональна мета характеризується тим, що спосіб її досягнення відомий системі, яка вже досягала її. Функціональні цілі повторюються в часі та просторі. Їх приклади – результати виконання періодично повторюваних, виробничих операцій, стандартні функції управління та ін.

Мета-аналог – це образ, отриманий унаслідок дії іншої системи, якого жодного разу не досягала аналізована система, а якщо й досягала, то за інших умов зовнішнього середовища.

Мета розвитку, або *нова ціль* – це така, яку ніколи і ніхто раніше не досягав. Вона по суті пов'язана з утворенням нових систем.

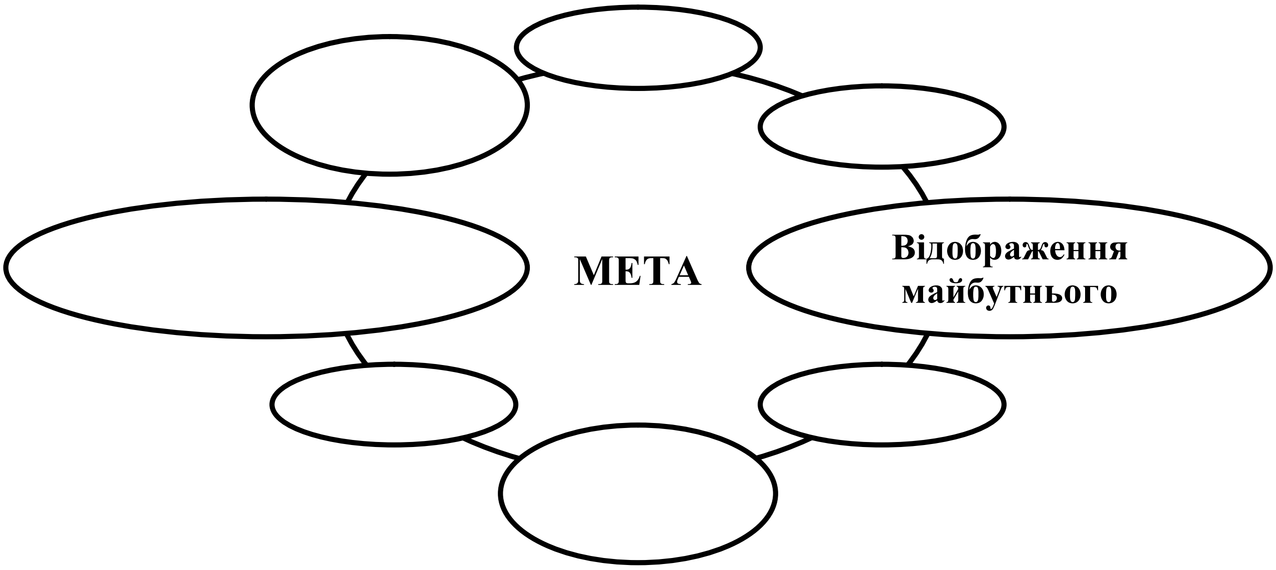


Рис. 1.24. Аспекти мети

Ці типи цілей взаємопов'язані. Мета розвитку за умови її успішного досягнення однією із систем перетворюється на ціль-аналог для решти систем, а для даної системи – функціональною за умови незмінних зовнішніх умов і метою-аналогом, якщо ці умови змінилися. Мета уособлює бажаний і остаточний результат діяльності. У ній виділяється *ядро* і *основні характеристики* проблемної ситуації, а також описується новий стійкий стан керованого процесу.

Цілі визначають на основі комплексного аналізу проблемної ситуації, дослідження її внутрішньої структури та зв'язків із зовнішнім середовищем. Залежно від складності та багатогранності розв'язуваної проблеми мету також можна розглядати як більш або менш складну систему уявлень про бажані результати дій. Мета випливає з аналізу реальної діяльності, а не з формальних теоретичних побудов.

Узагальнене розуміння мети міцно увійшло до біології разом із утвердженням у ній уявлень про внутрішню активність біосистем. У кібернетиці загальний підхід до поняття мети і цілеспрямованості було розвинуто на початку 40-х років XX ст. **А.Розенблютом**, **Н.Вінером**, **В.Ешбі** та **Д.Бігелоу**. Вони зазначали, що активну поведінку можна поділити на два класи: *нецілеспрямовану* (випадкову) і *цілеспрямовану*. Цілеспрямовану дію чи поведінку можна тлумачити як скеровану на досягнення якоїсь мети, тобто певного остаточного стану, у якому об'єкт вступає в певний зв'язок у просторі або часі з якимось іншим об'єктом або подією.

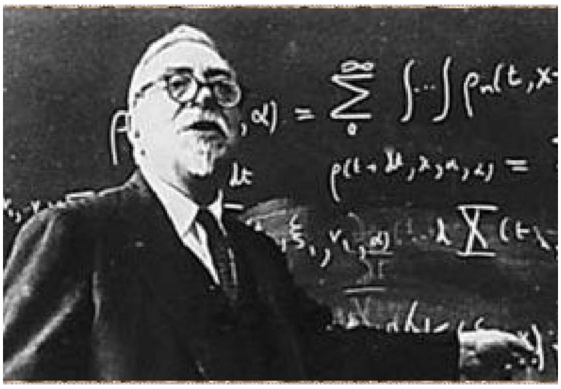


Рис. 1.25. Норберт Вінер (1894 – 1964)

– американський учений, видатний математик і філософ, основоположник кібернетики і теорії штучного інтелекту. «Кібернетика» Вінера побачила світ в 1948 р. Повна назва головної книги Вінера виглядає таким чином «Кібернетика, або управління і зв'язок в тварині і машині»

Рис. 1.26. Вільям Росс Ешбі (1903 – 1972)

– англійський психіатр, фахівець з кібернетики, піонер в дослідженні складних систем. Йому належить винахід гомеостату (1948), введення поняття самоорганізації. Він сформулював закон про необхідну різноманітність

Такий підхід до понять мети і цілеспрямованості пов’язаний з їх об’єктивізацією та поширенням на системи довільної природи. Запропоноване Н.Вінером кібернетичне розуміння мети і цілеспрямованості системи ґрунтується на її поведінці. Воно необов’язково пов’язане з наявністю в неї свідомості. Із цього погляду ми можемо вважати цілеспрямованою систему, поведінку якої скеровано на досягнення певного результату. Отже, цілеспрямована система поводиться так, немовби вона має певну мету. Чи зумовлена ця скерованість свідомою метою системи чи просто її структурною організацією – це інше питання. Приписування системі якоїсь мети (навіть тоді, коли вона не може мати свідомої мети) – зручний і важливий з методологічного погляду засіб для вивчення її поведінки.

Розглянемо основні типи цілей і способи їх формалізації щодо прийняття рішення. Питання формального опису чи хоча б уточнення цілей виникають не лише під час прийняття рішень. Це складова частина системного аналізу.

Якісна мета характеризується тим, що будь-який можливий результат або повністю відповідає їй, або зовсім не відповідає. При цьому результати, що відповідають меті, майже не різняться за ступенем її реалізації, так само нерозрізненні між собою результати, що їй не відповідають. За наявності якісної мети не мають сенсу твердження на кшталт «мету реалізовано наполовину» чи «мету досягнуто на 99%». Якісна мета може бути цілком досягнута чи зовсім не реалізована; вона відповідає принципу «*все чи нічого*».

Максимізація заданої функції. Зазвичай у математичних моделях ухвалення рішень мету ототожнюють із максимізацією (чи мінімізацією) якоїсь функції (критерію якості, корисності), що задана на множині всіх результатів і має дійсні значення, яку називають цільовою. Очевидно, що мінімізація функції рівнозначна її максимізації з протилежним знаком, тому надалі говоритимемо лише про максимізацію цільової функції. Довільну якісну мету формально можна звести із втратами до максимізації певної цільової функції.

Цільова функція – це функція, що зв'язує мету (змінну, що оптимізується) з керованими змінними в завданні оптимізації. Вона є математичним вираженням деякого критерію якості одного об'єкту (рішення, процесу і т.д.) порівняно з іншим. Важливо, що критерій завжди привноситься ззовні, і тільки після цього шукається правило рішення, що мінімізує або максимізувало цільову функцію.

В багатьох випадках результати діяльності можна характеризувати набором критеріїв ефективності. При цьому *мета полягає в максимізації (збільшенні) значень усіх цих критеріїв*. Таку багатовимірну мету зазвичай прагнуть звести до одновимірної за допомогою агрегування показників ефективності в один, згортанням векторного критерію в скалярний.

Усі критерії, що відображають мету, поділяють на такі основні типи: технічні, техніко-економічні, соціологічні, психологічні, естетичні, соціальні. Значення лише технічних і техніко-економічних критеріїв найчастіше можна виміряти числами, що мають зміст, тобто критерії цих двох груп зазвичай кількісні. Інші ж групи критеріїв по суті якісні.

Актуальною нині є тенденція до впровадження числових оцінок у різні галузі, де раніше застосовувалися лише якісні, словесні оцінки (заміни емоційних оцінок рейтингами, індексами популярності тощо.). Однак математичні дії з такими оцінками слід виконувати обережно. При цьому слід спиратися на результати, отримані в теорії вимірювань, у якій визначено класи припустимих перетворень. За наявності суб’єктивних і об’єктивних чинників інформацію, яку одержує децидент, ніколи не можна вважати абсолютно достовірною та повною. Часто децидент прагне підвищити ступінь її вірогідності та повноти, але нагромадження інформації потребує часу й витрат.

Маючи мету, задану за допомогою функції-критерію, можна визначити пов’язану з нею перевагу результатів: *із двох результатів кращий той, якому відповідає більше значення критерію* (за рівних значень говорять про еквівалентність результатів). Проте можна говорити про перевагу і без такої функції – наприклад, зазначаючи множину всіх тих пар результатів, для яких перший результат у парі переважає другий, тобто визначаючи *відношення переваги*. Щодо побудови єдиної узгодженої переваги на основі індивідуальних переваг було виявлено принципові труднощі, пов’язані з парадоксом Арова.

Загальне поняття переваги істотно ширше, аніж те, що пов’язане з функцією мети. Тому, формалізуючи мету чи перевагу не варто прагнути неодмінно подати їх у вигляді функції. Звичайно, якщо мета полягає в максимізації заданої функції (чи такої, яку можна побудувати природним способом), то заміняти її пов’язаною з нею перевагою, взагалі кажучи, недоцільно, оскільки в такому разі втрачається частина інформації про мету і аналіз завдання стає не таким глибоким і повним. І навпаки, якщо із самого початку зі структурою, що характеризує мету, пов'язана перевага, то в багатьох випадках слід намагатися подати цю мету у вигляді функції.

Розглянемо детальніше *види обмежень*. Усі обмежувальні чинники належать до однієї з таких груп.

- *Економічні чинники* – кошти, виробничі ресурси, ресурси праці тощо.
- *Час* – в багатьох випадках надзвичайно важливо оперативно реагувати на ситуацію, що складається, тому що навіть найкраще рішення, отримане для статичної ситуації, може виявитися абсолютно непридатним через суттєву зміну умов прийняття рішення. Інколи час можна подати як втрати, і тоді він близький до економічних чинників. Проте в багатьох ситуаціях зробити це неможливо.
- *Інформаційні чинники* – обмеження на отримання потрібної інформації із суб'єктивних чи об'єктивних причин.
- *Технічні чинники* – габарити, маса, споживання енергії, надійність, точність і т. ін.
- *Соціальні чинники* – пов'язані з вимогами людської етики та моралі.

Розглянемо детальніше інформаційні обмеження та можливі способи їх подолання.

У процесі прийняття рішення деценденту доводиться оперувати чималими об'ємами інформації. Оскільки його здатність опрацьовувати інформацію в кожному окремому процесі прийняття рішення обмежена, потрібно певним чином відбирати дані під час збирання інформації. Тому виконується *фільтрація даних* стосовно кожного окремого процесу прийняття рішення чи класу процесів. Вирізняють три види фільтрів:

- відтинання непотрібних або недостовірних даних,
- агрегування даних,
- їх типологічну вибірку.

Для кожного з них потрібна обґрунтована та зручна класифікація вихідної множини даних N.

У процесі *відтинання* – це розбиття на два класи: N'– отриманих остаточно і $\widetilde{N}'$– відтятих даних:

$$N' \cap \widetilde{N}' = \emptyset;\ N' \cup \widetilde{N}' = N.$$

Таку процедуру реалізують за допомогою ознак відтинання, граничних величин достовірності, шкал важливості тощо (наприклад, залишаються лише дані про певні вироби чи про виконання плану певними підприємствами).

У ході *агрегування* множину N розбивають на класи агрегування

$$N_1, N_2, \dots, N_i, \dots, N_m \left(\bigcup_{i=1}^{m} N_i = N \right)$$

й обирають спосіб агрегування, тобто переходу до мікроелементів n_i, кожен з яких відповідає певному класу N_i, за характеристиками, що цікавлять децидента: випуск продукції окремих підприємств – у показник випуску продукції галуззю (агрегація за суб'єктами), щомісячних даних – у річний показник (агрегація за часом).

У разі *типологічної вибірки* множину N розбивають на класи еквівалентності $N'_1, N'_2, \dots, N'_k$ і обирають елементи – представників кожного класу. Прикладом такої вибірки може бути будь-який вибірковий перепис, вибіркова перевірка якості продукції, вибіркове опитування та ін.

За будь-якого способу класифікації та «стиснення» інформації у фільтрі децидент визначає класифікаційні ознаки відповідно до його мети в певному процесі прийняття рішення.

Виділення класифікаційних ознак відтинання, агрегування та вибірки пов'язане зі складними процесами мовного перетворення інформації, що надходить, тому що дані від реальних об'єктів відображено предметними мовами опису цих об'єктів. Інтереси індивіда трансформують його функціональні потреби та проблеми, що постають перед ним, у його загальну цільову орієнтацію в ППР. Вона може зумовити потребу в інших перетинах і групуваннях, ознак в іншій системі показників і характеристик, а не в тих, у яких надходять дані із зовнішнього середовища. Деციденту доводиться самому формувати уявлення про середовище відповідно до цього: зіставляти різнорідні дані, перегруповувати дані, одержувати похідні показники та ін.

Отже, на етапі фільтрації даних діє складний комплекс фільтрів-перетворювачів. Узагальнено їх можна подати як мовні фільтри-перетворювачі трьох типів. Виходячи з цього, децидент виявляє певні ситуації, ставить проблеми. Аналіз даних породжує множину ситуацій і проблем. Одні з них виходять на перший план, а інші доводиться відкладати на більш-менш тривалий термін. Індивід починає зіставляти ситуації, що перебувають у фокусі уваги, і проблеми. При цьому доводиться уточнювати окремі ситуації та проблеми багато разів, що зазвичай потребує розширення чи звуження погоджуваних ситуацій або проблем, переформулювання, ієрархічного розбиття на підпроблеми тощо. Так можна виявити проблемні ситуації.

Ухвалюючи рішення, у разі потреби слід брати до уваги *ризик*, що виникає внаслідок невизначеності, з якою можна прогнозувати результат. У процесі оцінювання альтернатив і прийняття рішень децидент має прогнозувати можливі результати за різних обставин. По суті, він приймає рішення залежно від таких обставинах стосовно ризику.

Визначеність. Рішення ухвалюють в умовах визначеності, якщо децидент точно знає результат кожного з альтернативних варіантів вибору. Він може хоча б на найближчу перспективу точно задати значення параметрів рішення (наприклад, якими будуть витрати на виготовлення певного виробу, бо відомі орендна платня, вартість матеріалів і робочої сили) або ж їх можна обчислити з високою точністю. Порівняно небагато організаційних або персональних рішень ухвалюють в умовах визначеності проте вони існують.

Ризик. До рішень, які доводиться приймати в умовах ризику, належать такі, результати яких невизначені, і відома лише об'єктивна чи суб'єктивна ймовірність кожного результату. У разі ухвалення рішень в умовах ризику найпершим рішенням має стати дія, скерована на пошук способів його зменшення. Це може бути збирання додаткової інформації, що належить до проблеми (зокрема, твердження експертів). Корисними можуть виявитися також різноманітні математичні методи та моделі, що дають змогу оцінити рівень ризику та спрогнозувати ймовірність певних подій.

Невизначеність. Рішення доводиться ухвалювати в умовах невизначеності, якщо неможливо оцінити ймовірність потенційних результатів. Така ситуація виникає, коли чинники, які слід брати до уваги, нові чи складні, і про них неможливо одержати достатньо інформації. У такому випадку неможливо достатньо достовірно передбачити ймовірність певного результату. Невизначеність властива деяким рішенням, які доводиться приймати за динамічних обставин, що стосується соціокультурного, політичного та наукоємного середовища.

Зустрічаючись із невизначеністю, децидент може використовувати наступні можливості. Можна спробувати одержати додаткову інформацію та ще раз проаналізувати проблему. Інший варіант – діяти відповідно до минулого досвіду, думок або інтуїції та зробити припущення про ймовірність подій. Це доцільно тоді, коли бракує часу на збирання додаткової інформації чи витрати на неї занадто високі. Обмеження в часі та інформаційні обмеження найважливіші в ході ухвалення управлінських рішень, позаяк їх порушення в майбутньому має тенденцію трансформуватись у фінансові втрати (порушення договірних термінів виконання замовлень може призвести до штрафних санкцій з боку замовника).

Час і змінне середовище. Плин часу зазвичай зумовлює зміни ситуації. Якщо вони значні, то критерії для ухвалення рішення стануть неактуальними. Тому слід приймати та впроваджувати рішення, доки інформація та припущення, на яких вони ґрунтуються, залишаються точними. Часто це складно реалізувати, оскільки час між ухваленням рішення та початком дії може бути доволі тривалим. Окрім того, здоровий глузд підказує, що рішення слід ухвалювати достатньо швидко, щоб бажана дія зберегла своє значення. Тому чинник часу іноді примушує децидента спиратися на міркування, думки чи навіть на інтуїцію, тоді як за нормальних обставинах він віддав би перевагу раціональному аналізу.

Негативні наслідки. В багатьох випадках ухвалення управлінських рішень – це мистецтво знаходження ефективного компромісу. Виграш в одному майже завжди зумовлює збитки в іншому. Рішення на користь якіснішої продукції спричиняє зростання витрат; деякі споживачі будуть задоволені, інші перейдуть на дешевший аналог і т.ін. Ухвалюючи рішення, не слід зважати на подібні негативні наслідки. *Проблема ухвалення рішень полягає в зіставленні переваг і вад, щоб отримати найбільший загальний виграш* (і не лише у вартісному вимірі!). У багатьох випадках децидентові доводиться формулювати суб'єктивну думку про те, які негативні побічні ефекти припустимі за умови досягнення бажаного кінцевого результату. Проте деякі негативні наслідки зовсім не прийнятні для керівників організації (наприклад, порушення законів або етичних норм).

Взаємна залежність рішень. В організації всі рішення певним способом взаємопов'язані. Одиничне важливе рішення може спричинити появу сотні не таких значних рішень. Великі рішення мають наслідки для організації загалом, а не лише для сегмента, безпосередньо пов'язаного з певним рішенням. Якщо виробнича фірма вирішила придбати нове та продуктивніше устаткування для підприємства, то вона має також знайти спосіб збільшити збут продукції. Отже, зазначене рішення відіб'ється не лише на виробничому відділі, але й на відділі збуту та маркетингу.

Процес ухвалення рішення з інформаційного погляду – це перетворення початкової інформації (інформації про стан) *на вихідну* (інформацію про потрібні керівні дії). Розв'язок може бути формальним і творчим. Отриманий розв'язок називають *формально-логічним*, якщо перетворення інформації виконано за допомогою математичних моделей; якщо ж він виник унаслідок роботи інтелекту децидента, то його вважають *творчим*.

Такий поділ достатньо умовний, оскільки не існує формального чи творчого розв'язку в чистому вигляді. Якщо розв'язок формується за допомогою математичної моделі, то знання та досвід особи (елементи творчості) використовуються в ході її створення, а інтуїція (теж момент творчості) – у мить, коли децидент визначає певні значення параметрів початкової інформації чи обирає один розв'язок із множини варіантів, одержаних за допомогою математичної моделі. Основний інструмент вироблення рішення – це *інтелект людини*, і в її знаннях і досвіді неявно застосовуються формальні методи, носій яких – майже вся наука.

Відповідно до поділу на творчі та формальні всі проблеми, пов'язані з будь-яким процесом ухвалення рішень, умовно поділяють на два класи: *концептуальні* та *формально-математичні*.

До **концептуальних** належать складні логічні проблеми, які неможливо розв'язати із застосуванням лише формально-математичних методів і комп'ютерів. Часто ці проблеми унікальні, бо їх розв'язують уперше, і вони не мають прототипів у минулому. Такі проблеми зазвичай вирішують керівники із залученням експертів, – висококваліфікованих фахівців у різних галузях знань і практичної діяльності. У розв'язанні концептуальних проблем формально-математичні методи не такі важливі, як ерудиція, досвід та інтуїція людей. Формальні методи в цьому разі є допоміжними як засіб, що полегшує та організує евристичну діяльність людей. До концептуальних належать, зокрема, такі проблеми, як:

- аналіз і вибір цілей, що реалізують генеральну мету;
- виявлення показників, що характеризують наслідки ухваленого рішення;
- вибір із них критеріїв тощо.

Обґрунтування евристичних процедур є предметом *неформальної теорії прийняття рішень*.

Децидент, приймаючи рішення, керується метою. Її не завжди можна чітко сформулювати, але вона обов'язково має бути в певному вигляді, тому що без неї не має жодного сенсу обговорення правильності схвалюваних рішень. Окрім того, децидент може певним чином впливати на результат, бо без цього зникає потреба в ухваленні рішення. Ці дві ознаки основні, тому цілком обґрунтоване наступне означення.

Завданням прийняття рішення називають таке завдання, яке можна сформулювати в термінах мети, засобів і результату.

У реальних завданнях прийняття рішень засобами, що впливають на результат, доводиться виконувати якісь конкретні дії, застосовувати певні способи їх реалізації, плани, програми тощо. В більшості випадків можна вважати, що ухвалення рішення полягає у обранні певного варіанта з наявних. Зазвичай ухвалення рішення є процесом, підсумок якого – вибір однієї можливості з декількох і її впровадження.

Математична модель завдання прийняття рішення – це формальний опис її складових: мети, засобів, результатів, а також зв'язку між засобами та результатами. Істотно, що в математичній моделі прийняття рішення відразу зазначено всю множину дій, з якої слід зробити вибір. Наочно це можна уявити собі так, що потрібно скласти перелік всіх можливих дій. Цей перелік може бути нескінченним, але він має бути повним.

Нагромаджений практичний досвід у галузі проблем прийняття рішень показує, що часто найважчими та найважливішими виявляються такі аспекти цих проблем, які безпосередньо не стосуються процесу прийняття рішення, а саме:

- ❖ уведення експертів і децидента в проблематику задач, які потрібно розв'язати;
- ❖ формування спільної мови спілкування для різних груп експертів і децидента;
- ❖ узгодження думок і поглядів різних груп експертів і децидента;
- ❖ виявлення справжніх цілей розв'язання та постановки задачі.

Послідовність і зміст основних етапів процесу прийняття рішень

Перш ніж децидент отримає можливість вибору з множини альтернатив, йому доводиться виконати певну послідовність дій. Під **процесом прийняття рішення** (**ППР**) будемо розуміти *послідовність процедур, що приводять до знаходження рішення*.

Багато етапів ППР безпосередньо належать до якісного аналізу. Лише за його допомогою можна поєднати результати розробок на окремих етапах ППР, а й прямі та зворотні зв'язки між етапами є переважно якісними.

У процесі розв'язування задачі неодноразово уточнюється початкова постановка задачі.

Нижче схематично подано перелік основних запитань, відповіді на які допомагають прийняти рішення (рис. 1.27), тобто модель початкової ситуації.

- *Хто ухвалює рішення?* – Децидент (одна особа чи група).
- *Де?*– Місце ухвалення рішення.
- *Як?*– Як приймають рішення та в якій формі висловлюють.
- *Коли?*– Коли потрібно прийняти рішення.
- *Що потрібно вирішити?*– Мета рішення.

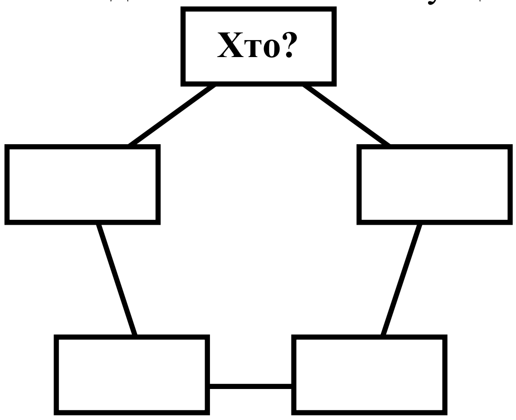


Рис. 1.27.Схема основних запитань у ході прийняття рішень

Усі етапи ППР виконуються за ітеративними процедурами і поєднані зв'язками, що утворюють певну послідовність. Зазвичай у разі невдачі на якомусь кроці децидент спочатку повертається до попереднього етапу та робить «малий цикл». Після повторних невдач цикли охоплюють усе більше попередніх етапів, поки не буде отриманий задовільний результат. Якщо аналіз відразу показує причину невдачі, то немає потреби іти всіма циклами методом спроб і помилок. У такому випадку можна відразу звернутися до відповідного етапу (наприклад, зібрати додаткові дані, переглянути структуру проблемної ситуації тощо).

Вважатимемо, що ППР починається зі спостереження за зовнішнім середовищем і одержання децидентом інформації, виходячи з якої ставлять задачі та шукають потрібні рішення. Він завершується після інтерпретації прийнятого рішення та його «переведення» в директиви для реалізації. Однак можна також розширювати чи звужувати межі ППР, інакше інтерпретувати його зміст і характеристики його етапів. Таке порівняно широке тлумачення ППР корисне з огляду на кілька аспектів.

- По-перше, це дає змогу розглядати постановки окремих задач і приймати окремі рішення в межах загального процесу опрацювання інформації, що надходить до децидента із зовнішнього середовища. Завдяки цьому можна визначити місце прийняття рішень у зазначеному інформаційному процесі, краще зрозуміти особливості різних типів задач і рішень.
- По-друге, виникає можливість узагальнити застосування моделей прийняття рішень. Річ у тім, що кожен етап ППР, у свою чергу, правомірно розглядати як відповідну задачу (спостереження, пошуку, фільтрації даних, визначення критеріїв і т.ін.), до якої також можна застосувати якусь модель прийняття рішення, але з іншими змістовними інтерпретаціями компонентів такої задачі.
- По-третє, за допомогою такого підходу можна утворити довільні ієрархії задач, до кожної з яких застосовані ті самі моделі прийняття рішень. «Важкі» задачі, у яких тягар невизначеності занадто великий для децидента, він піддає декомпозиції на часткові. Важкі задачі

перетворюються на послідовність часткових задач (у загальному випадку формується ієрархія задач декількох рівнів). Дерево рішень як структурована ієрархія та мережа як структурно-часова ієрархія – типові приклади таких послідовностей у розв'язуванні важких задач. Кожен крок у цьому разі можна подати відповідним ППР і застосувати моделі прийняття рішення.

Ці зауваження дають змогу твердити, що навіть схема виокремленого ППР і, більше того, модель одного етапу цього процесу – етапу прийняття рішення – мають достатньо загальний характер. Ієрархії задач і ППР змінюють змістовні інтерпретації компонентів і етапів, але не вносять нічого принципово нового в схеми ППР і моделі прийняття рішення. Тому достатньо розглянути неієрархічні постановки задач і ППР.

Процес прийняття рішення складається з декількох основних етапів. Різні автори з різним ступенем деталізації розглядають послідовність етапів, але в загальному зберігається наступна послідовність дій.

1. Виявлення проблемної ситуації та постановка задачі прийняття рішення.
2. Формулювання поняття якості рішення та його структуризація до рівня критеріїв.
3. Описання характеристик зовнішнього середовища, прогнозування можливих результатів дій ППР із подальшим виявленням або конструюванням альтернативних варіантів рішень.
4. Оцінювання якості варіантів рішень, порівняння їх між собою та вибір одного чи декількох найвідповідніших меті.
5. Аналіз рішень, опрацювання плану реалізації та впровадження рішення.

Потреба у виділенні окремих етапів у ППР і їх зміст залежить здебільшого від характеру проблеми, що розв'язується.

Деталізована схема прийняття рішень є конкретизацією загальної схеми; вона детальніше описує узагальнені етапи. Для аналітичного обґрунтування прийняття рішень за допомогою математичних методів потрібно розглядати найскладніші варіанти побудови процесу прийняття рішень за всіма аспектами, а інколи – також розвивати і деталізувати зміст окремих його етапів.

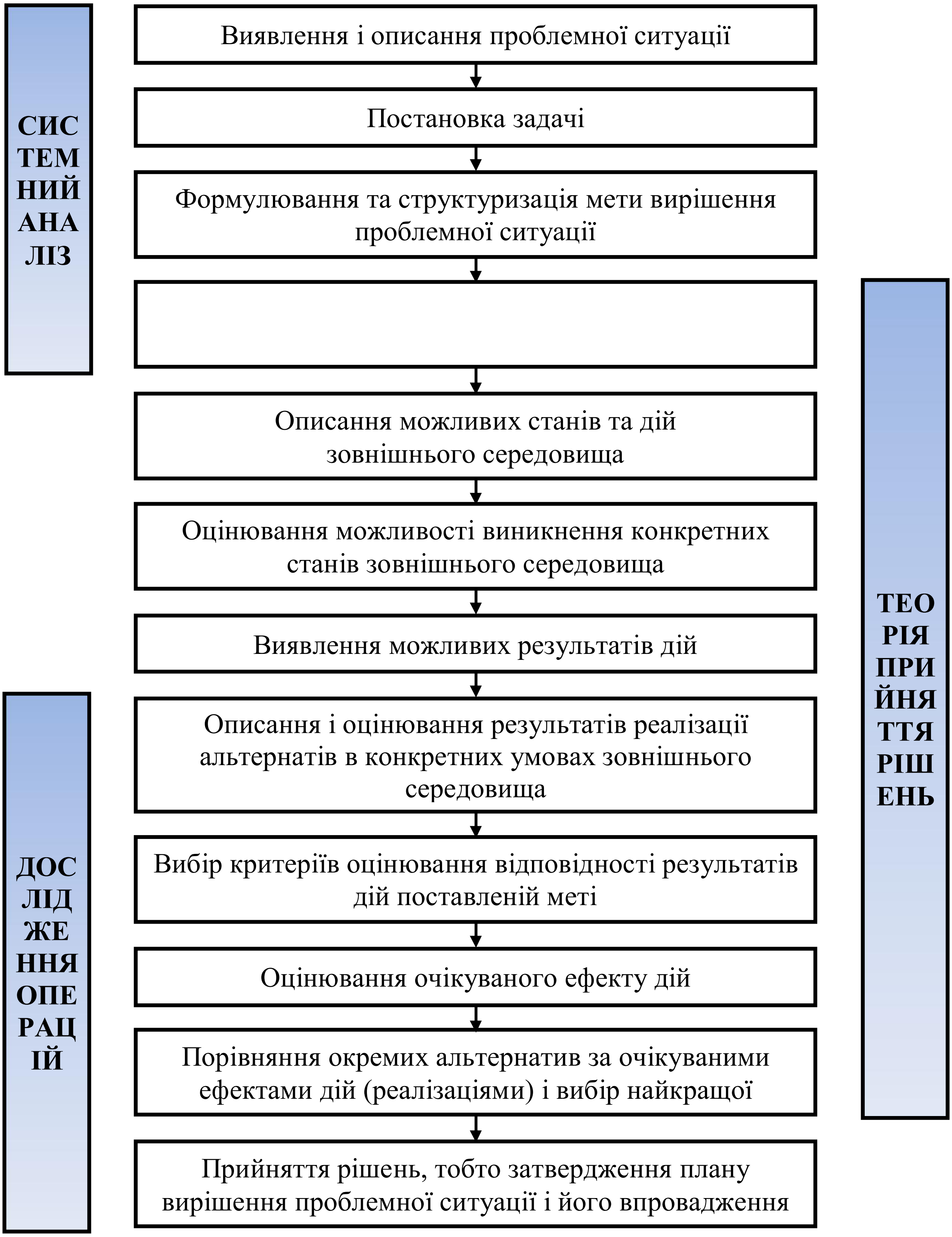


Рис. 1.28. Деталізована схема ППР

На рис. 1.28 подано послідовність етапів деталізованого ППР, а також відповідність між застосуванням методів системного аналізу, теорії прийняття рішень, дослідження операцій і окремими підмножинами етапів ППР.

Виявлення і описання проблемної ситуації – це виокремлення та формулювання проблеми на основі попереднього аналізу. Погляди на зміст аналізу проблеми розвилися згідно з загальним поняттям проблемної ситуації. Спочатку вважали, що аналіз проблеми полягає у виявленні труднощів, виходячи з наявної інформації.

Проблемною вважають *ситуацію*, коли не досягнуто поставлених цілей, тобто децидент дізнається про проблему тому, що не сталося те, що мало бути. Потім, після ухвалення певних рішень, відхилення від норми згладжуються.

Повністю визначити проблему складно, бо всі складові організації пов’язані між собою, і у великій організації можуть бути сотні чи тисячі таких зв’язків. Тому правильно окреслити проблему – це наполовину розв’язати її.

Діагностуючи складну проблему, спочатку потрібно усвідомити і визначити симптоми ускладнень або наявних можливостей. За симптомами можна виявити проблему в загальному вигляді, й тим самим зменшити кількість чинників, які слід вбрати до уваги в управлінні. Проте загальний симптом на кшталт низької рентабельності може бути зумовлений багатьма чинниками. Тому для усунення симптому зазвичай недоцільно діяти негайно, а потрібно глибоко проникнути в суть для виявлення першопричин неефективності.

Щоб визначити причини виникнення проблеми, потрібно зібрати і проаналізувати необхідну внутрішню та зовнішню (стосовно організації) інформацію. Це можна реалізувати за допомогою формальних методів, застосовуючи, наприклад, зовнішній аналіз ринку, а всередині – комп’ютерний аналіз фінансових звітів, інтерв’ювання, залучення консультантів з управління чи опитування працівників. Інформацію можна збирати і неформально, ведучи бесіди про ситуацію, що склалася, і роблячи особисті спостереження.

Збільшення обсягу інформації не обов’язково підвищує якість рішення. Часто дециденти потерпають від надлишку інформації, що не стосується справи. Тому в ході спостережень важливо бачити відмінності між релевантною та недоречною інформацією і вміти відділяти одну від іншої. Релевантна інформація – це дані, що стосуються лише конкретної проблеми, людини, мети чи періоду часу. Оскільки саме на такій інформації ґрунтуються рішення, то слід прагнути максимальної її точності й відповідності проблемі.

Постановка задачі. *Задача* – це проблемна ситуація з явно заданою метою, яку необхідно досягти; у вужчому сенсі завданням також називають саму цю мету, дану у рамках проблемної ситуації, тобто те, що вимагається зробити. Дещо жорсткіше розуміння «задачі» припускає явними і визначеними не лише мети, але і умови завдання, яке в цьому випадку визначається як усвідомлена проблемна ситуація з виділеними умовами (даними) і вимогою (метою). Ще вужче визначення називає задачею ситуацію з відомим початковим станом системи і кінцевим станом системи, причому алгоритм досягнення кінцевого стану від початкового відомий (на відміну від проблеми, у разі якої алгоритм досягнення кінцевого стану системи не відомий).

У ширшому сенсі під задачею також розуміється те, що треба виконати – всяке завдання, доручення, справа, – навіть за відсутності яких би то не було утруднень або перешкод у виконанні. Рішення задачі зазвичай вимагає певних знань і роздуму.

У задачі виділяють: елементи ситуації, правила перетворення ситуації, необхідне рішення (мета). Необхідне рішення може бути задане по-різному:

- як кінцевий стан ситуації;
- як отримання нового знання;
- як встановлення деяких зв'язків (стосунків) між елементами і т.д.

Виділяють наступні характеристики умови задачі:

- звичність або незвичність ситуації, новизна задачі для децидента;
- степінь явності істотних стосунків;
- форма умов (реальна ситуація/зображення/словесний опис);
- співвідношення умови-рішення: умови достатні/недостатні/надмірні для вирішення.

Етап постановки задачі має дати відповідь на наступні запитання:

- *Яку проблему та за яких умов потрібно розв'язати?*
- *Коли потрібно це зробити?*
- *Якими силами і засобами відбуватиметься розв'язання проблеми?*

На цьому етапі виконують такі дії:

- виділяють і описують проблемну ситуацію, яку потрібно розв'язати;
- визначають, який час потрібний і припустимий для прийняття рішень;
- визначають, які матеріальні та трудові ресурси потрібні для прийняття рішень.

Уже саму постановку задачі можна розглядати як специфічний ППР. На цьому етапі прийняття рішень ідеться про подальшу «долю» проблеми: її можна скерувати на вирішення чи тимчасово призупинити розв'язування до сприятливішого моменту. Рішення приймають на основі вивчення часових, матеріальних, інформаційних і поведінкових обмежень на ППР.

Коли децидент діагностує проблему для ухвалення рішення, він має розуміти, що саме можна з нею зробити. Багато можливих рішень проблем організацій є нереалістичними, тому що в децидента чи організації недостатньо ресурсів для реалізації ухвалених рішень. Окрім того, причиною проблеми можуть бути сили поза організацією – такі, наприклад, як закони, які децидент не може змінити. Обмеження на корегування дій звужують можливості ухвалення рішень. Децидент повинен неупереджено визначити суть обмежень, і лише потім шукати альтернативи. Якщо цього не зробити, буде втрачено багато часу. Ще гірше, якщо буде обрано нереалістичний напрям дій, що посилить, а не розв'яже наявну проблему.

Обмеження змінюються — вони залежать від ситуації та конкретних децидентів. До загальних обмежень належать такі:

- неадекватність засобів;
- недостатня кількість працівників, що мають відповідну кваліфікацію та досвід;
- нездатність закупити ресурси за прийнятними цінами;
- потреба в технології, яку ще не розробили чи вона занадто вартісна; винятково гостра конкуренція;
- закони, чи етичні міркування.

Зазвичай для великої організації обмежень менше, ніж для дрібної чи такої, що долає труднощі.

Істотний обмежувач усіх управлінських рішень (хоча й такий, що інколи може бути цілковито усунений) – *звуження повноважень* усіх членів організації з боку вищого керівництва. Інакше кажучи, децидент може приймати чи впроваджувати рішення лише тоді, коли вище керівництво надало йому це право.

Інформаційні обмеження. Інформація – це дані, що стосуються лише конкретної проблеми, людини, мети чи періоду часу. Зрозуміло, що для раціонального розв’язання проблем потрібна інформація, але іноді вона недоступна чи вартість її отримання надто висока. До вартості інформації входить час децидента і підлеглих, витрачений на її збирання, а також фактичні витрати, пов’язані, наприклад, з аналізом ринку, оплатою комп’ютерного часу та послуг зовнішніх експертів. Тому децидент має вирішити, чи істотною буде вигода від додаткової інформації, наскільки важливе саме рішення, пов’язане воно зі значною часткою ресурсів організації чи з невеликою грошовою сумою.

Якщо одержати інформацію за прийнятною ціною непросто, але незабаром така можливість виникне, то найправильніше для децидента – відкласти ухвалення рішення, проте лише за умови, що час не є критичним чинником і втрати від затримки будуть компенсовані вигодою від ухвалення якіснішого рішення, що ґрунтується на додатковій інформації. Децидент здебільшого суб’єктивно оцінює вигоду й витрати, що особливо стосується оцінювання ним вартості власного часу й очікуваних унаслідок ухвалення рішень покращень.

Поведінкові обмеження. На ухвалення рішень впливає багато чинників, що ускладнюють між особові та організаційні комунікації. Наприклад, циденти по-різному сприймають існування та серйозність проблеми, а також обмеження і альтернативи. Це спричиняє незгоди і конфлікти в процесі ухвалення рішення. Циденти можуть бути так переобтяжені інформацією та поточною роботою, що нездатні сприйняти можливості, що відкриваються. Згідно з дослідженнями, циденти по-різному визначають одну й ту саму проблему залежно від того, які підрозділи очолюють. Отже, від способу обміну інформацією між децидентом і підлеглими значною мірою залежить поведінка останніх. На ППР позначаються численні психологічні чинники та особистісні характеристики.

Із погляду часу слід зважати на те, що для підготовки прийняття майже всіх рішень часу менше, ніж потрібно для повного використання всіх знань або всієї інформації про проблемну ситуацію.

Ці твердження щодо зв'язку оптимізації та обмежень за часом інтерпретують у термінах інформаційного підходу, виходячи з поняття *ентропії*. Відкрита система має тенденцію до зменшення внутрішньої ентропії завдяки взаємодії із зовнішнім середовищем і прийняттю відповідних керівних рішень згідно з призначенням (метою) системи. Проте існує певне значення залишкової ентропії, зумовлене характеристиками зовнішнього середовища, нижче за яке ентропія не зменшується (наприклад, інформація, потрібна для прийняття керівного рішення, не може бути строго детермінованою чи абсолютно повного). Окрім того, цикл прийняття рішення — від збирання інформації (перед ним ентропія має певне початкове значення) до прийняття остаточного рішення потребує певного часу. Залежності від початкового значення ентропії (початкового рівня інформованості) й ефективності методу прийняття рішення буде отримано між зменшенням ентропії та часу на прийняття рішення різні співвідношення.

У багатьох випадках (зокрема, у системах реального часу) доводиться приймати рішення в стислі терміни, менші за доцільні. Тому слід зважати ще й на додаткові характеристики алгоритмів пошуку рішень, такі як можливість знайти повне рішення за найкоротший час із подальшим його поліпшенням.

У реальному житті складність і швидкі зміни факторів і обмежень залишають мало часу для високої точності. Зміна та дія факторів із затримкою пояснюють, чому для нас важлива не так оптимізація, як задоволення потреб і вимог за раціонального рівня їх якості.

Ще одна можливість подолати розрив між потрібним і припустимим часом перебігу підготовлення прийняття рішень полягає в послабленні вимог до якості виконуваних робіт, у ставленні лише розумних вимог до інформаційних та інших аспектів проблеми. Унаслідок цього час, потрібний для підготовки рішень, скорочується, якість прийнятого рішення зменшується, але можливі втрати компенсуються додатковим ефектом від ранньої реалізації підготовлених рішень. Забезпечити розумний компроміс між цими протилежними вимогами можна лише за допомогою глибокого та всебічного аналізу.

Водночас за аналогічною схемою слід проаналізувати і потреби в матеріальних і трудових ресурсах, а також можливість їх задоволення. Підготовка прийняття рішення – це всебічне дослідження проблемної ситуації, причин її виникнення та способів розв'язання, що інколи потребує чималих ресурсів.

Використання матеріальних ресурсів і праці слід розглядати з погляду забезпечення якнайефективнішого використання наявних ресурсів, розподіляючи їх за найперспективнішими напрямками.

Формулювання та структуризація мети розв'язання проблемної ситуації. Одним зі способів розкриття внутрішньої структури мети є побудова *дерева цілей*, яке використовується в системному аналізі. Теорія прийняття рішень не може підказати керівникові мету діяльності. Вона допомагає йому подолати чи зменшити суперечливість системи цілей і забезпечити прийняття рішень, що якнайкраще відповідають поставленим цілям.

Обираючи варіанти рішень, слід брати до уваги конкретні місце та час. Теорія прийняття рішень не вивчає істотні питання виявлення чи генерації альтернатив. У ній варіанти рішень розглядають як наперед задані і потрібно обрати лише найкраще з них. Проте зробити це ефективно можна лише в тому разі, коли найкращий (чи близький до нього) варіант є в переліку альтернатив. На думку фахівців, помилки в управлінні виникають переважно через нездатність знайти найкращі способи розв'язання задачі.

В ідеалі бажано виявити всі можливі дії, щоб усунути причини проблеми й, отже, дати децидентові можливість досягнути своїх цілей. Проте на практиці він не завжди має достатньо знань або часу для формулювання й оцінювання кожної альтернативи. До того ж дуже велика кількість альтернатив, навіть якщо всі вони реалістичні, часто призводить до плутанини. Тому децидент зазвичай звужує можливості вибору, щоб серйозно розглянути кілька альтернатив, які видаються йому найбажанішими.

Замість пошуку якнайкращого можливого рішення, люди продовжують перебирати альтернативи лише до того часу, поки не виявлять ту, що відповідає певному мінімальному стандарту. Розуміючи, що для пошуку оптимального рішення потрібно занадто багато часу, грошей або зусиль, деciденти обирають рішення, що дає змогу усунути проблему.

Слід намагатися брати до уваги достатньо широкий спектр можливих рішень. Потрібно виконати поглиблений аналіз важких проблем, щоб синтезувати кілька справді різних альтернатив, включаючи можливість бездіяльності. Коли керівництво не в змозі оцінити, що відбудеться, якщо нічого не робити, існує небезпека розпочати негайні дії. Однак дія заради власне дії підвищує ймовірність реагування на зовнішній симптом проблеми, а не на її приховану головну причину.

Звичайно, задача оцінювання альтернатив у складних проблемах вибору достатньо важка, проте в ній є одне істотне припущення про те, що набір альтернатив уже відомий. Іноді ж виявляється, що найкращий розв'язок проблеми пов'язаний із новим поглядом на неї, тобто з пошуком нової альтернативи. Отже, проблема повноти списку альтернатив – одна з найскладніших у процесі вибору.

Описання можливих станів і дій зовнішнього середовища. Цей етап за змістом аналогічний визначенню альтернатив і тісно пов'язаний із ним. Якщо в ході пошуку альтернатив увагу сконцентровано на керованих із погляду децидента факторах, то як зовнішнє середовище розглядають чинники, якими не можна керувати, але під дією яких також формуються результати розв'язання проблемної ситуації.

Поділ факторів на *керовані* та *некеровані* багато в чому залежить від керованості та тривалості періоду реалізації прийнятих рішень. Аналогічно до визначення альтернатив у теорії прийняття рішень усі значення стану зовнішнього середовища для прийнятого рішення вважають передбаченими, тобто суттєві проблеми їх виявлення не розглядаються. Аналіз зовнішнього середовища охоплює виявлення всіх некерованих факторів, що суттєво впливають на формування проблемної ситуації та спробу її розв'язання, а також прогнозування рівня та інтенсивності впливу факторів у період реалізації прийнятого рішення.

Оцінювання можливості виникнення конкретних станів зовнішнього середовища. Теорія прийняття рішень вивчає особливості побудови процесу обрання найкращої альтернативи залежно від ступеня знання розподілу об'єктивних або суб'єктивних ймовірностей виникнення конкретних станів зовнішнього середовища, а також за умов невизначеності та активності зовнішнього середовища (ігрові моделі). Характеристики відповідних розподілів у теорії прийняття рішень не визначаються, і це є предметом попередньо виконуваних статистичних досліджень.

Виявлення можливих результатів дій. Результат реалізації альтернативи – це узагалі кажучи багатогранне явище, яке внаслідок різноманітних причинно-наслідкових ланцюжкових зв'язків може виявлятися в різних місцях і у різні періоди часу. Тому потрібно не лише виявляти всі компоненти вектора результатів реалізації альтернатив, але й передбачити місце та час їх виникнення. При цьому не можна обмежуватися лише основними результатами, пов'язаними з поставленою метою.

Побічні результати подекуди можуть бути так важливі, що від них залежить припустимість або неприпустимість обраного варіанта дій. Особливо важливо зважати на фактор часу, оцінюючи наслідки дій, оскільки від тривалості періоду реалізації прийнятого рішення суттєво залежать показники результативності.

Описання і оцінювання реалізації альтернатив у конкретних умовах зовнішнього середовища. На цьому кроці для кожного окремого варіанта дії та стану зовнішнього середовища конкретизуються результати якісного аналізу з попередніх етапів, тобто для кожної альтернативи в довільному стані зовнішнього середовища потрібно описувати якісні та кількісні характеристики результатів.

Вибір критеріїв оцінювання відповідності результатів дій поставленим цілям. Цей етап у теорії прийняття рішень зазвичай виділяють відразу після етапу конкретизації мети. У межах такого підходу вже під час постановки мети можна повністю передбачити якісну структуру результатів реалізації альтернатив, які в цей час іще невідомі. Таке спрощення зумовлене сучасним рівнем розвитку теорії.

Зі змісту попередніх етапів випливає, що структура кортежу результатів стає зрозумілою тільки після глибокого аналізу процесів. Лише знаючи якісні властивості об'єкта, можна добрати прийнятні критерії визначення відповідності його стану поставленій меті.

Численні вади управління спричинені тим, що критерії якості рішення не дають змоги охопити всі аспекти оцінюваного явища. Унаслідок цього після проведення запланованих заходів часто виявляється, що окремі аспекти результатів навіть не відповідають поставленій меті, не кажучи вже про негативні побічні наслідки в інших галузях економіки, суспільстві та природі. Кількість критеріїв залежить від складності як самої мети, так і кортежу результатів дії. У теорії прийняття рішень центральною проблемою є *узгодження системи цілей*.

Оцінювання відповідності результатів дій поставленій меті. На цьому кроці застосовують два підходи:

1) попарне впорядкування результатів дії суб'єкта управління без виявлення об'єктивного підґрунтя для надання переваги;
2) розроблення методики об'єктивного оцінювання корисності кожного окремого кортежу результатів у конкретних умовах зовнішнього середовища.

У першому підході слід використовувати рекомендації, які відповідають одиночним перевагам, щоб процес прийняття рішень був несуперечливим і давав змогу розв'язати поставлену задачу. Мета дослідження – *визначити умови* (аксіоми), *які мають задовольняти оцінки суб'єкта управління*, щоб забезпечити існування кардинальної функції корисності. Така функція корисності дає прийнятнішим результатам дій вищу оцінку корисності. Задача пошуку самої функції корисності не ставиться. Цей підхід застосовують для стандартних рішень з обмеженою кількістю порівняльних альтернатив і станів зовнішнього середовища, він є наслідком дескриптивної теорії прийняття рішення.

Другий підхід спрямовано на розробку *функції корисності* на основі дослідження об'єктивних закономірностей функціонування керованого процесу без вивчення суб'єктивної поведінки та суб'єктивних переваг децидента в процесі управління. Подібна постановка задачі відповідає *нормативній теорії прийняття рішень* з об'єктивним обґрунтуванням управлінських рішень: насамперед нас цікавить не те, які рішення приймає децидент за даних конкретних умов, а те, чому перевагу надано певним результатам.

Оцінювання очікуваного ефекту дій. Оцінка відповідності результатів передбачуваних дій поставленим цілям не може бути основою для обрання найкращої альтернативи, тому що в ній не враховано невизначеність стану зовнішнього середовища. У теорії прийняття рішень розроблено певні правила, які дають змогу оцінити очікувану корисність альтернатив. Виділяються два основні питання дослідження:

1) об'єктивне врахування різного рівня невизначеності в ході оцінювання корисності альтернатив;
2) урахування ставлення суб'єкта управління до ризику прийняття рішення (схильність або несхильність до ризику).

Друге питання пов'язане здебільшого з *дескриптивною теорією*.

У нормативній теорії ми припускаємо, що відношення суб'єкта управління до ризику є нейтральним, і рішення приймають на основі об'єктивного врахування невизначеності.

Порівняння альтернатив за очікуваними ефектами дій (реалізаціями) та вибір найкращої. Визнання того, що альтернативи слід оцінювати з різних поглядів, робить проблему оцінки реалістичнішою, але ставить складне питання про повноту переліку аспектів. Звичайно, іноді сама проблема диктує децидентові, що саме треба взяти до уваги, а що відкинути, проте найчастіше це питання переростає в самостійну проблему. Інколи набір аспектів для децидента не такий, як, скажімо, у вищого керівництва. Кожну окрему альтернативу можна оцінювати лише після формулювання множини всіх аспектів. Оцінюючи рішення, децидент визначає переваги та вади кожної з них і можливі загальні наслідки. Зрозуміло, що будь-яка альтернатива пов'язана також із певними негативними аспектами.

У ході оцінювання варіантів рішень децидент намагається спрогнозувати те, що відбудеться в майбутньому, а майбутнє завжди є невизначеним. Безліч чинників, зокрема змінення зовнішнього оточення та неможливість реалізації рішення, можуть завадити втіленню бажаного. Тому важливий момент в оцінюванні – визначити можливості реалізації кожного припустимого рішення відповідно до намірів. Якщо наслідки певного рішення сприятливі, але шанс його реалізації невеликий, то воно може виявитися не найбажанішим варіантом вибору.

Якщо проблему визначено правильно, а альтернативні рішення ретельно зважено і оцінено, то зробити вибір порівняно просто. Децидент обирає альтернативу за найсприятливішими загальними наслідками. Коли ж проблема складна і доводиться брати до уваги множину компромісів, або інформація й аналіз суб'єктивні, то може трапитися, що всі альтернативи незадовільні.

Проблеми виникають тоді, коли система критеріїв якості досягнення мети багатовимірна. Якщо мета багатовимірна, то оцінки ефекту за відповідними критеріями для обрання найкращого варіанта зазвичай суперечливі, і в результаті формального дослідження можна побудувати лише множину недомінованих рішень (Парето-оптимальних розв'язків), а для остаточного обрання потрібна додаткова інформація від децидента.

Прийняття рішення. Виокремлення цього етапу пов'язане якісним характером прийняття рішення. На цьому етапі децидент доповнює результат формалізованого аналізу неформалізованими знаннями про об'єкт управління, зумовленими його досвідом та інтуїцією.

Реалізація рішення. Просте обрання альтернативи чи напрямку дій має невелику цінність для організації. Для розв'язання проблеми чи отримання вигоди з наявної можливості потрібно реалізувати рішення. Ефективність впровадження рішення підвищиться, якщо його визнають ті, кого воно стосується. Проте визнання рішення далеко не завжди відбувається автоматично, навіть якщо воно непогане. Інколи децидент може доручити ухвалення рішення тим, хто повинен буде його виконувати. Найчастіше ж він вимушений переконувати в правильності своїх поглядів інших людей в організації.

Визнання рішення значно полегшується, якщо до процесу його ухвалення залучені інші особи. Однак участь працівників в ухваленні рішень, як і будь-який інший метод управління, далеко не в кожній ситуації є ефективною. Загальновідомо, що чим більше осіб беруть участь в ухваленні рішення, тим триваліішим є процес, тому слід обмежити коло осіб, причетних до ухвалення рішення. Для повного впровадження рішень потрібно привести в дію весь процес управління, особливо його організаційну та мотиваційну функції. Вивчення суті окремих етапів ППР дає змогу оцінити можливості формалізації окремих його складових.

1.2. Структура задачі та види моделей прийняття рішень

Формальна постановка задачі прийняття рішень

Кожна окрема задача прийняття рішень являє собою елемент логічної схеми розроблення плану вирішення складної проблемної ситуації, а від процесу її розв’язання залежить технологія, інформація та значною мірою – організація функціонування цього елемента. Між такими задачами існує багато прямих і обернених зв’язків, тому їх зазвичай розв’язують із застосуванням ітеративних циклів, що інколи можуть зумовлювати переформулювання умов або нову постановку певної задачі.

Зрозуміло, що характер, ступінь невизначеності, кількість узятих до уваги факторів, конкретний вигляд критеріїв обрання альтернатив, процедура розв’язання істотно залежать від змісту, масштабу та припустимого часу розв’язання задачі. Однак формальна постановка задачі прийняття рішень має і самостійну цінність, тому що забезпечує початкові умови для розроблення нових класів методів і моделей прийняття рішень.

Одна з найзагальніших моделей задачі прийняття рішень Z_R має вигляд сімки

$$Z_R = \langle S, S^P, I, T^P, F^P, A, P \rangle,$$

де S– множина можливих ситуацій;

S^P– множина проблемних ситуацій($S^P \subset S$);

I– ідентифікатор проблемної ситуації (якщо I = 1, то конкретна ситуація $S_i \in S^P$, якщо ж I = 0, то немає потреби приймати рішення, оскільки ситуація не проблемна; для проміжних значень задається порогове значення, від якого і залежить належність чи неналежність ситуації до множини проблемних);

T^P– множина постановок (типів) задач прийняття рішень;

F^P: $S^P \rightarrow T^P$ – відображення множини проблемних ситуацій у множину постановок задач прийняття рішень;

A– множина можливих варіантів рішень;

P– система переваг децидента.

Задача полягає в тому, щоб за наявності цих структурних елементів обрати таке рішення з множини A можливих (припустимих) варіантів, що максимально відповідає системі переваг децидента P.

Систему переваг децидента P можна формально подати наступним чином:

$$P = \langle A, Q, K, F^Q, R \rangle,$$

де Q– множина критеріїв оцінювання якості рішень;

K– множина шкал критеріїв;

F^Q: $A \to Q$– відображення множини альтернатив A в множину критеріїв;

R – вирішуюче правило, що дає змогу на основі образів множини альтернатив A в області критеріїв Q розв'язати задачу прийняття рішень відповідно до її типу T^P, тобто обрати одну найкращу альтернативу, або знайти всі альтернативи, які відповідають поставленим умовам, або впорядкувати альтернативи за якістю.

Ця модель відповідає застосуванню математичних методів на багатьох етапах прийняття рішень.

Множина $A = \{x_i\}$ можливих (припустимих) варіантів рішень – це сукупність наявних альтернатив, що відповідають можливим способам досягнення мети і не порушують певних обмежень, властивих конкретній задачі прийняття рішень.

Множина критеріїв $Q = \{Q_j\}$ відображає різні суттєві для децидента аспекти мети функціонування системи; вона є одним із результатів системного аналізу ситуації.

Множина шкал критеріїв K ставить у відповідність кожному критерію множини Q шкалу (найменувань, порядкову, інтервалів або відношень), у якій вимірюються значення критеріїв.

Відображення F^Q: $A \to Q$ ставить у відповідність кожній альтернативі множини A (що описується зазвичай кортежем різнорідних змінних і параметрів) точку в просторі критеріїв; це відображення гомоморфне, тому що різні альтернативи можуть мати однакову якість.

Система переваг P– це один із неформальних елементів, який значною мірою зумовлює слабку структурованість задач прийняття рішень. Апроксимація системи переваг децидента в більшості випадків дає змогу за певних припущень спростити умови, щоб побудувати вирішуюче правило R або описати механізм обрання альтернативи з множини A.

В залежності від охоплення окремих етапів ППР застосовують різні формальні моделі задачі прийняття рішень. Якщо структурні складові задачі переважно визначено, задачу прийняття рішень Z_S можна описати як трійку

$$Z_S = \langle A, Q, R \rangle.$$

У цій постановці неявно передбачено, що вирішуюче правило визначає поняття кращої альтернативи, тобто формально скорочена модель відповідає задачі вибору.

Класифікація моделей і задач прийняття рішень

У процесах прийняття рішень застосовують моделі таких типів:

- дескриптивні та нормативні;
- індуктивні та дедуктивні;
- проблемно-орієнтовані та формальні;
- статичні та динамічні.

Дескриптивні та нормативні моделі. Вивчаючи ППР, розрізняють два основні підходи — *дескриптивний* і *нормативний*.

Основа *дескриптивного підходу — емпіричне дослідження рішень*, спрямоване насамперед на описання проблемної ситуації, поведінки окремих децидентів у ППР. Отже, мета цього підходу полягає у виявленні та вивченні закономірностей формування рішень у процесі взаємодії децидента з проблемою.

Нормативний підхід виходить з потреби в *теоретичному обґрунтуванні принципів раціонального вибору та раціональної послідовності етапів* – «норми» — у перебігу формування рішень. Він ставить дуже високі вимоги до децидента. Основою нормативних моделей (на кшталт «як має поводити себе ідеальний децидент») служать як певні аксіоматичні положення, так і результати аналізу і узагальнення дескриптивної інформації. Нормативні моделі застосовують для керування ППР, формування його елементів і зміни його перебігу.

Цими двома напрямами зумовлені різні вимоги до розроблення та застосування моделей. Вимоги до дескриптивних моделей аналогічні тим, що висувають до моделей пізнання (дослідження) природних процесів, характер і закономірності яких не залежать від моделей, що застосовуються для їх вивчення. Успіх у використанні природних ресурсів і сил залежить від точності опису законів і закономірностей їх функціонування.

Нормативні моделі активно застосовують для формування змісту ППР. Вони зумовлюють активні зворотні дії осіб, інтереси яких вони зачіпають. Нормативні моделі дають очікуваний позитивний ефект у формі поліпшення рішень лише тоді, коли контрдії певних осіб не зможуть нейтралізувати вплив моделей, або коли ці контрдії взято до уваги та створено відповідні стратегії керівних рішень.

У практичних системах прийняття рішень застосовують як результати дескриптивних досліджень, так і теорії нормативного підходу. Такий проміжний варіант називають *прескриптивним підходом*. Він рекомендує, як повинен діяти децидент із середніми можливостями й інтелектом, якщо він здатний систематизовано працювати над проблемою. У цьому разі не гарантується знаходження найкращих у певному розумінні рішень; натомість обирається «непогане», доволі послідовне та несуперечливе рішення.

Індуктивні та дедуктивні моделі. В *індуктивному підході* модель отримують, спостерігаючи за одиничними фактами, важливими для прийняття рішень. Індуктивним методом розробляють моделі для розв’язання конкретних проблем. Такі моделі містять специфічні, історично сформовані властивості процесу, що моделюється.

Основна проблема побудови індуктивних моделей – це вибір із сукупності одиничних спостережень тих, що дають змогу побудувати адекватну модель задачі прийняття рішень, і формалізоване подання їх структури та зв’язків. Значення індуктивних моделей полягає в тому, що за допомогою простішого опису взаємозв’язків наочно та стисло подається інформація, що міститься у великій сукупності спостережень. Якість індуктивних моделей залежить від того, як удасться, з одного боку, так спростити модель, щоб розв’язати проблему з прийнятними витратами, а, з іншого –, відобразити основні властивості реальності.

Дедуктивний підхід до побудови моделей виходить не з конкретних фактів, а зі спрощеної системи гіпотетичних ситуацій. Основою моделювання при цьому є замкнена та спрощена абстрактна проблема. У реальності виникають переважно конкретні проблеми, тимчасом як теорія прийняття рішень виходить з абстрактних ситуацій керування. За допомогою якісного аналізу об’єктивну реальність редукують і агрегують у спрощену гіпотетичну абстрактну проблему, що описується у вигляді дедуктивної моделі.

Якість рішення та його практична користь залежить насамперед від того, наскільки якісним є результат абстрагування проблеми, що має охоплювати основні характеристики реальної проблемної ситуації.

Проблемно-орієнтовані та формальні моделі. Цей поділ відображає на застосування певних методів побудови моделей або методів експериментування з орієнтацією децидента. На ґрунті нових (уперше розроблених або запозичених з інших галузей науки та практики) методів моделювання будують нові (*проблемно-орієнтовані*) моделі проблеми. На наступних етапах вивчають можливості застосування таких моделей і їх специфічних властивостей для розв’язання задач прийняття рішень.

У прийнятті рішень для *формальних моделей* прийняття рішень використовують наявні методи розв’язання проблем. Аналіз алгоритмів цих методів дає змогу сформулювати конкретні вимоги до структури та властивостей моделей. При цьому можливі труднощі з пристосуванням подібних моделей (зокрема, забезпеченням їх інформацією). Окрім того, формальна модель може не відповідати структурі та властивостям реальних параметрів проблемної ситуації. У практиці наукових досліджень достатньо часто шукають проблемні ситуації, для розв’язування яких застосовні розроблені моделі та методи експериментування з ними, а не навпаки.

Одноперіодні (статичні) та багатоперіодні (динамічні) моделі. В *одноперіодних* моделях виходять із припущення, що сума оптимальних окремих розв’язків у окремих періодах їх реалізації є оптимальним розв’язком для всієї послідовності періодів. Адекватність цього припущення зазвичай не підтверджується, тому що короткочасний ефект часто приводить до великих втрат у перспективі. Приймаючи рішення, слід збалансовувати короткотермінові та довготермінові аспекти оцінювання оптимальності.

Урахування довготермінових ефектів реалізації рішень – це не лише проблема формування системи цілей одноперіодної моделі прийняття рішень. Процес управління об'єктивно піддається декомпозиції на певні періоди, на кожному з яких потрібно формувати нові рішення для подальших дій. Періодичність прийняття рішень залежить від періодичності надходження нової суттєвої інформації про внутрішні та зовнішні параметри процесу керування, що сигналізують виникнення потреби в корегуванні управлінських впливів. Приймаючи рішення, завжди слід зважати на можливий подальший перебіг подій і передбачити способи глибокого реагування на зміни умов. Отже, одноперіодні моделі загалом можна розглядати як елементи *багатоперіодної моделі*. Якщо можна узгодити ці моделі, то формалізована процедура узгодження одноперіодних моделей є багатоперіодною моделлю ППР.

Задачі прийняття рішень класифікують за багатьма ознаками, основні з яких наступні:

- рівень структурованості проблеми, що розв'язується;
- властивості зовнішнього середовища та децидента;
- кількість децидентів;
- спосіб подання мети;
- можливості отримання потрібної інформації (обсяг, складність і тип експертної інформації, потрібної для прийняття рішень).

За **рівнем структурованості** розрізняють *структуровані*, *слабкоструктуровані* та *неструктуровані* проблеми прийняття рішень.

Структуровані проблеми зазвичай дають змогу побудувати формальну постановку задачі прийняття рішень, що належить до відомого класу задач, для яких існують алгоритми їх розв'язання.

Слабкоструктуровані проблеми є найцікавішими. Для їх розв'язання застосовують як теорію прийняття рішень, так і інші дисципліни (системний аналіз, психологію тощо). Вони мають міждисциплінарний характер.

Неструктуровані проблеми вивчаються у суспільних дисциплінах.

В багатьох випадках існує спокуса використати відомі формальні задачі та методи для розв'язання слабкоструктурованих проблем. Якщо такі дії серйозно не обґрунтовані, то ми можемо розв'язати не реальну проблему, а ту, яку вигадали для того, щоб мати змогу застосувати відому нам модель і розв'язати відому задачу, хоча вони зовсім не відображають суті реальної проблеми.

За **властивостями зовнішнього середовища та децидента** розрізняють *детерміновані* задачі, *стохастичні* задачі прийняття рішень та *задачі з невизначеністю* й *активною протидією*.

Ці задачі поділяються *за ступенем врахування невизначеності* в процесі прийняття рішень.

У *детермінованих задачах* усі фактори, що суттєво впливають на керовані процеси, визначені; їх точні числові значення відомі суб'єктові управління. Подібні ситуації на практиці зустрічаються рідко. Детерміновані задачі використовують як спрощення реальних задач керування, коли, наприклад, найімовірніше значення чинника розглядають як визначене постійне. Детермінована модель, узагалі кажучи є, спрощеною щодо реальної ситуації.

У *стохастичних задачах* описано розподіл ймовірностей за різними числовими значеннями факторів, тобто взято до уваги стохастичну невизначеність. Такі моделі ближчі до реальних умов рішень, але для їх побудови та експериментування з ними потрібні суттєво більші витрати на інформаційне, математичне, технічне та кваліфікаційне забезпечення.

У *задачах з невизначеністю* статистичних даних немає, або вони невідомі децидентові. Потрібну інформацію (значення суб'єктивних ймовірностей, параметрів лінгвістичних змінних та ін.) доводиться отримувати, опитуючи експертів, а якщо це неможливо, то застосовувати методи прийняття рішень в умовах невизначеності.

У *задачах з активною протидією* невизначеність розглядають не як байдужу до наших прагнень «природу», а активного суперника чи множину суперників, що можуть і протидіяти, і в певних ситуаціях сприяти децидентові. Такі задачі належать до ігрового типу.

За **кількістю децидентів** розрізняються *задачі з одним*, *кількома рівноправними* та *кількома децидентами з власними інтересами та важливістю*.

Якщо децидент один, то з певними спрощеннями після формалізації ми отримаємо *одно- чи багатокритерійну задачу оптимізації з обмеженнями* (коли кількість децидентів – нуль, одержимо описову, тобто дескриптивну модель ситуації). Коли є кілька рівноправних децидентів, то маємо клас *задач голосування*, у яких альтернативи обираються за допомогою різноманітних процедур голосування. У разі нерівноважливих децидентів отримуємо *задачі експертного оцінювання* чи *ігрового типу*.

За **способом подання мети** розрізнятимемо *однокритерійні*, *багатокритерійн із кількісними та якісними критеріями* задачі та *багатокритерійні з ієрархією критеріїв*.

До *однокритерійних* належать як задачі з одним критерієм, так і модифіковані багатокритерійні, у яких один критерій одержано згортанням усіх наявних критеріїв у один або обґрунтуванням існування та побудови відповідної функції корисності. У багатокритерійних задачах оптимальний розв'язок за одним із критеріїв буде не оптимальним за іншим. На практиці найчастіше можна реалізувати лише один розв'язок, оптимальність якого пов'язана з можливістю однозначно впорядкувати розв'язки за рівнем досягнення генеральної мети. Цю задачу загалом розв'язують із використанням одного узагальненого критерію оцінки. Отже, багато практичних моделей прийняття рішень переважно однокритерійні, тому вони лише в найпростіших випадках адекватні дійсності. При цьому суть об'єктивних суперечностей і характер їх проявів у конкретному керованому процесі приховують, і виникає лише видимість розв'язання проблеми.

Розв'язок *багатокритерійних задач із кількісними критеріями*, узагалі кажучи, є множиною Парето-оптимальних альтернатив. Тому для розв’язування таких задач широко застосовують діалогові методи, які у відкритій або прихованій формі спрямовані на те, щоб виявити додаткову інформацію про систему переваг децидента і знайти в кращому випадку один розв’язок або принаймні обмежитися підмножиною множини Парето.

Якщо існує кілька критеріїв, то це означає, що в межах певної системи знань і понять вони є невзаємозамінними, непоєднуваними та неузгоджуваними. Тому кількісні зміни окремих критеріїв, що відображають мету системи, непорівнянні між собою.

Багатокритерійні задачі з ієрархією критеріїв виникають унаслідок якісного аналізу структури мети з використанням дерева цілей та інформації про домінування на множині критеріїв у конкретній проблемній ситуації. Лише якісний аналіз структури мети може бути основою розроблення способів розв’язання достатньо складної проблеми. Слід виявити, якщо це можливо, формальні зв’язки між критеріями оцінювання якості розв’язання проблеми. Узагальненим критерієм оцінювання може бути один (найважливіший) критерій або синтетичний показник (згорнутий критерій), що виник унаслідок переведення задачі в клас однокритерійних або побудови ядра перспективних альтернатив із поступовим його звуженням. Слід проаналізувати також можливість переведення частини критеріїв у обмеження, завдяки чому іноді вдається суттєво спростити проблему.

Якщо вдається побудувати відношення домінування на множині критеріїв, то множина Парето-оптимальних розв’язків суттєво звужується. У разі ж використання дерева цілей або його піддерева, коли множина альтернатив відома, для розв’язання задач такого типу з успіхом застосовують метод аналізу ієрархій, який дає змогу за результатами опитування експертів у вигляді системи бінарних відношень не лише отримати остаточне впорядкування можливих варіантів рішень, але й оцінити ступінь несуперечливості тверджень експертів.

Розглянуті вище класифікаційні ознаки та відповідні класи задач прийняття рішень наведено в табл. 1.1.

Таблиця 1.1. Класифікація задач прийняття рішень

№	Класифікаційна ознака	Класи задач прийняття рішень
1	Рівень структурованості розв’язуваної проблеми	Структуровані
		Слабкоструктуровані
		Неструктуровані
2	Властивості зовнішнього середовища та децидента	Детерміновані
		Стохастичні
		З невизначеністю
		З активністю (протидія чи сприяння)
3	Кількість децидентів	Один
		Кілька рівноправних (задачі голосування)

		Кілька з власними інтересами (експертне оцінювання чи ігрові ситуації)
4	Спосіб подання мети	Однокритерійні (включно зі згортками критеріїв)
		Багатокритерійні з кількісними та якісними критеріями
		Багатокритерійні з ієрархією критеріїв (без чітких або нечітких відношень переваг у просторі критеріїв та з ними)
5	Можливості отримання потрібної інформації	Без експертної інформації
		Інформація про переваги на множині критеріїв
		Інформація про важливість альтернатив
		Інформація про переваги на множині критеріїв і наслідки альтернатив

Будуючи моделі, необхідно, без сумніву, окрім об’єктивного аспекту, зважати на можливість використання моделі із суб’єктивного погляду. Цей аспект можна розглядати як суб’єктивну адекватність моделі, тобто її відповідність поставленим вимогам, знанням, навичкам, характеристикам децидента. Суб’єктивний аспект відображається в постановці задачі, підході до інформаційного відображення об’єкта управління, доборі методів синтезу моделей і експериментування з ними.

Отримані внаслідок застосування різних підходів, на основі різної інформації моделі різняться між собою. Вони мають свої сильні та слабкі сторони і доповнюють одна одну в ППР. У теорії прийняття рішень розробляються алгоритми та вивчаються формальні проблеми, які можна розв’язати за допомогою алгоритмів, але не досліджується, чи існують у практиці керування ситуації, яким вони б відповідали (тобто проблема адекватності формальних моделей і методів не досліджується чи досліджується недостатньо). Завдяки поєднанню відповідного апарату теорії прийняття рішень і досвіду прийняття практичних рішень виникає можливість удосконалювати рішення на основі збалансованих підходів до формалізації проблем управління.

Тема 2. Бінарні відношення та механізм прийняття рішень

2.1 Типи, властивості та основні дії над бінарними відношеннями

Бінарні відношення є теоретичним підґрунтям теорії прийняття рішень, оскільки для дослідження переваг децидента використовують основні типи бінарних відношень, а властивості бінарних відношень інтерпретуються якісно в термінах системи переваг децидента. Доведені твердження дають можливість побудувати алгоритми перевірки експериментальних відношень на наявність таких важливих властивостей, як транзитивність, ациклічність, лінійність, щоб виявити й корегувати суперечності в міркуваннях децидента.

Факторизація відповідає процедурі агрегування системи переваг децидента та дає змогу досліджувати її загальні властивості й корегувати отримані відношення. Апарат функцій вибору виявляється зручним для формулювання змістовних властивостей, у разі виконання яких вибір можна вважати «розумним», «несуперечливим», «раціональним», і дослідження та формалізації різноманітних принципів вибору. Основні задачі дослідження та застосування механізмів вибору – аналіз, синтез, апроксимація реального вибору децидента, оцінювання складності реалізації механізмів вибору та їх оптимізація.

Відношення – це твердження, яке відображає взаємний зв’язок між двома чи більшою кількістю об’єктів.

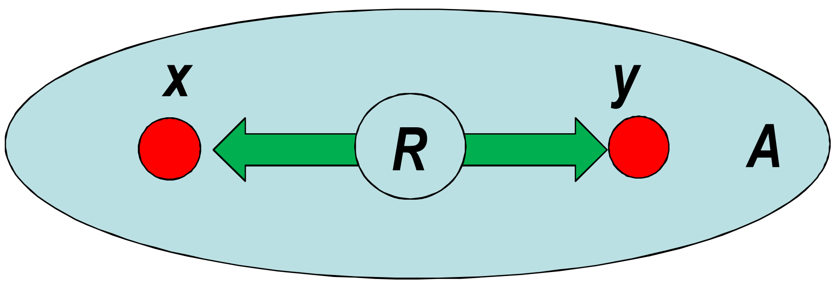
Приклад: «число 12 більше за число 10», «Марія – сестра Івана», (об’єкти Марія та Іван належать одному класові «сім’я»); об’єкти 10 і 12 впорядковані всередині класу «натуральні числа»).

Для побудови відношення необхідно описати множину об’єктів, на яких воно буде визначене (множини-носія відношення).

Нехай A – множина певних об’єктів (наприклад, можливих варіантів рішень). Множина всіх пар (x,y), $x\in A$, $y\in A$, є Декартовим добутком множини A самої на себе – $A\times A$.

Бінарне відношення R на множині A – підмножина $A\times A$, тобто

$R\subseteq A\times A$. Якщо між членами пари існує відношення R, то цей факт позначається як xRy або $(x,y)\in R$. Множина A – носій відношення R.



Бінарне відношення можна задати переліком пар, що перебувають у ньому, або за допомогою правила, яке дає змогу з’ясувати, перебуває пара в певному відношенні, чи ні.

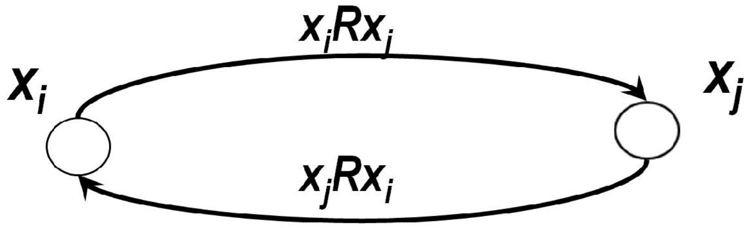
Бінарні відношення можна подавати за допомогою:

– формальних співвідношень;

– матриць;

$$R=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

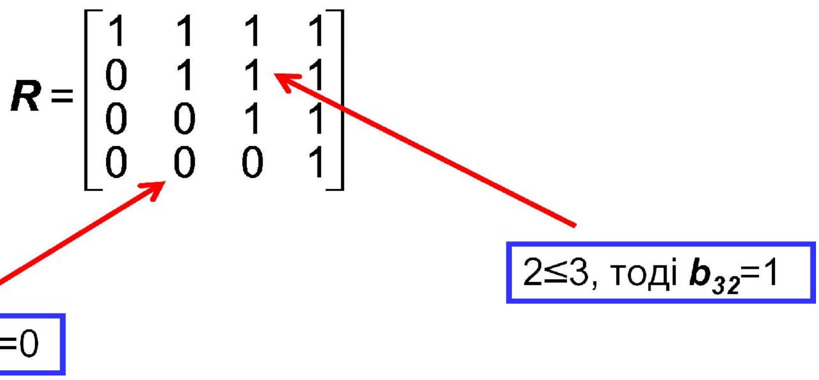
– графів;



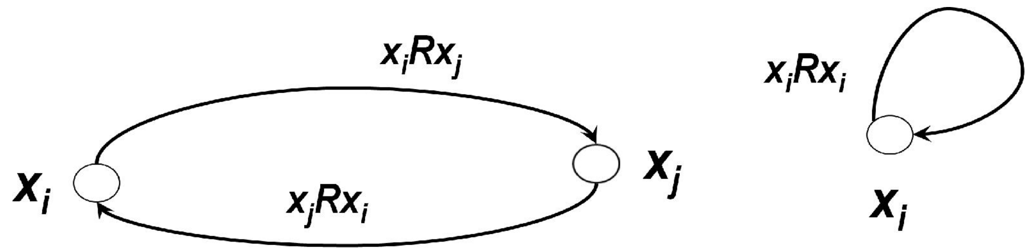
І … ентній множи… що n і розгля… га і-й стовпе… менти матрі…

де $x_i\in$ … ині A можна…

… льним чином … ь, що описуі…



Поставимо у взаємно однозначну відповідність елементам множини $A=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ вершини графа $G(R)=\langle L,N\rangle$. Тут $N=\{1, \ldots, n\}$ – множина вершин графа G, L – множина його дуг, причому $L=\{(i, j)|x_iRx_j\}$, тобто дуга в графі G з'єднує вершину i з вершиною j лише тоді, коли $x_i\in A$, $x_j\in A$ перебувають у відношенні R: x_iRx_j (у випадку x_iRx_i дуга перетворюється на петлю). Отже, бінарне відношення можна подати у вигляді орієнтованого графа G(R).



Верхній перетин $R^+(x)$ відношення R множиною-носієм A відносно елемента x – множина $R^+(x)=\{y\in A|(y,x)\in R\}$.

Нижній перетин $R^-(x)$ відношення R множиною-носієм A відносно елемента x – множина $R^-(x)=\{y\in A|(x,y)\in R\}$.

Приклад. Нехай A={4, 5, 6, 7, 8, 9}, R=«>», x=6. Тоді $R^-(6)=\{7, 8, 9\}$.

Отже, $R^+(x)$ – це множина всіх елементів $y\in A$, які знаходяться у відношенні R із фіксованим елементом x, а $R^-(x)$ – множина всіх елементів $y\in A$, з якими елемент x знаходиться у відношенні R. Щоб однозначно описати відношення R за допомогою перерізів, варто задати множину верхніх перерізів $R^+(x)$ для всіх елементів $x\in A$, або множину нижніх перерізів $R^-(x)$ для всіх $x\in A$, тобто

$$\boldsymbol{R}^{+}=\{\boldsymbol{R}^{+}(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{A}\},$$

$$\boldsymbol{R}^{-}=\{\boldsymbol{R}^{-}(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{A}\}.$$

Основні елементарні бінарні відношення:

– порожнє відношення R (позначають ∅), яке не виконується для жодної пари $(x, y)\in A\times A$, тобто $R=\emptyset$: $(\forall(x, y)\in A\times A)(\neg\exists(x, y)\in R)$; у матриці B всі елементи нульові; граф G не має дуг; для будь-якого елемента $x\in A$ $R^-(x)=R+(x)=\emptyset$.

– повне відношення (позначають U), що виконується для всіх пар $(x,y)\in A\times A$, тобто R=U: $(\forall(x, y)\in A\times A)((x, y)\in R)$; у матриці B всі елементи дорівнюють 1; граф G повний; для будь-якого елемента $x\in A$ $R^-(x)=R^+(x)=A$.

– діагональне відношення (позначають E), що виконується для однакових елементів, тобто R=E: $((\forall(x,y)\in A\times A)\wedge(x=y))((x,y)\in R)$; у графі G(E) є лише петлі; $R^+(x)=R^-(x)=\{x\}$; матрицю $B(E)=\|b_{ij}(E)\|$ означено так:

$$b_{ij}(E)=\begin{cases}1, \text{якщо } i=j;\\ 0, \text{якщо } i\neq j.\end{cases}$$

– антидіагональне відношення (позначають Ē), яке виконується для всіх пар $(x,y)\in A\times A$, у яких $x\neq y$, тобто R=Ē: $(\forall(x,y)\in A\times A)\wedge(x\neq y))((x, y)\in R)$; у графі G(E) є всі дуги, крім петель; $R^-(x)=R^+(x)=A\setminus\{x\}$; матрицю $B(\bar{E})=\|b_{ij}(\bar{E})\|$ означено як

$$b_{ij}(\bar{E})=\begin{cases}0, \text{якщо } i=j;\\ 1, \text{якщо } i\neq j.\end{cases}$$

Над бінарними відношеннями можна виконувати такі основні операції:

– перетин,
– об’єднання,
– знаходження різниці,
– симетричної різниці,
– доповнення,
– оберненого відношення,
– композиції,
– звуження,
– включення.

Розглянемо ці операції на прикладі двох відношень $P \subseteq A \times A$ та $Q \subseteq A \times A$

Перетин $P \cap Q$ відношень P і Q – відношення, якому належать пари (x,y), спільні для відношень P і Q: $P \cap Q = \{(x,y) \in A \times A | (x,y) \in P) \wedge (x,y) \in Q\}$.

Об’єднання $P \cup Q$ відношень P і Q – відношення, яке утворюють пари, що входять до P чи Q, тобто $P \cup Q = \{(x,y) \in A \times A | (x,y) \in P) \vee (x,y) \in Q\}$.

Різниця $P \setminus Q$ відношень P і Q – відношення, що складається з пар $(x,y) \in P$, які не входять до Q, тобто $P \setminus Q = \{(x, y) \in A \times A | (x,y) \in P) \wedge (x, y) \notin Q\}$.

Симетрична різниця $P \Delta Q$ відношень P і Q – відношення, яке складається з пар відношення $P \cup Q$, що не належать до $P \cap Q$, тобто $P \Delta Q = (P \cup Q) \setminus (P \cap Q) = (P \setminus Q) \cup (Q \setminus P)$.

Композиція $P \circ Q$ відношень P і Q – відношення, яке утворюють усі пари $\{x,y\} \in A \times A$, для яких існує таке $z \in A$, що правдиві твердження $(x,z) \in P$ і $(z,y) \in Q$, тобто $P \circ Q = \{(x,y) \in A \times A | (\exists z \in A): ((x,z) \in P) \wedge ((z,y) \in Q))\}$.

Приклади.

Нехай: $$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Перетин $$\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Об’єднання $$\boldsymbol{P} \cup \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Різниця $$\boldsymbol{P} \setminus \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Симетрична різниця $$\boldsymbol{P} \Delta \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Композиція $$P \circ Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Доповнення відношення $\overline{P}$ – відношення, до складу якого входять пари (x,y)∉P, тобто $=\overline{P}$ {(x,y)∈A×A|(x,y)∉P}, або $\overline{P}$=(A×A)\P.

Обернене до відношення P⊆A×A – відношення P−1, до складу якого пара (x,y) входить тоді й лише тоді, коли (y,x)∈P: P−1={(x,y)∈A×A|(y,x)∈P}.

Звуження відношення P на підмножину D⊆A – відношення PD, до складу якого входять такі пари (x,y)∈P, що x∈D й y∈D, тобто PD={(x,y)∈A×A|((x,y)∈P)∧(x∈D)∧(y∈D)}.

Відношення P міститься у відношенні Q, якщо всі пари (x,y)∈P належать також відношенню Q, тобто P⊆Q: (∀(x,y)∈P)⇒(x,y)∈Q.

– рефлексивність (в матриці відношення на головній діагоналі завжди стоять 1, а у відповідному графі при кожній вершині є петля);

– антирефлексивність (в матриці відношення на головній діагоналі завжди стоять 0, а в графі немає петель);

– симетричність (у матриці елементи b_{ij} і b_{ji}, розміщені симетрично відносно головної діагоналі та рівні між собою, у графі наявність дуги (x_i,x_j) означає, що існує дуга (x_j,x_i));

– асиметричність (з елементів b_{ij} і b_{ji} обов'язково один 0, інший 1, у графі немає водночас дуг (x_i,x_j) і (x_j,x_i), але можуть бути петлі);

– антисиметричність (у графі немає водночас дуг (x_i,x_j) і (x_j,x_i), але можуть бути петлі);

– транзитивність (відношення, для якого P◦P⊆P, тобто якщо xPz і zPy, то xPy – якщо існує шлях з x в y, то існує дуга (x,y))

– ациклічність (відношення P, для якого $P^k \cap P^{-1} = \emptyset$ для довільного k, тобто якщо в графі ациклічного відношення P вершини x та y з'єднані шляхом, то в ньому немає дуги (y,x)).

– Ациклічність і транзитивність відображають певні природні взаємозв'язки між об'єктами:

Якщо об'єкт x у певному розумінні кращий за y, а y кращий за z, то природно вважати, що об'єкт x кращий, ніж z (транзитивність), і щонайменше об'єкт z не кращий за x (ациклічність).

Толерантність (байдужість) – відношення P, яке водночас рефлексивне та симетричне (позначається як I).

Приклад. Відношення нерозрізненості, що виникає в разі вимірювання характеристик об'єктів: два об'єкти нерозрізнені за деякою ознакою, якщо різниця її значень не перевищує похибки вимірювання.

Відношення толерантності нетранзитивне (нагромадження похибки при послідовних порівняннях об'єктів не дає підстав для висновку про нерозрізненість першого й останнього об'єктів у ланцюжку порівнянь).

Еквівалентність – відношення P, яке є водночас рефлексивним, симетричним і транзитивним.

Отже, еквівалентність – це толерантність, що має властивість транзитивності.

Приклад. Для множини фігур на площині дві фігури A та B еквівалентні, якщо вони мають рівну площу.

Відношення еквівалентності P на довільній множині A означають ще так:

Нехай задано відображення f: A→B множини A в деяку множину B; будемо вважати xPy еквівалентним тоді й лише тоді, коли f(x)=f(y).

Квазіпорядок – відношення P, яке є водночас рефлексивним і транзитивним.

Відношення квазіпорядку виникає в разі порівняння декількох альтернатив за векторним критерієм якості.

Порядок – відношення P, яке є водночас рефлексивним, антисиметричним і транзитивним.

Строгий порядок – відношення P, яке є водночас асиметричним і транзитивним.

Лінійний порядок – відношення P, яке є водночас рефлексивним, антисиметричним, транзитивним і зв'язним.

Досяжність для довільного відношення P – найменше з відношень квазіпорядку, яке містить у собі відношення P. Інакше кажучи,

$$\tilde{P} = E \cup \hat{P} = E \cup \left(\bigcup_{i=1}^{card(A)} P^i \right).$$

де E – діагональне відношення, A – носій відношення. Матриця досяжності має 1 на головній діагоналі, а відповідний граф – петлі при кожній вершині, оскільки будь-яка вершина графа досяжна сама із себе, тобто відношення досяжність рефлексивне. Відношення досяжності P відображається наявністю шляху в графі G(P), тобто $a\tilde{P}b$ (де a,b∈A) тоді й лише тоді, коли в графі G(P) відношення P існує шлях з вершини a до вершини b.

Взаємна досяжність $\overleftrightarrow{P}$ для довільного бінарного відношення P – симетрична складова відповідного відношення досяжності,

$$\overleftrightarrow{P} = \tilde{P} \cap \tilde{P}^{-1}$$

Отже, $\overleftrightarrow{P}$ тоді й лише тоді, коли в графі G(P) відношення P є як шлях із вершини a до вершини b, так і шлях із b до a, тобто вершини a та b належать контуру в графі G(P).

Наведені результати широко використовують, досліджуючи властивості бінарних відношень, отриманих здебільшого експериментально як результат опитування децидентів-експертів у різноманітних ситуаціях прийняття рішень.

Окремі твердження дають можливість побудувати алгоритми перевірки експериментальних відношень на наявність таких важливих властивостей, як транзитивність, ациклічність, лінійність та ін.

Це, у свою чергу, допомагає виявити та скорегувати суперечності в поведінці децидента й можливі аномальні ситуації прийняття рішень.

2.2 Агрегування відношень. Поняття фактор-відношення

Агрегування, або **укрупнення відношень** дає змогу виявити та дослідити їхні загальні властивості, а також розробити процедури корегування відношень, отриманих експертним шляхом. У разі агрегування структуру первісного відношення переносять з однієї множини-носія – на іншу, одержану як результат гомоморфного відображення носія первісного відношення.

Елементи множини-носія A_D агрегованого відношення P_D можна розглядати як підмножини (класи) множини A – носія первісного відношення, що утворюють її розбиття.

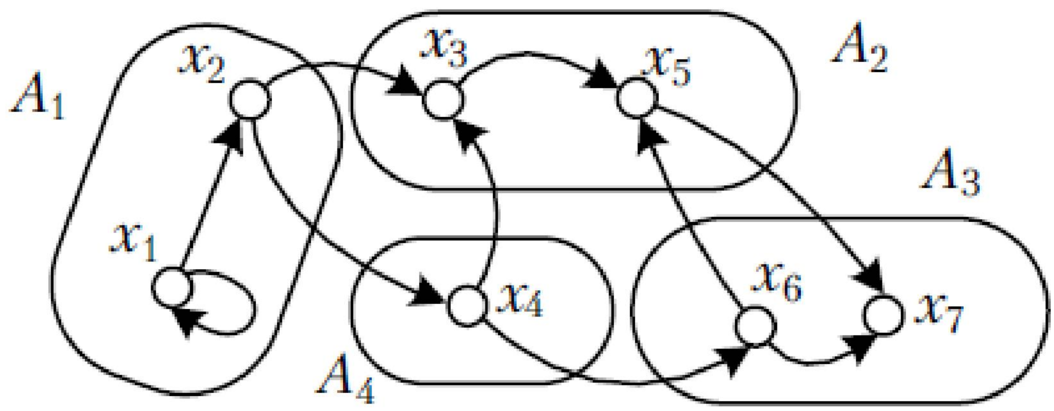
Отже, якщо $A_D=\{A_1,..., A_m\}$, $A=\{x_1, x_2,..., x_k\}$, то $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A_D$

для будь-яких i, j, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

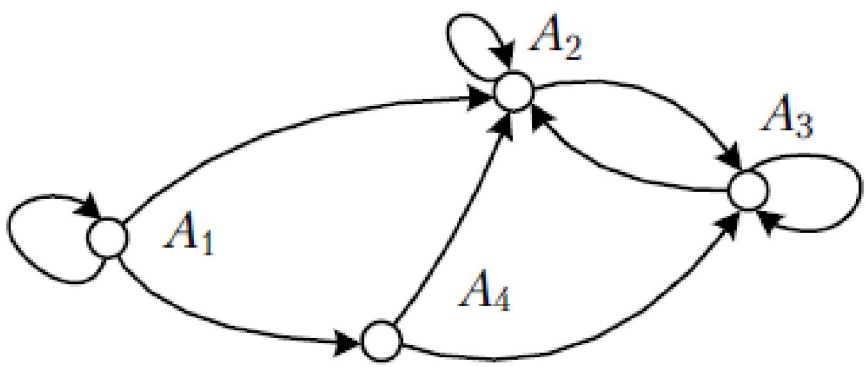
Приклад. Відношення P подано матрицею $B(P)$ та відповідним графом $G(P)$, а відношення P_D – за допомогою розбиття множини $A=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ – носія відношення P – на класи загального виду $A_1=\{x_1, x_2\}$, $A_2=\{x_3, x_5\}$, $A_3=\{x_6, x_7\}$, $A_4=\{x_4\}$. Отже, $A_D=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ – носій агрегованого відношення є P_D.

$$B(P) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Граф бінарного відношення ***P***



Граф агрегованого відношення $\boldsymbol{P_D}$



Відношення $\boldsymbol{P_D}$ з носієм $\boldsymbol{A_D}$, визначене через первісне відношення ***P*** з носієм ***A*** співвідношенням,

$$(\forall A_i, A_j \in A_D): A_i P_D A_j \Leftrightarrow (\exists x_k \in A_i) \wedge (\exists x_j \in A_j) : x_k P x_j,$$

називається **фактор-відношенням**, отриманим за допомогою факторизації первісного відношення ***P*** за певним іншим відношенням ***D***.

Отже, $\boldsymbol{A_i}$ й $\boldsymbol{A_j}$ знаходяться у відношенні $\boldsymbol{P_D}$ тоді й лише тоді, коли знайдеться хоча б одна пара елементів із цих підмножин, які знаходяться у відношенні ***P***.

Для прийняття рішень важливий випадок, коли факторизація виконується за відношенням еквівалентності.

Розглянемо питання про збереження властивостей первісних відношень у разі їх факторизації за довільною еквівалентністю.

Властивість рефлексивності зберігається в разі факторизації. Нехай, $\boldsymbol{P}$ – рефлективне відношення з носієм $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{D}$ – відношення еквівалентності, $\boldsymbol{A_i}$ – довільний клас еквівалентності за відношенням $\boldsymbol{D}$. Оскільки, $\boldsymbol{A_i} \neq \varnothing$, то знайдеться хоча б один елемент $\boldsymbol{x \notin A}$. Унаслідок рефлексивності відношення $\boldsymbol{P}$ справедливе твердження $\boldsymbol{xPx}$ і за означенням фактор-відношення $\boldsymbol{A_i P_D A_i}$.

Властивість симетричності зберігається в разі факторизації. Що стосується властивості транзитивності, то вона не зберігається в разі факторизації. Властивість транзитивності зберігається в разі факторизації транзитивного відношення за відношенням еквівалентності, що міститься в первісному відношенні.

Необхідна та достатня умова транзитивності відношення $\boldsymbol{P_D}$ в разі факторизації довільного бінарного відношення $\boldsymbol{P}$ за довільною еквівалентністю $\boldsymbol{D}$, що мають спільний носій $\boldsymbol{A}$, є виконання умови

$$P \circ D \circ P \subset D \circ P \circ D.$$

Факторизація відношення квазіпорядку за його симетричною складовою є відношенням порядку.

$$(\forall A_i, A_j \in A_D): A_i P_D A_j \Leftrightarrow (\exists x_k \in A_i) \wedge (\exists x_j \in A_j) : x_k P x_j,$$

називається **фактор-відношенням**, отриманим за допомогою факторизації первісного відношення $\boldsymbol{P}$ за певним іншим відношенням $\boldsymbol{D}$.

Отже, $\boldsymbol{A_i}$ й $\boldsymbol{A_j}$ знаходяться у відношенні $\boldsymbol{P_D}$ тоді й лише тоді, коли знайдеться хоча б одна пара елементів із цих підмножин, які знаходяться у відношенні $\boldsymbol{P}$.

Для прийняття рішень важливий випадок, коли факторизація виконується за відношенням еквівалентності.

Розглянемо питання про збереження властивостей первісних відношень у разі їх факторизації за довільною еквівалентністю.

Властивість рефлексивності зберігається в разі факторизації. Нехай, $\boldsymbol{P}$ – рефлективне відношення з носієм $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{D}$ – відношення еквівалентності, $\boldsymbol{A_i}$ – довільний клас еквівалентності за відношенням $\boldsymbol{D}$. Оскільки, $\boldsymbol{A_i} \neq \varnothing$, то знайдеться хоча б один елемент $\boldsymbol{x \notin A}$. Унаслідок рефлексивності відношення $\boldsymbol{P}$ справедливе твердження $\boldsymbol{xPx}$ і за означенням фактор-відношення $\boldsymbol{A_i P_D A_i}$.

Властивість симетричності зберігається в разі факторизації. Що стосується властивості транзитивності, то вона не зберігається в разі

факторизації. Властивість транзитивності зберігається в разі факторизації транзитивного відношення за відношенням еквівалентності, що міститься в первісному відношенні.

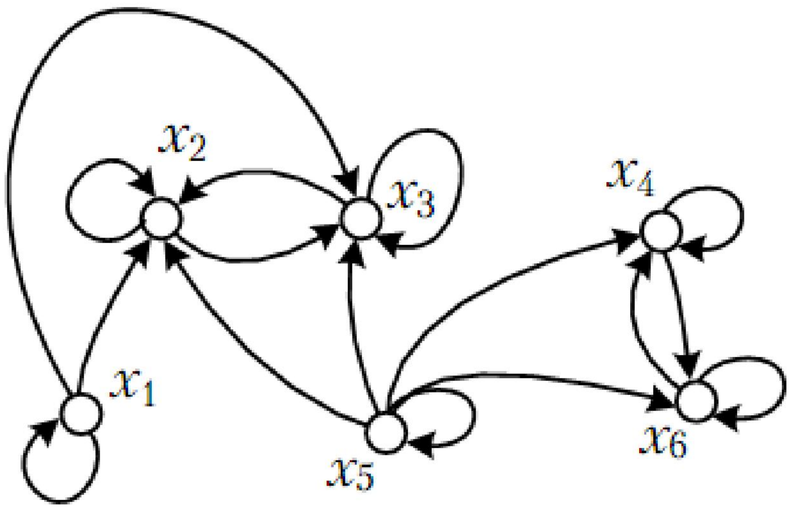
Необхідна та достатня умова транзитивності відношення $\boldsymbol{P_D}$ в разі факторизації довільного бінарного відношення $\boldsymbol{P}$ за довільною еквівалентністю $\boldsymbol{D}$, що мають спільний носій $\boldsymbol{A}$, є виконання умови

$$P \circ D \circ P \subset D \circ P \circ D.$$

Факторизація відношення квазіпорядку за його симетричною складовою є відношенням порядку.

Розглянемо відношення $\boldsymbol{P}$

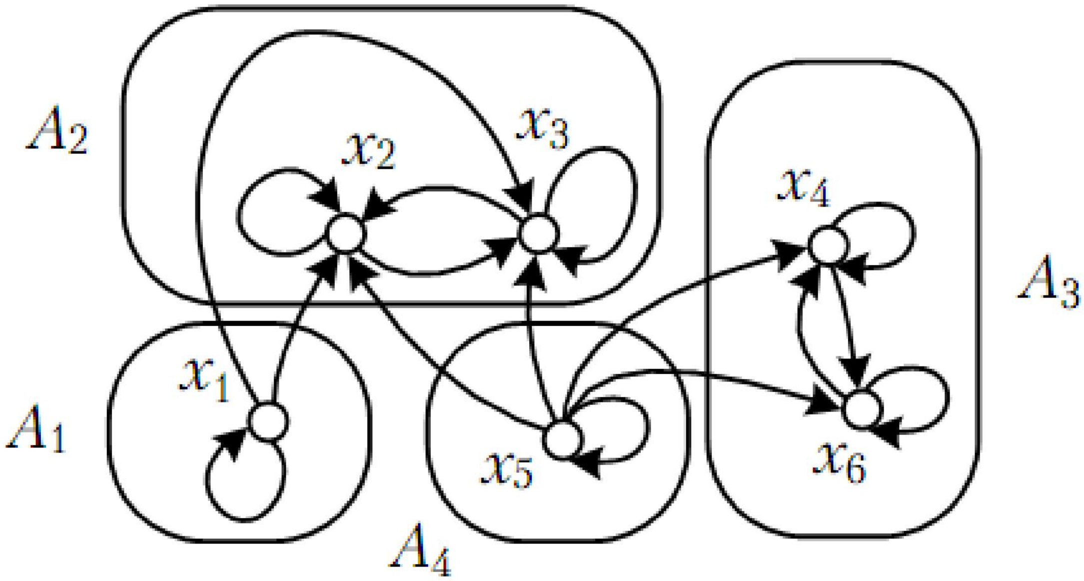
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Неважко перевірити, що $\boldsymbol{P^2=P}$, а тому транзитивне замикання $\boldsymbol{P = P \cup P^2 \cup P^3 \cup \dots \cup P^6 = P}$, тобто відношення P транзитивне. Оскільки воно ще й рефлексивне, то є квазіпорядком. Виділимо його симетричну складову:

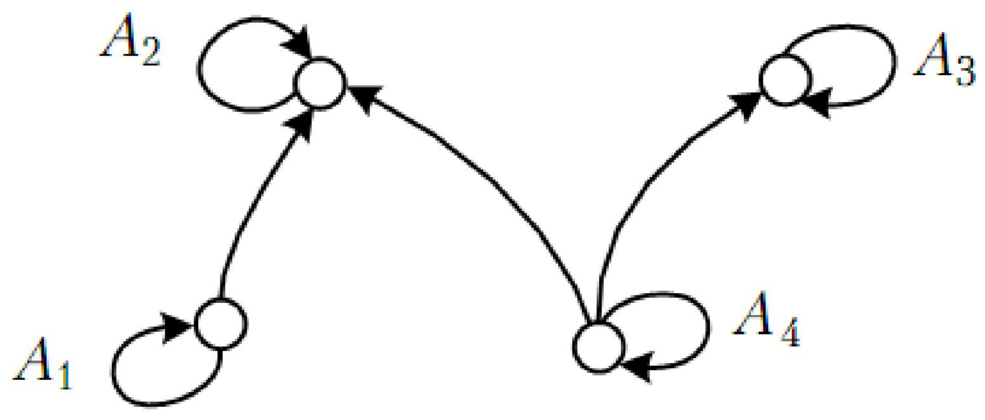
$$D = P \cap P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відношення $\boldsymbol{D}$ – еквівалентність, а тому розбиває множину-носія $\boldsymbol{A} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ на чотири класи $\boldsymbol{A_1} = \{x_1\}$, $\boldsymbol{A_2} = \{x_2, x_3\}$, $\boldsymbol{A_3} = \{x_4, x_6\}$, $\boldsymbol{A_4} = \{x_5\}$. Факторизуємо відношення $\boldsymbol{P}$ за відношенням $\boldsymbol{D}$. Носій фактор-відношення $\boldsymbol{P_D}$ – множина $\boldsymbol{A_D} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. На рисунку показано граф відношення $\boldsymbol{P}$ з класами еквівалентності за відношенням $\boldsymbol{D}$.



Матриця відношення $\boldsymbol{P_D}$ має вигляд

$$P_D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



2.3 Впорядковані множини в прийнятті рішень

Основні результати теорії впорядкованих множин дають змогу обґрунтувати процедури перетворення та модифікації системи переваг децидента. Аксіома вибору – одна з найцікавіших аксіом теорії множин, безпосередньо пов'язана з прийняттям рішень. В найпростішому формулюванні ця аксіома стверджує наступне.

Якщо $\boldsymbol{X}$ – об'єднання непорожніх множин $\boldsymbol{X_i}$, що не перетинаються, то існує щонайменше одна підмножина $\boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{X}$, перетини якої з кожною множиною $\boldsymbol{X_i}$ одноелементні.

Розглянемо важливі для прийняття рішень поняття максимуму та мінімуму, а також мажоранти й міноранти за певним відношенням $\boldsymbol{R}$.

Елемент $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$, де A – множина-носій відношення $\boldsymbol{R}$, називається його максимумом, якщо $\forall(\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A})\!:\!\boldsymbol{xRy}$, тобто $\boldsymbol{xRy}$ для всіх елементів множини-носія $\boldsymbol{A}$.

Елемент $\boldsymbol{x} \in \mathbf{A}$, де $\boldsymbol{A}$ – множина-носій відношення $\boldsymbol{R}$, називається його мінімумом, якщо $\forall(\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A})\!:\!\boldsymbol{yRx}$, тобто $\boldsymbol{yRx}$ для всіх елементів множини-носія $\boldsymbol{A}$.

Елемент $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$, де $\boldsymbol{A}$ – множина-носій відношення $\boldsymbol{R}$, називається його мажорантою, якщо $\forall(\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A})\!:\!\boldsymbol{yRx}$ де $\boldsymbol{R}$ – доповнення до відношення $\boldsymbol{R}$, тобто $\boldsymbol{yRx}$ для всіх елементів множини-носія $\boldsymbol{A}$.

Елемент $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$, де $\boldsymbol{A}$ – множина-носій відношення $\boldsymbol{R}$, називається його мінорантою, якщо $\forall(\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A})\!:\!\boldsymbol{xRy}$ тобто $\boldsymbol{xRy}$ для всіх елементів множини-носія $\boldsymbol{A}$.

Множина $\boldsymbol{A}$ називається впорядкованою за відношенням строгого порядку $\boldsymbol{D}$ (транзитивним і асиметричним), якщо вона є носієм цього відношення $\boldsymbol{D} \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$.

Надалі впорядковану множину будемо позначати двійкою $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{D} \rangle$. Елемент $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A}$ називається мажорантою підмножини $\boldsymbol{X} \subset \mathbf{A}$, якщо він є мажорантою звуження відношення $\boldsymbol{D}$ на підмножині $\boldsymbol{X}$. Впорядкована множина називається індуктивною, якщо кожна підмножина $\boldsymbol{X}$, яка є ланцюгом, має мажоранту. Бінарне відношення $\boldsymbol{P}$ сумісне зі строгим порядком $\boldsymbol{D}$, якщо відношення $\boldsymbol{P} \cup \boldsymbol{D}$ міститься в якомусь відношенні строгого порядку з носієм $\boldsymbol{A}$. Якщо відношення $\boldsymbol{P}$ сумісне зі строгим порядком $\boldsymbol{D}$ та компоненти всіх пар $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{P}$ належать до $\boldsymbol{X}$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X})$, де $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{A}$, то відношення $\boldsymbol{P}$ сумісне зі строгим порядком, який є звуженням відношення $\boldsymbol{D}$ на підмножину $\boldsymbol{X}$. Справедливе й обернене твердження.

Наведені теоретичні результати обґрунтовують можливість приймати рішення в декілька етапів. Спочатку, виходячи зі сталої інформації про переваги, без втручання децидента виділяють підмножину наявних альтернатив, які відповідають певному синтезованому принципу вибору. Остаточний вибір (або довпорядкування, якщо розв'язком задачі прийняття рішення має бути лінійний строгий порядок) виконує безпосередньо децидент (якщо потужність отриманої на першому етапі підмножини порівняно невелика) чи це триває декілька етапів з конкретизацією переваг на наявній підмножині.

Існують алгоритми пошуку всіх довпорядкувань до строгого порядку, однак ця проблема має скоріше теоретичний інтерес, оскільки в ході прийняття рішення нас цікавить таке довпорядкування, яке найкраще б відповідало системі переваг децидента.

Отже, виникає проблема побудови довпорядкування, яке б було в певному сенсі «найближчим» до системи переваг децидента. Для цього призначені спеціальні принципи вибору найкращого рішення. Алгоритм отримання найкращого з погляду децидента рішення може бути багатоетапним: спочатку задають напівпорядок на множині варіантів рішень, а потім, послідовно звужуючи множину варіантів або наближуючи кожне наступне бінарне відношення до строгого порядку, обирають найкращий варіант.

2.4 Структури «домінування – байдужість»

Вивчаючи відношення переваги між реальними об'єктами, можна виокремити в ньому два аспекти: один відображає перевагу (переважання, домінування) одного об'єкта над іншим, а другий – байдужість (індиферентність, толерантність) об'єктів. Тому означають два відношення між об'єктами, які надалі називатимемо відношеннями домінування та байдужості. Наведемо кілька прикладів.

Турнір, де результат зустрічі двох учасників – виграш одного з них або нічия (як у шахах). На множині учасників турніру задають відношення домінування та байдужості: $\boldsymbol{a}$ домінує $\boldsymbol{b}$ означає, що $\boldsymbol{a}$ виграв у $\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ байдужі означає, що вони зіграли внічию.

Голосування, проведене для групи кандидатів.

Відношення переваги за віком. Для двох осіб уважаємо, що $\boldsymbol{a}$ домінує $\boldsymbol{b}$, якщо $\boldsymbol{a}$ старший за $\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ байдужі, якщо вони одного віку.

За всієї різноманітності ситуацій, у яких розглядають відношення домінування та байдужості, ці відношення мають спільні властивості. Позначимо як $\boldsymbol{\alpha}$ відношення домінування ($(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{\alpha}$ означає, що $\boldsymbol{a}$ домінує $\boldsymbol{b}$),

β – відношення байдужості ((***a***, ***b***) ∈ ***β*** означає, що ***a*** та ***b*** байдужі). Ця структура має такі властивості.

♦ Відношення домінування ***α*** асиметричне: не може бути такого, щоб, скажімо, на тенісному турнірі учасник ***a*** переміг учасника ***b*** й ***b*** переміг ***a***; щоб кандидат ***a*** зібрав більше голосів, ніж кандидат ***b***, а ***b*** – більше, ніж ***a*** (в одному й тому самому турі голосування), і т. ін. Отже,

$\alpha \cap \alpha^{-1} = \emptyset$.

♦ Відношення байдужості ***β*** симетричне: наприклад, якщо учасник ***a*** зіграв унічию з учасником ***b***, то й ***b*** зіграв унічию з ***a***; якщо вік особи ***a*** близький до віку особи ***b***, то й вік ***b*** близький до віку ***a***, тобто $\mathbf{b}^{-1} = \mathbf{b}$.

♦ Жодна пара об’єктів не належить водночас до відношень домінування та байдужості, тобто $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

♦ Уважатимемо, що кожен об’єкт байдужий до самого себе (тобто відношення ***β*** рефлексивне). Ця умова має швидше характер угоди, тому що в ситуаціях, аналогічних до наведених вище прикладів, об’єкт не порівнюють із самим собою. Однак вона цілком відповідає змісту, який зазвичай вкладають у поняття байдужості.

Важливими є структури, у яких або будь-які два об’єкти з досліджуваної множини байдужі, або один із них домінує іншого (як у наведених вище прикладах); таку структуру «домінування-байдужість» називатимемо лінійною. Наприклад, структура «домінування-байдужість» лінійна, якщо турнір проводять за коловою системою (кожен грає з кожним). Зручно подати властивість лінійності структури «домінування-байдужість», означивши поняття порівняльності об’єктів. Уважатимемо об’єкти a та b порівняльними, якщо вони байдужі чи один із них домінує іншого, в іншому випадку об’єкти a та b вважають непорівняльними.

Множина пар порівняльних об’єктів утворює відношення порівняльності, а множина пар непорівняльних об’єктів – відношення непорівняльності. Структура «домінування-байдужість» на множині A лінійна тоді й лише тоді, коли будь-яка пара об’єктів порівняльна.

Для будь-яких двох елементів ***a*** та ***b***, довільно взятих із множини, на якій задано структуру «домінування-байдужість», обов’язково виконується точно одна з таких чотирьох умов:

♦ ***a*** домінує ***b***;

♦ ***b*** домінує ***a***;

♦ ***a*** та ***b*** байдужі;

♦ ***a*** та ***b*** непорівняльні.

У разі лінійної структури обов’язково виконується одна з перших трьох умов.

Отже, будь-яке відношення може бути відношенням переваги. Потрібно лише перетворити його на рефлексивне, додавши петлі, і взяти як відношення домінування асиметричну складову, а як відношення байдужості – симетричну складову отриманого відношення.

Відношення домінування та байдужості, узагалі кажучи, можуть бути нетранзитивними. Тому доцільно виділити такі структури «домінування-байдужість», у яких ці відношення транзитивні (тобто якщо елемент ***a*** домінує елемент ***b***, а ***b*** домінує ***c***, то ***a*** домінує ***c***; якщо елемент ***a*** байдужий елементу ***b***, а ***b*** байдужий ***c***, то ***a*** байдужий ***c***.

Сформулюємо ще одну вимогу: для довільної пари об'єктів, що належить відношенню домінування, заміна одного з об'єктів байдужим до нього зберігає домінування, тобто

$$(a, b) \in \alpha, (b, c) \in \beta \Rightarrow (a, c) \in \alpha,$$
$$(a, b) \in \beta, (b, c) \in \alpha \Rightarrow (a, c) \in \alpha.$$

2.5 Представлення переваг децидента за допомогою функцій вибору

Система переваг децидента – це сукупність формальних і неформальних, статичних і динамічних правил та умов, які дають йому змогу вибрати одну чи кілька альтернатив у певній ситуації прийняття рішень. Отже, система переваг має як статичну складову, що залишається постійною незалежно від умов зовнішнього середовища та відображає сталі, глибинні, у певному розумінні об'єктивні правила, за допомогою яких можна відкинути неперспективні альтернативи, так і динамічну, яка віддзеркалює змінність переваг залежно від умов зовнішнього середовища, внутрішню суперечливість і нечіткість уявлень децидента про кращі альтернативи, його суб'єктивність.

При порівнянні альтернатив можуть виникнути ситуації двох типів:

♦ децидент вирішив, що альтернатива x_i переважає (домінує чи краща за неї) альтернативу x_j;

♦ децидент не може розрізнити за якістю альтернативи x_i та x_j (альтернативи рівнозначні, подібні, байдужі).

Отже, статичну складову системи переваг децидента можна моделювати за допомогою структури «домінування-байдужість».

Основне завдання децидента в процесі прийняття рішення – виділити одну чи кілька найкращих альтернатив. Якщо наше завдання – отримати максимальний дохід, то найкращій альтернативі відповідає поняття максимуму за певним відношенням переваги Р чи побудова множини «найкращих», але непорівняльних між собою альтернатив.

Тоді найдоцільніше використати поняття мажоранти; у разі ж, наприклад, мінімізації збитків, більше підходять поняття мінімуму та міноранти.

Інтуїтивно зрозуміло, що між цими поняттями мають існувати певні взаємні зв'язки.

Залежно від характеру системи переваг децидента змінюються й альтернативи, обрані з пред'явлених для вибору в певній ситуації. Це зумовлено тим, що в одній і тій самій ситуації уявлення різних осіб про кращі альтернативи можуть суттєво різнитися. При цьому дециденти зазвичай раціонально обґрунтовують вибір. Отже, бінарне відношення порівняльності ***P***, побудоване для конкретної ситуації, чинне лише для конкретного децидента й лише для цієї ситуації. Це означає, що за відомим вибором у конкретній ситуації неможливо дійти певних висновків щодо причин, що спонукали вибрати саме ці альтернативи, а не інші.

Розглянемо певну підмножину ***X*** множини можливих альтернатив ***A*** (***X*** ⊆ ***A***) і вибиратимемо з альтернатив, що належать цій множині ***X***.

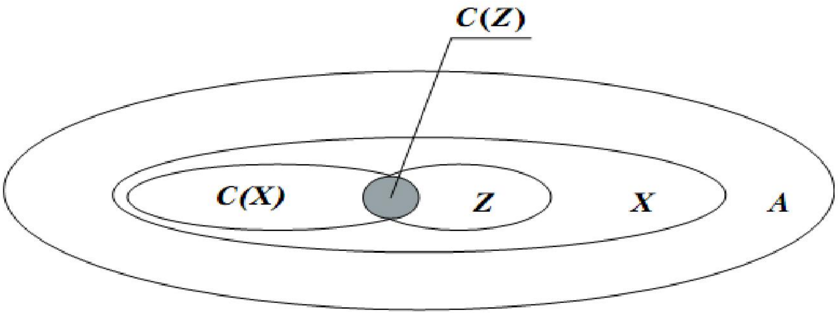
Функція вибору C – відображення, яке кожній ***X***⊆***A*** ставить у відповідність підмножину ***Y***⊆***X*** альтернатив, котрі обирає децидент:

$$\boldsymbol{C}\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}, \text{ або } \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}),\ \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \subseteq \boldsymbol{X}.$$

Функція вибору має задовольняти умову

$$(\forall \boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{X})\colon \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}) \cap \boldsymbol{Z} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z}).$$

Ця умова відповідає вибору «серед кращих» альтернатив. Інакше кажучи, вибір в конкретній ситуації кращих альтернатив із підмножини ***Z*** множини ***X***, для якої задано функцію вибору, дасть у результаті підмножину кращих у множині ***X*** альтернатив ***C(X)*** ∩ ***Z***, які водночас належать підмножині ***Z*** (рис.). Якщо ***C***(***Z***) = ∅, то формально можна вважати, що виникає ситуація відмови від вибору.



У реальних задачах вибору одні альтернативи можуть виключати наявність у пред’явленні X інших або навпаки, у разі виникнення деяких альтернатив існують такі, що їх завжди супроводжують. Унаслідок цього пред’явленнями можуть бути не всі підмножини множини A, тобто функцію вибору задано на якійсь підмножині $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{2}^{\boldsymbol{A}}$, котра називається множиною пред’явлень.

Подамо функцію вибору в логічній формі. Нехай $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$. Кожному елементу $\boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{A}$ поставимо у відповідність логічну змінну

$\boldsymbol{\beta}_i \in \{0, 1\}$. Задамо взаємно однозначну відповідність між **2*n*** підмножинами множини ***A*** та **2*n*** векторами довжиною ***n*** згідно зі співвідношеннями $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{\beta}_1(\boldsymbol{X}), \ldots, \boldsymbol{\beta}_n(\boldsymbol{X}))$, де

$$\beta_i(X) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_i \in X, \\ 0, & \text{якщо } x_i \notin X. \end{cases}$$

Множині A відповідає вектор $\beta(A) = (1, 1,..., 1)$, а порожній множині – $\beta(\emptyset) = (0, 0,..., 0)$.

Нехай на множині A задано якусь функцію вибору C. Поставимо її у відповідність вектор функцій де

$$\widehat{f}_i(\beta) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x_i \notin C(X) \wedge x_i \in X, \\ 1, & \text{якщо } x_i \in C(X) \wedge x_i \in X. \end{cases}$$

Оскільки $C(X) \subseteq X$, то отримуємо підстановкою в $f_i(\beta)$ значення $\beta_i = 1$.

Таким чином задамо відповідність між функцією вибору та множиною логічних висловлювань у формі

$$\beta_i(X) \wedge f_i(\beta(X)) = 1 \Leftrightarrow x_i \in C(X),$$

Логічною формою LF(C) функції вибору C називатимемо вектор $(f_1(\beta),..., f_n(\beta))$ функцій Буля, кожна з яких згідно з попереднім залежить від $n-1$ змінних, тобто скорочено $LF(C) = (f_1,..., f_n)$.

Звичайно, використовувати таке подання для розв'язання практичних задач недоцільно, тому що конкретні приклади будуть громіздкими, але для дослідження властивостей функцій вибору це виправдано.

Функції вибору класифікують згідно з виконанням певних умов або вимог, висунутих у процесі їх дослідження. Це може бути успадковування, незалежність від відкинутих альтернатив, узгодженість, незалежність вибору від шляху (квазісумарність), сумарність, мультиплікативність, монотонність.

Умова успадковування. Якщо здійснюється вибір із довільної множини A та її підмножини $B \subseteq A$, то всі альтернативи, обрані з множини A, які водночас належать до підмножини B, будуть обрані також у B, тобто виконується твердження

$$(\forall B \subseteq A) \colon C(A) \cap B \subseteq C(B).$$

Наприклад, якщо D – найкращий студент факультету, то він також найкращий у групі чи на потоці, де вчиться.

Умова незалежності від відкинутих альтернатив. Якщо вибір здійснюється з такої підмножини B довільної множини A, що B містить усі альтернативи, які є результатами вибору з множини A, вибір із підмножини B буде тотожний вибору з множини A, тобто виконується твердження

$$(\forall B \subseteq A) \colon (C(A) \subseteq B) \Rightarrow C(B) = C(A).$$

Скажімо, якщо D – не найкращий студент, то склад переможців конкурсу не зміниться від того, якщо він не братиме участі в ньому. Звичайно ж, $C(C(A)) = C(A)$.

Умова узгодженості. Якщо альтернативи вибирають із усіх підмножин $A_i \subseteq A$, то вони будуть вибрані з їх перетину, тобто справедливе твердження

$$(\forall A_i \subseteq A) \colon \bigcap_i C(A_i) \subseteq C(\bigcup_i A_i).$$

Умова незалежності вибору від шляху (квазісумарності). Вибір з об'єднання множин пред'явлень має бути тотожним вибору з об'єднання виборів із множин пред'явлення, тобто

$$(\forall A_1, A_2 \subseteq A): C(A_1 \cup A_2) = C(C(A_1) \cup C(A_2)).$$

Якщо виконується умова квазісумарності, то для обрання найкращого студента потоку достатньо обрати найкращих студентів у кожній групі, й серед них обрати найкращого.

Умова сумарності. Вибір з об'єднання множин тотожний об'єднанню виборів з цих множин, тобто

$$(\forall A_1, A_2 \subset A): C(A_1 \cup A_2) = C(A_1) \cup C(A_2).$$

Так, делегатів на конференцію обирають у підрозділах, тому що множину делегатів утворює об'єднання виборів, зроблених в окремих підрозділах.

Умова мультипликативності. Вибір із перетину множин тотожний перетину виборів із кожної множини окремо, тобто

$$(\forall A_1, A_2 \subseteq A): C(A_1 \cap A_2) = C(A_1) \cap C(A_2).$$

Умова монотонності. Вибір із більшої множини не менший, ніж із її підмножини, тобто

Ці умови відображаються й у логічній формі функції вибору, що використовується для доведення деяких тверджень.

$$(\forall A_1, A_2 \subseteq A): C(A_1) \subseteq C(A_2).$$

Отже, за допомогою поняття функції вибору, вдається сформулювати низку умов, які мають виконуватися для забезпечення процедури раціонального вибору – вибору з «кращих» у певному сенсі альтернатив. Звичайно, поки не сформульовано поняття якості альтернативи, вибір можна виконувати лише на основі наявного бінарного відношення переваги.

За допомогою спеціального механізму (правила) із множини $\boldsymbol{X}$ пред'явлених альтернатив вибирають одну чи декілька. Механізм вибору загалом можна описати за допомогою двійки $\boldsymbol{R} = \langle \boldsymbol{S}, \boldsymbol{L} \rangle$, де $\boldsymbol{S}$ – структура на множині можливих альтернатив $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{L}$ – конкретне правило, що дає змогу виконати вибір із пред'явлення $\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{A}$ на основі наявної структури $\boldsymbol{S}$. Цю структуру можна утворити за допомогою формулювання принципів, що задають умови, за яких можливе порівняння альтернатив за якістю. Окрім того, вона визначається в результаті експериментальних досліджень і опитування децидента. У більшості випадків можна описати найпоширеніші принципи за допомогою бінарних відношень або сформулювати правила побудови відповідних відношень.

Тому надалі будемо вважати, що структуру $\boldsymbol{S}$ можуть утворювати такі елементи: множина бінарних відношень $\boldsymbol{P} = \{\boldsymbol{P}_1, ..., \boldsymbol{P}_k\}$; важливості відношень у лексикографічній або числовій формі; еталонні варіанти рішень і метрики, які виражають ступінь наближення до еталонів («ідеальна» альтернатива та міра близькості наявних альтернатив до неї); допустимі рівні якості альтернатив; правила та принципи агрегування складних відношень.

Множина бінарних відношень виникає природньо внаслідок описання різних аспектів якості альтернатив, або наявності кількох децидентів із відмінними системами переваг, або того й іншого водночас. Зазвичай, обираючи бінарні відношення, слід брати до уваги фундаментальне обмеження на застосовність цього підходу. Апарат бінарних відношень у просторі альтернатив застосовний, якщо доводиться вибирати лише на основі інформації про попарне порівняння альтернатив. Однак достатньо високий рівень узагальнення, притаманний описанню вибору за допомогою бінарних відношень, у багатьох випадках є перевагою, тому що дає змогу абстрагуватися від другорядних складових, зосереджуючи увагу на основних структурних елементах системи переваг децидента.

Наявність однієї й тієї самої структури $\boldsymbol{S}$ ще не дає можливості конкретизувати вибір, тому для цього застосовують конкретне правило $\boldsymbol{L}$. Наприклад, якщо поставлено завдання знайти найкращу альтернативу, то потрібно побудувати максимуми $\overset{+}{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{P})$ якогось бінарного відношення $\boldsymbol{P}$ з носієм $\boldsymbol{A}$. Коли ж треба виділити альтернативи, для яких немає кращих, то слід побудувати мажоранти $\overset{+}{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{P})$ відношення (звичайно, тоді, коли структура $\boldsymbol{S}$ має вигляд бінарного відношення $\boldsymbol{P}$).

Якщо задано множину $\boldsymbol{\Sigma}$ дозволених структур ($\boldsymbol{S} \in \boldsymbol{\Sigma}$) та множину $\boldsymbol{\Pi}$ можливих правил вибору $\boldsymbol{L} \in \boldsymbol{\Pi}$, то цим визначено клас

$$\Theta = \Theta(\Sigma, \Pi) = \{R =< S, L >| \ S \in \Sigma, L \in \Pi\}$$

механізмів вибору. Зв'язок між функцією вибору $\boldsymbol{C}$ та механізмом встановлює таке означення.

Клас усіх функцій вибору $\boldsymbol{R} \in \boldsymbol{\Theta}$ позначатимемо надалі як Ξ. Розглянемо важливі на практиці механізми вибору, реалізовані декількома наявними бінарними відношеннями, які належать до множини $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P} = \{\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_n\}$. Для визначеності правила вибору $\boldsymbol{R}$ будемо вважати, що його можна реалізувати, знайшовши мажоранти $\overset{+}{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{Q} \backslash \boldsymbol{E})$ певного антирефлексивного відношення $\boldsymbol{Q} \backslash \boldsymbol{E}$, (де $\boldsymbol{Q}$ – довільне задане відношення, $\boldsymbol{E}$ – діагональне відношення) чи максимуми $\overset{+}{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{E})$ відношення $\boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{E}$, зведеного до рефлексивного вигляду. Є такі основні механізми вибору за декількома відношеннями: вибір за агрегованим відношенням, паралельний вибір, послідовний, узагальнений покроковий.

Вибір за агрегованим відношенням виконують, задавши (побудувавши, синтезувавши) функції $\boldsymbol{F}: \boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$, яка множині

$\boldsymbol{P} = \{\boldsymbol{P}_1, \ldots, \ \boldsymbol{P}_n\}$ заданих відношень ставить у відповідність деяке відношення $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{F}\{\boldsymbol{P}_1, \ldots, \ \boldsymbol{P}_n\}$, що називається агрегованим. Остаточно альтернативи вибирають за правилом $\boldsymbol{L}$, якому відповідає функція вибору $\boldsymbol{C}$.

Послідовний вибір провадять упорядкуванням відношень, що є елементами множини $\boldsymbol{P}$, з подальшим послідовним вибором в $\boldsymbol{n}$ етапів. На $\boldsymbol{i}$-му етапі вибирають з альтернатив, що є результатом вибору за допомогою послідовного застосування на попередніх етапах пар $\langle P_1, L_1\rangle, \langle P_2, L_2\rangle, ..., \langle P_i - 1, L_{i-1}\rangle$, де P_k, L_k – відношення та конкретне правило, за яким виконується вибір на k-му кроці. Якщо вибір на i-му кроці реалізовано за допомогою функції вибору, C_{Pi}, а пред'явлення – це множина $(X, X \subseteq B, B \subseteq 2_A)$, то функція послідовного вибору $C\_$ має вигляд

$$C_-(X) = C_{P_n}(...C_{P_2}(C_{P_1}(X))...).$$

Паралельний вибір за відношеннями $\{P_1, ..., P_n\}$ виконується за допомогою незалежного вибору з пред'явлення X за кожним із цих відношень і відповідним правилом вибору L_i з множини $L = \{L_1, ..., L_n\}$, що реалізується множиною функцій вибору. Далі, виходячи з цього сукупного вибору, за допомогою композиції $F(C_P) \Rightarrow C$ (зазвичай для цього застосовують операції над множинами) роблять остаточний вибір

$$C(X) = F(C_{P_1}(X), ..., C_{P_n}(X)).$$

Узагальнений покроковий вибір будують, комбінуючи на різних кроках вищенаведені механізми. Розглянемо достатньо загальний механізм вибору $\langle P, A^+(P)\rangle$, структуру якого задано антирефлексивним бінарним відношенням P (якщо є довільне бінарне відношення Q, то воно зводиться до антирефлексивного

$P=Q\backslash E$, де E – діагональне відношення) та конкретним правилом вибору мажорант відношення P з носієм A.

У ході дослідження та застосування механізмів вибору виникають задачі аналізу, синтезу й апроксимації процедур вибору реальних децидентів, а також оцінювання складності реалізації механізму виборів та їх оптимізації.

Розв'язком задачі аналізу є функція вибору C_R, що реалізує механізм

$R=\langle S,L\rangle$. Якщо множина можливих альтернатив A скінченна, то розв'язати цю задачу не важко. Найпростіший метод полягає в тому, що для кожного пред'явлення X за заданою структурою S і конкретним правилом вибору L механізму вибору R визначають множину вибраних альтернатив із подальшим відтворенням за цією інформацією таблиці можливих пред'явлень $X = 2^A$ та побудовою функції вибору C_R. Однак кількість рядків такої таблиці, які описують функцію вибору, дорівнює 2^n, де n – кількість альтернатив, тобто таблиця зростає експоненційно зі зростанням розмірності $n=card(A)$ задачі.

Отже, методи аналізу механізмів вибору, у яких функцію вибору подано таблицею, неефективні, однак табличне подання доцільне, коли потрібно описати результати експериментального вибору, тому що в цьому разі розмір таблиці порівнянний з обсягом спостережень. Апарат алгебри Буля, використовуваний для описання функцій вибору – об'єднувальна основа для побудови та дослідження різноманітних моделей вибору. Часто він дає змогу компактно описати теоретичні результати. Крім того, аналіз потрібен також для дослідження якісних властивостей функцій вибору, реалізовуваних механізмами певного заданого класу, і виявлення деяких кількісних параметрів функції вибору $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{R}}$.

Задача синтезу одна з найважливіших у побудові моделі вибору. Вона полягає в синтезі за функцією вибору (зазвичай, неповною) механізму вибору певного класу, що її реалізує. Оскільки функція вибору найчастіше часткова та ґрунтується на експериментальних даних, а механізм вибору має бути придатний у довільних ситуаціях, то він має задовільно прогнозувати вибір і в тих ситуаціях, яких не було в експерименті. Як показує досвід, це краще роблять моделі механізмів вибору з невеликою складністю. У процесі синтезу потрібно вміти використовувати додаткову інформацію, яку можна отримати від децидента, а також певні напівформальні вимоги (рівновага, справедливість, компромісність). Задача синтезу належить до NP-повних, і в загальному вигляді її не можна розв'язати за допомогою ефективних алгоритмів.

Задача синтезу функції вибору в цьому класі механізмів вибору **Θ0** завжди має розв'язок.

Якщо функцію вибору ***C*** не можна реалізувати механізмами вибору заданого вигляду, то виникає задача її апроксимації, тобто пошуку в певному розумінні найкращого наближення до неї. Коли вводити певну метрику недоцільно чи це неможливо достатньо обґрунтувати, розглядають якісь абсолютні верхнє та нижнє найкращі наближення – верхню та нижню апроксимації. Їх задають через мажоранти й міноранти функцій неповного вибору.

Аналогічні задачі апроксимації можна ставити й розв'язувати не лише для функцій, а й для механізмів вибору. Велике значення в дослідженні механізмів вибору мають характеристики їх складності. Їх знаходження зазвичай зводиться до отримання асимптотичних оцінок для певних суттєвих параметрів механізмів вибору. Ці оцінки отримуються конструктивно, що дозволяє використати їх при розробці та оптимізації конкретних процедур, а також прогнозувати орієнтовну складність реалізації того чи іншого механізму вибору. Задача синтезу може мати багато розв'язків, тому що одній і тій самій функції вибору можуть відповідати багато механізмів, що її реалізують.

Для досягнення певної однозначності до синтезованого механізму пред'являють додаткові вимоги, що стосуються складності. Найпростішими мірами складності можуть бути такі:

♦ для вибору на ґрунті відношення – кількість пар, що його складають;

♦ для механізму послідовного вибору – кількість відношень (глибина вибору);

♦ для багатокрокових схем – кількість кроків.

Серед проблем оптимізації найважливішою є проблема оптимального синтезу й оптимізації механізмів вибору. Мета оптимального синтезу –

побудова механізму вибору з мінімальною складністю. Для більшості випадків не знайдено ефективних рішень, а для деяких задач доведено їх NP-повноту. Тому вимоги до методів синтезу ослаблюють, і найчастіше ставлять задачу розробки методів синтезу, що забезпечують гарантовану оцінку складності реалізації функції.

Отже, у ході дослідження та застосування механізмів і функцій вибору доводиться розв'язувати такі основні задачі:

- ♦ аналізу;
- ♦ синтезу;
- ♦ апроксимації реального вибору децидента;
- ♦ оцінювання складності реалізації механізмів вибору;
- ♦ оптимізації механізмів вибору.

ЛЕКЦІЯ 3. МЕТРИЗОВАНІ ВІДНОШЕННЯ Й ЕКСПЕРТНЕ ОЦІНЮВАННЯ

3.1 Основні види шкал вимірювання.

Для оцінювання ступеня переваг на множині альтернатив застосовують різноманітні шкали вимірювання, кожній з яких властиві свої допустимі перетворення. Метризовані бінарні відношення дають змогу брати до уваги ступінь переваги для кожної пари альтернатив, тобто точніше ніж звичайні бінарні відношення враховувати силу переваги. Щоб оцінити ступінь подібності, визначаються на метризованих бінарних відношеннях міри близькості. це особливо важливо, якщо оцінити близькість міркувань кількох експертів. Емпіричні системи відображають результати опитування експертів і дають змогу, використовуючи міри близькості, апроксимувати емпіричні відношення тими, що мають задані властивості та в певному розумінні найближчі до них.

Емпіричні відношення є результатом опитування реальних експертів, а тому важливо правильно організувати експертне опитування, спираючись на загальні методи. Для оцінювання переваг застосовують низку методів, які мають свої переваги та недоліки, залежно від особливостей конкретної експертизи. Однак навіть за найкращої переваги експертного оцінювання успіх залежить від експертів, послідовності їх міркувань. Перевірити це можна за допомогою методів оцінювання компетентності експертів.

Звичайні бінарні відношення дають змогу зробити висновок про те, чи краща одна з альтернатив за іншу, але не дають оцінити «силу» такої переваги. Вивчення видів шкал вимірювання даю можливість оцінити межі їх обґрунтованого використання.

У процесі прийняття рішень децидент порівнює варіанти і обирає той, що здається йому найкращим. Звичайно ж, постає питання: якою мірою він користується? У яких одиницях децидент може оцінити ступінь переваги однієї альтернативи над іншою, і наскільки обґрунтовані подальші операції агрегування оцінок кількох експертів? Відповіді на ці й інші питання дає теорія вимірювань (ТВ), що є складовою частиною статистики об'єктів нечислової природи, і це не дивно, оскільки результат оцінювання експерта – це не що інше, як вимірювання. Тому розглянемо основні положення цієї теорії, щоб уникнути поширених помилок, пов'язаних із з інтерпретацією результатів експертних опитувань, так і з подальшим опрацюванням цієї інформації.

Часто рішення приймають на основі індивідуальних оцінок кожного експерта з групи. Особливо це стосується важливих, комплексних, унікальних проблем, розв'язуючи які, слід зважати на думки експертів із різних галузей. Одна з основних процедур отримання якісної чи кількісної інформації від експерта – вимірювання в широкому розумінні.

Звичайно, кількісні оцінки інформативніші, ніж якісні, бо дають змогу одержати детальнішу інформацію про важливість альтернатив, за допомогою яких можна обґрунтовано виконати остаточний вибір. Однак, застосовуючи кількісні оцінки, треба бути впевненим у тому, що експерт може не лише з'ясувати, що одна альтернатива краща за іншу, але її оцінити, на скільки одиниць або в скільки разів ця перевага більша. Якщо ж виникають сумніші щодо цього, доцільніше обмежитись якісними оцінками.

Числа, які люди використовують у житті й діяльності, не завжди можна додавати, множити чи виконувати над ними інші арифметичні дії. Результати оцінювання експертів часто вимірюють у порядковій шкалі, тобто експерт може сказати і обґрунтувати, що одна альтернатива важливіша ніж інша, проте не може твердити, у скільки разів.

Експертів часто просять ранжувати об'єкти експертизи, тобто розмістити їх у порядку зростання чи спадання інтенсивності характеристики, яка цікавить організаторів експертизи. Ранг – це номер (місце) об'єкта експертизи в упорядкованому (варіаційному) ряді значені, характеристики для різних об'єктів. Формально ранги можна подати числами 1, 2, 3..., але над ними не можна виконувати звичних арифметичних операцій.

Наприклад, хоча в арифметиці 1+2=3, не можна твердити, що для об'єкта, який займає трете місце в упорядкуванні, інтенсивність досліджуваної характеристики дорівнює сумі інтенсивностей для об'єктів із рангами 1 і 2. Не можна говорити, що знання відмінника дорівнюють сумі знань двієчника та трієчника (хоча 5=2+3), а між двієчником і трієчником така сама різниця, як між тим, хто навчається добре, і двієчником (5-3=4-2). Тому очевидно, що для аналізу таких якісних даних потрібна інша теорія, що дає базу для розробки, вивчення й застосування конкретних методів розрахунку обробки результатів вимірювань.

Припустимо, що знання студентів оцінюють за двома шкалами: чотирибальною («відмінно», «добре», «задовільно», «незадовільно») та 100-бальною рейтинговою, пов'язаною з першою такою відповідністю: 0...59 – «незадовільно», 60...75 – «задовільно», 75...89 – «добре», 90...100 – «відмінно». Порівняємо успішність двох студентів за результатами вивчення чотирьох предметів. Студент А отримав 95, 89, 74, 87 балів, що відповідає оцінкам 5, 4, 3, 4, а студент В – 90, 90, 75, 75, Що Відповідає оцінкам 5, 5, 4, 4. За загальним рейтингом (345 балів), студент А навчається краще ніж В (330 балів). Якщо ж оцінювати за середнім балом, то студент В значно переважає А: його середній бал – 4,5, а в студента А – 4,0.

Дві основні проблеми ТВ – визначення типу шкали вимірювань для конкретних даних і пошук алгоритмів аналізу даних, результат роботи яких не змінюється за будь-якого допустимого перетворення шкали (тобто інваріантний щодо цього перетворення). Для вимірювання значень кожного критерію чи показника, що характеризує певну властивість варіантів рішень, використовують окрему шкалу чи міру.

Відповідно до ТВ, виконуючи математичне моделювання реального явища чи процесу, насамперед потрібно визначити типи шкал, у яких вимірюватимуться ті чи інші змінна. Від типу шкали залежить група допустимих перетворень шкали, тобто таких, що не змінюють співвідношень між об'єктами вимірювань. Так, у разі вимірювання довжини перехід від миль до кілометрів не змінює співвідношень між довжинами розглянутих об'єктів: якщо один об'єкт довший за інший, то це буде виявлено в ході вимірювань як у милях, так і кілометрах. При цьому числове значення довжини в милях відрізняється від значення в кілометрах, не змінюється лише результат порівняння довжин двох об'єктів.

Розглянемо основні види шкал вимірювань і відповідні групи допустимих перетворень. Усі шкали вимірювань поділяють на дві групи: якісні та кількісні. Найпоширеніші шкали якісних ознак – порядкова та шкала найменувань. Тому в багатьох галузях результати якісного аналізу можна розглядати як вимірювання за цими шкалами. Кількісні шкали дають змогу виявити кількісні співвідношення між об'єктами. У цьому разі ознака містить і одиницю виміру. До шкал кількісних оцінок належать шкали інтервалів, відношень, різниць, а також абсолютна шкала.

За допомогою шкали найменувань можна лише класифікувати об’єкти чи окремі їхні ознаки для їх розпізнавання та виявлення подібності чи того,що вони відрізняються один від одного. У таких шкалах число використовують як назву (ім'я). Номінальні шкали дають змогу пізнавати, розрізняти, ідентифікувати об'єкт.

Номінальну шкалу називають також класифікаційною. Справді, у разі її використання кожному об'єкту присвоюється певна позначка, що свідчить про його належність до певного класу. Можна по-різному заміняти позначки, лише забезпечуючи ізоморфізм між системами позначок.

У шкалі найменувань допустимі всі взаємно однозначні перетворення. У ній числа – лише позначки, тобто їх використовують тільки для розрізнення об'єктів. У шкалі найменувань можна порівнювати, наприклад, номери студентських квитків, страхових посвідчень, букв у алфавіті. Нікому не спаде на думку додавати чи множити номери телефонів: такі операції не мають сенсу. Ніхто також не буде порівнювати літери й говорити, що якась із них краща, ніж інша. Єдина функція вимірювань у шкалі найменувань — це розрізнення об'єктів.

У порядкових шкалах можна ранжувати об'єкти чи сукупності їхніх ознак за пріоритетом. Числа в цих шкалах відображають порядок розміщення елементів – «місця» (об'єктів або їхніх ознак) за пріоритетом. Порядкові шкали показують, що один об'єкт за певною ознакою порівняння важливіший, ніж інший, або рівноцінний йому. Проте в порядкових шкалах не можна визначити міру домінування, тобто виміряти, наскільки один об'єкт кращий, важливіший за інший. Отже, шкала задає лише порядок переваг альтернатив, а числова система, у яку гомоморфно відображається емпірична система, має лише зберігати цей порядок на множині варіантів рішень.

У порядкових шкалах допустиме будь-яке взаємно однозначне монотонне перетворення співвідношень об'єктів, і числа призначені не лише для розрізнення об'єктів, але й для встановлення порядку між ними. У порядковій шкалі допустимі всі строго висхідні перетворення. Оцінки експертів, як ми вже зазначали, часто варто вважати виміряними в порядковій шкалі, тому що, згідно з численними дослідами, людина правильніше відповідає на якісні запитання, ніж кількісні. Наприклад, легше визначити який з двох предметів важчий, ніж вказати точну масу.

Шкали інтервалів мають таку властивість: однакові різниці числових значень виміряні в цих шкалах відповідають однаковим різницям вимірюваної ознаки. Проте різні шкали можуть мати різні нульові точки відліку (наприклад шкали для вимірювання температури за Цельсієм і Фаренгейтом). Словом, інтервальні шкали дають змогу виміряти «віддаль» між об'єктами, визначити, на скільки одиниць виміру один об'єкт кращий за інший. Можна заміняти одну інтервальну шкалу на іншу в межах лінійного перетворення. У шкалі інтервалів зберігаються відношення різниць числових оцінок.

За шкалою інтервалів вимірюють потенційну енергію чи координату точки на прямій. У такому разі на шкалі неможливо зазначити ні природний початок відліку, ні природну одиницю виміру. Дослідник має сам задати точку відліку і обрати одиницю виміру. У шкалі інтервалів допустимі лінійні висхідні перетворення, тобто лінійні функції.

Шкали відношень – найпоширеніші серед кількісних шкал у науці й практиці. Вони мають природний початок відліку – нуль. У шкалі відношень вимірюють більшість фізичних одиниць: масу тіла, довжину, заряд. Подібні перетворення (ті, що змінюють лише масштаб) допустимі для шкал відношень.

Шкали відношень, чи метричні (пропорційні), мають природну нульову точку відліку. Це, наприклад, шкали для вимірювання маси, розмірів об'єктів і т. ін. За їх допомогою можна визначити, у скільки разів один об'єкт більший за інший. Пропорційна шкала, на відміну від інтервальної шкали, має нульову точку відліку, отже допустиме лише пропорційне перетворення цієї шкали, і числові значення в шкалі відношень задано з точністю до постійного множника. У ній відношення числових оцінок альтернатив залишаються сталими. Як приклад можна взяти вимірювання маси, довжини предметів. Хоч би в яких одиницях не була виміряна маса чи довжина, відношення їхніх значень залишаються сталими.

Припустимо, що ми порівнюємо економічну ефективність двох інвестиційних проектів, використовуючи ціни в гривнях. Нехай перший проект виявився кращим за другий. Якщо ми перейдемо до розрахунків у Євро або доларах, за фіксованим курсом перерахування, то, очевидно, перший проект має залишитися вигіднішим.

Шкала різниць – частковий випадок шкапи інтервалів, коли може змінюватися лише початок відліку. Як приклад можна взяти різні системи літочислення. У шкалі різниць є природна одиниця виміру, але немає природного початку відліку. Абсолютною називається шкала, у якій числові значення задано з точністю до тотожних перетворень. В абсолютній шкалі фіксовані як початок відліку, так і масштаб. Як приклади візьмемо кількість студентів у групі, шкіл у місті тощо. Лише для абсолютної шкали результати вимірювань є звичайними числами. Єдине допустиме перетворення – тотожне.

3.2 Інваріантні алгоритми та середні величини

У теорії вимірювань основну вимогу до алгоритмів аналізу даних формулюють так: висновки зроблені на основі даних, виміряних у шкалі певного типу, не мають змінюватися після допустимого перетворення цієї шкали. Інакше кажучи, висновки мають бути інваріантні стосовно допустимих перетворень шкали.

Отже, одна з головних цілей ТВ – боротьба із суб'єктивізмом дослідника приписування числових значень реальним об'єктах. Так, відстані можуть вимірювати в метрах, мікронах, милях, парсеках й інших одиницях виміру, масу у кілограмах, пудах, фунтах тощо. Ціни на товари можна зазначати в гривнях, доларах США, Євро, кронах, марках та інших валютах (якщо задано курс перерахування).

Звернімо увагу на дуже важливу, хоча й цілком очевидну обставину: вибір одиниць виміру залежить від дослідника, тобто це суб'єктивний процес. Статистичні висновки можуть бути адекватні реальності лише тоді, коли вони не залежать від того, яку одиницю виміру обрав дослідник, тобто коли вони інваріантні щодо допустимого перетворення шкали. Виявляється, що сформульована умова доволі сильна.

Нехай X_1, X_2,.... X_n – вибірка обсягом *n*. Часто в різноманітних оцінюваннях використовують середнє арифметичне

Це так звично, що друге слово в цьому терміні часто випускають, що може призводити до помилкових висновків. Середня заробітна плата, може не відображати реального стану справ. Більшість співробітників фірми можуть мати заробітну плату набагато нижчу від середньої, а топ менеджери можуть мати набагато вищу від середньої.

Це нагадує ситуацію в лікарні, у якій середня температура хворих становить 36.6°C. При цьому частина хворих має температуру близько 35, а інші – близько 40°C. Водночас середня температура хворих у лікарні становить 36,6°C! Висновок із цього всього простий – середнє арифметичне можна використовувати лише для досить однорідних сукупностей. (без великих відхилень у той або інший бік). Як же можна застосувати середні для описання зарплатні?

Із цією метою цілком природно використати медіану. Це середнє арифметичне двох хворих із ранжованого ряду. Отже медіана потрапляє саме на них і показує «центр», біля якого групується основна часка досліджуваних величин. Ще одна середня величина – мода, тобто значення, що зустрічається найчастіше. У розглянутому випадку маємо три середні величини: моду, медіану і середнє арифметичне.

В реальному житті, виконується та сама закономірність: мода менша за медіану, а медіана менша, ніж середнє арифметичне.

Для чого в прийнятті рішень використовують середні значення? Щоб замінити сукупність чисел одним числом, тобто порівнювати сукупності за допомогою середніх. Інакше кажучи, це частковий випадок інформаційного фільтра агрегування інформації.

Постає питання: як обчислювати середні та середнє? Застосовують такі види середніх величин: середнє арифметичне, медіану, моду, середнє геометричне, середнє гармонічне та середнє квадратичне. Загальне поняття середньої величини вперше запропонував французький математик першої половини XIX ст. О. Коші.

Усі названі вище види середніх є середніми в розумінні Коші. Після допустимого перетворення шкали значення середньої величини змінюються. Однак висновки про те, для якої сукупності середнє більше, в для якої – менше, не мають змінюватися (відповідно до вимоги інваріантності висновків, що є основною в ТВ).

Розглянемо методи опрацювання думок експертів, виміряних у порядковій шкалі. Для неї доведено, що із всіх середніх за Коші допустимі лише члени варіаційного ряду (порядкові статистики). Це так за умови, що середнє – неперервна та симетрична функція, тобто після перестановки аргументів значення функції не змінюється. Ця умова цілком природна, тому що ми знаходимо середнє для множини, а не для послідовності.

Отже, як середнє для даних, вимірюваних у порядковій шкалі, можна використовувати, зокрема медіану (у разі непарного обсягу вибірки). Коли ж кількість елементів вибірки парна, варто застосовувати один із двох центральних членів варіаційного ряду – ліву чи праву медіану. Можна використовувати й моду, бо вона завжди є членом варіаційного ряду. Середнє ж арифметичне та середнє геометричне обчислювати недоцільно.

За певних додаткових умов середнє арифметичне можна використовувати й у порядковій шкалі, якщо перейти до ймовірнісної постановки за умови наявності вибірок із достатньо великим обсягом.

Середнім арифметичним можна користуватися й у порядковій шкалі, порівнюючи вибірки з двох розподілів, що задовольняють наведену умову, тобто одна з тобто одна з функцій розподілу завжди має розташовуватися «над» іншою. Функції розподілу не можуть перетинатися. Цю умову виконано, наприклад, якщо функції розподілу відрізняються лише зсувом, тобто $F(x) - H(x + b)$ для деякого сталого b. Остання умова виконується, якщо два значення певної величини виміряні за допомогою одного й того самого засобу вимірювання, за якого розподіл похибок не змінюється з переходом від одного вимірювання розглянутої величини до іншого.

Природна система аксіом (вимог до середніх величин) приводить до асоціативних середніх. Їхній загальний вид отримав в 1930 р. А. Н. Колмогоров. Тепер їх називають «середніми за Колмогоровим». Вони є узагальненням декількох з перерахованих вище середніх. Середнє за Колмогоровим G(X) для чисел $X_1, X_2, ..., X_n$ обчислюється за формулою:

$$\tilde{X} = G\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F(X_i)\right),$$

де F – строго монотонна функція (тобто строго зростаюча чи строго спадна). $G = F^{-1}$ функція, обернена до F. Середнє за Колммогоровим – це окремий випадок середнього, що узагальнює декілька видів середнього. Якщо $F(x)=x$, то це середнє арифметичне, у разі $F(x)=\ln(x)$ – середнє геометричне, $F(x)=1/x$ – середнє гармонічне, $F(x)=x^2$ – середнє квадратичне тощо (в останніх трьох випадках порівнюються позитивні величини).

Такі ж популярні середні, як медіана й мода, не можна подати як середні за Колмогоровим.

Доведено, що в шкалі інтервалів із всіх середніх за Колмогоровим допустиме лише середнє арифметичне. Отже, середнє геометричне чи середнє квадратичне температур (у шкалі Цельсія) чи відстаней не мають змісту. У цьому разі як середнє потрібно використовувати середнє арифметичне, а також медіану або моду. Якщо виконано деякі середньоматематичні умови регулярності в шкалі відношень, із всіх середніх за Колмогоровим допустимі лише представницькі середні $F(x)=x^c$, $c\neq0$, і середнє геометричне, що є межею представницьких середніх для $c\to0$. Постає питання: чи існують середні за Колмогоровим, якими не можна користуватися для шкали відношень? Так, наприклад, з $F(x) = e^x$.

Окрім середніх величин, вивчено й інші статистичні характеристики: показники розкиду, зв'язку, відстані й ін. Так, коефіцієнт кореляції не змінюється за будь-якого допустимого перетворення в шкалі інтервалів, як відношення дисперсії – у шкалі різниць, коефіцієнт варіації – у шкалі відношень тощо. У теорії прийняття рішень необхідно застосовувати лише інваріантні алгоритми опрацювання даних. Вимога інваріантності виділяє з багатьох алгоритмів усереднення лише деякі, що відповідають шкалам вимірювань, які використовуються.

3.3 Поняття та основні види метризованих відношень

Основний вид експертної інформації про переваги на множині альтернатив – це інформація у вигляді емпіричних відношень, отримана в процесі опитування експертів. Відношення, одержані за допомогою експертного опитування, можуть мати такі властивості, як зв'язність, транзитивність тощо, а можуть і не мати їх. З іншого боку, властивості остаточного відношення можуть бути відомі апріорі, а результати опитування експерта у вигляді відношення можуть не мати цих властивостей. У такому разі виникає задача апроксимації отриманого відношення найближчим у певному сенсі відношенням із заданими властивостями.

У багатьох випадках експерт може дати й порівняльну кількісну оцінку альтернатив – на скільки чи у скільки разів одна альтернатива краща за іншу.

Отже, оскільки результатом експертного опитування можуть бути відношення різних типів, то формалізація поняття «близькості» на множині відношень є важливою проблемою. Для кількісного оцінювання альтернатив введено поняття метризованого відношення.

Метризоване відношення P^M – це двійка P^M =<P,M(P)>, де P – бінарне відношення, а M(P) = $\|m_{ij}\|$, де m_{ij} – число, що характеризує ступінь переваги альтернативи x_i, над альтернативою x_j, або ж у разі толерантності – ступінь схожості цих альтернатив. Метризоване відношення P^M =<P,M(P)> називається рефлексивним, антирефлексивним, симетричним, асиметричним, антисиметричним, транслятивним, якщо відношення P має відповідні властивості. Властивість транзитивності порівняно з неметризованим відношенням підсилюється.

Нехай існують три альтернативи. Якщо альтернатива x_1, краща за x_2, на 10 одиниць, x_2 гірша ніж x_3, на 7 одиниць (тобто краща на -7 одиниць), то x_1 має бути краща за x_3 на 3 одиниці. Якщо ж альтернатива x_1 гірша, ніж x_2 у 6 разів, а x_2 – краща за x_3 вдвічі, то x_1 має бути втричі гірша, ніж x_3. Звичайно складно сподіватися на таку узгодженість у ході експертного опитування, тому й виникає проблема пошуку відношення, із заданими властивостями, яке було б у певному розумінні найкращим наближенням до емпіричного, отриманого від експерта. Найпоширеніші типи метризованих відношень – адитивне та мультиплікативне.

Адитивним називається метризоване відношення P^M, для якого виконується умова

$$(\forall x_i, x_j, x_k \in A) : x_i P x_k \wedge x_k P x_j \Rightarrow x_i P x_j \wedge (m_{ij} = m_{ik} + m_{kj}),$$

де A – носій відношення P.

Мультиплікативним називається метризоване відношення P^M, для якого правдива умова

$$(\forall x_i, x_j, x_k \in A) : x_i P x_k \wedge x_k P x_j \Rightarrow x_i P x_j \wedge (m_{ij} = m_{ik} \times m_{kj}).$$

Для адитивного метризованого відношення m_{ij} показує, «наскільки» альтернатива x_i краща, ніж x_j, для мультиплікативного – «у скільки разів». PM називатимемо метризованим відношенням часткового порядку, лінійного порядку, толерантності чи еквівалентності, якщо відношення P має відповідні властивості.

Елементи метризованого відношення P^M можна подати кількома способами, одним з яких є наступний. Замість двійки P^M =<P,M(P)> подамо їх у вигляді однієї матриці $P^M=\|p^M_{ij}\|$. Якщо P^M – метризоване відношення часткового порядку, то значення елементів p^M_{ij} визначено так:

$$p^M_{ij}=\begin{cases} m_{ij}, \text{ якщо } x_iPx_j \wedge x_j\overline{P}x_i \\ -m_{ij}, \text{ якщо } x_i\overline{P}x_j \wedge x_jPx_i \\ 0, \text{ якщо } x_iPx_j \wedge x_jPx_i \\ \theta, \text{ якщо } x_i\overline{P}x_j \wedge x_j\overline{P}x_i, \end{cases}$$

де число m_{ij} показує наскільки альтернатива x_i краща за x_j. Якщо альтернативи x_i й x_j рівноцінні (еквівалентні), то $m_{ij}=0$; коли ж вони непорівняльні, вводимо символ θх, одержуючи в разі потреби інформацію про рівноцінність або непорівнянність альтернатив безпосередньо з матриці Р.

Матриця метризованого відношення часткового (і лінійного) порядку узгоджена, якщо вона обернена симетрично, тобто $p^M_{ij}=-p^M_{ij}$. Узгоджена матриця – це ідеальний випадок. Насправді ж емпірична матриця має неузгодженості порівняно з ідеальним випадком.

Наприклад, матриця адитивного метризованого відношення часткового порядку може мати вигляд

$$P^M=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & \theta & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & \theta & 3 & 2 \\ -3 & \theta & \theta & 0 & \theta & \theta \\ -5 & -3 & -3 & \theta & 0 & \theta \\ -4 & -2 & -2 & \theta & \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Для мультиплікативних метризованих відношень часткового чи лінійного порядку (якщо оцінюється, у скільки разів альтернатива x_i краща за x_j) доцільно визначити наступним чином:

$$p^M_{ij}=\begin{cases} m_{ij}, \text{ якщо } x_iPx_j \wedge x_j\overline{P}x_i \\ 1, \text{ якщо } x_iPx_j \wedge x_jPx_i \\ 1/m_{ij}, \text{ якщо } x_i\overline{P}x_j \wedge x_jPx_i \\ 0, \text{ якщо } x_i\overline{P}x_j \wedge x_j\overline{P}x_i, \end{cases}$$

де m_{ij} – зазначене експертом значення, яке показує, у скільки разів альтернатива x_i краща, ніж x_j.

Так, матриця мультиплікативного метризованого відношення лінійного порядку може мати вигляд

$$P^M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 6 & 12 \\ 1/3 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1/6 & 1/2 & 1 & 1 & 2 \\ 1/6 & 1/2 & 1 & 1 & 2 \\ 1/12 & 1/4 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

У такому вигляді можна подати й метризоване бінарне відношення P:

$$p_{ij}^M = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad x_i P x_j \wedge x_j \overline{P} x_i \\ 0, & \text{якщо} \quad x_i P x_j \wedge x_j P x_i \\ -1, & \text{якщо} \quad x_i \overline{P} x_j \wedge x_j P x_i \\ \theta, & \text{якщо} \quad x_i \overline{P} x_j \wedge x_j \overline{P} x_i, \end{cases}$$

що є еквівалентним поданням матриці P.

Таке подання дає змогу оперувати лише з матрицею $\|p_{ij}^M\|$ без використання матриці P відповідного неметризованого бінарного відношення.

Приклад. Після експертного дослідження перший експерт проранжував альтернативи множини-носія A $\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ так 1 – x_3,

2 – x_1, (3-4) – (x_5, x_2), 5 – x_4, а другий експерт – інакше: 1 – x_1, (2-3) – (x_2, x_5), (4-5) – (x_3, x_4). Відповідно до цього бінарні відношення P_1 та P_2 матимуть вигляд

$$P_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad P_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

(вважаємо, що $x_i P x_j$, якщо альтернатива x_i не гірша за x_j). Якщо експерти далі не в стані оцінити переваги альтернатив кількісно, то відповідні матриці P_1^M та P_2^M будуть наступними:

$$P_1^M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad P_2^M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Під час подальшого розгляду цього прикладу виникає запитання: наскільки близькі між собою ранжування альтернатив, подані експертами? Відповідь на нього можна отримати, маючи певну міру, тобто формулу для обчислення віддалі між відношеннями, або процедуру знаходження цієї віддалі.

Таке подання описується також як структура «домінування – байдужість». Для цього слід побудувати фактор-відношення відповідного неметризованого відношення P за еквівалентністю та відповідну йому матрицю $\|P^M_{ij}\|$, у якій нулі є лише на головній діагоналі. Це аналогічно тому випадку, коли для еквівалентностей обирається по одному представнику з класу, тобто працює інформаційний фільтр типологічної вибірки.

Нехай матриця адитивного метризованого відношення часткового порядку P^M є наступною:

$$P^M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ -2 & 0 & 0 & \theta & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & \theta & 3 & 3 \\ -3 & \theta & \theta & 0 & \theta & \theta \\ -5 & -3 & -3 & \theta & 0 & 0 \\ -5 & -3 & -3 & \theta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тоді подання у вигляді P^M=(P,M(P)> має вигляд

$$P^M = \langle P, M(P) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ - & 0 & 0 & - & 3 & 3 \\ - & 0 & 0 & - & 3 & 3 \\ - & - & - & 0 & - & - \\ - & - & - & - & 0 & 0 \\ - & - & - & - & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(оскільки m_{ij} – число, що характеризує ступінь переваги x_i над альтернативою x_j, то в матриці M(P) для адитивного відношення $m_{ij} \geq 0$, мультиплікативного – $m_{ij} \geq 1$, а де ситуація протилежна чи альтернативи не порівнювалися – міститься прочерк).

Внаслідок факторизації за еквівалентністю отримаємо розбиття множини $A=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ на класи еквівалентності $\{\{x_1\}, \{x_2, x_3\}, \{x_4\}, \{x_5, x_6\}\}$, тобто множина-носій факторизованого відношення – $A=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, де $A_1=\{x_1\}$, $A_2=\{x_2, x_3\}$, $A_3=\{x_4\}$, $A_4=\{x_5, x_6\}$, і факторизоване відношення є таким:

$$P_F^M = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \\ - & 0 & - & 3 \\ - & - & 0 & - \\ - & - & - & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Коли ж $P^M=\|P^M_{ij}\|$ відношенням толерантності чи еквівалентності, то числа m_{ij} є ступенями подібності альтернатив x_i та x_j, і

$$p_{ij}^M = \begin{cases} m_{ij}, & \text{якщо} \quad x_i P x_j \\ \theta, & \text{якщо} \quad x_i \bar{P} x_j \\ \forall m_{ij} \geq 0, \end{cases}$$

і відповідна матриця РМ симетрична.

Наприклад, метризоване відношення подібності P^M (із максимальним значенням подібності 10, що відповідає еквівалентності), таке:

$$P^M = \begin{pmatrix} 10 & 5 & \theta & \theta & \theta \\ 5 & 10 & \theta & \theta & \theta \\ \theta & \theta & 10 & 3 & 7 \\ \theta & \theta & 3 & 10 & \theta \\ \theta & \theta & 7 & \theta & 10 \end{pmatrix}.$$

Отже, метризовані відношення не лише дають змогу в числовій формі подати ступінь переваги однієї альтернативи над іншою з погляду децидента, але й зумовлюють низку запитань:

– Як оцінити близькість або розбіжність тверджень експертів, маючи результати у вигляді бінарних відношень?

– Яким еталонним бінарним відношенням найліпше апроксимувати емпіричне відношення, отримане як результат опитування експерта?

– Які дії можна виконувати вид одержаними експертними результатами у формі метризованих бінарних відношень, а які ні?

– Які процедури слід застосувати для отримання числової інформації про переваги на множині альтернатив від експерта?

– Як оцінити надійність і несуперечливість експерта?

3.4 Міри близькості на бінарних відношеннях

У задачах прийняття рішень із використанням бінарних відношень постійно виникають проблеми порівняння бінарних відношень, визначення ступеня близькості, пошуку в певному розумінні середніх відношень або апроксимації емпіричних відношень тими, що мають задані властивості. Розв'язуючи ці проблеми, всюди використовують поняття «віддалі» між відношеннями. Тому для вимірювання віддалей потрібно запровадити певну метрику, міру близькості. загальновизнаний метод одержання формул або алгоритмів обчислення віддалей між відношеннями – це аксіоматичний.

У цьому випадку слід виконати таку послідовність кроків:

1. Формулювання системи аксіом, що задовольняють певні вимоги та припущення.

2. Доведення теореми існування однієї й лише однієї міри близькості на відношеннях, що ґрунтуються на побудованій системі аксіом.

3. Отримання формули (чи алгоритму) для визначення міри близькості.

У реальних умовах вибір і обґрунтування можливостей використання тієї чи іншої міри близькості покладають на аналітичну групу, яка бере до уваги первинні вимоги. Уперше аксіоматичну міру близькості побудував Дж. Кемені для відношень лінійного порядку. Пізніше було одержано міри близькості на відношеннях еквівалентності, порядку, толерантності, метризованих відношеннях і відношеннях загального вигляду. Окрім того, значення деяких мір близькості обчислюють за допомогою розв'язання оптпимізаційних задач (про найкоротший шлях, наплічник тощо).

Наявність мір близькості дає змогу ставити й розв'язувати такі практично важливі задачі:

– будувати остаточні відношення за тими, які отримано від експертів;

– шукати найближче до експертного відношення з певними властивостями;

– класифікувати експертів за результатами побудованих ними бінарних відношень;

– формулювати узагальнені критерії та перевіряти рівень несуперечливості експертів.

Розглянемо послідовність побудови міри близькості на відношеннях лінійного порядку із використання Дж. Кемені. Сформулюємо систему аксіом, які мають виконуватись у разі використання метрики. По-перше, для довільної міри близькості мають бути виконані три основні аксіоми метрики: невід'ємності, симетричності віддалі та трикутника.

Віддаль d між двома довільними відношеннями P_1 та P_2 невід'ємна, тобто $d(P_1,P_2)\geq 0$, $d(P_1,P_2)=0$ тоді і лише тоді, коли $P_1=P_2$. Відстань є симетричною величиною, тобто $d(P_1,P_2)=d(P_2,P_1)$.

Для довільних відношень P_1, P_2, P_3 виконується нерівність $d(P_1,P_3) \leq d(P_1,P_2)$ $d(P_2,P_3)$ (нерівність трикутника). Рівність досягається, тоді коли відношення P_1, P_2, P_3 знаходяться «на одній прямій». Дехто з авторів розглядає випадок рівності $d(P_1,P_3)= d(P_1,P_2)$ $d(P_2,P_3)$ окремо, як аксіому.

Вважатимемо, що ранжування Q лежить між ранжуваннями P та R, якщо для всіх елементів матриць $\|P^m_{ij}(P)\|$, $\|P^m_{ij}(Q)\|$ та $\|P^m_{ij}(R)\|$ виконано умову

$$\min\{p_{ij}^M(P), p_{ij}^M(R)\} \leqslant p_{ij}^M(Q) \leqslant \max\{p_{ij}^M(P), p_{ij}^M(R)\}.$$

Отже, у ранжуванні Q альтернатива x_i краща за x_j, якщо хоча б в одному з ранжувань P чи R альтернатива x_i краща за x_j. Альтернативи x_i та x_j, можуть бути рівноцінні в ранжуванні Q, якщо вони рівноцінні чи протилежно впорядковані в P та R. Будемо записувати [P,Q,R], якщо ранжування Q знаходиться між P та R. Узагальнимо поняття прямої: будемо вважати, що ранжування P_1, $P_2,\ldots,P_k$ розташовані на прямій, якщо для довільних P_i, P_j, P_l, що належить цій множині ранжувань, [P_i, P_j, P_l], де $1 \leq i<j<l \leq k$, тобто

$$d(P_i, P_l) = d(P_i, P_j) + d(P_j, P_l).$$

Якщо ранжування Q знаходиться між P та R, тобто [P,Q,R], то d(P,R)=d(P,Q)+d(Q,R).

Нехай, $F{:}A \rightarrow A$ перестановка альтернатив. Якщо відношення P' і R' отримані з відношень P та R перенумеруванням (перестановкою) альтернатив, то d(P,R)=d(P',R'), тобто від перенумерування відстань між відношеннями не змінюється.

Значення міри близькості між ранжуваннями P та R залежить від тих сегментів цих ранжувань, у яких є відмінності в упорядкуванні альтернатив, тобто відстань між ідентичними сегментами ранжувань нульова.

Розглянемо два ранжування P та R, які різняться лише впорядкуванням альтернатив, що займають місця з (r +1)-го до (r+k)-го, $(r+n) \leq n$, де n – card(A), тобто потужність множини-носія цих відношень у разі скінченної множини – це кількість альтернатив. Позначимо як T(P) і T(R), отримані з P та R відкиданням альтернатив, що займають місця від 1-го до r-го та від (r+k+1)-го до n-го. Отже, d(T(P), T(Q)) = d(P,Q).

Приклад. Два експерти проранжували п'ять альтернатив та виявили такий порядок їх важливості:

$$1.\ \{x_2 \succ x_5 \succ (x_1 \approx x_4) \succ x_3\}$$

$$2.\ \{(x_2 \approx x_3) \succ (x_1 \approx x_5) \succ x_4\}$$

Отже, перший експерт поставив на перше місце альтернативу x_2, на друге x_5, трете-четверте місця поділили альтернативи x_1 та x_4, а останнє місце посіла альтернатива x_3. Другий експерт натомість на перше та друге місця обрав альтернативи x_2 та x_3, а третє-четверте місця в нього поділили альтернативи x_1 та x_5, а на останньому місці опинилась альтернатива x_4.

Побудуємо відповідні матриці відношень $\|P^m_{ij}(P_1)\|$ і $\|P^m_{ij}(P_2)\|$.

$$\left\|p^M_{ij}(P_1)\right\| = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left\|p^M_{ij}(P_2)\right\| = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Віддаль між ранжуваннями P_1 та P_2, становить $d(P_1,P_2)=9$. Побудуємо відношення P, що лежить між P_1 та P_2, тобто $[P_1, P_u, P_2]$:

$$\left\|p^M_{ij}(P_u)\right\| = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Віддалі $d(P_1,P_u)=4$, $d(P_u, P_2)=5$, $d(P_1,P_2)+d(P_1,P_u)+d(P_u,P_2)=4+ 5=9$. Цьому відношенню відповідатиме ранжування $\{x_2>x_5>x_3<(x_1=x_4)\}$.

Аналогічним чином як для ранжувань, доводиться існування єдиної міри й для еквілентностей, при цьому міра розраховується за тією ж формулою, як і для ранжувань. Доведено також, що ця ж формула визначає міру близькості і на відношеннях порядку, у вигляді матриці $\|p^M_{ij}\|$.

Приклад. Два експерти побудували наступні еквівалентності.

1. $\{(x_1,x_5); (x_2,x_3); (x_2,x_4); (x_3,x_4)\}$.

2. $\{(x_1,x_3); (x_2,x_5)\}$.

Їм відповідають матриці

$$\left\|p^M_{ij}(P_1)\right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left\|p^M_{ij}(P_2)\right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значення міри близькості для цих відношень становить $d(P_1,P_2)=6$.

Приклад. Нехай задано два відношення часткового порядку:

$$P_1 = \{(x_1, x_2); (x_1, x_3); (x_1, x_4); (x_1, x_5); (x_2, x_4); (x_2, x_5)\}.$$

$$P_1 = \{(x_3, x_1); (x_3, x_2); (x_3, x_4); (x_3, x_5)\}.$$

Побудуємо відповідні матриці відношень:

$$\left\| p_{ij}^{M}(P_1) \right\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left\| p_{ij}^{M}(P_2) \right\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значення міри близькості для цих відношень становить $d(P_1,P_2)=10$.

Приклад. Два експерти надали такі відношення толерантності:

$$\left\| p_{ij}^{M}(P_1) \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left\| p_{ij}^{M}(P_2) \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значення міри близькості для цих відношень становить d(P1,P2)=5.

Приклад. Два експерти порівнювали попарно та зазначали альтернативи, які, на їхню думку, мали переваги. У результаті було побудовано такі матриці відношень $\|p^{m}_{ij}(P_1)\|$ і $\|p^{m}_{ij}(P_2)\|$:

$$\left\| p_{ij}^{M}(P_1) \right\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left\| p_{ij}^{M}(P_2) \right\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значення міри близькості для цих відношень становить $d(P_1,P_2)=12$.

Отже, для неметризованих відношень відстань між відношеннями P_l і P_k залежить від ступеня розбіжностей між відповідними матрицями відношень $\|p^{m}_{ij}(P_l)\|$ і $\|p^{m}_{ij}(P_k)\|$. Однак зрозуміло, що оскільки матриці неметризованих відношень, узагалі кажучи, не мають метричної інтерпретації, то їх елементами можуть бути не обов'язково й довільні елементи.

У метризованому відношенні $P^{M}=<P,M(P)>$ кожен елемент матриці $P^{M}=\|p^{M}_{ij}\|$ відповідає парі $(x_i,x_j)\in P$, і його можна змістовно розглядати як ступінь переваги чи подібності альтернатив, а також відносну частоту вибору однієї з альтернатив, а також відносну частоту вибору однієї з альтернатив при попарних порівняннях.

Поділимо метризовані відношення на два класи відповідно до їх подання у вигляді матриці P^{M}:$M(P^{MP})$ – клас метризованих відношень порядку та лінійного порядку та $M(P^{MP})$ – клас метризованих відношень толерантності й еквівалентності.

Будемо вважати, що матриці метризованих відношень узгоджені.

Матриця адитивного метризованого відношення $P^M=\|p_{ij}^M\|\in M(P^{MP})$ буде узгодженою, якщо для всіх елементів виконується умова: $p_{ij}^M=-p_{ij}^M$, (вважаємо, що 0=-0 та $\theta=-\theta$). Відповідно матриця метризованого відношення $P^M=\|p_{ij}^M\|\in M(P^{MP})$ буде узгодженою, якщо для всіх елементів $p_{ij}^M=-p_{ij}^M$.

Отже, якщо матриці метризованих відношень узгоджені, то в класі $M(P^{MP})$ для визначення відстані достатньо розглядати такі елементи матриці, для яких $(x_i, x_j)\in P$, а для толерантностей і еквівалентностей – такі, що $(x_i,x_j)\in P$; в обох випадках $i\le j$. Тому надалі віддаль між метризованими відношеннями будемо визначати на цих підмножинах елементів матриці P^M.

Вважатимемо, що метризоване відношення Q знаходиться між метризованими відношеннями P та R, якщо виконуються наступні умови:

$$(\forall p_{ij}^M(P)\neq\theta\wedge p_{ij}^M(R)\neq\theta): \min\{p_{ij}^M(P), p_{ij}^M(R)\}\leqslant p_{ij}^M(Q)\leqslant \max\{p_{ij}^M(P), p_{ij}^M(R)\};$$
$$(\forall p_{ij}^M(P)=\theta\wedge p_{ij}^M(R)\neq\theta): p_{ij}^M(Q)=\theta \quad \text{або} \quad p_{ij}^M(Q)=p_{ij}^M(R);$$
$$(\forall p_{ij}^M(P)\neq\theta\wedge p_{ij}^M(R)=\theta): p_{ij}^M(Q)=\theta \quad \text{або} \quad p_{ij}^M(Q)=p_{ij}^M(P);$$
$$(\forall p_{ij}^M(P)=\theta\wedge p_{ij}^M(R)=\theta): p_{ij}^M(Q)=\theta.$$

Якщо відношення P та Q відрізняються лише однією впорядкованою парою альтернатив (x_i, x_j), то віддаль між ними задано наступним співвідношенням:

$$d(P,Q)=d_{ij}(P,Q)=\begin{cases} \left|p_{ij}^M(P)-p_{ij}^M(Q)\right|, & \text{якщо } p_{ij}^M(P)\neq\theta\wedge p_{ij}^M(Q)\neq\theta \\ 0, & \text{якщо } p_{ij}^M(P)=p_{ij}^M(Q)=\theta \\ w - \text{в інших випадках,} & \end{cases}$$

де w – число, що задовольняє умову

$$(\forall i,j\in\overline{1,n}): p_{ij}^M(P)\leqslant w\wedge p_{ij}^M(Q)\leqslant w,$$

тобто можна вибрати

$$w=\max_{(\forall i,j\in\overline{1,n})}\{p_{ij}^M(P); p_{ij}^M(Q)\}.$$

Якщо відношення P та Q відрізняються лише однією впорядкованою парою альтернатив x_i, x_j, то віддаль між ними становить

$$d(P,Q)=(d_{ij}(P,Q)+d_{ji}(P,Q))/2.$$

Приклад. У результаті експертного оцінювання отримано такі матриці відношень:

$$\left\| p_{ij}^M(P_1) \right\| = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 6 & -1 \\ -10 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 3 \\ -6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left\| p_{ij}^M(P_2) \right\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 6 \\ -5 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 7 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо відстань між цими відношеннями. Оскільки задачі відношення є узгодженими метризованими відношеннями порядку, то відстань між ними становить $d(P_1, P_2)=50$.

Приклад. Обчислимо відстань між визначеними двома експертами метризованими толерантностями, заданими матрицями:

$$\left\| p_{ij}^M(P_1) \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & \theta & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}8 & 0{,}4 \\ \theta & 0{,}8 & 1 & 0{,}9 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}9 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left\| p_{ij}^M(P_2) \right\| = \begin{pmatrix} 1 & \theta & 0{,}1 & 0{,}4 \\ \theta & 1 & 0{,}8 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 1 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриці узгоджені, то визначимо відстань між відношеннями P_1 і P_2 за формулами

$$d(P_1, P_2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} d_{ij}(P_1, P_2), \quad d_{ij}(P, Q) = \begin{cases} \left| p_{ij}^M(P) - p_{ij}^M(Q) \right|, & \text{якщо } p_{ij}^M(P) \\ 0, & \text{якщо } p_{ij}^M(P) = p_{ij}^M(Q) = \theta \\ w & \text{– в інших випадках,} \end{cases}$$

$$d(P_1, P_2) = |0{,}3-\theta| + |\theta-0{,}1| + |0{,}1-0{,}4| + |0{,}8-0{,}8| + |0{,}4-0{,}5| + |0{,}9-0{,}8| = 2w + 0{,}5.$$

Приклад. Визначити відстань між двома відношеннями загального типу, заданими матрицями:

$$\left\| p_{ij}^M(P_1) \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \theta \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left\| p_{ij}^M(P_2) \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \theta \\ 4 & 1 & 1 \\ \theta & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки відношення довільні, то

$$d(P_1, P_2) = \frac{1}{2}[(|3-2| + |-2-4|) + (|\theta-\theta| + |-3-\theta|) + (|0-1| + |4-1|)] = w + 11.$$

Інформацію про переваги можна подати також у вигляді вектора переваг $\pi=(\pi_1, \pi_2,..., \pi_n)$, де n – кількість альтернатив, а $0 \le \pi_j \le n-1$ – кількість альтернатив, які переважають π_j, $j=1,n$.

Використавши аналогію між мірами близькості на відношеннях і метриками на графах, можна отримати структурні міри близькості. Для цього розглянемо множину носія відношень $A=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ і множину $P=\{P_1,P_2,\dots,P_n\}$ усіх можливих відношень певного типу з носієм A. Кожному відношенню $P_i \in P$ поставимо у відповідність i-ту вершину скінченного графа G. Якщо два відношення $P_i,P_j \in P$ сусідні, то їх з'єднано дугою. Кожній дузі графа поставимо у відповідність число, що характеризує віддаль між сусідніми відношеннями за певним законом, який відображає специфічні особливості міри. Вважатимемо, що відношення неметризовані, тому в іншому випадку множина вершин графа G безмежна.

Поняття «знаходитися між» у цьому разі можна сформулювати так: уважаємо, що відношення Q знаходиться між відношеннями P та R, якщо вершина графа G, що відповідає відношенню Q, належить до найкоротшого шляху, що сполучає вершини, які відповідають відношенням P та R. Якщо P й Q – сусідні відношення, то $d(P,Q)=C_{PQ}$ – міра близькості між ними.

Отже, у загальному випадку, щоб визначити віддаль між довільними відношеннями, потрібно знайти в графі G найкоротший шлях між відповідними вершинами. Виходячи з того, що для n альтернатив і чи не найпростішого відношення строгого порядку кількість шляхів графа G становить n!, зрозуміло, що безпосереднє обчислення відстані практично неможливе. Тому використовують інший метод – конструктивно вводять структурні міри близькості.

Розглянемо випадок, коли для знаходження найкращих альтернатив використано ранжування. Природно вважати, що в ранжуваннях, які потрібно порівняти між собою, інверсії (перестановки) сусідніх альтернатив, що займають різні порядкові місця, нерівноцінні (інверсія на вищих місцях вагоміша, ніж на останніх).

Якщо ранжування P та Q відрізняються лише інверсією альтернатив, що займають i-те та (i+1)-ше місця, $d(P,Q)=c_i>0$, то $c_1 \geq c_2 \geq \ldots c_{n-1}$, оскільки альтернативи ранжуються для виявлення найліпшої.

Усі розглянуті раніше міри близькості мали спільну рису: на множинах відношень різних типів було введено поняття аналогу прямої. При цьому віддалі між відношеннями одного типу P_1, P_2,.....P_n, що розмішені на прямій, задовольняли умову

$$d(P_i, P_m) = \sum_{i=1}^{m-1} d(P_i, P_{i+1}).$$

Використавши замість аналогу прямої аналог ортогональних лінійних сегментів, отримаємо важливий клас близькості – Евклідові міри. Уперше їх запровадив Богарт для відношень часткового порядку, які не мали рівноцінних альтернатив.

Лінійним сегментом L називається така послідовність розміщених відношень P_1, P_2,…,P_n для якої використано таку умову: якщо відношення R знаходиться між P_i та P_{i+1} - $[\backslash P_i, R, P_{i+1}]$, то $R=P_i$ або $R=P_{i+1}$.

Кожне з відношень лінійного сегмента L отримується долученням або відкиданням однієї пари альтернатив (x_i,x_j). Лінійні сегменти L_1 та L_2 ортогональні, якщо в разі долучення або відкидання пари альтернатив (x_i,x_j) в одному з них її не можна відповідно долучити чи відкинути в іншому. позначимо як π ізометричну перестановку відношень, тобто таку, що

$$\pi(x_{i_1}, x_{i_2}) = \pi(x_{i_3}, x_{i_4}) \text{ та } \pi(x_{i_2}, x_{i_1}) = \pi(x_{i_4}, x_{i_3}),$$

Отже, отримані формули для обчислення відстаней між бінарними відношеннями різних типів, висуваючи різноманітні припущення та формулюючи їх у вигляді аксіом. Для того, одержані результати були застосовані на практиці, аксіоми, на яких ґрунтується спосіб обчислення відстані, слід перевіряти в конкретних умовах експертного опитування.

3.5 Емпіричні системи та вимірювання переваг

Як уже було зазначено, вимірювання – одна з основних процедур отримання експертної інформації. Залежно від природи оцінюваних альтернатив, міркування експертів можуть бути кількісними чи якісними. Зрозуміло, що кількісні оцінки інформативніші за якісні, проте лише за умови, що експерт може оцінити альтернативи кількісно, тобто зазначити, наскільки чи в скільки разів одна альтернатива переважає іншу. Залежно під способів вимірювання та різниці в їх точності результати порівнянь можуть виявитися протилежними.

На практиці доволі поширений такий спосіб оцінювання переваг, n експертів ранжують альтернативи за перевагою: найкращу на його погляд альтернативу конкретний експерт ставить на перше місце: вона отримує 1 бал, друга – 2 бали, і так до n-і, яка одержує n балів. Далі для всіх альтернатив обчислюють середні арифметичні значення балів для всіх експертів, і найкращою оголошують ту, середнє арифметичне для якої є найменшим.

Інший підхід – n експертів ранжують альтернативи за перевагою: найгіршу на його погляд альтернативу конкретний експерт ставить на початок ряду: вона отримує 1 бал, друга – 2 бали, і так до n-і, яка одержує n балів. Далі для всіх альтернатив обчислюють набрані бали за оцінками усіх експертів, і найкращою оголошують ту, яка набрала найбільше балів.

Розглянемо ситуацію, коли n-1 експертів ($n \geq 3$) поставили першу альтернативу на перше місце, другу – на друге, і лише n-й експерт зробив навпаки. Тоді перша альтернатива отримує (1+1/n) балів, а друга – (2-1/n). У ньому разі помилка може бути дуже суттєвою, оскільки під час ранжування ступінь переваги взагалі не береться до уваги, і може статися, що в ході числового оцінювання n-1 експертів оцінили б ступінь переваги першої альтернативи над другою як «краща на одну одиницю», а експерт n оцінив би ступінь переваги другої альтернативи над першою – як «краща на n одиниць»; тоді друга альтернатива виявилася б ліпшою, ніж перша, хоча за середнім арифметичним значенням рангу ситуація протилежна.

Уникнути таких помилок можна шляхом дослідження допустимих методів опрацювання експертної інформації за умови вимірювання її в певній шкалі. Із цією метою розглянемо поняття емпіричної та числової системи.

Емпіричною системою U будемо називати множину $A = \{x_1,\dots,x_n\}$ альтернатив і відношення P з носієм A-U=<A,P>. У процесі вимірювань кожній альтернативі $x_i \in A$ ставлять у відповідність певне число, тобто виконують вимірювання емпіричної системи, внаслідок чого визначають відповідну до неї числову систему $U_z=(A_2,P_2)$, де $A_2=\{z_1,\dots,z_n\}$ – множина чисел, одержана застосуванням відображення $f: A \to A_z$, тобто $z_j=f(x_j)$.

Отже, емпірична система U гомоморфно відображається в числову зі збереженням умови $\forall(x_i,x_j \in A): x_i P x_j \Rightarrow f(x_i) P_z f(x_j)$. Якщо в емпіричній системі відношення P відображає переваги альтернатив, то P, природно розглядати як відношення «≥» на множині чисел A_z.

Щоб забезпечити можливість порівняння альтернатив між собою, введемо поняття шкали та квазішкали вимірювань. Шкалою вимірювань називається трійка $<U,f,U_z>$. У кожному вимірюванні використовують шкалу певного типу. Часто виникає проблема порівнянності альтернатив між собою; експерт може вважати деякі альтернативи x_i та x_j непорівняльними. Водночас інколи може бути корисним непряме порівняння цих альтернатив: якщо експерт вважає альтернативу x_i кращою ніж x_k, а x_j гіршою ніж x_k, альтернативу x_i кращою ніж x_k, то з певними застереженнями можна вважати альтернативу x_i кращою за x_k (непрямо використовуючи транзитивність, якої може й не бути).

Для того, щоб можна було порівнювати альтернативи між собою, введемо поняття квазішкали. Відношення P емпіричної системи U=<A,P> за умови наявності непорівняльних альтернатив є відношенням порядку. Надалі будемо вважати, що первісне відношення P вже факторизоване за еквівалентністю, тобто всі наявні альтернативи різні, тому, приписуючи альтернативі певне число в шкалі чи квазішкалі, ми присвоюємо його значення всім альтернативам первісного відношення, які еквіваленті їй.

На множині альтернатив A можна виділити зв'язні підмножини (вважатимемо, що підмножина зв'язна, якщо зв'язне визначене на ній відношення). Зв'язна множина $A_i \subset A$ максимальна, якщо для будь-якого $x \in A$, $x \in A \setminus A_i$, множина $A_i \cup \{x\}$ незв'язна. Розглянемо множину лінійних максимальних відношень порядку $(P_1,P_2,\dots,P_к)$, кожне з яких задовольняє умову $P_i \subset P$ й об'єднання яких покриває P, тобто

$$\bigcup_{i=1}^{n} P_i = P,$$

а носієм кожною з цих відношень є $A_i \subset A$.

Відношення $P_i \subset P$ буде максимальним лінійним порядком, якщо не знайдеться ні одного лінійного порядку $P_k \subset P$, для якого б виконувалась умова

$P_i \subset P_k$. Таким чином емпірична система $U=\langle A,P\rangle$, приводиться до множини емпіричних підсистем $U_i^A=\langle A_i,P_i\rangle, i=1,k$, побудованої таким чином, що кожне з відношень $P_i \subset P$ є максимальним лінійним порядком. Трійку $\langle U^A,f,U^Z\rangle$, де $U^A=\{U_1^A,U_2^A,\dots,U_k^A\}$, $U^Z=\{U_1^Z,U_2^Z,\dots,U_k^Z\}$, $f=\{f_1,f_2,\dots,f_k\}$, $f:U_i^A \to U_i^z$, причому виконується умова $(U_i^A,U_j^a \in U_l^A):x_l \in A_i \cap A_j \Rightarrow f_i(x_l)=f_j(x_l)$ називатимемо квазішкалою.

Окреслимо проблеми, пов'язані з відображенням емпіричної системи в числову. Припустімо, що потрібно знайти числові оцінки множини альтернатив. Перша проблема формулюється так: чи існує числова система U^Z, у яку гомоморфно відображається емпірична система U, тобто чи можна «виміряти» емпіричну систему? Відповідь – так, тому що можливість вимірювання основних типів емпіричних систем, що розглядаються в експертних системах, є доведеною.

Друга проблема пов'язана з існуванням багатьох відображень однієї й тієї самої емпіричної системи з відношенням у різноманітні числові системи. Вона полягає у визначенні множини таких систем, якій властивий певний вид перетворення, що відображає одну числову систему в іншу. Наприклад існують три шкали вимірювання температури: Цельсія, Кельвіна та Фаренгейта. Перехід від однієї до іншої здійснюється за допомогою лінійного перетворення $y=ax+b$, $a>0$. Отже, лінійне перетворення результатів вимірювання температури не спотворює сенсу вимірювань.

Третя проблема теорії вимірювань – проблема адекватності – полягає у визначенні того, чи існує можливість виконання певних дій (операцій) над числовими оцінками альтернатив без спотворення отриманої первинної інформації (порівняння зі значенням, додавання, множення тощо. Тип шкали вимірювань визначається допустимим перетворенням числової системи, що відображає її в іншу числову систему, що, як і попередня, є гомоморфним образом первинної емпіричної системи. Для основних типів шкал множина допустимих перетворень простягається від тотожного перетворення до довільного взаємно однозначного.

Для повноти розгляду введемо поняття проміжної якісної шкали, яка відображає більше інформації, ніж порядкова, але менше, ніж шкала інтервалів. Це шкала гіперпорядку. У гіперупорядкуваннях ранжуються не альтернативи, а різниці їх оцінок.

Що ж стосується транзитивності, то таку жорстку вимогу не накладають на експертні результати у вигляді емпіричного відношення, яке використовують безпосередньо в подальших операціях або апроксимують найближчим у певному сенсі транзитивним відношенням. Окрім того, порушення транзитивності використовують для оцінювання ступеня послідовності міркувань експерта; що більше її порушено, то менш послідовний експерт.

Отже, проблеми, що виникають у разі переходу від емпіричних систем до відношень, розв'язують частково на етапі формування порядку опитування експерта, а частково – за допомогою апроксимації емпіричних результатів відношенням заданого типу.

3.6 Проблеми експертного оцінювання та види експертиз

У випадках неординарності проблеми (труднощі, новизна, недостатність наявної інформації, неможливість математичної формалізації процесу рішення) звертаються до рекомендацій компетентних фахівців у своїй проблемній області.

Експерт – це особа, що володіє знаннями і здатна виказати аргументовану думку з явища, що вивчається.

Метод експертних оцінок – процес аналізу експертами і аргументування, формування кількісних оцінок, обробка оцінок формальними методами.

Експертиза – процедура отримання оцінок від експертів.

Якість одержуваних експертних оцінок значною мірою визначається підготовкою експертизи, а також вживаними методами оброблення інформації, одержуваної від експертів. Єдиних правил підготовки і проведення експертизи немає.

Проте можна виокремити основні етапи її підготовки і проведення.

Перед початком експертного дослідження необхідно чітко визначити його мету (проблему) і сформулювати відповідне питання для експертів. При цьому рекомендується дотримуватися наступних правил:

Чітке визначення умов, часу, зовнішніх і внутрішніх обмежень проблеми.

Можливість відповіді на запитання з доступною людському досвіду точністю.

Питання краще формулювати як якісне твердження, ніж як оцінку числа. Для чисельних оцінок не рекомендується задавати більше п'яти градацій.

Експерти оцінюють можливі варіанти, і не варто очікувати від них побудови закінченого плану дій, розгорнутого опису можливих рішень.

Існуючі **види експертних оцінок** можна класифікувати за **ознаками**:

– *За формою участі експертів*: **очне** – **заочне**. Очний метод дає змогу зосередити увагу експертів на розв'язуваної проблеми, що підвищує якість результату, однак заочний метод може бути дешевшим.

– *За кількістю ітерацій* (повторів процедури для підвищення точності): **однокрокові** – **ітераційні**.

– *За задачами*: **генеруючі рішення** – **оцінюючі варіанти**.

– *За типом відповіді*: **ідейні** – **ранжуючі**, що оцінюють об'єкт за відносною чи абсолютною (чисельною) шкалою.

– *За способом обробки думок експертів*: **безпосередні** – **аналітичні**.

За кількістю залучених експертів: **без обмеження** – **обмежені**. (Зазвичай використовується 5 – 12 осіб експертів).

Після визначення форми проведення експертизи вибирають метод експертного опитування (класифікація наведена нижче)

Найвідоміші методи експертних оцінок: метод Дельфи, мозковий штурм і метод аналізу ієрархій.

Кожному методу відповідають свої терміни проведення і потреба в експертах.

Після вибору методу експертного оцінювання можна визначити витрати на процедуру, які охоплюють оплату експертів, оренду приміщення, придбання канцтоварів, оплату фахівця з проведення та аналізу результатів експертизи.

Для проведення процедури опитування необхідно підготувати інформаційні матеріали з описом проблеми, наявні статистичні дані, довідкові матеріали, бланки анкет, інвентар.

Варто уникати наступних помилок: згадувати розробників матеріалів; виділяти той чи інший варіант рішення; висловлювати ставлення керівництва до очікуваних результатів. Дані мають бути різнобічними і нейтральними.

Заздалегідь необхідно розробити бланки анкет для експертів. Залежно від методу вони можуть бути з відкритими та закритими питаннями, відповідь може даватися у вигляді судження, парного порівняння, рангового ряду, в балах або у вигляді абсолютної оцінки.

У вирішенні завдання вибору експертів істотно значимими є:

– персональний підбір експертів;

– формування представницької групи експертів.

Критерії підбору експертів:

– компетентність (наявність знань і досвіду з розв'язуваної проблеми);

– креативність (здатність вирішувати творчі завдання);

– антиконформізм (несхильність до впливу авторитетів);

– конструктивність мислення (здатність давати практично значущі рішення);

– колективізм (здатність працювати в колективі згідно із загальновизнаними етичними нормами поведінки);

– самокритичність (здатність критично ставитися до власної компетенції та своїх суджень);

– наявність часу для роботи в експертних групах;

– зацікавленість – наявність бажання у вирішенні проблеми, що розглядається.

Саму процедуру проводить незалежний **модератор процедури**, який контролює дотримання регламенту, роздає матеріали та анкети, але сам не висловлює свою думку.

Залежно від цілей експертного оцінювання і обраного методу вимірювання при обробленні результатів опитування виникають наступні основні завдання:

– побудова узагальненої оцінки об'єктів на основі індивідуальних оцінок експертів;

– побудова узагальненої оцінки на основі парного порівняння об'єктів кожним експертом;

– визначення відносних ваг об'єктів;

– визначення узгодженості думок експертів;

– визначення залежностей між результатами оцінювання різних експертів;

– оцінка надійності результатів обробки.

Результати експертного оцінювання оформляються у вигляді звіту.

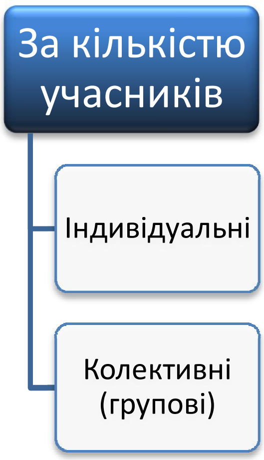
У звіті вказується:

– мета дослідження;

– склад експертів;

– отримана оцінка;

– аналіз результатів.



Дві групи експертних оцінок:

– **Індивідуальні оцінки** базуються на використанні думок окремих експертів, незалежних один від одного.

– **Колективні оцінки** основані на використанні колективної думки експертів.

Спільна думка володіє більшою точністю, ніж індивідуальна думка кожного із спеціалістів. Цей метод застосовують для отримання кількісних оцінок якісних характеристик і властивостей.

<u>переваги</u>:

– Підвищення якості рішень

– Збільшення ролі працівника в управлінні організацією

– Зниження відповідальності керівника

Для кількісного аналізу суб'єктивних оцінок експертів використовують спеціальні шкали вимірювання: рангову, бальну, числову, попарних порівнянь, вербально-числові шкали.

Метод асоціацій. Заснований на вивченні схожого за властивостями об'єкта з іншим об'єктом.

Метод парних (бінарних) порівнянь. Заснований на зіставленні експертом альтернативних варіантів, з яких треба вибрати найкращі.

Метод векторів переваг. Експерт аналізує весь набір альтернативних варіантів і вибирає найкращі.

Метод фокальних об'єктів. Заснований на перенесення ознак випадково відібраних аналогів на досліджуваний об'єкт.

Індивідуальне експертне опитування. Опитування у формі інтерв'ю або у вигляді аналізу експертних оцінок. Чи означає бесіду замовника з експертом, в ході якої замовник ставить перед експертом питання, відповіді на які значимі для досягнення програмних цілей. Аналіз експертних оцінок передбачає індивідуальне заповнення експертом розробленого замовником формуляра, за результатами якого проводиться всебічний аналіз проблемної ситуації і виявляються можливі шляхи її вирішення. Свої міркування експерт виносить у вигляді окремого документа.

Метод середньої точки. Формулюються два альтернативних варіанти вирішення, один з яких менш привабливий. Після цього експерт повинен підібрати третій альтернативний варіант, оцінка якого розташована між значень першої і другої альтернативи.

Метод нарад – метод прийняття рішення керівником шляхом проведення наради з своїми підлеглими, в рамках якого кожний з підлеглих висловлює свою позицію з даного питання. Далі керівник зважує виказані аргументи і ухвалює рішення.

Метод комісій – відкрита дискусія з обговорюваної проблеми для вироблення єдиної думки експертів. Колективна думка визначається за результатами таємного чи відкритого голосування.

Метод суду – експерти діляться на три групи: 1) прихильники альтернативи рішення – виступають в якості її захисту; 2) противники альтернативи – намагаються виявити її негативні сторони; 3) регулює хід експертизи і виносить остаточне рішення.

Метод сценаріїв – сукупність правил щодо письмового викладу пропозицій фахівців з вирішуваної проблеми. **Сценарій** – документ, що містить аналіз проблеми та пропозиції для її реалізації. Пропозиції спочатку пишуть експерти індивідуально, а потім вони узгоджуються і висловлюються у формі єдиного документа.

Метод мозкового штурму – спільне очне обговорення проблеми групою експертів. Метод реалізується у два етапи.

1. Перший етап («конференція ідей») триває приблизно 1-1,5 години. У його ході експерти висувають різні ідеї, що стосуються трактування аналізованої ситуації чи прогнозу розвитку явища. Ідеї протоколюються, але

не обговорюються, не критикуються. При цьому ідеї можуть бути самими різними, в т.ч. і «нісенітними». Головує принцип: чим більше ідей, тим краще.

2. Після перерви, на другому етапі, ідеї обговорюються, оцінюються, і вибираються з них найвірніші. Остаточний вердикт з проблеми може прийматися шляхом явного або неявного голосування. Процедури генерації та обговорення ідей можуть бути більшою чи меншою мірою формалізовані.

Метод Дельфи (дельфійський метод) розроблений в 1950-1960 рр. у США корпорацією RAND. Назва походить від дельфійського оракула (Древня Греція).

Суть методу: за допомогою серії послідовних дій (опитувань) домогтися максимального консенсусу при визначенні правильного рішення. Аналіз проводиться в кілька етапів, результати обробляються статистичними методами.

Базовий принцип: деяка кількість незалежних експертів (не знають один про одного) краще оцінює і пророкує результат, ніж структурована група (колектив) особистостей. Це дає змогу:

– уникнути відкритих зіткнень, тобто виключає безпосередній контакт експертів між собою і, отже, груповий вплив, що виникає при спільній роботі і складається в пристосуванні до думки більшості,

– проводити опитування екстериторіально, не збираючи експертів в одному місці (наприклад, за допомогою електронної пошти).

Етапи дельфійського методу

Попередній:

– підбір групи експертів.

Основний:

– постановка проблеми: експертам розсилається питання і пропонується його розбити на підпитання; організаційна група відбирає найчастіші; створюється загальний опитувальник.

– опитувальник розсилається експертам для зауважень; на основі їхніх відповідей складається наступний опитувальник.

– покращений опитувальник знову розсилається експертам, яким тепер треба дати свій варіант рішення, а також розглянути крайні точки зору, висловлені іншими експертами. Виявляються домінуючі судження експертів, зближуються їхні точки зору. Всіх експертів знайомлять з доводами тих, чиї судження сильно вибиваються із загального русла. Після цього всі експерти можуть змінювати думку, а процедура повторюється.

– операції повторюються, поки не буде досягнута узгодженість між експертами, або не буде встановлено відсутність єдиної думки з проблеми. Вивчення причин розбіжностей в оцінках експертів дає змогу виявити непомічені раніше аспекти проблеми й зафіксувати увагу на ймовірні наслідки розвитку аналізованої проблеми або ситуації. Відповідно до цього і виробляється остаточна оцінка та практичні рекомендації.

Зазвичай проводиться три етапи, але якщо думки сильно різняться, то більше.

Аналітичний:

– перевірка узгодженості думок експертів, аналіз отриманих висновків і розроблення кінцевих рекомендацій

Приклад: **Метод Дельфи**.

Розглядається ймовірність виникнення загрози DDoS-атак на певний Інтернет-сервіс. Для оцінювання запросили 5 експертів. Результати роботи методу Дельфи занесені в таблицю (після «/» показана оцінка для модифікованого методу Дельфи з відкиданням крайніх значень):

Експерти	**Раунд 1**	**Раунд 2**
Експерт 1	50	55
Експерт 2	65	60
Експерт 3	100	80
Експерт 4	30	50
Експерт 5	60	60
Разом	61/58	61/58

З даного прикладу видно переваги методу Дельфи. Він нівелює волюнтаризм експертів і показує більш-менш реальну оцінку ситуації. Якщо спиратися лише на думку одного експерта, можна або занизити, або завищити реальну оцінку.

Останнім часом отримали розвиток on-line методи Дельфи.

Наприклад, проект TechCast використовує панель 100 експертів з усього світу для прогнозування проривів у всіх галузях науки і техніки. Іншим прикладом є проект Horizon, де освітні футуристи співпрацюють в Інтернеті за допомогою методу Дельфі придумати технологічних досягнень, щоб виглядати у сфері освіти протягом наступних кількох років.

Експерти погано працюють з кількісними параметрами

Експерти розрізняють не більше 7 градацій якісних параметрів

Експерти не можуть безпосередньо назначати точні ваги критеріям (для багатокритеріальних методів)

Експерти мають володіти високим рівнем мотивації, оскільки відсутнє заохочення за заповнення анкет.

3.7 Загальні методи експертного оцінювання

За характером постановки питань і формою відповідей можна виділити такі основні підходи до проведення експертних оцінок:

1) бальних оцінок

2) абсолютних оцінок

3) ранжування

4) відносних оцінок

5) попарних порівнянь

Метод бальних оцінок передбачає використання бальної шкали, межі якої визначені та відомі експертам.

Якщо експерти рівноправні (мають однакову вагу), то використовують найпростішу групову оцінку ($\boldsymbol{x_i}$), яка обчислюється як середньо-арифметична бальних оцінок експерта для кожного $\boldsymbol{i}$-го об'єкта експертизи за формулою:

$$x_i^{ca} = \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l} x_{ij}$$

де $\boldsymbol{x_{ij}}$ – бальна оцінка $\boldsymbol{i}$-го об'єкта $\boldsymbol{j}$-м експертом, $\boldsymbol{m}$ – кількість об'єктів, $\boldsymbol{l}$ – кількість експертів.

Коли кожний експерт має різну вагу (згідно з досвідом, ефективністю проведення експертиз, компетентністю тощо), тоді групова бальна оцінка об'єкта може бути обчислена як середньозважена:

$$x_i^{сз} = \sum_{j=1}^{l} q_j x_{ij};\ i = 1, m;\ \sum_{j=1}^{l} q_j = 1$$

де $\boldsymbol{q_j}$ ($x_{ij} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk}$) – вагові коефіцієнти компетентності експертів (визначені суб'єктивно).

За умови різної важливості частин (ознак) досліджуваного об'єкта й різної ваги експертів групова бальна оцінка об'єкта обчислюється за формулою:

$$x_i^{рв} = \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l} q_j x_{ij} = \frac{1}{lp}\sum_{j=1}^{l} q_j \sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_{ijk};\ i = \overline{1, m}$$

Де $x_{ij}^{рв} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\alpha_k x_{ijk}$ $\left(\sum_{k=1}^{p}\alpha_k = 1\right)$, $\boldsymbol{\alpha_k}$ – вагові коефіцієнти частин (ознак) об'єкта.

Величини $\boldsymbol{q_j}$ та $\boldsymbol{\alpha_k}$ найзручніше задавати або визначати так, щоб їхні числові значення містилися в межах від 0 до 1.

Вагові коефіцієнти компетентності експертів $\boldsymbol{q_j}$ та частин (ознак) об'єкта $\boldsymbol{\alpha_k}$ можна визначати за диференціальним *самооцінюванням* і *взаємним оцінюванням*.

При **диференціальному самооцінюванні** оцінку дають за двома групами критеріїв: за критеріями, що характеризують ознайомленість експерта з основними джерелами інформації в досліджуваній галузі, та за критеріями, які характеризують ознайомленість з об'єктами експертизи.

Метод **взаємооцінювання** передбачає побудову матриці, елементами якої є числа – взаємні оцінки експертів (наприклад, це може бути кількість експертів, які вважають $\boldsymbol{i}$-го експерта компетентнішим, ніж $\boldsymbol{j}$-го).

Основні <u>переваги</u> методу:

– простота визначення групових оцінок об'єктів після проведення експертизи;

– можливість враховувати компетентність експертів;

– можливість аналізу за допомогою як кількісних, так і якісних методів, що дає змогу порівняти результати.

Якщо висновки збігаються, то можна констатувати, що вони достовірні та базуються на матеріалі експертизи, а не на методах оброблення даних.

<u>Недоліки</u> методу пов'язані з труднощами отримання об'єктивних початкових оцінок $\boldsymbol{x_{ij}}$, $\boldsymbol{q_j}$, $\boldsymbol{x_{ijk}}$. Також це дуже трудомістка робота.

Метод абсолютних оцінок передбачає використання числової шкали оцінок, межі якої визначено технічними характеристиками об'єкта. Оцінка являє собою фізичну величину в певних одиницях вимірювання, тобто замість бальних оцінок ($\boldsymbol{x_{ij}}$) у наведених вище формулах використовують абсолютні оцінки.

Метод відносних оцінок. Експерт дає відносну оцінку якості об'єкта. Цей метод використовує бальну або числову шкалу відношень і може застосовуватись, наприклад, в оцінці коефіцієнтів відносної важливості цілей стратегії або відносної важливості критеріїв. При цьому групова оцінка об'єкта розраховується за формулами середньоарифметичної та середньозваженої групових бальних оцінок. Сума відносних оцінок має дорівнювати 1.

Метод ранжування. Експерти оцінюють якість об'єктів за допомогою встановлення їхнього рангу (порядкового номера об'єкта, якщо всі об'єкти розташовують у порядку зростання їхньої якості). Чим більшу (меншу) суму рангів отримає об'єкт від усіх експертів, тим вища (нижча) його якість. Сума рангів об'єкта обчислюється за формулою:

$$r_i = \sum_{j=1}^{l} r_{ij}$$

де r_i – ранг об'єкта.

Середнє значення рангу для кожного ***i***-го об'єкта експертизи за оцінкою ***l*** експертів для матриці експертизи $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{r}_{ij})_{\boldsymbol{m \times l}}$ розраховується за формулою:

$$\bar{r}_i = \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l} r_{ij}, \quad i = \overline{1,m}$$

Використовується тоді, коли експерти можуть порівняти об'єкти між собою попарно і встановити кращий об'єкт у кожній парі. Кожен експерт заповнює свою таблицю порівнянь. Порівнюючи об'єкти кожної пари між собою, експерт записує номер (***i*** чи ***j***) кращого об'єкта з кожної пари в клітинці, що міститься в ***i***-му рядку та ***j***-му стовпці.

Існує метод *повних попарних порівнянь* (заповнюється вся таблиця) та *частинних попарних порівнянь* (заповнюється тільки одна половина таблиці).

Після заповнення таблиці методом частинних попарних порівнянь розраховується $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{ij}}$ – частота переваги ***i***-го об'єкта за оцінкою ***j***-го експерта (кількість чисел (***i***) в таблиці ***j***-го експерта).

Середня частота переваги $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{i}}$ для ***i***-го об'єкта за всіма експертами визначається за формулою:

$$f_i = \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l} f_{ij}, \quad i = \overline{1,m}$$

Загальна кількість зіставлень ***N***, виконаних кожним експертом методом частинних попарних порівнянь, обчислюється за формулою:

Оцінка якості ($\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{i}}$) ***i***-го об'єкта визначається так: $N = \dfrac{m(m-1)}{2}$

$$c_i = \frac{f_i}{N} = \frac{2f_i}{m(m-1)}; i = \overline{1,m} \quad \left(\sum_{i=1}^{m} c_i = 1\right)$$

№ об'єкта	**1**	**2**	**3**	**…**	**m**
1	×	№	№	№	№
2		×	№	№	№
3			×	№	№
…				×	№
m					×

Метод повних попарних порівнянь передбачає заповнення всієї таблиці, кожна пара об'єктів порівнюється два рази і використовується для того, щоб оцінити якість роботи експерта, його точність і нейтралізувати можливу помилку. В ідеалі матриця має бути симетричною стосовно головної діагоналі.

Оцінка якості (**c_i**) ***i***-го об'єкта:

$$c_i = \frac{f_i}{N} = \frac{f_i}{m(m-1)}; i = \overline{1,m} \quad \left(\sum_{i=1}^{m} c_i = 1 \right)$$

Переваги методу попарних порівнянь:

– простота у формуванні початкових матриць;

– чітке математичне обґрунтування здійснюваних операцій;

– можливість переходу до іншого подання експертної інформації (ранжування, бальні оцінки тощо).

3.8 Методи експертного оцінювання переваг

Для отримання експертних оцінок переваг застосовують різноманітні методи залежно ввід характеру аналізованої ситуації, що служить основою для прийняття рішень. Якщо потрібно якісно оцінити переваги альтернатив або кваліфікувати їх за якісними ознаками, то варто використати парні чи множинні порівняння, безпосереднє ранжування, класифікацію. Коли ж треба одержати кількісні оцінки відносної переваги, то застосовують методи числового оцінювання – від безпосередніх числових оцінок до досконаліших.

До методів отримання якісних оцінок належать:

– методи попарних і множинних порівнянь,

– ранжувань,

– гіперупорядкування,

– векторів переваг і класифікації.

Кількісні оцінки можна одержати за допомогою методів числового оцінювання альтернатив, Черчмена-Акоффа, Терстоуна, Фон Неймана-Моргенштерна.

Метод попарних порівнянь є одним із найпоширеніших методів отримання експертної інформації. Суть методу полягає в послідовному пред'явленні експертові пар альтернатив, і він зазначає, яка з них краща або чи належать вони до одного класу. Якщо переваги експерта транзитивні, порівнюються всі пари альтернатив і експерт може порівняти їх між собою (немає непорівняльних альтернатив), то виникає відношення лінійного порядку, яке зумовлює ранжування, тобто вимірювання в порядковій шкалі. Коли під час класифікації – розбиття альтернатив на класи – виконується умова транзитивності, одержимо відношення еквівалентності. У разі непорівнянності частини альтернатив отримаємо відношення квазіпорядку, тому вимірювання можливе лише у квазішкалі.

Непослідовність експерта на практиці призводить до того, що умова транзитивності часто порушується (може статися так, що після впорядкування альтернатива x_1 ліпша за x_2, x_2 ліпшою за x_3, а x_3 виявиться ліпшою за x_1 або ж внаслідок класифікації пара x_1,x_2 згідно з оцінкою експерта належить до одного класу, пара x_2,x_3 – теж, але в парі x_1,x_3 альтернативи належать до різних класів). Це призводить до відношень загального типу.

Причини такої «непослідовної» поведінки експерта можуть бути різноманітними:

– складність задачі,

– неочевидність переваг альтернатив або розбиття їх на класи,

– недостатня компетентність експерта,

– нечітка постановка задачі,

– багатоаспектність альтернатив (яка в найпростішому випадку виявляється у вигляді багатокритерійності).

Це, у свою чергу, унеможливлює отримання ранжувань або відношень лінійного порядку під час оцінювання переваг, а після класифікації ми можемо одержати відношення толерантності замість еквівалентності. Зовнішній вияв можливих глибинних причин – порушення транзитивності. Якщо мета експертизи – отримання ранжування чи порядку, то потрібно виконати подальші дослідження з додаткової ідентифікації альтернатив, або провести додаткове опитування, щоб одержати транзитивне відношення, або ж апроксимувати отримане емпіричне відношення відношенням заданого типу. У багатьох складніших методах (наприклад, методі аналітичної ієрархії) попарне порівняння використовують як один із кроків.

Метод множинного порівняння є узагальненням методу попарних порівнянь. При його застосуванні експертам пред'являють не пари, а n-ки (n>2) альтернатив із подальшим їх упорядкуванням або розбиттям на класи. Множинні порівняння посідають проміжне місце між методом попарних порівнянь (у якому послідовно пред'являють пари альтернатив) і ранжування (до порівняння одночасно пред'являють усі наявні альтернативи). З одного блоку, це дає змогу використовувати більше інформації для визначення експертної оцінки. З іншого боку, складність порівняння декількох альтернатив між собою відразу зростає.

Ранжування полягає в безпосередньому пред'явленні а (≤20÷30) та подальшому їх упорядкуванні згідно з перевагами. Є кілька способів побудови процедури ранжування. За першого з них експерт обирає з наявних альтернатив найкращу чи не гіршу, ніж ті, що залишаються. Цю альтернативу вилучають із розгляду та повторюють процедуру для альтернатив, що залишаються. При цьому кожна з виділених альтернатив отримує свій ранг (оцінку в порядковій шкалі).

У другому способі експертові пред'являють дві альтернатива та просять упорядкувати їх за важливістю. Потім послідовно по одній додають інші альтернативи і просять упорядкувати їх за важливістю і для кожної з них експерт зазначає місце «між» попередніми проранжованими альтернативами. Ці методи можна застосовувати як складові процедур і рядкування. При використанні методу ранжування можуть виникати складнощі, оскільки експерт може вважати деякі альтернативи непорівнянними, що унеможливлює отримання лінійного порядку.

Метод гіперупорядкування дає змогу отримати більше інформації про переваги альтернатив, аніж попередні. У ньому в експерта має бути можливість ранжувати різниці оцінок альтернатив, щоб мати додаткову інформацію про співвідношення між їх числовими оцінками. Спочатку експерт ранжує альтернативи, а на наступному етапі — різниці оцінок для сусідніх ранжувань. Для ранжування різниць оцінок альтернатив застосовують ті самі методи, що й для ранжування альтернатив.

Метод векторів переваг дає змогу достатньо просто одержати інформацію про порівняльну важливість альтернатив: для кожної альтернативи $x_i \in A$ експерт має зазначити скільки альтернатив із множини A – $\{x_1,\ldots,x_n\}$ переважають її (тобто зазначають лише кількість таких альтернатив, а не самі альтернативи). Експерт може зазначити й кількість альтернатив, гірших за розглянуту. Отримаємо вектор $z=\{z_1,\ldots,z_n\}$, де z_i — відносна перевага альтернативи x_i. За допомогою вектора переваг можна подати інформацію про результати попарних та множинних порівнянь, а також ранжувань. Проте обернене твердження не виконується, і можна лише ставити задачу про знаходження відношення певного типу (наприклад, ранжування), яке згідно з визначеною метрикою «найближче» до одержаного вектора переваг.

Виконуючи класифікацію альтернатив, можна застосовувати ті самі стратегії дій, що й у методі попарних порівнянь або ранжування. Якщо ж є додаткова кількісна інформація, то доцільно використовувати алгоритми та методи кластерного аналізу.

Отже, ми розглянули методи отримання якісних оцінок і далі проаналізуємо методи одержання кількісних оцінок від експерта.

Метод безпосереднього числового оцінювання альтернатив полягає у визначенні експертом для кожної альтернативи $x_i \in A$ числа $f(x_i)$, що задає її важливість. Якщо такі оцінки відомі, то (за умови застосовності певного типу шкали вимірювань) можна визначити, наскільки чи в скільки разів одна альтернатива переважає іншу. Крім того, ми вважаємо, що всі альтернативи порівнянні між собою, і не виникає випадків нетранзитивності.

Достатньо часто, щоб вимірювання всіх експертів були порівнянними, для безпосереднього оцінювання використовують шкалу в балах (наприклад, щоб оцінювати знання школярів і студентів). Якщо альтернатив багато, для безпосереднього оцінювання застосовують метод середньої точки: експерт спочатку зазначає «найгіршу» (x_1) і «найкращу» (x_2) альтернативи, потім йому пропонують зазначити «середню» альтернативу (x_3), для якої

$f(x_3)=(f(x_1)+f(x_2))/2$, і процес поділу триває до моменту розміщення всіх альтернатив на числовій осі.

Для числового оцінювання якості альтернатив достатньо часто застосовують метод Черчмена-Акоффа. Спочатку альтернативи ранжуються за важливістю (будемо вважати, що $x_1,\ldots,x_n$ вже проранжовані в порядку індексування, тобто $x_1>x_2>\ldots>x_n$. Експерт вказує попередні числові оцінки $f(x_1),\ldots,f(x_n)$ (інколи найкраща альтернатива отримує оцінку 1, а оцінки всіх інших коливаються в межах від 0 до 1). Надалі експерт порівнює x_1 та сумарну дію альтернатив $x_2,\ldots,x_n$. Якщо x_1, важливіша за цю суму, експерт корегує оцінки, так щоб виконувалось співвідношення

$$f(x_1) > \sum_{i=2}^{n} f(x_i).$$

Якщо виникає така ситуація, тобто альтернатива x_1 менше важлива, ніж сума всіх альтернатив, що залишилися, для уточнення її послідовно порівнюють із сумами

$$\sum_{i=2}^{k} f(x_i), k \geqslant 2$$

у порядку зменшення значення k від n-1 до 2. Як тільки знайдено перше k, для якого виконується умова

$$f(x_1) \geqslant \sum_{i=2}^{k} f(x_i),$$

альтернативу x_1 виключають із розгляду. Потім аналогічно корегують знамення числових оцінок для наступних альтернатив. Коли альтернатив багато, для зменшення трудомісткості методу їх розбивають на групи, включивши одну з них до складу всіх груп, щоб отримати числові оцінки для всіх альтернатив за допомогою оцінювання всередині кожної групи. Метод Черчмена-Акоффа можна застосовувати й у разі вимірювання в шкалі відношень. У цьому випадку експерт визначає, у скільки разів альтернативи важливі менше за найважливішу.

У методі Терстоуна первинною інформацією для визначення числових оцінок альтернатив є результати попарних порівнянь, а оцінка кожної альтернативи є випадковою величиною. Вважаємо, що вона розподілена за нормальним законом із математичним сподіванням M_i та дисперсією D_i, а її реалізацію оцінює експерт. Різниця оцінок – випадкових величин $f(x_i)$ та $f(x_j)$ – також розподілена за нормальним законом із математичним сподіванням $M_{ij}=M_i-M_j$ і дисперсією

$$D_{ij} = D_i + D_j + 2r_{ij}\sqrt{D_i D_j},$$

де r_{ij} – коефіцієнт кореляції між $f(x_i)$ та $f(x_j)$. Результатом застосування методу є значенням $M_i \in \{1,2,\ldots,n\}$, які обираються як числові оцінки альтернатив за значеннями частот S_{ij}. Тут S_{ij} частота вибору альтернативи x_i, як важливішої порівняно з x_j

Метод фон Неймана-Мергентшерна також виходить зі стохастичного характеру значень оцінок. У ньому для визначення оцінок використано суміші ймовірностей. Вважається, що експерт може вказати для довільної альтернативи x_j гіршої за x_i, але кращої, ніж x_l, таке число p, (0≤p≤1), що альтернатива x_j буде еквівалентна «мішаній» альтернативі $[px_i,(1\text{-}p)x_l]$. Цю альтернативу можна реалізувати за допомогою стохастичного вибору, коли альтернативу x_i обирають з імовірністю p, а x_l – з імовірністю (1-p). Якщо ймовірність p досить близька до 1, то

$$x_j \prec [p \times x_i, (1-p) \times x_l],$$

а коли вона близька до 0, то

$$x_j \succ [p \times x_i, (1-p) \times x_l].$$

Отже, оцінювати альтернативи у вигляді одного числа слід обережно, розуміючи, що для достатньо складних альтернатив таке оцінювання суттєво недостатнє. У практичному застосуванні методу необхідно враховувати обмеження, які накладаються методами отримання відповідної експертної інформації. Водночас для попередньої орієнтовної оцінки альтернатив доцільно застосовувати методи числового оцінювання.

3.9 Методи оцінювання компетентності експерта

При формуванні експертної групи необхідно вирішити дві важливі проблеми: визначити число членів експертної групи та оцінити компетентність експертів.

Кількість експертів, залучених до експертної групи, може бути від 10 до 150 чоловік. Вона суттєво впливає на точність групової оцінки. Зменшення кількості експертів веде до зниження точності прогнозу, оскільки на кінцеві результати значно впливає кожен експерт. Збільшення кількості експертів, хоча і підвищує, точність прогнозу, однак ускладнює організацію проведення експертизи, продовжує строки її проведення в часі. Тому потрібен компроміс між точністю та трудомісткістю роботи, часом проведення експертизи.

Установити оптимальний розмір групи експертів є складною задачею. На практиці встановлюється її максимальна та мінімальна межа.

Максимальна кількість експертів $\boldsymbol{n_{max}}$ встановлюється на основі нерівності де $\boldsymbol{k_i}$ – компетентність ***i***-го експерта за шкалою компетентності;

$$n_{\max} \leq \frac{3\sum_{i=1}^{n} k_i}{2k_{\max}}$$

k_{max} – максимально можлива компетентність експерта за шкалою компетентності.

Мінімальна кількість експертів визначається з нерівності

$$\frac{B - B'}{B_{\max}} < \varepsilon$$

де $\boldsymbol{B}$ – середня оцінка прогнозованої величини в балах; $\boldsymbol{B'}$ – середня оцінка, дана експертною групою, з якої вилучений (або включений) один експерт; B_{max} – максимально можлива оцінка прогнозованої величини в прийнятій шкалі оцінок; $\boldsymbol{\varepsilon}$ – задана величина зміни середньої помилки при включенні чи виключенні експерта.

Об'єктивний спосіб:

документальний метод – передбачає підбір експертів, виходячи з їхніх професійних характеристик. Експерти повинні мати науковий ступінь та звання, належний стаж роботи за спеціальністю та атестаційну категорію;

експериментальний метод **–** передбачає проведення перевірки ефективності експерта в минулому. При цьому здійснюється розрахунок надійності й точності оцінок експертів на основі їхньої попередньої діяльності.

Суб'єктивний спосіб розрахунку компетентності експерта полягає у поєднанні *само-* та *взаємооцінювання.*

Взаємооцінювання чи **голосування** передбачає аналіз характеристик, даних певному спеціалістові його колегами.

Самооцінювання полягає в тому, що експерт сам визначає вагомість своєї оцінки за певним запитанням (зазвичай, використовується 10-бальна шкала). Водночас експертам пропонується оцінити ступінь впливу різних джерел інформації на їхню думку. Так, спеціалістам пропонується висловити свою думку щодо впливу на них таких джерел інформації, як «проведений теоретичний аналіз», «практичний досвід», «узагальнення праць вітчизняних авторів», «узагальнення праць закордонних авторів», «особистий досвід зі станом справ за кордоном», «інтуїція».

Для визначення компетентності експерта використаємо анкетне опитування та самооцінку.

Ступінь придатності фахівця для експертизи при анкетному опитуванні визначається за **коефіцієнтом компетентності**

$$k = \frac{\sum \gamma_{ij}}{\sum \gamma_j}$$

де γ_{ij} – вага ***i***-ої градації (підкресленої експертом, що оцінюється) ***j***-ої характеристики в балах; γ_j – максимальна вага ***j***-ої характеристики в балах.

В процесі самооцінки кожен фахівець оцінює ступінь своєї освіченості за 10 бальною шкалою. Компетентність експерта за самооцінкою обчислюється за формулою

$$k = \frac{\sum \lambda_l}{\sum n}$$

де λ_l – самооцінка (в балах), яка характеризує ступінь обізнаності фахівця з ***l***-ою проблемою; ***n*** – максимально можлива самооцінка (10 балів).

Найкращі результати дає узагальнююча оцінка компетентності, яка охоплює анкетний метод і самооцінку. Компетентність фахівця за комплексним методом визначається за формулою

$$k = \frac{\dfrac{\sum \gamma_{ij}}{\sum \gamma_j} + \dfrac{\sum \lambda_l}{\sum n}}{m+1}$$

де ***m*** – кількість використаних методів самооцінки.

ЛЕКЦІЯ 4. ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ЗА УМОВ БАГАТОКРИТЕРІЙНОСТІ

Багатокритерійні задачі виникають унаслідок дії одного з видів невизначеності – *невизначеності мети*. Структуризація мети у багатьох випадках веде до побудови дерева цілей, результатом чого є формування множини критеріїв. Ці критерії можуть змінюватися в одному напрямку чи в протилежних, їх дія може бути частково збіжна, а частково протилежна. За відсутності додаткової інформації розв'язок багатокритерійної задачі є множиною недомінованих (оптимальних за Парето) альтернатив. Щоб звузити цю множину, пропонують різноманітні раціональні принципи прийняття рішень і вибору, відповідно до яких розробляють методи розв'язання багатокритерійних задач прийняття рішень.

4.1. Проблеми структуризації генеральної мети

Структуризація генеральної мети. Дерево цілей

Невизначеність мети та її структуризація

У багатьох випадках математична постановка задачі прийняття рішень є детермінованою, тобто такою, в якій невизначеність не врахована. Більше того, навіть якщо невизначеність і враховано певним чином (наприклад, у вигляді законів теорії ймовірностей і математичної статистики, суб'єктивних ймовірностей або апарату нечіткостей), то вважають, що мету вже визначено і описано у вигляді певної функціональної залежності від керованих змінних. Такий підхід є характерним для дослідження операцій; у результаті розв'язання такої задачі обирають найкращий спосіб досягнення мети, поданої у вигляді одного критерію.

У задачах прийняття рішень діє ще один суттєвий вид невизначеностей – *невизначеність мети*. Мету, особливо в слабоструктурованих задачах, зазвичай сформульовано не конкретно, наприклад, «випустити максимальну кількість продукції з мінімальними затратами». Зрозуміло, що мінімальне значення затрат – нуль, проте з нульовими затратами неможливо виконати будь-яку корисну працю. Однак, хоча таке формулювання безпосередньо не можна використати для побудови критерію якості, воно доволі точно відображає інтереси децидента. Отже, навіть знання окремих цілей децидента не дає змоги розв'язати задачу прийняття рішення.

Тому й постає проблема структуризації мети: потрібно, ґрунтуючись на неформальних і напівформальних міркуваннях децидента, конкретизувати мету прийняття рішення та, якщо це можливо, подати її у вигляді множини критеріїв. Це завдання, згідно зі схемою прийняття рішення, належить до системного аналізу.

Одним із найпоширеніших методів структуризації мети є **метод дерева цілей**, ідею якого вперше запропонував У.Черчмен у зв'язку з проблемами прийняття рішень у промисловості. Термін «*дерево цілей*» використовують як для деревоподібних ієрархічних структур, так і для «слабких» ієрархій. Застосовуючи метод дерева цілей як засіб прийняття рішень, послуговуються також терміном «*дерево рішень*». У разі застосування дерева цілей для виявлення й уточнення функцій керування говорять про «*дерево цілей і функцій*». Структуризуючи тематику науково-дослідної організації, користуються терміном «*дерево проблем*».

Рис. 4.1. Чарльз УэстЧерчмен (1913 – 2004) – відомий американський учений в області дослідження операцій, основоположник сучасного системного підходу

У всіх цих випадках намагаються одержати достатньо повну та відносно стійку структуру цілей, проблем, функцій, напрямів, мало змінювану впродовж певного періоду часу за неминучих змін, що відбуваються в будь-якій системі, яка розвивається. Для досягнення цього, будуючи варіанти структури, варто брати до уваги закономірності утворення цілей і застосовувати принципи та методики формування ієрархічних структур цілей і функцій.

Цілі випливають з об'єктивних потреб і мають ієрархічний характер. Цілей верхнього рівня не можна досягнути, поки не досягнуто цілей найближчого нижнього рівня. Із переміщенням униз рівнями ієрархії цілі конкретизуються. Будуючи та використовуючи дерево цілей, слід намагатися чітко й конкретно формулювати цілі, щоб забезпечити кількісну чи порядкову оцінки ступеня їх досягнення.

Цілі діяльності системи необхідно конкретизувати за часом і виконавцями, тобто загальний остаточний результат, якого має досягти система, потрібно піддати декомпозиції на окремі задачі, що розв'язуються в коротші терміни. Крім того мету, якої намагається досягнути, наприклад, фірма загалом, конкретизують для окремих підрозділів і ланок апарату керування. При цьому потрібно, щоб колектив кожного підрозділу чітко знав загальну (генеральну) мету, а також свою роль у її досягненні.

Побудова дерева цілей

Структурування дає можливість деталізувати цілі та способи їх досягнення, а також виявляти взаємозв'язки між ними та забезпечити певну логіку розв'язання проблеми. У більшості випадків *дерево цілей будують поетапно, згори донизу*, послідовно переходячи від вищого рівня до нижчого суміжного, хоча існують методи побудови дерева одночасно «згори» (від розробників і керівництва) та «знизу» (починаючи від користувачів-виконавців із подальшою координацією отримуваних структур). Структурування дає змогу навіть шляхом лише якісного аналізу одержати нові ідеї, розкрити нові можливості розв'язання досліджуваної проблеми на різних рівнях керування. Конкретизація цілей згори донизу має зростати: *що* *нижчий рівень, то докладніше формулюють мету*. У багатьох випадках вдається сформулювати критерії у кількісному вигляді.

Одним з варіантів побудови дерева цілей є наступний. Генеральну мету системи бажано записати в такому форматі:

[Дієслово – дія] [пояснення] [об’єкт] та/або

[Дієслово – дія] [пояснення] [об’єкт] та/або

…………………………………………………

[Дієслово – дія] [пояснення] [об’єкт].

Коренем дерева цілей є *генеральна мета*, яка внаслідок декомпозиції за рівнями утворює деревовидну ієрархічну структуру. Залежно від конкретної проблеми дерево цілей може мати різну кількість рівнів із різними елементами. Зазвичай це рівні аспектів мети, підаспектів певних аспектів, задач, загальних критеріїв, конкретних критеріїв. За їх допомогою оцінюють ступінь реалізації тих чи інших складових: підзадач, задач, підаспектів, аспектів і врешті-решт генеральної мети (рис. 4.2).

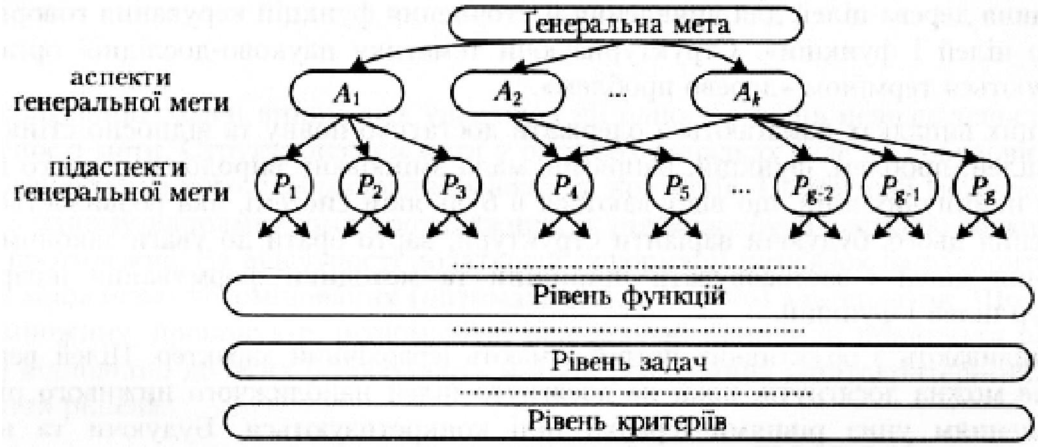


Рис. 4.2. Загальний вигляд дерева цілей

Для перевірки повноти та внутрішньої несуперечливості дерева цілей застосовують такі правила.

1. Просуваючись згори донизу деревом цілей, підціль-нащадка утворюють після відповіді на запитання: «*Що потрібно зробити, щоб реалізувати безпосередню ціль-предка попереднього рівня?*»

2. У разі просування знизу догори ціль вищого рівня має відповідати на запитання: «*Для чого потрібна безпосередня підціль-нащадок?*»

3. Розглядаючи множину безпосередніх підцілей-нащадків, необхідних для досягнення однієї цілі, слід уточнити, чи всі підцілі справді потрібні для цього.

4. Розглядаючи множину безпосередніх підцілей-нащадків, необхідних для досягнення однієї цілі, слід уточнити, які ще безпосередні підцілі-нащадки необхідні для цього.

Одним з перших методів системного аналізу, у якому визначено порядок і етапи роботи зі структурою цілей у процесі прогнозування та планування, був **метод PATTERN** (*Planning Assistance Through Technical*

Evaluation Relevance Number), розроблений у **RAND Corporation** для наукових робіт військового характеру.

Побудова дерева цілей за методом PATTERN базується на евристиках, тому виникають природні запитання про повноту представлення та ненадлишковість цілей кожного рівня. Унаслідок цього виникли й інші варіанти методології побудови дерева цілей.

Для формування конкретних структур цілей застосовують два такі способи формування верхніх рівнів дерева цілей.

Перший базується на концепції про відповідність складових двох шкал розвитку системи: *просторової* (цілі власне системи; ті, що залежать від взаємних зв'язків із найближчим середовищем; ініційовані віддаленим середовищем) та *шкали часу* (поточні оперативні цілі, цілі найближчої перспективи, цілі віддаленої перспективи). Відповідність між цими шкалами відображено на рис. 4.3.

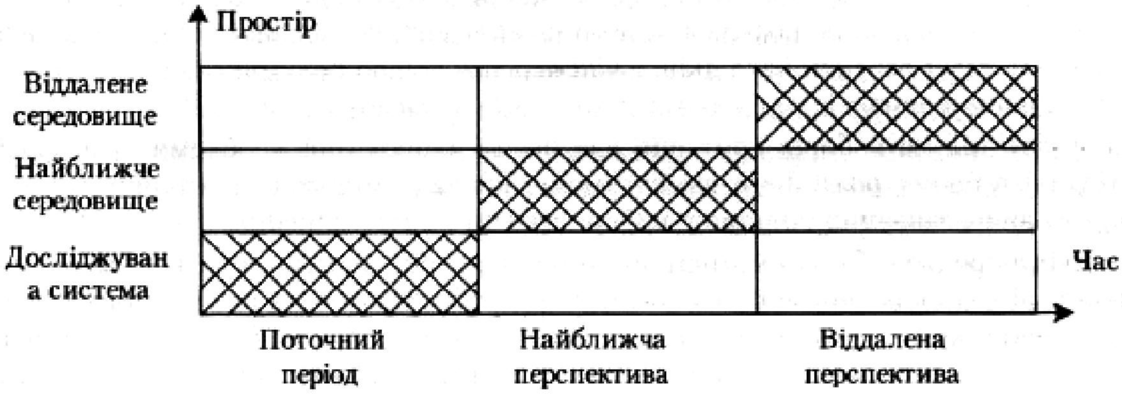


Рис. 4.3. Відповідність шкал простору та часу

Підцілі верхніх рівнів дерева задано діагоналлю матриці, тому залежно від конкретних умов можна обмежувати дерево, виключаючи, наприклад, відразу цілу гілку підцілей віддаленої перспективи та віддаленого середовища без зміни інших гілок дерева.

Другий спосіб застосовують для аналізу нової, незрозумілої проблеми. Він полягає в тому, що складові верхнього рівня структури дерева залежать від відповідей на такі запитання (рис. 4.4).

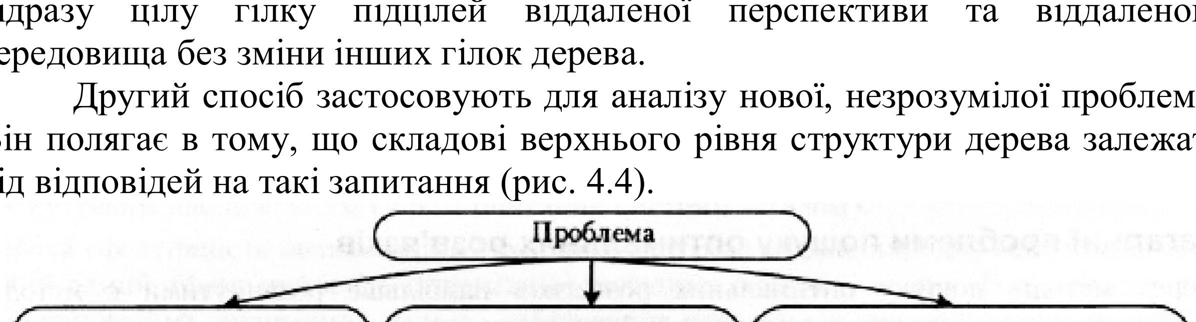


Рис. 4.4. Визначення складових верхніх рівнів дерева цілей нечіткої проблеми

Окрім того, структуру дерева цілей доцільно формувати, уявивши його як піраміду (її гранями можуть бути, наприклад, цілі, функції чи задачі). Потрібно послідовно обходити всі її грані, повертаючись на новому вищому витку до вже структурованих раніше гілок із врахуванням нового бачення проблеми.

Для побудови дерева цілей доцільно також використовувати загальні ознаки структурування для різних рівнів системи. Принципи та ознаки структурування, запропоновані в різних методологіях, ґрунтуються на досвіді формування структур цілей. Розкриваючи одну й ту саму глобальну мету, різні аналітики можуть отримати різні ієрархічні структури, і це природно, оскільки системний аналіз базується не лише на формальних процедурах і методах, але й на застосуванні інтуїції та досвіду фахівців. Рекомендації кваліфікованих системних аналітиків мають бути близькі між собою.

Отже, застосування методу дерева цілей дає змогу структурувати мету до рівня складових критеріїв якості, що в багатьох випадках природним чином зумовлює виникнення багатокритерійних оптимізаційних задач прийняття рішень. Ставлячи та розв'язуючи конкретні задачі прийняття рішень, залежно від умов обирають певну підмножину множини критеріїв, одержаних шляхом побудови дерева цілей.

Бажано, щоб такий набір критеріїв був:

- ❖ *повним*, тобто охоплював усі важливі аспекти проблеми прийняття рішення;
- ❖ *дієвим* (операційним) – щоб його можна було з користю застосувати до аналізу проблеми;
- ❖ *припускав декомпозицію* – щоб процес можна було спростити оцінювання, розклавши його на складові;
- ❖ *не надлишковим* – щоб двічі не враховувати різні аспекти наслідків;
- ❖ *мінімальним* – щоб розмірність проблеми залишалася якнайменшою.

Може існувати кілька наборів критеріїв для певної конкретної проблеми чи ієрархії цілей. Надалі в цьому розділі ми вважатимемо, що таку множину критеріїв уже визначено, і головне завдання полягає у виборі того чи іншого рішення.

Такий підхід породжує багато методів прийняття рішень, що ґрунтуються на оцінюванні якості рішення за допомогою множини критеріїв. Це методи глобального критерію, переведення критеріїв у обмеження та послідовних поступок. Однак існує й інша група методів, які оперують бінарними відношеннями та дають змогу в діалозі з децидентом за певну кількість кроків звузити множину альтернативних варіантів рішень або ж обрати одне рішення (це методи на кшталт **ELECTRE**). У цьому разі під час діалогового ітеративного процесу звуження множини альтернатив для оцінювання важливості критеріїв використовують інформацію про систему переваг децидента, тобто ту саму інформацію про мету, але в іншій формі.

Багатокритерійність. Поняття множини оптимальних за Парето розв'язків. Умови оптимальності

Загальні проблеми пошуку оптимальних розв'язків

Серед методів пошуку оптимальних розв'язків найбільше розвинутими є методи розв'язання детермінованих однокритерійних задач, які мають вигляд:

$$Q(a, x) \to \max, x \in X,$$

де X – множина допустимих варіантів рішень, a– вектор відомих детермінованих значень параметрів задачі, x– вектор значень керованих змінних, значення яких може обирати децидент.

Загальний розв'язок задачі має вигляд

$$x^* = \arg\max_{x \in X} Q(a, x),$$

тобто це таке значення вектора змінних, для якого досягається максимальне значення критерію якості. Цей розв'язок називається **оптимальним**. Задачі такого типу розглядають у дослідженні операцій, але проблеми, пов'язані зі способами формування глобального критерію якості там оминаються, уважаючи, що такий критерій задано. Проте, як ми вже знаємо, навіть коли немає невизначеностей, пов'язаних із неповнотою знань децидента про навколишнє середовище (характеристики «природи») та можливі дії суперників або партнерів (характеристики активних гравців), невизначеність мети залишається.

Попри корисність ідеї оптимізації й однокритерійності слід достатньо обережно користатися нею унаслідок таких причин.

1. Оптимальний розв'язок часто виявляється нестійким – на перший погляд незначні зміни в умовах задачі можуть зумовити вибір суттєво різних альтернатив. Останнім часом у теорії оптимізації поняття оптимальності модифікують так, щоб отримані розв'язки були *стійкими*.
2. Оптимізація завжди спирається на припущення, що наявний критерій з достатньою точністю відображає мету. Навіть якщо це й так, то зазвичай система, що розглядається, є частиною надсистеми, і локально оптимальний розв'язок може не бути оптимальним з точки зору надсистеми. Тому необхідною є *координація критеріїв системи з критеріями її підсистем*.
3. Обчислення максимального значення критерію якості не можна ототожнювати з метою, тому що мета та критерії перебувають у такому ж відношенні, як оригінал і модель. Тому, коли складно кількісно описати мету (а в складних системах це абсолютна більшість випадків), кількісні критерії є лише сурогатом мети.
4. Одним з найважливіших аспектів оптимізації є адекватне описання обмежень, тому що навіть невеликі зміни в значеннях параметрів обмежень можуть суттєво вплинути на оптимальний розв'язок. Якщо не взято до уваги всі суттєві обмеження, то впроваджуючи рішення, якому формально відповідає максимальне значення критерію, ми можемо одержати

вкрай небажані наслідки, тому що дійсна область допустимих розв’язків може виявитися порожньою.

Щоб уникнути таких проблем, у ході оптимізації слід виконувати *аналіз на чутливість*, застосовувати стійкі (робастні) процедури оцінювання значень параметрів оптимізаційних задач, виділяти множину оптимальних за Парето розв’язків із подальшим її звуженням на основі отриманої від децидента додаткової інформації, використовувати кілька видів згорток критеріїв і т. ін.

Ідея оптимальності надзвичайно плідна стосовно систем, які можна адекватно математично формалізувати, однак її не можна безпосередньо переносити на складні системи. Оптимізаційні задачі, які вдається побудувати в процесі дослідження складних систем, майже завжди часткові (у разі описання добре структурованих підсистем) або ж є суттєвим наближенням (у разі описання системи загалом).

Висока ефективність оптимізації в технічних системах не має породжувати ілюзії, що такий самий ефект зумовить оптимізація складних систем – у них формалізація та однокритерійна оптимізація веде до наближених результатів, які найчастіше ненадійні через суттєві спрощення.

Оптимальність за Парето та Слейтером

На практиці задачі без невизначеностей – скоріше виняток, аніж правило. Розглядатимемо методи прийняття рішень у детермінованих ситуаціях із невизначеністю мети, що формально відображається за допомогою множини критеріїв. Отже, виникає **детермінована багатокритерійна задача прийняття рішень**, загальний вигляд якої є наступний:

$$Q_1(a,x) \Rightarrow \text{Max}, Q_2(a,x) \Rightarrow \text{Max}, \dots, Q_n(a,x) \Rightarrow \text{Max}, x \epsilon X.$$

Надалі в разі потреби записуватимемо умову цієї задачі в скороченому вигляді $\langle X, Q \rangle$. Знайти розв’язок, який був би найкращим водночас за всіма критеріями, неможливо, тому що в загальному випадку *поліпшення значення одного з критеріїв призводить до погіршення значення іншого*. Для ілюстрації цього положення наведемо декілька прикладів умов багатокритерійних задач.

Приклад 4.1. Необхідно придбати автомобіль, узявши до уваги кілька аспектів, що відображаються критеріями якості. Важливими критеріями в цьому разі є питомі витрати пального, максимальна швидкість, комфортність, прохідність, зовнішній вигляд, вартість, гарантійний термін, наявність сервісного обслуговування, ціна. Звичайно, придбати авто, яке б витрачало найменше пального та водночас було б при цьому найдешевшим, найкомфортнішим і найшвидшим, неможливо.

Приклад 4.2. Мандрівники мають обрати місце для зупинки в горах. Важливими критеріями є наявність джерела чи річки, палива, можливість купання, відсутність комарів, хижих звірів, близькість до населених пунктів. Зрозуміло, що знайти таке місце, яке відповідало б всім цим вимогам водночас, дуже важко.

Проілюструємо геометрично задачу оптимізації за двома критеріями. При цьому вважатимемо, що критерії якості максимізуються (це припущення не обмежує загальності викладу, оскільки вираз $Q(x) \to$Min еквівалентний $-Q(x) \to$Max).

Розглянемо загальну задачу оптимізації за двома критеріями з двома змінними:

$$Q_1(x_1, x_2) \Rightarrow \text{Max}, Q_2(x_1, x_2) \Rightarrow \text{Max}, x = (x_1, x_2), x \epsilon X.$$

Зобразимо область допустимих розв'язків у просторі змінних (x_1, x_2). Значення критеріїв Q_1 та Q_2 відображатимемо в просторі критеріїв (Q_1, Q_2). Кожній конкретній точці множини допустимих рішень $\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right)$ відповідає одне і лише одне значення кожного з критеріїв$\left(Q_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right), Q_2\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right)\right)$, тобто точка в просторі критеріїв; обернене ж твердження неправильне. Це пояснюється тим, що можуть існувати різні альтернативи, які еквівалентні чи рівноцінні щодо значень критеріїв якості, тобто відповідне відображення – гомоморфне. Виконавши таку операцію для всіх точок допустимої області в просторі змінних, отримаємо її образ у просторі критеріїв.

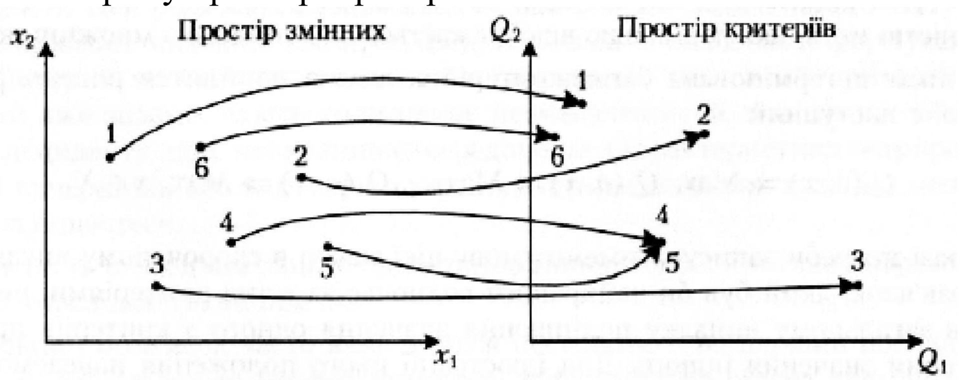


Рис. 4.5. Відображення дискретної множини альтернатив у простір критеріїв

На рис. 4.5 наведено шість можливих альтернатив, які відображено з двовимірного простору змінних у двовимірний простір критеріїв. Точка i в просторі змінних має координати $\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}\right)$, а її образ у просторі критеріїв – $\left(Q_1\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}\right), Q_2\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}\right)\right)$. Альтернативи 4 та 5 відображаються в одну й ту саму точку в просторі критеріїв, тобто вони еквівалентні з погляду їх якості. Крім того, вони гірші, ніж альтернатива 2, у якої значення кожного з критеріїв більші, ніж для альтернатив 4 та 5. Альтернатива 6 гірша за альтернативи 1 і 2 з тих самих причин. Розв'язки 1, 2, та 3 непорівняльні, тобто без додаткової інформації неможливо визначити, який із них кращий, тому що значення одного критерію в них більші, а іншого – менші. Отже, виходячи з природних міркувань, ми відкинули неперспективні альтернативи.

Розглянемо тепер неперервну множину альтернатив (рис. 4.6).

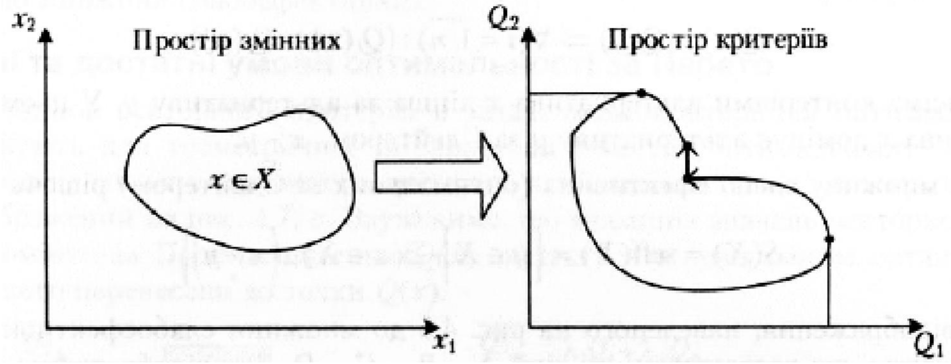


Рис. 4.6. Відображення неперервної множини альтернатив із простору змінних у простір критеріїв

Кожну точку допустимої області $x \in X$ відображаємо в точку області критеріїв; одержуючи таким чином образ множини допустимих альтернатив у просторі критеріїв. Проаналізувавши альтернативи за якістю так само, як у попередньому випадку, виявимо, що для неперервної області доцільно розглядати альтернативи, розташовані на фрагменті кривої *A*–*B*, включаючи точки *A* та *B*, та на фрагменті *C*–*D* виключаючи точку *C*, тому що альтернативи, які відповідають відрізку прямої *C*–*B* (з точкою *C* та без точки *B*), гірші, аніж альтернатива, що відповідає точці *B*.

Така множина включає лише недоміновані альтернативи – тобто такі, для яких немає жодної альтернативи з допустимих, яка була б ліпшою. Принцип відбору для подальшого розгляду недомінованих альтернатив називають **принципом Еджворта–Парето** за прізвищами вчених, які вперше застосували цей підхід до аналізу економічних проблем.

Рис. 4.7. Френсіс Ісідор Еджворт (1845 – 1926) – англійський економіст, прибічник ідеї прогресивного оподаткування

Рис. 4.8. Вільфредо Парето (1848 – 1923) – італійський інженер, економіст і соціолог, один з основоположників теорії еліт. Розробив теорії, названі згодом його ім'ям: статистичне Парето-розподіл і Парето-оптимум

Згідно з принципом Еджворта-Парето відношення домінування на множині допустимих альтернатив формально визначають так. Розглянемо відношення «>» в просторі критеріїв. Будемо вважати, що $Q(x) =$

$\big(Q_1(x),\dots,Q_n(x)\big)$і $Q(y)=\big(Q_1(y),\dots,Q_n(y)\big)$– векторні оцінки відповідно альтернатив x та y. Також уважатимемо, що $Q(x)\geq Q(y)$, якщо виконано умову

$$Q(x)\geq Q(y)\Rightarrow\forall\big(i=\overline{1,n}\big):(Q_i(x)\geq Q_i(y))\wedge\exists\big(i=\overline{1,n}\big):(Q_i(x)>Q_i(y)),$$

тобто значення всіх критеріїв для альтернативи x не гірші, ніж для альтернативи y, і, крім того, знайдеться хоча б один критерій, за яким альтернатива x виявиться кращою за альтернативу y. У цьому випадку альтернатива x домінує альтернативу y за Парето,

$$x\underset{p}{\succ}y.$$

Множину оптимальних за Парето (чи ефективних) рішень eff(X) визначимо як

$$P(X)=\mathrm{eff}(X)=\left\{y\in X|\neg\exists(x\in X):\left(x\underset{p}{\succ}y\right)\right\},$$

тобто альтернатива y належить до множини Парето-оптимальних, якщо серед усіх допустимих альтернатив не знайдеться жодної, яка б домінувала її в сенсі відношення «>» в просторі критеріїв.

Розглянемо відношення «>» в просторі критеріїв. Вважатимемо, що $Q(x)>Q(y)$, якщо виконано умову

$$Q(x)>Q(y)\Rightarrow\forall\big(i=\overline{1,n}\big):(Q_i(x)\geq Q_i(y)),$$

тобто за всіма критеріями альтернатива x ліпша за альтернативу y. У цьому випадку альтернатива x домінує альтернативу y за **Слейтером**,

$$x\underset{s}{\succ}y.$$

Означимо множину слабо ефективних (оптимальних за Слейтером) рішень як

$$S(X)=s\mathrm{eff}(X)=\left\{y\in X|\neg\exists(x\in X):\left(x\underset{s}{\succ}y\right)\right\}.$$

Так, для відображення, наведеного на рис. 4.6 до множини слабоефективних рішень належать точки, що розташовані на лінії *A–B –C –D*. Для відображення, проілюстрованого на рис. 4.5, множина Парето-оптимальних рішень збігається з множиною рішень, оптимальних за Слейтером.

Приклад 4.3. Задано образ множини з семи альтернатив у просторі двох критеріїв: $Q^{(1)}$=(8, 2), $Q^{(2)}$=(6, 2), $Q^{(3)}$=(7, 1), $Q^{(4)}$=(5, 5), $Q^{(5)}$=(1, 8), $Q^{(6)}$=(1, 7), $Q^{(7)}$=(4, 3). Потрібно визначити множину альтернатив, оптимальних за Парето та Слейтером.

Подамо образ альтернатив у просторі критеріїв графічно (рис. 4.9).

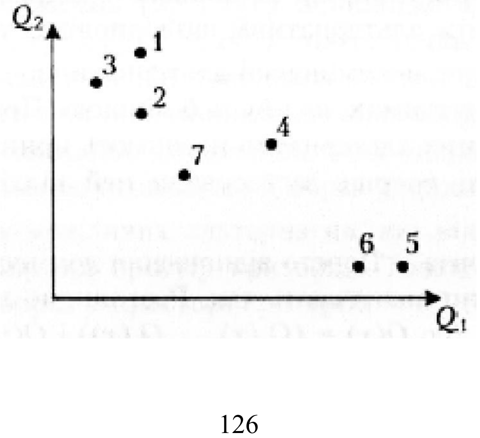


Рис. 4.9. Представлення альтернатив в просторі критеріїв

Альтернатива 3 строго домінується альтернативою 1, а альтернатива 7 – альтернативою 4. Отже, альтернативи 1, 2, 4 – 6 – оптимальні за Слейтером (слабоефективні). В сенсі відношення «≥» альтернатива 1 домінує альтернативу 2, а альтернатива 5 – альтернативу 6. Тому множину ефективних альтернатив (оптимальних за Парето) утворюють альтернативи 1,4, 5.

Таким чином, між множинами допустимих альтернатив X, слабо ефективних $S(X)$ і ефективних альтернатив $P(X)$ існує очевидне співвідношення

$$P(X) \subseteq S(X) \subseteq X.$$

Звичайно, головне завдання в ході дослідження та розв'язання багатокритерійних задач – побудувати множину оптимальних за Парето розв'язків. Безпосередньо зробити це вдається лише для найпростіших задач, а тому зазвичай прагнуть знайти розв'язок, що належить до множини оптимальних за Парето та найбільше відповідає системі переваг децидента.

Запровадження поняття слабоефективних розв'язків пояснюється тим, що не завжди вдається отримати розв'язки, що належать до множини Парето-оптимальних, і хоча розв'язки, оптимальні за Слейтером, не такі цікаві, доводиться досліджувати випадки, коли внаслідок оптимізації за кількома критеріями одержані розв'язки, які можуть належати до множини слабоефективних.

Необхідні та достатні умови оптимальності за Парето

Множину оцінок векторного критерію в задачі багатокритерійної оптимізації часто використовують для геометричної інтерпретації поняття оптимальності за Парето. Нехай множина значень векторного критерію, який складається з двох критеріїв, має вигляд, зображений на рис. 4.10, а. Зауважимо, що множина значень векторного критерію, яка домінує за Парето значення $Q(x)$, збігається з невід'ємним ортантом $C(x)$, вершину якого перенесено до точки $Q(x)$.

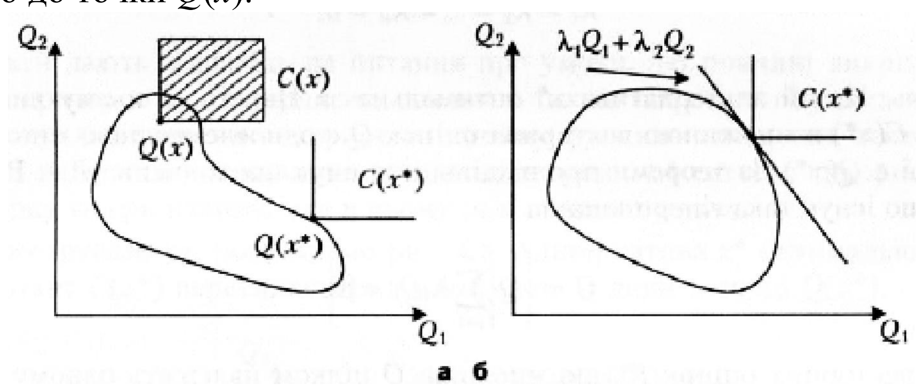


Рис. 4.7. Геометрична інтерпретація оптимальності за Парето

Справді, для довільної точки $a \in C(x)$ цього ортанту виконуються нерівності $a_i \geq Q_i(x)$, i = 1, …, n, причому якщо $a \neq Q(x)$, то хоча б одна з нерівностей строга, тобто довільна точка множини $C(x) \cap Q$, крім точки $Q(x)$, домінує $Q(x)$ за Парето. Тому на рис. 4.10, а значення векторного критерію $Q(x)$ (тобто альтернатива x) не належить до множини оптимальних за Парето, а альтернатива x^* оптимальна за Парето, оскільки виконано умову $C(x) \cap Q = \{Q(x^*)\}$, тобто перетин утворює одна точка $-Q(x)$.

Аналіз геометричних властивостей множини оцінок векторного критерію надзвичайно корисний для виведення необхідних і достатніх умов Парето-оптимальності. Найпростіший тип умов оптимальності за Парето пов'язаний із ситуацією, коли через будь-яку оцінку векторного критерію в n-вимірному просторі можна провести опорну гіперплощину F.

Нагадаємо, що опорною гіперплощиною до опуклої множини називається така гіпер-площина, яка має щонайменше одну точку цієї множини, і всі точки цієї множини знаходяться в одному з півпросторів цієї гіперплощини. Строго опуклою множиною називають множину, до якої належать усі точки відрізка, що сполучає дві довільні точки цієї множини. Отже, якщо множина значень векторного критерію строго опукла, то наступна теорема, яку довів С.Карлін, дає умови оптимальності за Парето (рис. 4.10, б).

ТЕОРЕМА 4.1. Нехай множина значень векторного критерію Q є строго опуклою, обмеженою та замкненою. Для того, щоб альтернатива $x^* \in X$ була оптимальною за Парето, необхідно та достатньо, щоб існували невід'ємні коефіцієнти,

$$\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,$$

що

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i(x^*) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i(x)$$

для будь-якої іншої альтернативи $x \in X$.

Обмеженість і замкненість множини значень векторного критерію потрібні для того, щоб можна було гарантувати існування альтернатив, оптимальних за Парето.

Умову $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ додано для того, щоб уникнути тривіального випадку

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай альтернатива x^* оптимальна за Парето. В цьому випадку перетин конуса $C(x^*)$ з множиною векторних оцінок Q є одноелементною множиною, елементом якої є $Q(x^*)$. Із теореми про віддільність опуклих множин (Дж.Рокафеллер) випливає, що існує така гіперплощина

$$G = \left\{ Q \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i = \beta \right\}$$

в просторі векторних оцінок R^n, що множина Q цілком належить одному з породжених півпросторів, а конус $C(x^*)$ – іншому. При цьому гіперплощина

G має точку $Q(x^*)$, а тому $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i(x^*) = \beta$. Оскільки множина Q цілком лежить у півпросторі$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i \leq \beta$, то для будь-якої точки $Q(x) \in Q$ виконується нерівність$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i(x) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i(x^*)$, тобто в точці x^* лінійна функція від окремих критеріїв $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i(x)$ справді досягає максимуму. Залишилося перевірити невід'ємність коефіцієнтів $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Оскільки конус $C(x^*)$ цілком міститься в півпросторі $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i \leq \beta$, то для будь-якої його точки справджується нерівність $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{c}_i(x^*) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i(x^*)$, або $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\mathrm{c}_i(x^*) - Q_i(x^*)) \geq 0$.

Узявши $\mathrm{c}_i(x^*) = Q_i(x^*), i \neq i^*, \mathrm{c}_{i^*}(x^*) = Q_{i^*}(x^*) + \delta$, де $\delta > 0$, для деякого індексу i^* маємо $\lambda_{i^*} \cdot \delta \geq 0$, звідки внаслідок довільності обрання значення індексу i^* випливає невід'ємність значень $\lambda_i, i = \overline{1,n}$, тобто необхідність твердження теореми.

Достатність. Нехай твердження теореми виконується в точці x^* для додатних значень $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Якщо припустити, що x^* не є оптимальною за Парето альтернативою,то існує альтернатива x', що домінує альтернативу x^* в сенсі Парето, тобто$Q_i(x') \geq Q_i(x^*), i = \overline{1,n}$, і серед нерівностей хоча б одна строга. Однак тоді $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i(x') > \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i(x^*)$, що призводить до суперечності.

Припустімо тепер, що $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i(x^*) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i(x), x \in X$. При цьому значення деякогокоефіцієнта, наприклад λ_1дорівнює 0. Якщо альтернатива x^* не оптимальна за Парето, то знайдеться хоча б одна альтернатива x', для котрої $Q_i(x') \geq Q_i(x^*), i = \overline{1,n}$, і хоча б одна нерівність є строгою. Проте в такому разі легко переконатися, що насправді $Q_i(x') = Q_i(x^*), i = \overline{1,n}$. Справді, якщо це не так, то $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i(x') > \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i(x^*)$, що суперечить первісному припущенню. Тому $Q_1(x') > Q_1(x^*)$.

Розглянемо значення векторного критерію $Q(x)$, що знаходиться на відрізку, який з'єднує точки $Q_1(x')$ і $Q_1(x^*)$,

$$Q(x) = \beta Q(x') + (1 - \beta) Q(x^*), 0 \leq \beta \leq 1.$$

З одного боку, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i(x') = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i(x^*)$. Однак із припущення про строгу опуклість множини значень векторного критерію Q випливає, що $Q(x)$ – внутрішня точка множини Q, а жодна внутрішня точка опуклої замкненої множини не може бути максимумом лінійної функції. Це й доводить достатність умов теореми.

Існування опорної до множини значень векторного критерію Q площини в кожній точці, оптимальній за Парето, гарантоване і в тому випадку, коли множина альтернатив X опукла, а всі складові векторного критерію $Q_i(x), x \in X, i = \overline{1,n}$, – строго ввігнуті функції.

Ці результати дають відповідь на питання про умови, які повинні виконуватись для векторного критерію та альтернатив, оптимальних за Парето в опуклих задачах. Однак для неопуклих множин використати лінійну функцію складових векторного критерію якості не вдасться, тому що в доведенні теореми 4.1 суттєво використано теорему про опорну гіперплощину, яка в цьому разі не виконується.

Щоб проілюструвати це, розглянемо рис. 4.11. Альтернатива x^* оптимальна за Парето, оскільки ортант $C(x^*)$ перетинається з множиною Q лише в точці $Q(x^*)$.

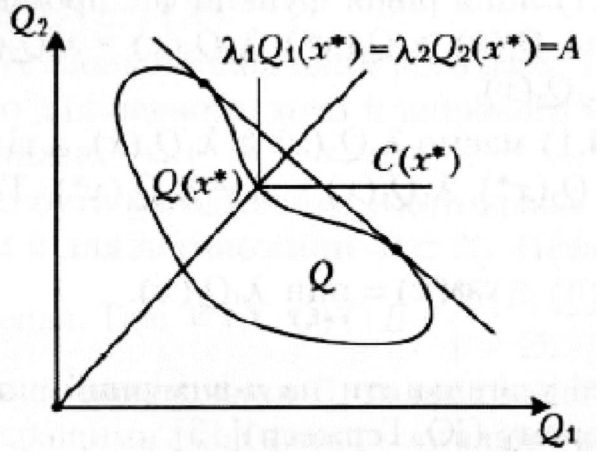


Рис. 4.11. Оптимальні за Парето розв'язки для неопуклих множин

Водночас, як видно з рисунка, не існує лінійної функції складових векторного критерію якості, яка досягала б у точці $Q(x^*)$ максимального значення. Це означає, що для неопуклого випадку потрібно шукати інші умови оптимальності за Парето. Крім того, намагаючись отримати такі умови, доцільно було б зберегти попередню структуру умов для опуклих задач, тобто відображення їх за допомогою максимуму якоїсь функції, щоб аналізувати опуклі та неопуклі задачі щонайменше з близьких позицій.

Отже, бажано одержати умову оптимальності за Парето для неопуклих задач у такому вигляді: щоб альтернатива x^* була оптимальною за Парето, необхідно і достатньо, щоб деяка скалярна функція φ, залежна від складових векторного критерію якості $Q_1,..., Q_n$, досягала максимуму в точці $Q(x^*)$. Для того, щоб таке твердження було конструктивним, потрібно вказати вигляд цієї скалярної функції.

Вважатимемо, що множина значень векторного критерію Q обмежена, замкнена та цілком лежить усередині невід'ємного ортантуR^n, тобто

$$\min_{1 \le i \le n} \min_{x \in X} Q_i(x) > 0.$$

Ці два припущення не надто жорсткі, а тому вони не обмежуватимуть загальності подальших міркувань. Перше з них по суті гарантує існування альтернатив, оптимальних за Парето, а друге введено лише для зручності, тому від переміщення довільної обмеженої множини в додатний ортант відношення домінування за Парето між її точками не зміниться.

Повернемося до розгляду рис. 4.11. Оскільки перетин ортанту $C(x^*)$ з множиною Q містить лише одну точку $Q(x^*)$, доцільно вважати $C(x^*)$ множиною рівня деякої функціїφ,

$$C(x^*) = \{y \in R^n \big| \varphi(y) \ge \varphi\big(Q(x^*)\big) = A\},$$

яка досягає максимального значення критерію Q в точці $Q(x^*)$. В цьому випадку сторони ортанта є лініями рівня цієї функції, тобто описують множину точок $y \in R^n$, таких що $\varphi(y) = A$. Проведемо пряму через початок координат і точку $Q(x^*)$, що описується співвідношеннями

$$\lambda_1 Q_1(x) = \lambda_2 Q_2(x);\ \lambda_1 Q_1(x) = \lambda_3 Q_3(x);\ \dots;\lambda_1 Q_1(x) = \lambda_n Q_n(x), \qquad (4.1)$$
де $\lambda_i > 0, i = \overline{1,n}$.

У точці $Q(x^*)$ виконуються рівності $\lambda_i Q_i(x^*) = A, i = \overline{1,n}$. Повертаючись до рисунка, бачимо, що під прямою (4.1) лінія рівня функції φ є променем, що виходить із точки $Q(x^*)$ та задовольняє умови$Q_1(x) \geq Q_1(x^*)$, $\lambda_2 Q_2(x) = \lambda_2 Q_2(x^*)$. Окрім того, виконується нерівність $\lambda_1 Q_1(x) \geq \lambda_2 Q_2(x)$.

Аналогічно, над прямою (4.1) маємо $\lambda_2 Q_2(x) \geq \lambda_1 Q_1(x)$, а відповідна частина лінії рівня φ задається як $Q_2(x) \geq Q_2(x^*)$, $\lambda_1 Q_1(x) = A = \lambda_1 Q_1(x^*)$. Тому функцію φ можна подати у вигляді

$$\varphi(x) = \min_{i=1,2} \lambda_i Q_i(x).$$

Отриманий результат легко узагальнити на n-вимірний випадок, тому без доведення сформулюємо наступну теорему (Ю.Гермеєр).

ТЕОРЕМА 4.2. Нехай множина оптимальних за Парето значень часткових критеріїв векторного критерію оптимальності є обмеженою, замкненою та цілком знаходиться усередині невід'ємного ортанта R^n. Для того, щоб альтернатива x^* була оптимальною за Парето, необхідно й достатньо, щоб існували такі строго додатні коефіцієнти

$$\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,$$

для яких виконується умова

$$\forall (x \in X)\colon \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i Q_i(x^*) \geq \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i Q_i(x)$$

причому рівність досягається тоді і лише тоді, коли $Q_i(x) = Q_i(x^*), i = \overline{1,n}$.

Теорема 4.2 корисна для розв'язання наступної задачі, що виникає доволі часто. Нехай задано якусь альтернативу x^*. Потрібно довести, що вона оптимальна за Парето, чи знайти оптимальну за Парето альтернативу x' яка домінує альтернативу x^*. Ця теорема застосовна для неопуклих задач, розв'язання яких пов'язане з великими складнощами. Більше того, якщо навіть усі критерії є гладкими функціями, нелінійна згортка $\min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i Q_i(x)$ усе одно буде недиференційовною, до того ж у «найцікавіших» точках. Однак простота й наочність цієї теореми зумовили її надзвичайну корисність для різноманітних теоретичних побудов.

Принципи прийняття раціональних рішень у багатокритерійних задачах

Умови раціональності принципів прийняття рішень

Розглянемо, які умови мають виконуватися для раціональних рішень багатокритерійних задач. Зрозуміло, що доцільно вибирати рішення з множини Парето-оптимальних, але без додаткової інформації від децидента неможливо визначити, яке саме рішення обрати. Будемо вважати, що результат застосування принципу прийняття рішень – множина рішень $W(X, Q)$ (якщо рішення одне, то ця множина одноелементна).

Щоб принцип прийняття рішень $W(X, Q)$ для детермінованих багатокритерійних задач був раціональним, необхідно дотримання таких умов.

1. Розв'язок має бути допустимим і таким, що звужує початкову множину альтернатив, тобто $W(X,Q) \subset X$.

2. Дві альтернативи з однаковими векторними значеннями критеріїв або обидві належать до множини рішень, або обидві не належать до неї, тобто

$$\forall(x, y \in X) \wedge (x \neq y) \wedge (Q(x) = Q(y))):$$
$$\big(x \in W(X,Q) \Rightarrow y \in W(X,Q)\big) \vee \big(x \notin W(X,Q) \Rightarrow y \notin W(X,Q)\big).$$

3. До числа потенційно можливих розв'язків належать лише ефективні тобто оптимальні за Парето: $W(X,Q) \subset P(X)$.

4. Для кожної задачі існує щонайменше один розв'язок, тобто $W(X, Q) \neq \varnothing$. Звичайно, цю умову виконано для певного, хоча й широкого класу задач.

5. Вибір альтернатив має бути узгодженим, тобто кращі альтернативи з множини X залишаються кращими й для підмножини $B \subset X$. Нехай (X,Q) та (B,Q') – дві ситуації прийняття рішення. Тоді

$$W(X,Q) \cap B = \begin{cases} S(B,Q'); \\ \quad \emptyset, \end{cases}$$

тобто якщо кращі альтернативи не потрапляють до підмножини B, то кращі альтернативи з підмножини B в цьому разі не будуть кращими розв'язками загальної задачі. Цю умову називають ще постулатом про *незалежність непов'язаних альтернатив*.

Із цієї системи умов випливає, що раціональний принцип прийняття рішень застосовний до всіх дво- та триелементних множин, тобто на множині X існує відношення переваги, що залежить лише від множини критеріїв якості Q найкращі елементи котрого і є елементами множини розв'язків $W(X, Q)$.

Якщо для якогось принципу прийняття рішень виконано лише умови 1 і 2, то він не якісний.

Для більшості багатокритерійних задач, що досліджувались різними авторами, і для яких запропоновано методи прийняття рішень, вважають, що виконано такі припущення щодо множини векторних оцінок.

Множина $Q(X)$ є опуклою та замкненою. Існують такі елементи (вектори) $\overline{y}, y \in R^n$(де R– множина раціональних чисел,

$$\underbrace{R^n = R \times R \times \ldots \times R}_{n \text{ разів}}$$

– декартовий добуток) такі $Q(X) \subset Q(\{\overline{y}\})$ і $\forall(x \in P(X)): y \leq x$, множина $Q(X)$ є – це $Q(X) = \{x \in R^n | x \leq y$ для деякого $y \in X\}$ та визначена для всіх $X \in R^n$.

Ці умови обмежують значення векторних оцінок критеріїв і оперують з їх числовими значеннями, що належать до множини раціональних чисел.

Принципи прийняття рішень

Розглянемо деякі найпоширеніші принципи прийняття рішень для багато-критерійних задач в умовах визначеності (детермінованості).

Згідно з **принципом Джофріона** розв'язок задачі визначається співвідношенням

$$W_P(X,Q) = \{x \in X | Q(x) = Q^*\}, \forall\left(i = \overline{1,n}\right): Q_i^* = \max_{x \in X} Q_i(x),$$

де компоненти вектора $Q^* = (Q_1^*, Q_2^*, \dots, Q_n^*)$ – розв'язки n однокритерійних задач оптимізації за кожною складовою векторного критерію.

Відповідно до принципу Джофріона оптимальним уважають розв'язок, для якого максимально досягається мета в сенсі оптимізації кожного окремо взятого критерію. Однак для більшості задач це призводить до порушення умови раціональності, тобто найчастіше не існує допустимих розв'язків, для яких максимум досягається водночас за всіма критеріями.

Так, на рис. 4.12, a не існує допустимого розв'язку, який був би оптимальним у сенсі принципу Джофріона, а на рис. 4.12, b – існує.

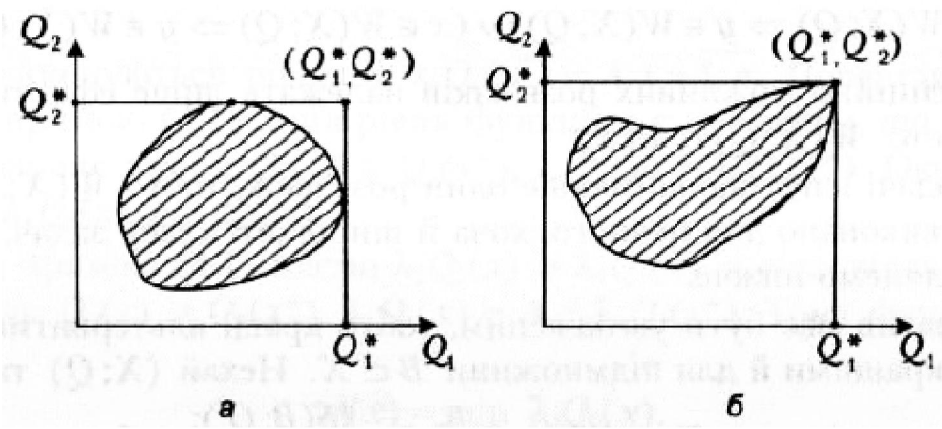


Рис. 4.12. Оптимальні розв'язки за принципом Джофріона

Принцип повного розв'язку, запроваджений В.Дінкельбахом, визначає розв'язок задачі як

$$W_v(X, Q) = P(X),$$

тобто розв'язком задачі вважається множина Парето-оптимальних рішень. Однак, оскільки постановку багатокритерійної задачі прийняття рішень орієнтовано на повне чи часткове розв'язання конфлікту, повний розв'язок теж уважають нераціональним. Отже, принципи Джофріона та повного розв'язку – це певні граничні випадки, зумовлені лише виглядом задачі прийняття рішення. Тому інші можливі принципи впорядковані в цих межах, тобто для **довільного принципу прийняття рішень** справедливі співвідношення

$$W_P(X,Q) \subset W(X,Q) \subset W_v(X,Q),$$

а в разі існування рішення, оптимального за Джофріоном,

$$W_P(X,Q) \neq \emptyset \Rightarrow W_P(X,Q) = W(X,Q) = W_v(X,Q).$$

Принцип корисності визначає оптимальний розв'язок, виходячи з припущення про існування відношення повного порядку на множині альтернатив, що залежить від складових критеріїв векторного критерію оптимальності (він раціональний, коли це відношення монотонне та неперервне на R^n).

Цей принцип веде до співвідношення

$$W_k(X,Q) = \left\{x \in X \,\middle|\, u\big(Q(x)\big) = \max_{y \in X} u\big(Q(y)\big)\right\},$$

тобто оптимальним є той розв’язок, для якого значення функції корисності максимальне.

Принцип ідеального розв’язку ґрунтується на припущенні про існування «ідеального» (можливо, недопустимого) розв’язку та метрики, за допомогою якої можна виміряти «віддаль» від довільного допустимого розв’язку до ідеального. Уважають, що координати ідеального розв’язку та метрики може визначити децидент. Множина оптимальних розв’язків згідно з цим принципом є наступною

$$W_d(X,Q) = \left\{x \in X \,\middle|\, \rho\big(Q(x), Q^*\big) = \min_{y \in X} \rho\big(Q(y), Q^*\big)\right\},$$

де $\rho(Q(x), Q^*)$ – віддаль в просторі критеріїв між ідеалом Q^* та довільною альтернативою x, виміряна за допомогою метрики ρ. Оптимальними вважають розв'язки, найближчі до ідеального.

Принцип аналізу окремих складових векторного критерію базується на припущенні про те, що децидент може надати додаткову інформацію, потрібну для такого аналізу. Цей принцип реалізовано в методах переведення критеріїв у обмеження, методі послідовних поступок та інших.

4.2. Методи розв’язання багатокритерійних задач

Методи глобального критерію

Для усунення невизначеності мети застосовують два основні підходи.

1. Вважають, що мету достатньо адекватно відображає множина критеріїв, і тому постає багатокритерійна задача.
2. Вважають, що задано множину альтернатив, які можна вибирати з цієї множини за допомогою покрокового діалогу з децидентом, будуючи послідовність слабших бінарних відношень для звуження первісної множини альтернатив.

Представниками першого підходу є різноманітні методи згортання критеріїв, а також методи поступок, а другого – методи ELECTRE.

Лінійні та мультиплікативні згортання

Найчастіше множину критеріїв зводять до одного глобального та розв’язують класичну однокритерійну задачу. Однак застосування цього підходу має суттєві вади, одна з яких полягає в тому, що неможливо отримати деякі з оптимальних за Парето розв’язків (як видно з рис. 4.11, лінійне згортання не дає змоги одержати певні оптимальні за Парето розв’язки за будь-яких значеннях вагових коефіцієнтів).

Методи згортання критеріїв зводять первісну задачу до однокритерійної задачі такого вигляду:

$$Q\big(Q_1(x), \dots, Q_n(x)\big) \Rightarrow \text{Max}, x \in X.$$

Найуживанішими методами згортання є лінійне згортання ненормованих та нормованих критеріїв.

За допомогою **лінійного згортання** глобальний критерій подається у вигляді лінійної комбінації компонентів векторного критерію якості з ваговими коефіцієнтами, основне призначення яких – врахування відносної важливості критеріїв:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n}\big(\lambda_i \cdot Q_i(x)\big) \Rightarrow \text{Max}, x \in X, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i > 0, i = \overline{1, n},$$

де $Q_i(x)$–i-та компонента векторного критерію якості,λ_i– ваговий коефіцієнт, що відображає відносну важливість i-го критерію.

Лінійне згортання нормованих критеріїв ґрунтується на ідеї зведення часткових критеріїв до безрозмірних величин з інтервалом можливих значень кожного з них [0, 1]. Щоб виконати таке перетворення, децидент має зазначити для кожного з критеріїв межі його зміни від мінімального значення $Q_i^{\min}$до максимального $Q_i^{\max}$ та коефіцієнти відносної важливості нормованих критеріїв λ_i:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i \cdot \frac{Q_i(x) - Q_i^{\min}}{Q_i^{\max} - Q_i^{\min}}\right) \Rightarrow \text{Max}, x \in X, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i > 0, i = \overline{1, n}.$$

Головною проблемою цих методів є виявлення точних значень вагових коефіцієнтів. Найчастіше ця процедура суб’єктивна. Окрім того, коефіцієнти в методі лінійного згортання мають бути розмірними величинами, тому що критерії можуть мати різну розмірність. Щоб позбутися цієї вади в згортанні нормованих критеріїв, окремі критерії спочатку нормують (нормовані критерії безрозмірні та змінюються в інтервалі від 0 до 1).

Проте нормовані критерії, що з’являються унаслідок такого «вдосконалення», не мають змістовної інтерпретації, і тому об’єктивне визначення вагових коефіцієнтів іще більше ускладнюється. Отже, невизначеність мети, спричинена багатокритерійністю, не зменшується, а переходить в іншу форму – виникає проблема обчислення значень вагових коефіцієнтів.

З іншого боку, у разі опуклої області значень векторного критерію лінійне згортання можна використати для отримання кількох розв'язків, оптимальних за Парето (теорема 4.1), змінивши значення вагових коефіцієнтів. Це дає децидентові можливість у діалозі дослідити саме ту частину області Парето, яка найбільше його цікавить.

Адитивні згортання мають іще одну ваду – значення одного зі складових критеріїв може бути дуже великим унаслідок того, що значення інших мінімальні. Така ситуація є вкрай небажаною. Наприклад, конструюючи літак зі складовими критеріями економічності та швидкості польоту, за певних значень вагових коефіцієнтів можна отримати максимальне значення економічності за рахунок того, що швидкість польоту становитиме 0, а такий літак не потрібен нікому.

Щоб уникнути таких ситуацій, було запропоновано варіанти **мультиплікативного згортання** у звичайному (4.2) та нормованому (4.3) вигляді:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(Q_i(x)\right)^{\lambda_i} \Rightarrow \text{Max}, x \in X, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i > 0, i = \overline{1,n}, \tag{4.2}$$

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Q_i(x) - Q_i^{\min}}{Q_i^{\max} - Q_i^{\min}}\right)^{\lambda_i} \Rightarrow \text{Max}, x \in X, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i > 0, i = \overline{1,n}. \tag{4.3}$$

Для таких згортань різке зменшення значення хоча б одного часткового критерію різко зменшує значення глобального. Критерії такого виду широко використовуються в економічних дослідженнях (досить лише згадати виробничі функції). Однак головна проблема – обчислення значень вагових коефіцієнтів – залишається нерозв’язаною.

Максимінне згортання

У методі **максимінного згортання** глобальний критерій визначається як

$$Q(x) = \min_{i \in 1,n}\left(\lambda_i \cdot Q_i(x)\right) \Rightarrow \underset{x \in X}{\text{Max}},\ x \in X, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i > 0, i = \overline{1,n},$$

На значення глобального критерію впливає лише той частковий критерій, який має у відповідній точці найменше значення. Береться до уваги лише «найгірший» випадок, тому значення $Q(x)$ визначає гарантовану нижню оцінку для всіх часткових критеріїв. Зрозуміло, що цей критерій можна застосовувати й у нормованому вигляді

$$Q(x) = \min_{i \in 1,n}\left(\lambda_i \cdot \frac{Q_i(x) - Q_i^{\min}}{Q_i^{\max} - Q_i^{\min}}\right) \Rightarrow \underset{x \in X}{\text{Max}},\ x \in X, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i > 0, i = \overline{1,n},$$

Приклад 4.4. У проектуванні використовують різновид критерію максимінного згортання, у якому задано нормативні значення параметрів Q^*, яких бажано дотримуватися:

$$Q(x) = \min_{i \in 1,n}\left(\frac{Q_i(x)}{Q_i^*}\right), x \in X, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i > 0, i = \overline{1,n}. \tag{4.4}$$

Зміст цього критерію очевидний: за певного значення x ми будемо мати найгірше значення відношення, і умова максимізації глобального критерію означатиме вибір такої системи конструктивних параметрів, яка максимізує відношення значення складового критерію до його контрольного значення. Для задач такого типу не обов’язково задавати критерій безпосередньо. У багатьох випадках вимоги до системи, що проектується, формулюють у вигляді системи нерівностей:

$$Q_i(x) \le Q_i^*, i = \overline{1,n}. \tag{4.5}$$

У цьому випадку для побудови глобального критерію потрібна додаткова інформація. Увівши додаткові змінні, зведемо систему нерівностей (4.5) до канонічного вигляду

$$Q_i(x) + z_i(x) = Q_i^*, i = \overline{1,n}.$$

Додаткові змінні доцільно розглядати як «невикористаний ресурс», якщо значення $z_i(x)$ розглядати як «запас ресурсу», тобто в проектуванні $z_i(x)$ – цепо суті запас міцності i-го конструктивного параметра. У такій інтерпретації, слід забезпечити якомога більший запас міцності для конструктивних параметрів. Це та додаткова інформація, що дає змогу конкретизувати глобальний критерій оптимальності. Отже, у цьому разі задачу формулюють як багатокритерійну задачу максимізації всіх «запасів міцності»:

$$z_i(x) \Rightarrow \underset{x \in X}{\text{Max}},\ i = \overline{1,n},$$

Тому можна припустити, що доцільно мати якомога більший запас міцності для всіх конструктивних параметрів з урахуванням їх важливості, тобто максимізувати мінімальний із них (вагові коефіцієнти дають змогу брати до уваги різну важливість конструктивних параметрів і по суті нормують часткові критерії за значенням). Отже, одержимо максимінне згортання та, як наслідок, задачу у вигляді

$$Q(x) = \min_{i \in 1,n} \left(\lambda_i \cdot \left(Q_i^* - Q_i(x) \right) \right) \Rightarrow \underset{x \in X}{\text{Max}}.$$

Змістовне значення вагових коефіцієнтів $\lambda_i > 0, i = \overline{1,n}$ полягає в тому, що обернені до них величини $1/\lambda_i$ —це еквівалентні прирости критеріїв $Q_i(x)$ із погляду децидента: збільшення значення критерію $Q_i(x)$на $1/\lambda_i$ еквівалентне збільшенню значення критерію $Q_j(x)$ на $1/\lambda_j$.

Приклад 4.5. Потрібно визначити найкращу альтернативу з шести заданих при оцінюванні за трьома критеріями, використовуючи максимінний критерій із нормативними значеннями (4.4). Нормативні значення складових критеріїв становлять $Q_1^* = 6, Q_2^* = 8, Q_3^* = 10$, а критерійні характеристики альтернатив наведено в таб. 4.1.

Таблиця 4.1. Характеристики альтернатив у просторі трьох критеріїв

Критерій	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Q_1	2	4	7	5	8	3
Q_2	4	3	8	6	4	6
Q_3	8	14	2	6	4	12

Значення максимінного критерію із заданими нормативними значеннями обчислимо за формулою (4.4). Спочатку знайдемо значення $Q_i(x)/Q_i^*$і заповнимо ними перші три рядки табл. 4.2. На наступному кроці знайдемо мінімальні значення в кожній із колонок таблиці та запишемо їх у четвертий рядок. Серед них виберемо максимальне; воно відповідає альтернативі A_4. Отже, ця альтернатива A_4 оптимальна за максимінним критерієм.

Таблиця 4.2. Результати застосування максимінного критерію

Критерій	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Q_1	2/6	4/6	7/6	5/6	8/6	3/6
Q_2	4/8	3/8	8/8	6/8	4/8	6/8
Q_3	8/10	14/10	2/10	6/10	4/10	12/10
min	2/6	3/8	2/10	6/10	4/10	3/6
				Max		

За допомогою критеріїв максимінного типу, змінюючи значення вагових коефіцієнтів, можна досліджувати область слабоефективних розв'язків (оптимальних за Слейтером), а для деяких задач – і область розв'язків, оптимальних за Парето, у найзагальнішому випадку неопуклої множини значень векторного критерію (теорема 4.2). Звичайно, однокритерійні задачі, які доведеться розв’язувати при цьому, складні та найчастіше нелінійні, тобто така можливість у багатьох випадках залишається суто теоретичною. Окрім того, існують й інші методи згортання, зокрема метод ідеальної точки.

Метод ідеальної точки

Метод ідеальної точки реалізує принцип ідеального розв’язку. У ньому постулюється існування «ідеальної точки» для розв’язання задачі, у якій досягається екстремум усіх критеріїв (принцип Джофріона). Так, на рис. 4.13 ідеальна точка в просторі критеріїв –D. Їй не відповідає жодний допустимий розв’язок простору змінних.

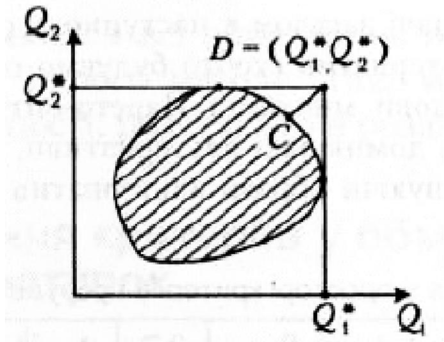


Рис. 4.13. Метод ідеальної точки

Оскільки ідеальна точка у більшості випадків не знаходиться серед допустимих, то постає проблема знаходження «найближчої» до ідеальної допустимої точки. Усе було б добре, якби існувало єдине об’єктивне поняття «віддалі», однак це не так. Якщо на площині можна з тим чи іншим обґрунтуванням застосовувати евклідову метрику, то, наприклад, на поверхні кулі (і земної також!) найкоротший шлях – дуга, а не пряма.

Отже, розв’язуючи задачу методом «ідеальної точки», необхідно насамперед визначити координати цієї точки, а потім обрати метрику, за допомогою якої можна виміряти віддаль до оптимальної точки. Для визначення координат ідеальної точки потрібно розв’язати n однокритерійних задач за кожним із критеріїв оптимізації $Q_i(x) \to \mathrm{Max}, x \in X, i = \overline{1, n}$. Оптимальні значення критеріїв кожної з однокритерійних задач $Q_i^* \to \mathrm{Max}\,\{Q_i(x)\}, x \in X$, є координатами ідеальної точки $Q^* = (Q_1^*, \dots, Q_n^*)$у просторі критеріїв. Якщо ідеальна точка допустима (що трапляється вкрай рідко), то розв'язок отримано.

В іншому випадку визначимо «віддаль» до ідеальної точки, обравши метрику, і розв'яжемо однокритерійну задачу знаходження точки з множини допустимих, яка найближча до ідеальної. Задача має вигляд

$$Q(x) = \rho(Q(x) - Q^*) \Rightarrow \mathrm{Min}, x \in X.$$

Якщо обрано метрику Евкліда, то критерій набирає вигляду

$$Q(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (Q_i(x) - Q_i^*)^2} \Rightarrow \mathrm{Min}, x \in X.$$

На рис. 4.13 в евклідовій метриці точка *C* найближча до ідеальної точки *D* в просторі критеріїв. Вона вважається розв'язком задачі багатокритерійної оптимізації за методом ідеальної точки.

Приклад 4.6. Критерії якості двокритерійної задані оптимізації задані наступним чином:

$$Q_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2^2 \Rightarrow \mathrm{Max}, Q_2(x_1, x_2) = -2x_1^2 + x_2 \Rightarrow \mathrm{Max}.$$

Множина допустимих альтернатив складається з шести можливих варіантів прийняття рішення. Координати альтернатив у просторі змінних наведено в табл. 4.3.

Таблиця 4.3. Координати альтернатив у просторі змінних

Номер альтернативи	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
x_1	1	3	0	–1	6	8
x_2	2	1	3	2	1	–2

Потрібно визначити множину Парето-оптимальних альтернатив, обрати найкращу з використанням лінійного згортання критеріїв із вагами 0,3 і 0,7 та методом ідеальної точки, уважаючи що віддаль вимірюється за допомогою метрики Евкліда.

Послідовність розв'язання цієї задачі загалом є наступною: спочатку обчислимо значення двох критеріїв для кожної з шести альтернатив (тобто будуємо образи кожної альтернативи в просторі критеріїв); потім для побудови множини Парето-оптимальних альтернатив послідовно виключаємо з наведеної множини доміновані альтернативи, поки не дійдемо до останньої. Будуємо лінійну згортку, використовуючи образи альтернатив у просторі критеріїв. Усі потрібні розрахунки зведено в табл. 4.4.

Таблиця 4.4. Координати альтернатив у просторі критеріїв і результати обчислень

№ альтернативи	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Q_1	6	7	9	2	13	20
Q_2	0	–17	3	0	–71	–130
Парето-оптимальні альтернативи	–	–	П	–	П	П
$Q_{зг}$	1.8	–9.8	4.8	0.6	–45.8	–85.0

Визначимо Парето-оптимальні альтернативи, порівнюючи поточну альтернативу зі всіма наступними. Якщо є альтернатива, домінована поточною, то виключаємо її з подальшого розгляду. Якщо ж деяка альтернатива домінує поточну, то вилучаємо останню з розгляду та переходимо до альтернативи, наступної за поточною й не виключеної з розгляду. Процес повторюється доти, доки поточну альтернативу не буде з чим порівнювати.

Починаємо з першої альтернативи. Вона непорівняльна з альтернативою 2. Порівняємо її з наступною альтернативою – третьою. Та домінує першу, тому переходимо до наступної невиключеної після першої альтернативи —другої, а альтернативу 1 виключаємо з розгляду. Порівнюємо другу альтернативу з наступною невиключеною – третьою. Вона домінує другу, тому виключаємо альтернативу 2 та переходимо до третьої альтернативи. Третя альтернатива домінує четверту, тому останню виключаємо. Альтернатива 3 непорівняльна з п'ятою та шостою отже, оскільки альтернативи більше немає, то альтернатива 3 Парето-оптимальною. Наступна поточна альтернатива – п’ята – непорівняльна з шостою. Тому множину Парето-оптимальних альтернатив утворюють розв’язки з номерами 3, 5 і 6.

Обчислимо значення критерія-згортки для кожної з шести альтернатив. Наприклад, для поточної першої $Q^{(1)} = 0.3 \times Q_1^{(1)} + 0.7 \times Q_2^{(1)} = 0.3 \times 0.6 + 0.7 \times 0 = 1.8$. Обираємо максимальне значення, вважаючи аргументом номер альтернативи, і отримаємо

$$x^* = \arg\max_{x \in X}\{Q(a,x)\} =$$
$$= \arg\max_{x \in X}\{Q^{(1)} = 1.8; Q^{(2)} = -9.8; Q^{(3)} = 4.8; Q^{(4)} = 0.6; Q^{(5)} = -45.8; Q^{(6)} = -85\} = 3,$$

тобто за критерієм лінійного згортання найкраща альтернатива – третя.

Ідеальна точка в просторі критеріїв має координати (20, 3). Оскільки перша координата, що відповідає критерію Q_1, належить альтернативі 6, а друга, яка відповідає критерію Q_2– альтернативі 3, то ідеальна точка не належить до множини допустимих розв’язків, і потрібно обчислити віддалі від кожної альтернативи до ідеальної точки. Віддаль від першої альтернативи до ідеальної точки становить

$$\rho\left(Q^{(1)}\right) = \sqrt{(6-20)^2 + (0-3^2)} = 14.31,$$

відповідно $\rho\left(Q^{(2)}\right) = 23.85$; $\rho\left(Q^{(3)}\right) = 11$; $\rho\left(Q^{(4)}\right) = 18.25$; $\rho\left(Q^{(5)}\right) = 74.33$; $\rho\left(Q^{(6)}\right) = 133$, тобто третя альтернатива є оптимальною за методом ідеальної точки.

Інший підхід до розв’язання проблеми багатокритерійності – аксіоматичний – полягає у формулюванні множини аксіом з подальшим формальним виведенням виду функції корисності (глобального критерію), за допомогою якого й здійснюється остаточний вибір. Таким чином виявляються всі обмеження, побічно накладені в разі евристичного застосування того чи іншого методу.

Методи переведення критеріїв у обмеження та послідовних поступок

Метод переведення критеріїв у обмеження

Метод переведення критеріїв у обмеження – один із найзрозуміліших. Він полягає у виділенні головного критерію $Q_1(x)$, за яким виконується оптимізація, задані нормативні значенняQ_i^N для кожного з критеріїв, що залишилися (значення критерію не може бути меншим за нормативне), і розв’язуванні отриманої у такий спосіб однокритерійної задачі оптимізації

$$Q_1(x) \Rightarrow \text{Max}, Q_2(x) \geq Q_2^N, \dots, Q_n(x) \geq Q_n^N, x \in X.$$

Головними проблемами в застосуванні цього методу є складнощі з визначенням основного критерію та нормативних значень для інших критеріїв. Якщо ці значення недостатньо великі, то не всі резерви поліпшення значень критеріїв буде використано. Коли ж ці значення завеликі, то задача взагалі не має розв’язків, оскільки множина допустимих рішень порожня.

Приклад 4.7. Потрібно визначити найкращий розв’язок, оцінивши шість можливих альтернатив (A_1 – A_6) за трьома критеріями методом переведення критеріїв у обмеження за умови пошуку максимального значення критерію Q_1, для таких випадків:

а)$Q_2 \geq 5$, $Q_3 \geq 4$;

б)$Q_2 \geq 7$, $Q_3 \geq 9$.

Образи альтернатив у просторі критеріїв задано в табл. 4.5.

Таблиця 4.5. Характеристики альтернатив в просторі критеріїв

Критерій	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Q_1	2	4	7	5	8	3
Q_2	4	3	8	6	4	6
Q_3	8	14	2	6	4	12

Відкинемо альтернативи, для яких не виконано обмеження, і серед тих, що залишилися, визначимо найкращі. Так, $Q_2 \geq 5$ для альтернатив A_3,A_4, A_6, а $Q_3 \geq 4$ – для альтернатив A_1,A_2, A_4, тобто водночас ці обмеження виконано для альтернатив A_4 й A_6. Для них максимальне значення критерію $Q_1^{(4)} = 5$, тобто вибираємо альтернативу A_4. Якщо ж узяте обмеження $Q_2 \geq 7$, $Q_3 \geq 9$, то, хоча ці значення менші, ніж найбільші значення критеріїв (для Q_2 це 8, а для Q_3–

14), не існує жодної допустимої альтернативи, для якої водночас було б виконано ці два обмеження.

Для розв’язання багатокритерійної задачі в багатьох методах пропонується спочатку впорядкувати критерії за важливістю в порядку спадання. Найжорсткіший у такому розумінні метод **лексикографічної оптимізації**, згідно з яким критерії спочатку впорядковують за спаданням важливості$Q_1 \succ Q_2 \succ \cdots \succ Q_n$, а потім розв’язують послідовність оптимізаційних задач за кожним із критеріїв, починаючи з Q_1. Якщо при оптимальному значенні першого критерію Q_1^* можна поліпшити значення наступного, тоце виконують, а у протилежному випадку переходять до наступного. Процес припиняється, коли переглянуто всі критерії. Отже, на i-му кроці розв’язують задачу однокритерійної оптимізації

$$Q_i(x) \Rightarrow \text{Max}, x \in X, Q_1(x) = Q_1^*, \ldots, Q_{i-1}(x) = Q_{i-1}^*$$

з додатковими обмеженнями у вигляді рівностей на оптимальні значення попередніх критеріїв. Вада цього методу – надмірна жорсткість: покращення значень наступних в лексикографічному порядку критеріїв в багатьох випадках є неможливим. Якщо децидент згідний на певне погіршення значення поточного критерію за умови, що покращаться значення наступних критеріїв, – то метод не передбачає такої процедури. Ці хиби усунуто в методі послідовних поступок.

Метод послідовних поступок

Метод послідовних поступок є одним із найобгрунтованіших змістовно, і він може дати непоганий результат, якщо суперечності у перевагах децидента відсутні. Насамперед децидент упорядковує критерії за важливістю в порядку її спадання –$Q_1 \succ Q_2 \succ \cdots \succ Q_n$, як у методі лексикографічної оптимізації. Однак це відношення переваги не абсолютне, тому що децидент на кожному кроці може поступитися значенням поточного критерію відносно його оптимального значення. Це дає змогу побудувати значно гнучкішу процедуру, ніж лексикографічна оптимізація.

Після цього на кожному i-му кроці алгоритму розв’язують задачу оптимізації за критерієм Q_i та призначають поступку $\Delta Q_i > 0$, на яку ми готові зменшити отримане оптимальне значення критерію Q_i^*, щоб поліпшити значення інших критеріїв, не таких важливих, як Q_i. Значення цих критеріїв обчислюють за відомими координатами оптимуму x^*. Призначення поступки означає введення на кожному кроці ще одного додаткового обмеження$Q_i \geq Q_i^* - \Delta Q_i$, тому на ($i$ + 1)-му кроці розв’язують задачу

$$Q_{i+1}(x) \Rightarrow \text{Max}, x \in X, Q_1(x) \geq Q_1^* - \Delta Q_1, \ldots, Q_i(x) = Q_{i-1}^* - \Delta Q_i.$$

Процес розв’язування закінчується тоді, коли досягнуто останнього критерію або ж призначати поступку недоцільно. У разі потреби процес повторюють, проаналізувавши попередні результати. Отже, метод послідовних поступок достатньо гнучкий та дає змогу уникнути багатьох проблем, властивих іншим методам. Для його реалізації достатньо мати ефективний метод розв’язування однокритерійної задачі певного типу.

Приклад 4.8. Задано образи альтернатив у просторі критеріїв (табл. 4.6). Необхідно знайти оптимальну альтернативу методами лексикографічної оптимізації та послідовних поступок. За допомогою методу лексикографічної оптимізації потрібно визначити найкращу альтернативу в трьох випадках із різними впорядкуваннями критеріїв за важливістю, а саме:

1. $Q_1 \succ Q_2 \succ Q_3 \succ Q_4$.
2. $Q_2 \succ Q_1 \succ Q_3 \succ Q_4$.
3. $Q_4 \succ Q_1 \succ Q_2 \succ Q_3$.

У методі послідовних поступок упорядкування критеріїв за важливістю наступне: $Q_1 \succ Q_2 \succ Q_3 \succ Q_4$. Децидент на першому кроці призначив поступку 2, на другому – 3, на третьому – 4. Потрібно визначити, яку альтернативу вибрав децидент.

Таблиця 4.6. Характеристики альтернатив для методів послідовних поступок і лексикографічної оптимізації

Критерій	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
Q_1	6	8	7	8	8	3	2
Q_2	10	5	8	5	4	10	10
Q_3	8	6	12	3	4	12	4
Q_4	10	7	8	4	9	8	11

Спочатку визначимо оптимальні альтернативи, користуючись методом лексикографічної оптимізації.

У першому випадку на першому кроці децидент обере альтернативи A_2, A_4, A_5, тому що вони мають найліпше значення першого критерію. На другому кроці вибір буде обмежений альтернативами, обраними на першому кроці, тобто за другим критерієм порівняємо альтернативи A_2, A_4, A_5 і обираємо альтернативи A_2, A_4, для яких значення другого критерію становить 5 (альтернатива A_5 має значення 4). Урешті-решт, порівнявши за третім критерієм альтернативи A_2 та A_4, обираємо альтернативу A_2 як оптимальну.

Для другого випадку на першому кроці виберемо альтернативи A_1, A_6, A_7, для яких значення другого критерію найбільше й дорівнює 10. На наступному кроці порівняємо ці альтернативи за першим критерієм і оберемо як оптимальну альтернативу A_1.

І нарешті, в останньому випадку, порівнявши альтернативи за четвертим критерієм, відразу ж оберемо як оптимальну альтернативу A_7, що має найбільше значення четвертого критерію – 11.

Визначимо оптимальну альтернативу методом послідовних поступок, виходячи з наявної інформації про значення поступок і впорядкування критеріїв за важливістю. За першим критерієм децидент обере альтернативи A_2, A_4, A_5. Оскільки для цього критерію він зробив поступку 2, то до альтернатив, що розглядаються на наступному кроці, буде додано A_1 і A_3.

На другому кроці з множини альтернатив $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ потрібно обрати кращі за другим критерієм. Такою є альтернатива A_1, що має найбільше значення другого критерію – 10. Зробивши поступку 3 для цього критерію, до альтернативи A_1, додамо A_3 (альтернативи A_6 і A_7 із таким самим значенням другого критерію, як і альтернатива A_1, – 10, ми вже не розглядатимемо, тому що для них порушено обмеження на перший критерій). На третьому кроці оберемо альтернативу A_3, та зробивши поступку 4 за третім критерієм, знову повернемо альтернативу A_1, для якої значення третього критерію 8 = 12 – 4. Урешті-решт, на останньому кроці, порівнявши альтернативи A_1 та A_3 за четвертим критерієм, оберемо як оптимальну альтернативу A_1.

Метод послідовних поступок є достатньо гнучким. Крім того, децидент може застосовувати його кілька разів, щоб вивчити ті фрагменти області оптимальних за Парето рішень, які найбільше його цікавлять. На кожному кроці методу потрібна інформація про значення поступки за тим чи іншим критерієм, яку надає децидент. Отже, це фактично метод діалогового типу, тому у процесі його застосування необхідно забезпечити інтерактивну взаємодію програмного забезпечення та децидента.

Діалогові методи

Діалогові методи належать до групи найгнучкіших методів пошуку розв'язків багатокритерійних задач. Характерна їх риса – участь децидента в процесі розв'язування, що дає змогу скорегувати перебіг процесу розв'язування та врахувати деякі неформальні аспекти.

Розглянемо ілюстративний приклад використання додаткової інформації від децидента для знаходження оптимального розв'язку двокритерійної задачі.

Приклад 4.9. Потрібно знайти оптимальний розв'язок наступної двокритерійної задачі:

$$Q_1(x_1, x_2) \Rightarrow \max, Q_2(x_1, x_2) \Rightarrow \max, x = (x_1, x_2), x \in X.$$

Спочатку визначимо межі зміни значень критеріїв у критерійному просторі. Для цього розв'яжемо дві однокритерійні задачі оптимізації за кожним із критеріїв окремо та, підставивши відповідні оптимальні значення змінних, визначимо іншу координату в просторі критеріїв. Спочатку розглянемо першу задачу

$$Q_1(x_1, x_2) \Rightarrow \max, x = (x_1, x_2), x \in X.$$

Отримаємо результат

$$x^{(1)} = \arg\max_{x \in X} Q_1(x),$$

тобто координати оптимальної точки $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$і оптимальне значення критерію$Q_1^{(1)} = Q_1(x^{(1)})$. Підставимо координати $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$у вираз для другого критерію і одержимо значення $Q_2^{(1)} = Q_2(x^{(1)})$.

Потім розв'яжемо задачу оптимізації за другим критерієм:

$$Q_2(x_1, x_2) \Rightarrow \max, x = (x_1, x_2), x \in X.$$

Отримаємо результат

$$x^{(2)} = \arg\max_{x \in X} Q_2(x),$$

координати оптимальної точки $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$ та оптимальне значення критерію $Q_2^{(2)} = Q_2(x^{(2)})$, а також значення $Q_1^{(2)} = Q_1(x^{(2)})$.

Отже, одержано дві граничні точки множини Парето-оптимальних розв'язків у просторі критеріїв $-Q^{(1)} = \left(Q_1(x^{(1)}), Q_2(x^{(1)})\right)$ та $Q^{(2)} = \left(Q_1(x^{(2)}), Q_2(x^{(2)})\right)$ (рис. 4.14, *а*).

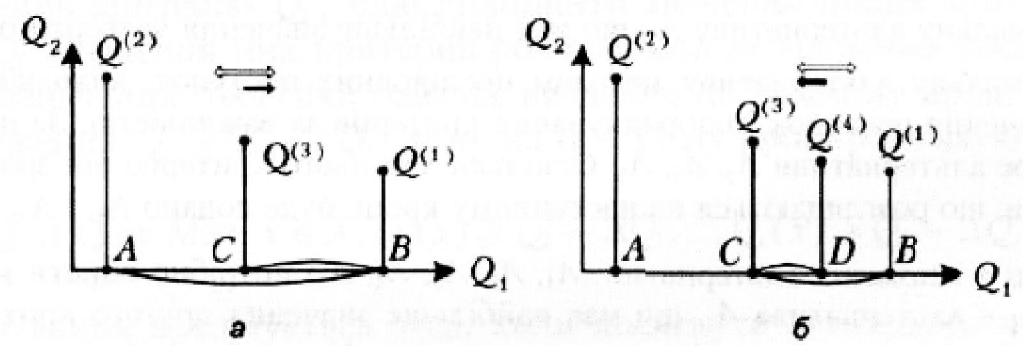


Рис. 4.14. Приклад діалогового розв'язання двокритерійної задачі

Візьмемо середину відрізка $\left(Q_1(x^{(1)}), Q_1(x^{(2)})\right)$ – точку

$$Q_1^{(3)} = \frac{Q_1(x^{(1)}) - Q_1(x^{(2)})}{2}$$

і розв'яжемо задачу $Q_2(x_1, x_2) \Rightarrow \max, x = (x_1, x_2), x \in X, Q_1(x_1, x_2) \geq Q_1^{(3)}$. Підставивши координати оптимальної точки в просторі змінних у вирази для критеріїв, отримаємо координати середньої точки $Q^{(3)} = \left(Q_1(x^{(3)}), Q_2(x^{(3)})\right)$.

Ці дії виконуються без втручання децидента. Йому надають графічне зображення (рис. 4.14) або числову інформацію з координатами трьох точок в області критеріїв, що відповідають початковому інтервалу зміни значення критерію Q_1 (точок *A* та *B*), середині цього інтервалу – точку *C*, і ставлять запитання: у якому напрямку від середньої точки потрібно рухатися вздовж осі критерію Q_1? Децидент у прикладі вирішив поліпшити значення першого критерію, погіршивши значення другого. Тому інтервал пошуку зменшено вдвічі: тепер він простягається від точки *C* до точки *B*. На наступній ітерації (рис. 4.14, б) процедура повторюється. Тепер напрямок руху визначають відносно точки *D*. Децидент вирішив дещо поступитися значенням першого критерію, щоб поліпшити значення другого. Інтервал пошуку зменшено; він простягається від точки *C* до точки *D*.

Отже, інтервал пошуку звужується залежно від відповіді децидента. Шукають координати середньої точки та повторюють процедуру опитування. Її припиняють тоді, коли децидент зупинить свій вибір на одній із трьох точок або довжина інтервалу пошуку дорівнюватиме заданій точності. У цьому прикладі на кожному кроці звужується область оптимальних за Парето розв'язків, і потрібна мінімальна інформація від децидента У більшості методів багатокритерійної оптимізації використано цю ідею покрокового звуження області Парето.

Доволі поширеним є алгоритм, запропонований **А.Джофріоном** і модифікований багатьма дослідниками, що ґрунтується на принципі корисності. У ньому використано ідеї добре відомого з нелінійного програмування градієнтного методу. Цей алгоритм базується на припущенні Джофріона про те, що хоча функція корисності, яка є ввігнутою, невідома, децидент може для довільного допустимого значення векторного критерію вказати граничні значення коефіцієнтів заміщення. Ці значення отримуються безпосередньо від децидента шляхом опитування – яким значенням зміни одного з критеріїв можна компенсувати зміну іншого критерію (зазвичай один з критеріїв обирається як базовий, і для інших значення отримують шляхом порівняння з базовим, враховуючи, звичайно ж, координати поточної точки).

Граничні коефіцієнти заміщення й визначають градієнт функції корисності в конкретній точці $Q^{(i)}$ простору критеріїв із точністю до додатних коефіцієнтів, тобто напрямок «найкрутішого підйому» функції корисності. Оскільки на межі, заданій множиною оптимальних за Парето розв'язків, це може дати значення критеріїв, яким не відповідають допустимі альтернативи, то за допомогою методів нелінійного програмування визначається напрямок e, для якого похідна функції корисності максимальна за умови, що це не призводить до недопустимих розв'язків.

На кожному кроці визначають новий допустимий вектор

$$Q^{(i+1)} = Q^{(i)} + \theta \cdot e \ (\theta > 0),$$

де θ – довжина кроку, зазначена децидентом.

У результаті такого ітеративного процесу отримують послідовність точок, у якій значення корисності зростають і яка за умови виконання сформульованих припущень збігається до оптимуму (рис. 4.15).

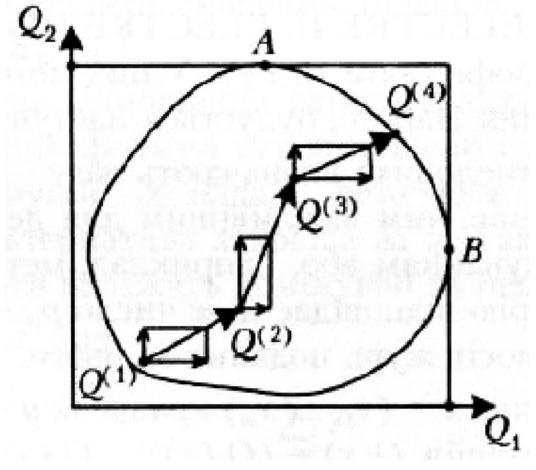


Рис. 4.15. Приклад переміщення в просторі критеріїв за методом Джофріона

Звичайно, визначення напрямку руху за допомогою оцінювання граничних значень коефіцієнтів заміщення, а також довжини кроку в цьому напрямку висуває високі вимоги до здатностей децидента, тому що граничні коефіцієнти заміщення можуть бути взаємно залежними, що ще більше ускладнює процедуру одержання потрібної інформації від децидента.

Методи з використанням бінарних відношень

Окрім безпосереднього відображення системи переваг децидента у вигляді множини критеріїв якості існують й інші можливості. Зокрема, апарат бінарних відношень дає змогу описувати загальні ситуації та використовувати для вибору рішень експертну інформацію про попарні порівняння варіантів рішень. Довільній ситуації прийняття рішення, поданій у вигляді багатокритерійної задачі, можна поставити у відповідність бінарне відношення на множині допустимих альтернатив.

Зв'язок між довільною парою альтернатив визначається послідовністю бінарних відношень. «Сильним» бінарним відношенням відповідають більші вимоги до переваги однієї альтернативи над іншою та, відповідно, більше непорівняльних варіантів. Найсильніша вимога – повне домінування. Їй відповідає множина альтернатив, оптимальних за Слейтером. «Слабші» бінарні відношення визначають умови, за яких, попри суперечливі оцінки, одна з альтернатив є кращою, ніж інша.

У цих методах, які ще називають *методами порогів* непорівняльності, попарно порівнюють елементи множини допустимих альтернатив, виходячи з обраного бінарного відношення. Ті з них, що виявляються кращими, утворюють ядро, розмір якого залежить від кількості альтернатив. Якщо бінарне відношення є відношенням домінування на множині критеріїв «≥», то ядро утворює множина альтернатив, оптимальних за Парето, якщо ж «>» – оптимальних за Слейтером.

Альтернативи, що належать до ядра, вважають тимчасово непорівняльними. Після першого бінарного відношення визначають наступне – «слабше» – і кількість непорівняльних елементів зменшується. Цей процес триває доти, доки кількість елементів ядра не досягне заданого числа. Після цього ці елементи разом з останнім бінарним відношенням надають децидентові, який і приймає остаточне рішення. Окрім цього, у разі потреби децидент може отримати інформацію про попередні кроки. Елементи останнього ядра в певному розумінні найкращі; з іншого боку, вони найнесхожіші між собою.

Методи ELECTRE

Групу методів (**ELECTRE I**, **ELECTRE II**, **ELECTRE III**) розробив колектив французьких учених, очолюваний професором Б.Руа. У цих методах бінарне відношення переваги, сильніше за відношення Парето, будується наступним чином.

Для кожного з n критеріїв (числових) визначають вагу – число, що характеризує його важливість; воно тим більше, чим важливішим для децидента є критерій. Ці ваги можуть бути визначені ранжуванням або, наприклад, методом Т.Сааті. У найпростішому випадку i-му з n критерію відповідає ціле число p_i, яке Б.Руа запропонував інтерпретувати як кількість голосів журі, поданих за нього.

Щоб з'ясувати, чи альтернатива $x = (x_1,..., x_m)$ краща за $y = (y_1,..., y_m)$, над відповідними образами в просторі критеріїв $Q(x) = (Q_1(x), \ldots, Q_n(x))$ і $Q(y) = (Q_1(y), \ldots, Q_n(y))$, виконують наступні дії.

Множину критеріїв Q розбивають на три підмножини:

- $Q^+(x, y)$ – критерії, за якими альтернатива x перевершує y,
- $Q^=(x, y)$– критерії, за якими альтернативи x та y отримали однакові значення;
- $Q^-(x, y)$– критерії, за якими альтернатива y перевершує x.

Визначають також відповідні множини індексів $I^+(x, y)$, $I^=(x, y)$, $I^-(x, y)$ і відносну важливість $P_{xy}^+, P_{xy}^=, P_{xy}^-$ кожної з них.

Встановлюють певне порогове значення і вважають, що варіант x перевершує варіант y лише тоді, коли для певної функції, яка називається *індексом згоди*, виконано умову

$$f\left(P_{xy}^+, P_{xy}^=, P_{xy}^-\right) \geq C. \tag{4.6}$$

Вигляд функції f залежить від модифікації методу ELECTRE. Нерівність (4.6) є необхідною, проте не достатньою умовою переваги альтернативи x над y.

У методах ELECTRE формулюються додаткові умови, що дають змогу враховувати не лише порядок оцінювання альтернатив x та y за критеріями, але й значення модулів різниць $|Q_i(x) - Q_i(y)|$. Ці умови, які називають *індексом незгоди*, можуть бути записати у вигляді

$$d_{xy} \leq d_1,$$

де d_1 – порогове значення *індексу незгоди* d_{xy}, яке залежить від модифікації методу ELECTRE. За допомогою індексів згоди та незгоди визначається відношення переваги:

$$xRy \Leftrightarrow \left(f\left(P_{xy}^+, P_{xy}^=, P_{xy}^-\right) \geq C\right) \wedge \left(d_{xy} \leq d\right).$$

У методі **ELECTRE I** індекс згоди є відношенням суми ваг критеріїв підмножин $Q^+(x, y)$ та $Q^=(x, y)$ до загальної суми ваг:

$$c_{xy} = \frac{\sum_{i \in I^+ \vee I^=} p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i},$$

де p_i – вага i-го критерію.

Індекс незгоди обчислюють на множині критеріїв $Q^-(x, y)$: $d_{xy}^{(i)} = |Q_i(x) - Q_i(y)|$. Для зручності подальших операцій значення індексів незгоди нормують (тобто виражають у частках найбільших значень критеріїв) і впорядковують за значеннями. Отже, обчислені значення індексів згоди та незгоди є нормованими, тобто $0 \leq c_{xy} \leq 1, 0 \leq d_{xy}^{(i)} \leq 1$.

У методі **ELECTRE I** бінарне відношення переваги задано рівнями індексів згоди та незгоди c_1 і d_1 (для спрощення формул тут випущено індекси ітерації при значеннях c_1 і d_1). Якщо $\left(c_{xy} \geq c_1\right) \wedge \left(d_{xy} \leq d_1\right)$, то альтернатива x краща за y. Таким чином рівні c_1 і d_1 дають змогу виділити ядро, до якого належать домінуючі та непорівняльні альтернативи. Коли значення індексів c_{xy} і t_{xy}, де

$$c_{xy} = \frac{\sum_{i \in I^+} p_i}{\sum_{i \in I^-} p_i},$$

достатньо великі, а найбільший з індексів

$$d_{xy}^* = \max_{i \in I} d_{xy}^{(i)}$$

достатньо малий, у методі **ELECTRE II** приймають гіпотезу про перевагу альтернативи x над y.

У цьому методі використовують два рівні відношення переваги – сильну та слабку перевагу. Крім того, на відміну від **ELECTRE I** задають декілька рівнів індексів згоди та незгоди, а саме $1 > c_1 > c_2 > c_3 > 0$, $1 > d_2 > d_1 > 0$.

Відношення сильної переваги визначається умовою

$$\left((t_{xy} \geq 1) \wedge (c_{xy} \geq c_1) \wedge (d_{xy} \leq d_2)\right) \wedge \left((t_{xy} \geq 1) \wedge (c_{xy} \geq c_2) \wedge (d_{xy} \leq d_1)\right),$$

а відношення слабкої переваги – умовою

$$(t_{xy} \geq 1) \wedge (c_{xy} \geq c_3) \wedge (d_{xy} \leq d_1).$$

На відміну від попередніх варіантів у методі **ELECTRE III** використано нечіткі відношення переваги. Отже, у методах цієї групи бінарне відношення визначає підмножину недомінованих альтернатив на множині допустимих альтернатив. Як перше відношення зазвичай беруть «≥» на множині критеріїв. Це дає змогу виділити як перше ядро множину рішень, оптимальних за Парето. Наступні бінарні відношення будуть вкладені: $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \ldots \subset S_n$. Щоб забезпечити вкладеність послідовних відношень, слід гарантувати виконання певних умов, які пов'язують граничні рівні індексів згоди та незгоди для сусідніх бінарних відношень.

Наприклад, у методі **ELECTRE I** для цих рівнів індексів на двох сусідніх ітераціях k та $k + 1$ має виконуватись умова $\left(c_1^{(k+1)} \leq c_1^{(k)}\right) \wedge \left(d_1^{(k+1)} \geq d_1^{(k)}\right)$. Однак, на відміну від методу **ELECTRE II**, у разі застосування методу **ELECTRE I** на множині альтернатив можуть виникнути нетранзитивні відношення.

Можна звужувати ядро альтернатив й інакше, не використовуючи вагу критеріїв. На ідеї звуження ядра ґрунтується також **метод В.Подіновського**. Як і в методах **ELECTRE**, для цього використовують додаткову інформацію про важливість критеріїв. Проте основна й істотна відмінність методу В.Подіновського полягає в тому, що якісна інформація про критерії, що отримується від децидента, не перетворюється на кількісну. Авторові методу не знадобилося вводити вагові коефіцієнти важливості критеріїв, які вносять велику невизначеність у розв'язування задачі.

Інформацію про важливість критеріїв задають сукупністю таких повідомлень децидента:

- критерій Q_i, важливіший, ніж Q_j;
- критерії Q_i та Q_j, рівноцінні;
- набір критеріїв $(Q_{i_1}, \ldots, Q_{i_l})$ важливіший, ніж набір $(Q_{j_1}, \ldots, Q_{j_m})$;

❖ набори критеріїв ($(Q_{i_1}, \ldots, Q_{i_l})$ і $(Q_{j_1}, \ldots, Q_{j_m})$ однаково важливі.

Побудоване на підставі цієї інформації бінарне відношення переваги дає змогу істотно звузити множину Парето. Якщо в методах ELECTRE переваги слід оцінювати в шкалі порядку, що не завжди можливо, то в методі В.Подіновського набори критеріїв порівнює експерт-децидент, і це аж ніяк не легше.

Окрім того, метод В.Подіновського застосовний лише до однорідних критеріїв, значення яких належать до однієї й тієї самої множини. Прикладом однорідних критеріїв може служити, наприклад, множина тверджень компетентних експертів, які оцінюють варіанти за єдиною шкалою. Складнощі виникають тоді, коли критерії неоднорідні (на практиці так буває доволі часто). Оцінювання порівняльної важливості неоднорідних критеріїв по суті зводиться до визначення коефіцієнтів важливості, і в цьому випадку краще застосовувати методи ELECTRE.

Принципи вибору та бінарні відношення

Для розв'язання багатокритерійних задач сформульовано низку принципів вибору, що утворюють певну структуру *S* механізму вибору, яку найчастіше можна подати як певне бінарне відношення *P*.

У моделі багатокритерійного оцінювання властивості кожної альтернативи відображаються в просторі критеріїв, і вибір виконують, порівнюючи образи альтернатив у цьому просторі. Структуру механізму вибору, породжену застосуванням того чи іншого принципу вибору, описують за допомогою певних класів бінарних відношень – координатних, модульних, координатно-модульних.

Таблиця 4.7. Бінарні відношення, використовувані в принципах вибору

Принцип вибору	Бінарне відношення
Парето	$aTb \Leftrightarrow \big((\forall i \in I): Q_i(a) \geq Q_i(b)\big) \wedge$ $\wedge \Big((\exists j \in I): Q_j(a) > Q_j(b)\Big)$
Слейтера	$aTb \Leftrightarrow \big((\forall i \in I): Q_i(a) > Q_i(b)\big)$
Джофріона	$aTb \Leftrightarrow \big((\forall i \in I): Q_i(a) \geq Q_i(b)\big) \wedge$ $\wedge \Big((\exists j \in I): Q_j(a) > Q_j(b)\Big)$
За еталоном	$aTb \Leftrightarrow d(Q(a) - Q^E) \leq d(Q(b) - Q^E)$
Згортка критеріїв	$aTb \Leftrightarrow f\big(Q(a)\big) \geq f\big(Q(b)\big)$
Лексикографічний	$aTb \Leftrightarrow (\forall(i = 1, \ldots, j): \big(Q_i(a) = Q_i(b)\big) \wedge$ $\wedge \Big(Q_{j+1}(a) > Q_{j+1}(b)\Big))$
Послідовних поступок	$\big(aTb \in A^{(i)}\big): aT^{(i)}b \Leftrightarrow (Q_i^* - Q_i(a) \leq \Delta_i) \wedge$ $\wedge (Q_i^* - Q_i(b) \leq \Delta_i) \wedge \big(Q_{i+1}(a) \geq Q_{i+1}(b)\big),$ $A^{(i+1)} = A^{(i)} \backslash \{x_i \in A^{(i)} \big\vert (\forall y_i \in A): \big(x_j \overline{T} y_i\big) \wedge \big(y_i \overline{T} x_j\big)\},$

	$Q_i^* = \max\limits_{x_j \in A^{(i)}} Q_i(x_j)$

Означення 4.1. Бінарне відношення, що залежить лише від знаків різниць складовихзначень векторів критеріїв $Q(a) = (Q_1(a), \ldots, Q_n(a))$ та $Q(b) = (Q_1(b), \ldots, Q_n(b))$ для пари альтернатив a та b, називається **координатним**, тобто

$$(\forall a, b \in A): aPb \Leftrightarrow F\left(\operatorname{sign}\big(Q(a) - Q(b)\big)\right) = 1,$$

де A– носій відношення P,$\operatorname{sign}\big(Q(a) - Q(b)\big)$– вектор знаків різниць відповідних компонент векторів критеріїв,

$$\operatorname{sign}\big(Q(a) - Q(b)\big) = \begin{cases} 1, \text{якщо } Q(a) > Q(b); \\ 0, \text{якщо } Q(a) = Q(b); \\ -1, \text{якщо } Q(a) < Q(b), \end{cases}$$

F– логічна функція, що має значення 1, коли aPb, та 0, коли $a\overline{P}b$.

Означення 4.2. Бінарне відношення, що залежить лише від значень модулів різниць векторів $Q(a)$ та $Q(b)$ альтернатив a та b, називається **модульним**, тобто

$$(\forall a, b \in A): aPb \Leftrightarrow \Phi(|Q(a) - Q(b)|) = 1,$$

де $|Q(a) - Q(b)|$– вектормодулів різниць відповідних компонент критеріїв, Φ – логічна функція, що має значення 1, коли aPb, та 0, коли $a\overline{P}b$.

Означення 4.3. Бінарне відношення, що залежить від знаків і модулів різниць однойменних складових вектора критеріїв, називається **координатно-модульним**, тобто

$$(\forall a, b \in A): aPb \Leftrightarrow \Psi\big(\operatorname{sign}\big(Q(a) - Q(b)\big), |Q(a) - Q(b)|\big) = 1.$$

Бінарні відношення, що використовуються в деяких принципах вибору, і ~~є~~ складовими структур механізмів вибору, наведено в табл. 4.7. Це складові структур механізмів вибору. Згідно з принципом Парето, альтернатива a краща, ніж альтернатива b, якщо значення всіх критеріїв для неї не менші, ніж значення критеріїв для b та хоча б за одним критерієм альтернатива a краща, ніж b.

Приклад 4.10. Потрібно побудувати й застосувати механізм вибору $R = \langle T \backslash E, A_+(T \backslash E) \rangle$, до бінарного відношення T, породженого за принципом Парето, для обрання кращих альтернатив із множини $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Для кожної альтернативи задано образи в просторі трьох критеріїв: $Q(x_1) = (1, 4, 8)^T$, $Q(x_2) = (3, 4, 7)^T$, $Q(x_3) = (2, 5, 9)^T$, $Q(x_4) = (3, 2, 6)^T$.

За допомогою безпосереднього порівняння побудуємо бінарне відношення $T(x_2Tx_4, x_3Tx_1)$:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P = T \backslash E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \overline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Мажоранти цього відношення –$A_+(T\backslash E) = \{x_2, x_3\}$, (в останній матриці другий і третій стовпці складаються з 1) тобто результат вибору являє собою множину з двох оптимальних за Парето альтернатив $\{x_2, x_3\}$.

Приклад 4.11. Потрібно побудувати та застосувати механізм вибору $R = \langle T, A_+(T)\rangle$ до бінарного відношення T, породженого за принципом Слейтера, для вибору кращих альтернатив із множини $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$. Для кожної з них задано образи в просторі двох критеріїв: $Q^{(1)} = (8, 2)$, $Q^{(2)}= (6, 2)$, $Q^{(3)} = (7, 1)$, $Q^{(4)} = (5, 5)$, $Q^{(5)} = (1, 8)$, $Q^{(6)} = (1, 7)$, $Q^{(7)}= (4, 3)$. Треба визначити множину альтернатив, оптимальних за Парето й за Слейтером.

За допомогою безпосереднього порівняння побудуємо бінарне відношення T.

$$P = T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \overline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отже, множина оптимальних за Слейтером альтернатив –$\{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6\}$.

Приклад 4.12. Задано образи множини альтернатив $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ у просторі критеріїв: $Q(x_1) = (5, 6)^{\mathrm{T}}$, $Q(x_2) = (6, 9)^{\mathrm{T}}$, $Q(x_3) = (5, 4)^{\mathrm{T}}$, $Q(x_4) = (4, 3)^{\mathrm{T}}$, $Q(x_5) = (6, 9)^{\mathrm{T}}$.

Потрібно зробити вибір згідно з механізмом $R = \langle T, A^+(T)\rangle$, де T– бінарне відношення, побудоване за принципом Джофріона. Його матриця має вигляд

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Максимуми цього відношення –$A^+(T) = \{x_2, x_5\}$, тобто дві найкращі альтернативи $\{x_2, x_5\}$.

Принцип вибору за еталоном реалізують шляхом визначення еталона – певної точки в просторі критеріїв, досягнення якої найбажаніше для децидента, а також метрики для вимірювання віддалі від альтернатив до еталона. Принцип еталона являє собою узагальнення принципу ідеального розв'язку, тому що еталоном може бути довільна точка в просторі критеріїв. Обирають альтернативи, найближчі до еталона, тобто максимуми відповідного відношення.

Приклад 4.13. Задано образи множини альтернатив $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ в просторі критеріїв: $Q(x_1) = (2, 2)^{\mathrm{T}}$, $Q(x_2) = (4, 1)^{\mathrm{T}}$, $Q(x_3) = (6, 2)^{\mathrm{T}}$, $Q(x_4) = (0, 5)^{\mathrm{T}}$, – а також еталон $Q^{\mathrm{E}} = (4, 6)^{\mathrm{T}}$ та метрику$d(Q(x) - Q^E) = \sum\left|Q_i(x) - Q_i^E\right|$. Потрібно знайти найкращі альтернативи для механізму вибору $R =$

$\langle T, A^{+}(T)\rangle$, де T– бінарне відношення, породжене принципом вибору за еталоном.

Побудуємо відношення T, обчисливши віддалі від кожної альтернативи до еталона:

$$d(Q(x_1) - Q^E) = |2-4| + |2-6| = 6,$$
$$d(Q(x_2) - Q^E) = |4-4| + |1-6| = 5,$$
$$d(Q(x_3) - Q^E) = |6-4| + |2-6| = 6,$$
$$d(Q(x_4) - Q^E) = |0-4| + |5-6| = 5,$$
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, A^{+}(T) = \{x_2, x_4\}.$$

Отже, обрано множину альтернатив $\{x_2, x_4\}$, найближчих до еталона.

Механізм **вибору за згорткою критеріїв** можна подати у вигляді $R = \langle T, A^{+}(T)\rangle$, де T– бінарне рефлексивне відношення, породжене згорткою.

Для реалізації **лексикографічного принципу вибору** потрібні інші припущення, ніж для згортки. Необхідністю є впорядкування критеріїв за важливістю з послідовним порівнянням відповідних компонент. Якщо альтернатива *a* краща, ніж *b*, за найважливішим критерієм, то вона взагалі краща, ніж *b*.

Приклад 4.14. Потрібно вибрати найкращу альтернативу з таких: $Q(x_1) = (2, 6, 10, 5, 14)^{\mathrm{T}}$, $Q(x_2) = (10, 5, 8, 12, 6)^{\mathrm{T}}$, $Q(x_3) = (10, 5, 8, 6, 10)^{\mathrm{T}}$, $Q(x_4) = (2, 8, 3, 4, 12)^{\mathrm{T}}$. Застосуємо механізм вибору $\langle T, A_{+}(T)\rangle$, де T– бінарне антирефлексивне відношення, побудоване за лексикографічним принципом, і критерії впорядковано так: $Q_1 \succ Q_2 \succ Q_3 \succ Q_4 \succ Q_5$.

Побудуємо бінарне відношення T, виходячи із заданого впорядкування критеріїв:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \overline{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, A_{+}(T) = \{x_2\}.$$

Застосувавши принцип лексикографічного впорядкування, оберемо альтернативу x_2.

У методі **переведення критеріїв в обмеження** реалізовано принцип вибору за головним критерієм. Суть цього принципу полягає у виборі головного критерію, для порівняння альтернатив і фіксуванні вектора Q^M допустимих рівнів інших критеріїв. Звичайно, у разі довільного завдання складових вектора Q^M завжди існує небезпека порожнього вибору внаслідок завищених вимог до значень критеріїв, які окремо реалізовані, а в сукупності – ні.

Приклад 4.15. Потрібно вибрати найкращі альтернативи з множини $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ за принципом головного критерію та побудувати відповідний механізм вибору на основі породженого ним бінарного відношення T, якщо задано образи альтернатив у просторі критеріїв $Q(x_1) =$

(10, 8, 12)^T, $Q(x_2)$ = (10, 4, 8)^T, $Q(x_3)$ = (10, 9, 7)^T, $Q(x_4)$ = (8, 10, 12)^T, $Q(x_5)$ = (6, 3, 15)^T та допустимі значення$Q_2^M = 6, Q_3^M = 7$, і головний критерій –Q_1.

Альтернативам, для яких значення складових критеріїв Q_2 та Q_3 менші за допустимі значенняQ_2^M і Q_3^M, відповідають стовбець і рядок із нулів, а в графовому поданні – ізольовані вершини, які не слід обирати. Потрібний результат отримаємо, обравши максимуми на відповідній підмножині A, якій не належать ізольовані вершини. Отже, механізм вибору має вигляд$\langle T, C^+(T_C)\rangle$, де$C = A\backslash B, B = \{x_j \in A \big| (\forall y_i \in A): x_j T y_i \vee y_i T x_j\}$, T_C– звуження відношення T на множину C, C^+ – множина максимумів звуженого відношення T_C. Згідно з формулюванням принципу головного критерію, матриця бінарного відношення T має вигляд

$$T = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, B = \{x_2, x_5\}, C = A\backslash B = \{x_1, x_3, x_4\}.$$

$$T_C = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, C^+(T_C) = \{x_1, x_3\}.$$

Отже, обереմо альтернативи x_1 та x_3.

Принцип послідовних поступок не має вад, властивих принципам згортки критеріїв, лексикографічному, вибору за еталоном, головного критерію, здебільшого завдяки більшій гнучкості.

Приклад 4.16. Задано множину альтернатив $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ і множину образів альтернатив у просторі критеріїв $Q(x_1)$ = (10, 8, 12, 6, 13)^T, $Q(x_2)$ = (12, 6, 8, 4, 5^T, $Q(x_3)$ = (14, 4, 7, 3, 2)^T, $Q(x_4)$ = (10, 7, 4, 5, 18)^T, $Q(x_5)$ = (13, 5, 10, 3, 4)^T, $Q(x_6)$ = (16, 3, 5, 2, 1)^T. Потрібно вибрати найкращі альтернативи, вважаючи, що критерії впорядковано за важливістю в послідовності $Q_1 \succ Q_2 \succ Q_3 \succ Q_4 \succ Q_5 \succ Q_6$.

Механізм вибору полягатиме у звуженні множини альтернатив, що розглядаються на кожному кроці, з використанням поступки. На поточному i-му кроці треба виконати такі дії.

1. Знайти максимальне значення критерію Q_i на поточній множині-носієві A: $Q_i^* = \max Q_i(x_j), x_j \in A$.

2. Вирішити, чи доцільно задавати поступку Δ_i за i-им критерієм (тобто чи згоден децидент погіршити значення Q_i^* на Δ_i одиниць). Якщо немає сенсу зменшувати значення Q_i^*, тобто Δ_i = 0, то буде вибрано альтернативи, для яких на цьому кроці досягнуто значенняQ_i^*, і процес припиняється.

3. Побудувати відношення T, застосувавши принцип послідовних поступок за правилом

$(\forall a, b \in A): aTb$

$$\Leftrightarrow (\, Q_i^* - Q_i(a) \le \Delta_i) \wedge (\, Q_i^* - Q_i(b) \le \Delta_i) \wedge \big(Q_{i+1}(a) \ge Q_{i+1}(b)\big).$$

4. Звузити множину-носій A, виключивши з неї альтернативи, які не перебувають у відношенні T з жодними іншими (вони відповідають ізольованим вершинам у графовому поданні):

$$A = A \backslash \{x_i \in A \,|\, (\forall y_i \in A) : (x_j \overline{T} y_i) \wedge (y_i \overline{T} x_j)\}$$

Якщо card(A) = 1, то процес припиняється, і буде вибрано єдину альтернативу, що залишилася. Така ситуація виникає тоді, коли задана поступка така мала, що до альтернатив, які розглядаються, неможливо додати жодну іншу з поточної множини A, окрім тієї, якій відповідає значення Q_i^*. Якщо переглянуто всі складові критеріїв ($i = n$), то вибирають усі альтернативи, що належать поточній множині A. На першому кроці $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $Q_1^* = \max Q_1(x_j) = \max\{10,12,14,10,13,16\} = 16$, $x_j \in A$.

Проаналізувавши значення $Q_1^* = 16$, децидент дійде висновку, що допустиме максимальне падіння якості за критерієм Q_1 на 4 одиниці, тобто $\Delta_1 = 4$. Застосувавши правило кроку 3, отримаємо відповідне відношення та звузимо згідно з правилом 4 поточну множину-носій A:

$$T = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, A = A \backslash \{x_1, x_4\} = \{x_2, x_3, x_5, x_6\}.$$

Отже, на другому кроці можна вибирати з чотирьох альтернативи $\{x_2, x_3, x_5, x_6\}$. Визначимо $Q_2^* = \max Q_2(x_j) = \max\{6,4,5,3\} = 6$.

Задамо поступку $\Delta_2 = 1$. Відношення T для другого кроку та поточна множина такі:

$$T = \begin{array}{c} \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_3 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, A = A \backslash \{x_3, x_6\} = \{x_2, x_5\}.$$

На третьому кроці визначимо $Q_3^* = \max Q_3(x_j) = \max\{8,10\} = 10, x_j \in \{x_2, x_5\}$. Задамо поступку $\Delta_3 = 1$.

Побудуємо відношення T для третього кроку та звузимо множину A:

$$T = \begin{array}{c} \\ x_2 \\ x_5 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_2 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, A = A \backslash \{x_2\} = \{x_5\}.$$

Оскільки залишилась одна альтернатива (card(A) = 1), то припинимо процес, і вважатимемо результатом вибору альтернативу x_5.

Одні й ті самі механізми вибору можна формально подавати кількома способами. Скажімо, вибір за принципом Парето можна розглядати як агрегацію відношень, кожне з яких породжене відповідною складовою вектора критеріїв. Окрім того, завжди можна замість мажорант шукати максимуми двоїстого відношення, тому що справедливе співвідношення $A_+(P) = A_+(P^d)$.

У разі пошуку максимумів відношення зазвичай уважають рефлексивним, тобто наявне відношення Q доповнюють до рефлексивного $P = Q \cup E$, де E – діагональне відношення. Для визначення мажоранти відношення вважають антирефлексивним, тобто $P = Q \backslash E$. Якщо потрібно вибирати недоміновані альтернативи у квазіпорядку, то доцільно факторизувати його за симетричною складовою (отримане фактор-відношення буде відношенням порядку), звести до антирефлексивного вигляду та обрати мажоранти зведеного відношення. Отже, кожна мажоранта може включати в себе одну чи декілька еквівалентних за якістю альтернатив первісного відношення, з яких і треба робити остаточний вибір.

ЛЕКЦІЯ 5. МЕТОД АНАЛІТИЧНОЇ ІЄРАРХІЇ

Для розв'язання складних проблем застосовують систематичні процедури, зокрема метод аналітичної ієрархії (МАІ). Він ґрунтується на принципах декомпозиції та синтезу, реалізація яких дає змогу зменшити кількість можливих помилок у процесі отримання інформації від експерта. За допомогою МАІ отримуємо структуру у вигляді ієрархії, що дозволяє уникнути складних порівнянь, замінивши їх попарними. Крім того, цей метод дає змогу перевіряти послідовність (несуперечливість) тверджень експерта і цим пояснюється його поширення, дійсно системний характер і велика кількість практичних застосувань. Звичайно, як і всі системні методи прийняття рішень, МАІ не гарантує єдиного правильного шляху до істини, але за умови залучення кваліфікованих експертів і досвідченого системного аналітика він допомагає генерувати і виявляти рішення, що відповідатимуть призначенню складної системи. За допомого попарних порівнянь визначаються локальні пріоритети, а побудована ієрархічна структура дозволяє отримувати значення глобальних пріоритетів альтернатив і оцінювати несуперечливість розв'язків.

The Analytic Hierarchy Process (AHP) = Метод аналітичної ієрархії (МАІ)

Розроблений Томасом Сааті в 1980 р.

Популярний і широко застосовуваний метод для багатокритеріального прийняття рішень.

Дає змогу використовувати як кількісні, так і якісні критерії оцінки.

Широкий діапазон застосувань

Розглянемо приклади:

– Вибір автомобіля для купівлі

– Оцінка пропозицій про роботу

– Вибір магістерської програми після бакалаврату

Розробити ієрархії критеріїв прийняття рішень і визначити альтернативні варіанти дій.

Алгоритм МАІ базується на двох кроках:

1. Визначення відносних ваг критеріїв прийняття рішень

2. Визначення відносних рейтингів (пріоритетів) альтернатив

Якісні та кількісні дані можна порівняти, використовуючи обґрунтовані рішення для отримання ваг і пріоритетів.

Рівні ієрархії мають наступне призначення:

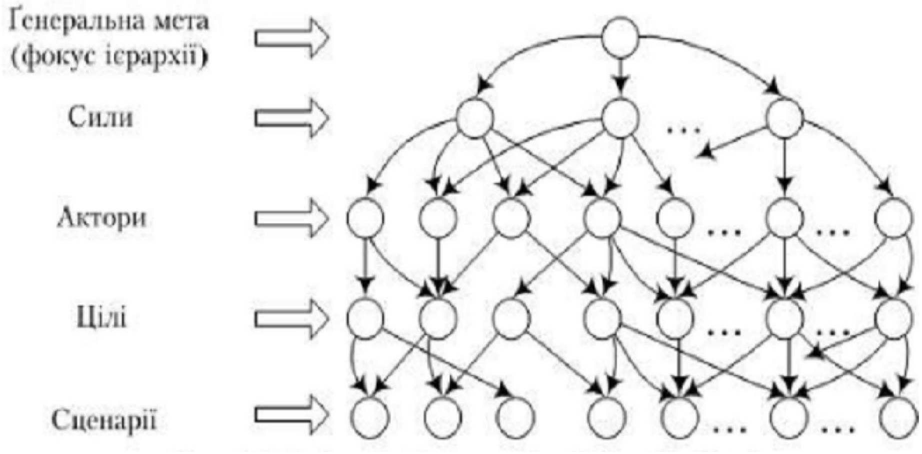
1. У результаті ідентифікації загального призначення розв'язання проблеми виявляють єдиний елемент, або фокус (проблему загалом) і розміщують його у вершині ієрархії.

2. На другому рівні відображають економічні, політичні та соціальні сили, що впливають на результат.

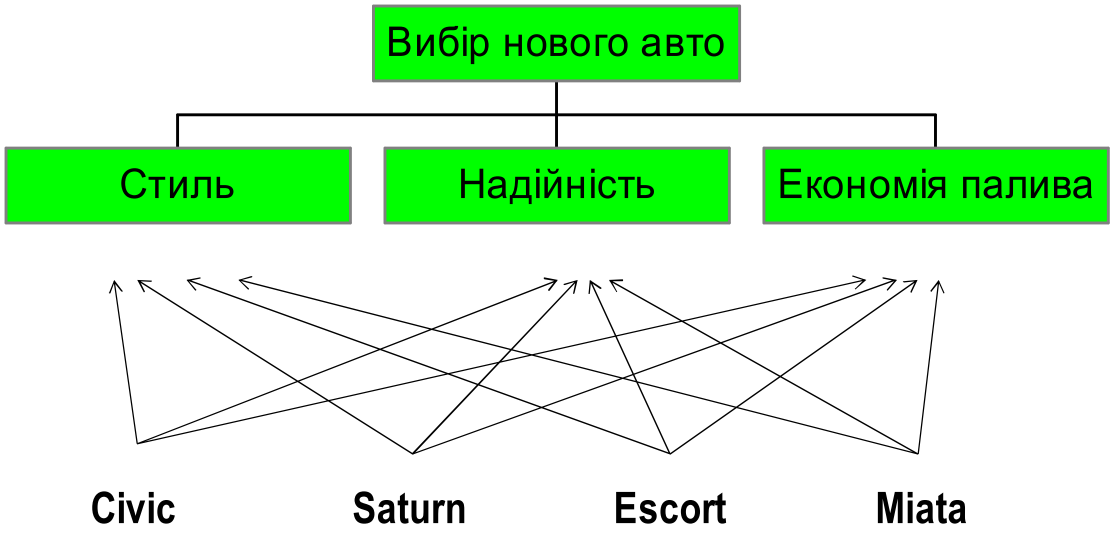
3. Третій рівень утворюють актори, що маніпулюють цими силами.

4. Рівень утворюють цілі кожного з акторів.

5. На п'ятому рівні описують можливі сценарії, або результати яких прагнуть досягнути кожен з акторів, застосовуючи свої політики. Тому між четвертим і п'ятим рівнем може бути проміжний рівень – політик.



Мета
– Вибір автомобіля
Критерії
– Стиль, Надійність, Економія палива **Витрати?**
Альтернативи
– Civic Coupe, Saturn Coupe, Ford Escort, Mazda Miata



Альтернативні варіанти дій

Парні порівняння робляться з оцінками в межах від 1 до 9.
Основне, але дуже розумне припущення для порівняння альтернатив:

*Якщо атрибут **A** абсолютно важливіший за атрибут **B** і оцінюється на 9, то **B** має бути абсолютно менш важливим, ніж **A** і оцінюється як 1/9.*

Ці попарні порівняння здійснюються для всіх розглядуваних факторів, зазвичай, не більше 7, тобто матриця має бути заповнена.

Шкала ранжування для критеріїв і альтернатив

Важливість	Визначення	Роз'яснення
1	Однакова важливість	Два фактори спричиняють однаковий вплив на мету
3	Трохи важливіший	Досвід і оцінювання показують невелику перевагу одного над іншим
5	Більше важливий	Досвід і оцінювання показують сильну перевагу одного над іншим
7	Набагато важливіший	Досвід і оцінювання показують значну перевагу одного над іншим. Його важливість демонструється на практиці
9	Абсолютно важливіший	Очевидна перевага одного над іншим
2,4,6,8	Середні значення	Коли потрібен компроміс

Ранжування критеріїв

	Стиль	Надійність	Економія палива
Стиль	1	1/2	3
Надійність	2	1	4
Економія палива	1/3	1/4	1

Розглядаємо [$Ax = \lambda_{max} x$], де

A – матриця порівняння розміром $n \times n$, для n критеріїв, також звана **матрицею пріоритетів**.

x – вектор власних значень розміром $n \times 1$, також званий **вектором пріоритетів**.

λ_{max} – **власне значення**, $\lambda_{max} \in \Re > n$.

Щоб знайти рейтинг пріоритетів, а саме власний вектор X:

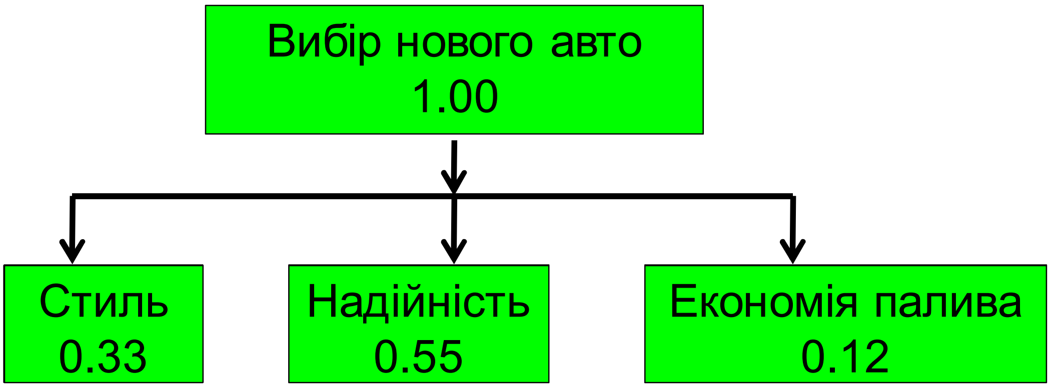
1) нормалізують елементи стовпця шляхом ділення кожного елемента на суму стовпця; 2) знаходять середні значення рядка.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0.5 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ 0.33 & 0.25 & 1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}0.30 & 0.29 & 0.38\\ 0.60 & 0.57 & 0.50\\ 0.10 & 0.14 & 0.12\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Середнє рядка}} X=\begin{bmatrix}0.33\\ 0.55\\ 0.12\end{bmatrix}$$

Сума стовпця: 3.33 1.75 8.00 1.00 1.00 1.00 Вектор пріоритетів

Критерії ваг

- Стиль 0.33
- Надійність 0.55
- Економія палива 0.12



Наступним етапом є розрахунок ***коефіцієнта узгодженості*** (**Consistency Ratio = CR**), щоб виміряти, наскільки несуперечливі судження були співвідносяться з великими зразками чисто випадкових суджень.

Оцінки МАІ базуються на припущенні, що децидент є раціональним, тобто, якщо ***A*** є кращим за ***B*** і ***B*** є кращим за ***C***, то й ***A*** є кращим за ***C***.

Якщо **CR >0.1**, то судження не заслуговують довіри, оскільки вони занадто випадкові, тобто дослідження не має цінності або його необхідно повторити.

Наступний етап – обчислення λ_{max}, що приводить до індексу узгодженості та коефіцієнта узгодженості.

Розглянемо [$Ax = \lambda_{max} x$], де x – власний вектор.

$$\begin{bmatrix}1 & 0.5 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ 0.333 & 0.25 & 1.0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0.33\\ 0.55\\ 0.12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.97\\ 1.67\\ 0.36\end{bmatrix} = \lambda_{max}\begin{bmatrix}0.33\\ 0.55\\ 0.12\end{bmatrix}$$

$$\lambda_{max} = \text{average}\,\{0.97/0.33,\ 1.67/0.55,\ 0.36/0.12\} = 2.99$$

Індекс узгодженості (***CI***) знаходять за формулою:

$$\boldsymbol{CI} = (\lambda_{max} - \boldsymbol{n})/(\boldsymbol{n} - \mathbf{1}) = (2.99-3)/(3-1) = -0.005$$

Завершальним кроком є обчислення коефіцієнта узгодженості (CR) за допомогою таблиці з книги Т.Сааті. Верхній рядок є порядком випадкової матриці, а нижній рядок є відповідним індексом узгодженості для випадкових суджень.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0.00	0.00	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51	1.48	1.56	1.57	1.59

Кожне число в цій таблиці є середнім індексу узгодженості, отриманим з вибірки, випадковим чином отриманих з вибірки довільно вибраних взаємних матриць МАІ.

Невідповідність 10% або менше означає, що налаштування малі порівняно з фактичними значеннями власного вектора елементів. Коли CR вище за 90%, це означає, що попарні судження винятково випадкові й абсолютно ненадійні! У цьому випадку порівняння варто повторити.

У наведеному прикладі: CR=CI/0.58=0.03/0.58=0.05

0.05<0.1, тобто оцінки несуперечливі!

Ранжування альтернатив

	Civic	Saturn	Escort	Miata
Civic	1	1/4	4	1/6
Saturn	4	1	4	1/4
Escort	1/4	1/4	1	1/5
Miata	6	4	5	1

Вектор пріоритетів

$$\begin{bmatrix} 0.13 \\ 0.24 \\ 0.07 \\ 0.56 \end{bmatrix}$$

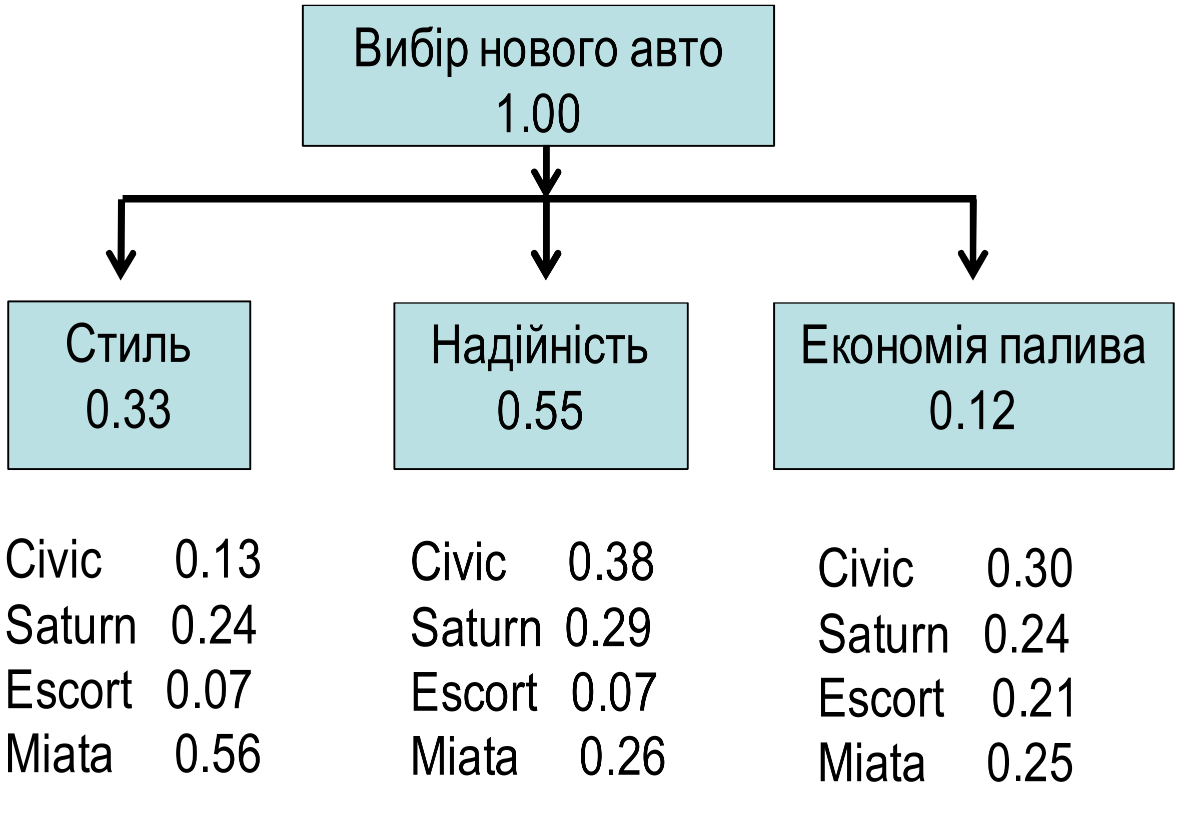
Надійність	Civic	Saturn	Escort	Miata
Civic	1	2	5	1
Saturn	1/2	1	3	2
Escort	1/5	1/3	1	1/4
Miata	1	1/2	4	1

$$\begin{bmatrix} 0.38 \\ 0.29 \\ 0.07 \\ 0.26 \end{bmatrix}$$

Економія палива

	Км./літр	Нормалізовані
Civic	34	0.30
Saturn	27	0.24
Escort	24	0.21
Miata	28	0.25
	113	1.0

Так як економія палива є кількісною мірою, співвідношення витрати палива може бути використане для визначення відносного ранжирування альтернатив, однак це не є обов'язковим. Парні порівняння можуть бути використані в деяких випадках.



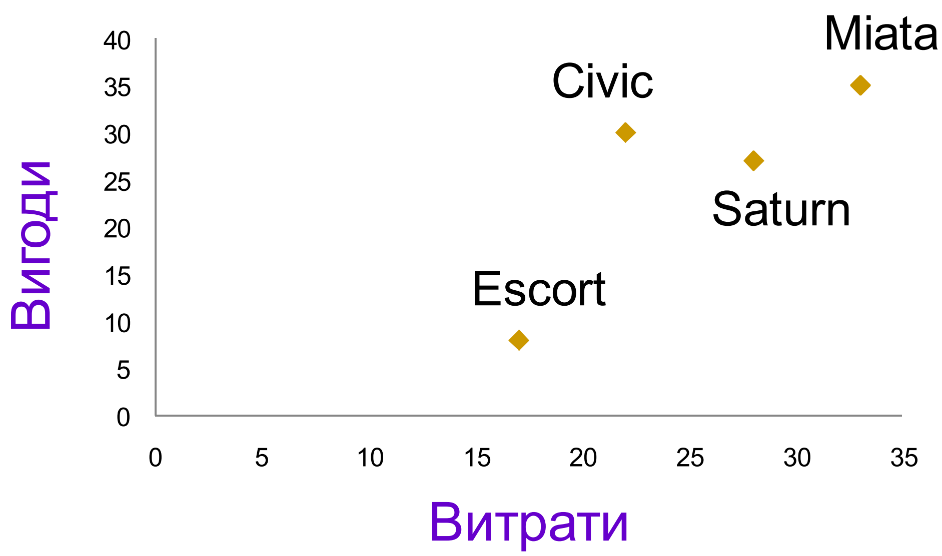
$$
\begin{array}{l}
\\
\text{Civic} \\
\text{Saturn} \\
\text{Escort} \\
\text{Miata}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \text{Стиль} & \text{Надійність} & \text{Економія палива} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0.13 & 0.38 & 0.30 \\
0.24 & 0.29 & 0.24 \\
0.07 & 0.07 & 0.21 \\
0.56 & 0.26 & 0.25
\end{bmatrix}
\end{array}
\times
\begin{bmatrix}
0.33 \\
0.55 \\
0.12
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0.29 \\
0.27 \\
0.09 \\
0.35
\end{bmatrix}
$$

Матриця пріоритетів **Ваги критеріїв**

Додавання «витрат» як нового критерію є дуже важким в МАІ. В матрицю оцінок буде додано новий рядок і стовпець. Проте всі оцінки мають бути повторені, додавання нового критерію може вплинути на відносну важливість інших критеріїв. Замість цього можна зробити нормалізацію витрат безпосередньо і обчислити співвідношення витрати/вигоди для порівняння альтернатив!

	Витрати	Нормалізовані витрати	Вигоди	Співвідношення витрати/вигоди
▪ CIVIC	$12K	0.22	0.29	0.76
▪ SATURN	$15K	0.28	0.27	1.04
▪ ESCORT	$9K	0.17	0.09	1.89
▪ MIATA	$18K	0.33	0.35	0.94

Скористаємося графічним представленням, щоб отримати компроміс.

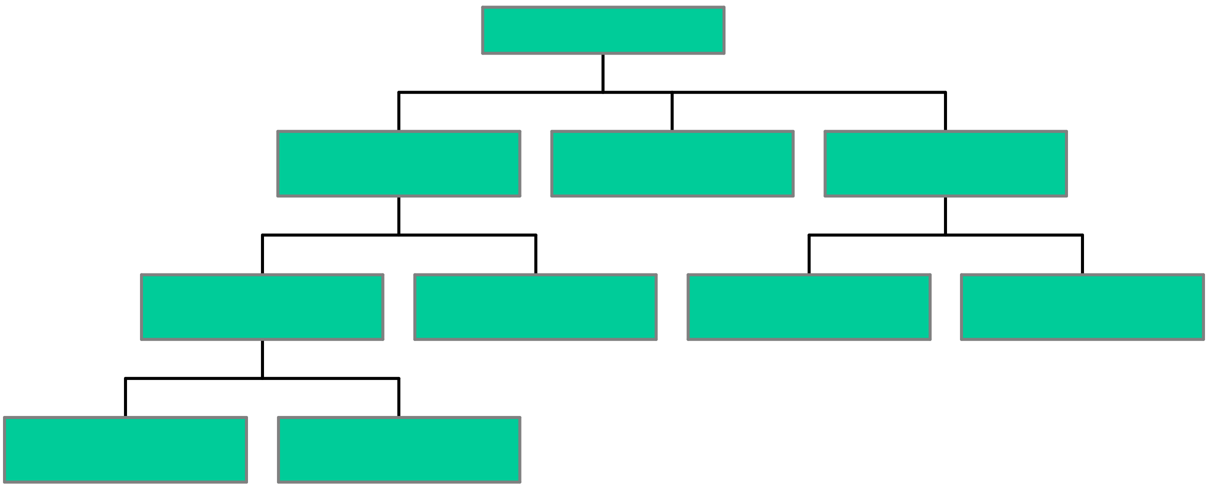


Обчислити співвідношення витрати/вигоди

Використати лінійне програмування

Використати окремі дерева для вигоди і витрат, а потім об’єднати результати

Для складних проблем існують багато рівнів критеріїв і субкритеріїв.



Професійне комерційне програмне забезпечення **Expert Choice** розроблене фірмою Expert Choice Inc. Спрошує провадження кроків МАІ та автоматизує багато обчислень

– обчислення

– аналіз чутливості

– графіки, таблиці

Працівник отримав 4 пропозиції про роботу від Acme Manufacturing (A), Bankers Bank (B), Creative Consulting (C) і Dynamic Decision Making (D). Він базує свій вибір на таких критеріях: *місце розташування*, *зарплата*, *зміст роботи* і *довгострокові перспективи*.

Крок 1: Прийняти рішення щодо важливості критеріїв відбору:

	Місце	Зарплата	Зміст	Перспектива
Місце	1	1/5	1/3	1/2
Зарплата	5	1	2	4
Зміст	3	1/2	1	3
Перспектива	2	1/2	1/3	1

1) Нормалізація елементів стовпця шляхом ділення кожного елемента на суму стовпця.

2) Знаходження середніх величин для рядків

	Місце	Зарплата	Зміст	Перспектива	Середнє
Місце	0.091	0.102	0.091	0.059	0.086
Зарплата	0.455	0.513	0.545	0.471	0.496
Зміст	0.273	0.256	0.273	0.353	0.289
Перспектива	0.182	0.128	0.091	0.118	0.130
+	1	1	1	1	1

Крок 2: Оцініть альтернативи кожного критерію

Оцінка місця

	A	B	C	D
A	1	1/2	1/3	5
B	2	1	1/2	7
C	3	2	1	9
D	1/5	1/7	1/9	1

Відносна оцінка місця

	A	B	C	D	Сер.
A	0.161	0.137	0.171	0.227	0.174
B	0.322	0.275	0.257	0.312	0.293
C	0.484	0.549	0.514	0.409	0.489
D	0.032	0.040	0.057	0.045	0.044

Приклад 2: Обчислення відносних оцінок

Відносні оцінки для кожного критерію

	Місце	Зарплата	Зміст	Перспектива				Відносні ваги для кожної альтернативи
A	0.174	0.050	0.210	0.510		0.086		0.164
B	0.293	0.444	0.038	0.012	x	0.496	=	0.256
C	0.489	0.312	0.354	0.290		0.289		0.335
D	0.044	0.194	0.398	0.188		0.130		0.238

За

- Дає можливість багатокритерійного прийняття рішень.
- Можна застосовувати коли складно формулювати критерії оцінювання, тобто дозволяє якісне оцінювання як і кількісне.
- Можна застосовувати для групування оточення прийняття рішень

Проти

- Є приховане припущення типу узгодженості. Повторне оцінювання є громіздким. → Користувачів потрібно навчати використанню методології МАІ
- Складно використовувати коли кількість критеріїв або альтернатив є великим, наприклад більше 7. → Використання групової СППР. Використання обмежень для усунення деяких альтернатив
- Складно додати новий критерій або альтернативу → Використання коефіцієнту витрат/вигод якщо це можливо
- Важко видалити існуючий критерій або альтернативу, оскільки найкраща альтернатива може відрізнятися, якщо виключено найгіршу

AHP дозволяє групове прийняття рішень, де члени групи можуть використовувати свій досвід, цінності та знання, щоб перетворити проблему в ієрархію і вирішити. Це допомагає:

– Зрозуміти суперечливі ідей в організації та спробувати досягти консенсусу.

– Мінімізувати домінування сильного члена групи.

Члени групи можуть проголосувати за критеріями для формування дерева МАІ. (Загальні пріоритети визначаються середньозваженими пріоритетами, отриманими від членів групи.)

Тим не менше:

Групова СППР не замінює всіх вимог для групового прийняття рішень. Відкриті зустрічі за участю всіх членів як і раніше є дуже важливими.

Попереднє оцінювання підрядників спрямована на усунення некомпетентних підрядників з процесу торгів.

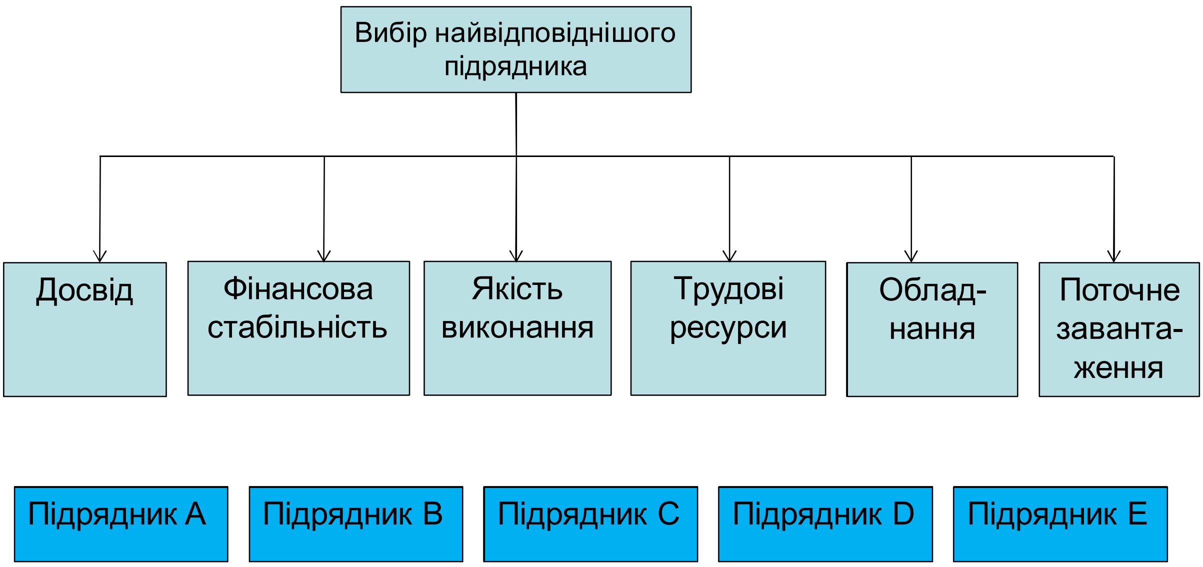
Цей вибір здійснює ОПР, щоб усунути підрядник Е від оцінювання в МАІ, оскільки він не є «прийнятним» взагалі!

	Підрядник A	Підрядник B	Підрядник C	Підрядник D	Підрядник E
Досвід	5 років 2 прості проекти	7 років 1 простий проект Досвід спец. закупівель	8 років 0 простих проектів 1 міжнародний проект	10 років 2 прості проекти	15 років 0 простих проектів
Фінансова стабільність	$7 M активи Високий темп росту Немає боргів	$10 M активи $5.5 M пасиви Частина групи компаній	$14 M активи $6 M пасиви	$11 M активи $4 M пасиви Добрий зв'язок з банками	$6 M активи $1.5 M пасиви
Якість виконання	Добра організація C.M. personnel Good reputation Many certi®cates Safety program	Середня організація C.M. personnel Two delayed projects Safety program	Добра організація C.M. team Government award Добра репутація QA/QC program	Добра організація Добра репутація Many certi®cates Cost raised in some projects	Погана організація Unethical techniques One project terminated Середня якість
Трудові ресурси	150 робітників 10 спеціально навчених працівників	100 робітників 200 за субпідрядом Availability in peaks	120 робітників Good skilled labors 25 special skilled labourers	90 робітників 130 за субпідрядом	40 робітників 260 за субпідрядом

	Contractor A	Contractor B	Contractor C	Contractor D	Contractor E
Обладнання	4 mixer machines 1 excavator 15 others	6 mixer machines 1 excavator 1 bulldozer	1 batching plant 2 concrete transferrin g trucks 2 mixer	4 mixer machines 1 excavator 9 others	2 mixer machines 10 others 2000 sf steel

		20 others 15,000 sf steel formwork	machines 1 excavator 1 bulldozer 16 others 17,000 sf steel formwork		formwork 6000 sf wooden formwork
Поточна завантаженість роботою	1 великий проект завершується 2 проекти на середині (1 середній +1 малий)	2 проекти завершуються (1 великий+ 1 середній)	1 середній проект почався 2 projects ending (1 big + 1 medium)	2 великі проекти завершуються 1 medium project in mid	2 малі проекти розпочалися 3 проекти завершуються (2 малі + 1 середній)

Ієрархічне Дерево



Приклад 3: МАІ в проектному менеджменті

Крок 1: Оцінка ваг критеріїв

Pair-wise comparison matrix for the six criteria[a]

	Exp.	FS	QP	MPR	ER	CWL	Priority vector
Exp.	1	2	3	6	6	5	0.372
FS	1/2	1	3	6	6	5	0.293
QP	1/3	1/3	1	4	4	3	0.156
MPR	1/6	1/6	1/4	1	2	1/2	0.053
ER	1/6	1/6	1/4	1/2	1	1/4	0.039
CWL	1/5	1/5	1/3	2	4	1	0.087
							$\sum = 1.00$

[a] $\lambda_{max} = 6.31$, CI = 0.062, RI = 1.24, CR = 0.05 < 0.1 OK.

Крок 2: а) Матриця попарного порівняння

Exp.	A	B	C	D	E
A	1	1/3	1/2	1/6	2
B	3	1	2	1/2	4
C	2	1/2	1	1/3	3
D	6	2	3	1	7
E	1/2	1/4	1/3	1/7	1

Exp.	A	B	C	D	E	Priority vector
A	0.08	0.082	0.073	0.078	0.118	0.086
B	0.24	0.245	0.293	0.233	0.235	0.249
C	0.16	0.122	0.146	0.155	0.176	0.152
D	0.48	0.489	0.439	0.466	0.412	0.457
E	0.04	0.061	0.049	0.066	0.059	0.055
						$\sum = 0.999$

[a] $\lambda_{max} = 5.037$, CI = 0.00925, RI = 1.12, CR = 0.0082 < 0.1 OK.

Обчислення вектора пріоритетів:

	Exp. (0.372)	FS (02.93)	QP (0.156)	MPR (0.053)	ER (0.039)	CWL (0.087)
A	0.086	0.425	0.269	0.151	0.084	0.144
B	0.249	0.088	0.074	0.273	0.264	0.537
C	0.152	0.178	0.461	0.449	0.556	0.173
D	0.457	0.268	0.163	0.081	0.057	0.084
E	0.055	0.039	0.031	0.045	0.038	0.062

$$\times \begin{bmatrix} 0.372 \\ 0.293 \\ 0.156 \\ 0.053 \\ 0.039 \\ 0.087 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.222 \\ 0.201 \\ 0.241 \\ 0.288 \\ 0.046 \end{bmatrix}$$

Напевно підрядника E треба усунути. Схоже, що він найгірший.

Потрібно зауважити, що СППР підтримує особу, що приймає рішення, але не заміняє її. Тому, СППР на основі МАІ повинна дати змогу ОПР зробити аналіз чутливості в оцінюванні загальних пріоритетів!

Моделі багатокритерійного прийняття рішень: PROMETHEE

– Одна з найефективніших і найлегших методологій MCDM.

– Розробники: Jean-Pierre Brans і Bertrand Mareschal (1982)

– Розглядається набір критеріїв і альтернатив. Визначаються ваги критеріїв, на що вказує на відносну важливість

– Використовується функція, що відображає ступінь переваги однієї альтернативи над іншою, поряд зі ступенем недоліків, які та ж альтернатива має відносно іншої альтернативи.

– У масштабуванні, є шість варіантів, що дозволяють користувачеві висловити значущі відмінності мінімальними зазорами між спостереженнями. Коли використовується тип I, має місце тільки відносна перевага; 6 тип заснований на стандартизації відносно нормального розподілу.

Компанія з виробництва велосипедів має намір рекламувати свою продукцію.

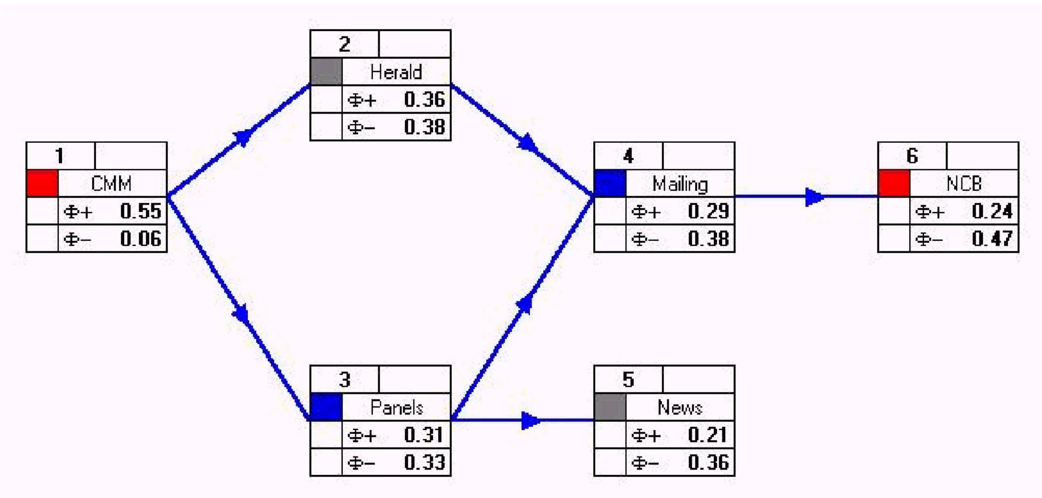
Розглядаються 6 маркетингових дій: реклама в міжнародній газеті *News;* в газеті *Herald;* біг-борди у великих містах; персональна розсилка; телевізійні ролики на каналах *CMM* або *NCB*.

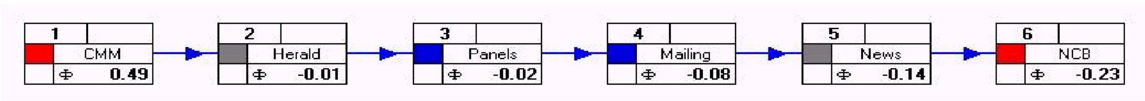
Criteria min/max	C1 cost min	C2 target max	C3 durat. max	C4 effic. max	C5 manp. min
News	60	900	22	51	8
Herald	30	520	31	13	1
Panels	40	650	20	58	2
Mailing	92	750	60	36	3
CMM	52	780	58	90	1
NCB	80	920	4	75	6

Одиниці: Витрати ($ 1,000), Мета (10,000 people), Тривалість (days), Ефективність (0-100),

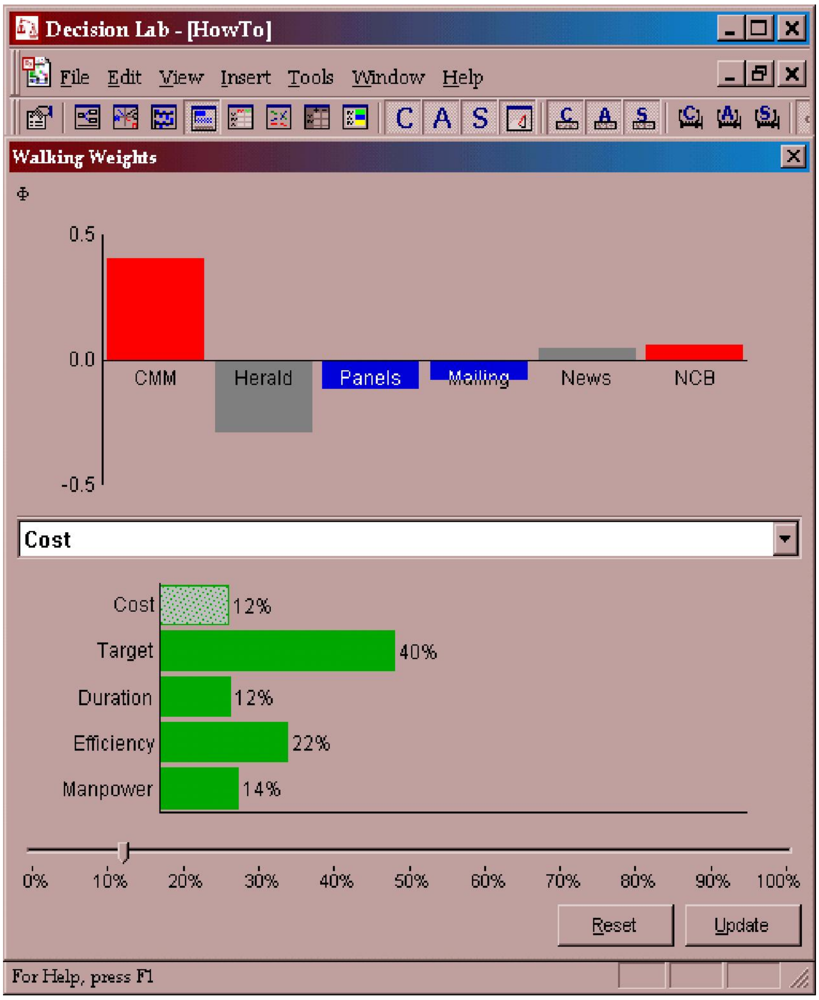
Праця (кількість зайнятих у компанії)

Часткове і повне ранжування в Promethee I та II





Ранжування альтернатив можна отримати для вибраних ваг



Часто буває необхідно обрати кілька альтернатив, з урахуванням набору цілей.

В цьому випадку можна використати бінарні змінні рішень, що дає вибір r дій, в тому числі n альтернатив

Нехай $x_i=1$ якщо вибрано медіа і та 0 в іншому випадку, $i=1,2,...,6$.

$\varphi(A_i)$ відносна вага медіа і, $i=1,2,...,6$.

Max $\varphi(A1)\, x1 + \ldots + \varphi(A6)\, x6$

Subject to

$x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 \geq 2$ *(потрібно вибрати щонайменше 2 медіа)*

$x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 \leq 4$ *(потрібно вибрати не більше ніж 4 медіа)*

$x1 + x2 = 1$ *(вибрати точно одну газету)*

$x5 + x6 = 1$ *((вибрати точно один телеканал)*

$625\, x1 + 550\, x2 + 250\, x3 + 150\, x4 + 175\, x5 + 750\, x6 \geq 1200$ *(очікується мінімум повернення)*

$-60\, x1 - 30\, x2 + 40\, x3 + 92\, x4 + 52\, x5 + 80\, x6 \geq 0$ *(кошти на рекламу в газеті повинні бути менше ніж 50% загальних коштів)*

ЛЕКЦІЯ 6. МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕЧІТКОЇ ІНФОРМАЦІЇ, НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ТА РИЗИКУ

6.1 Проблема прийняття рішень в умовах невизначеності

Прийняття рішень в умовах визначеності

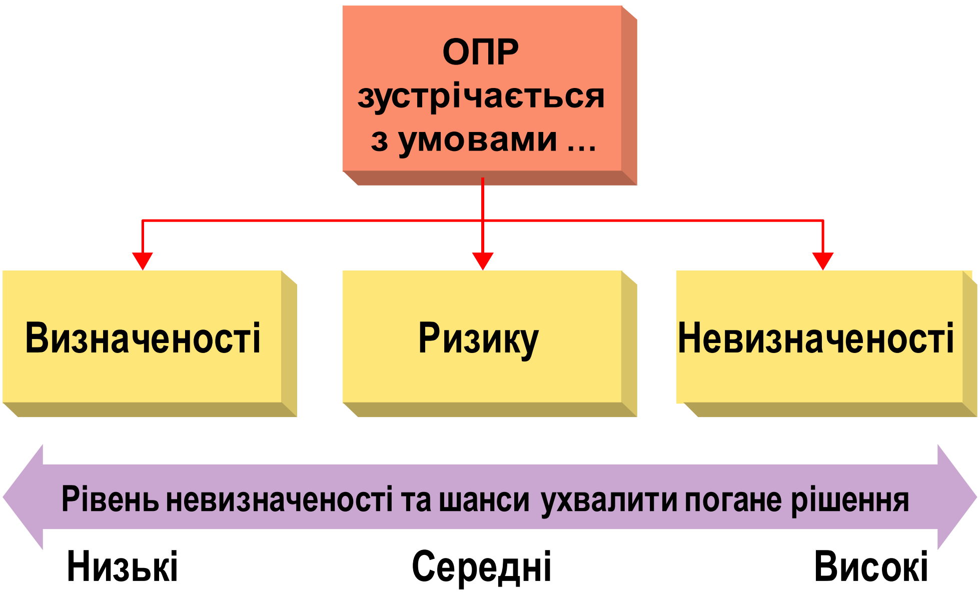
Умови, при яких особа, що приймає рішення, знає з достатнім ступенем впевненості, які існують альтернативи і які умови пов'язані з кожною альтернативою.

Прийняття рішень в умовах ризику

Умова, за якої доступність кожної альтернативи, її потенційні вигоди і витрати – усі асоціюються з ризиками.

Прийняття рішень в умовах невизначеності

Умови, при яких особа, що приймає рішення, не знає всіх альтернатив, ризиків, пов'язаних з кожною із них, або наслідків кожної з альтернатив.



Залежно від інформації, якою володіє керуюча підсистема про стан середовища, існують різні типи задач прийняття рішень:

– Прийняття рішень в умовах визначеності.

– Прийняття рішень в умовах ризику.

– Прийняття рішень в умовах невизначеності.

– Прийняття рішень в теоретико-ігрових умовах (де середовище теж є керуючою підсистемою).

Також виокремлюють тип задач:

– Прийняття рішень за умов нечіткості інформації

– Умови визначеності мають місце, коли відомо, які умови зовнішнього середовища настануть або вже настали. Для кожної дії відомо, що вона призводить до деякого конкретного результату. При цьому при одній меті рішення однозначне, а при багатьох цілях варто розрізняти нейтральні, комплементарні (доповнюючі) та конкуруючі цілі.

У випадку **нейтральних** відносин між цілями нейтральна мета в подальших розглядах може бути опущена, тому вона у всіх альтернативах однаково задовольняється (або не задовольняється).

Якщо з поліпшенням однією з цілей одночасно поліпшується й інша, то це випадок **комплементарності** (наприклад, зниження витрат і підвищення прибутку за інших рівних умов). При цьому при виборі альтернативи можна обмежитися урахуванням тільки однієї з них.

Випадок **конкуренції цілей** має місце, коли поліпшення однієї з цілей одночасно веде до зниження іншої. Для цього випадку є три підходи: максимізація користі, придушення мети і встановлення рівня домагань.

Підхід **«максимізація користі»** полягає в об'єднанні всіх цілей в цільову функцію більш високого рангу. Це може бути зроблено шляхом оцінки внеску кожної в кінцеву користь і приведення їх до однієї загальної цифри.

Підхід **«придушення мети»** полягає в тому, що просто одній з цілей приписується вирішальне значення.

Підхід **«встановлення рівня домагань»** полягає в тому, що ОПР встановлює рівень домагань для всіх цілей, крім однієї, по якій вибирається альтернатива, що дає максимум (або мінімум).

У таблиці представлені цільові значення для 6 альтернатив. Припустимо, що ОПР встановило такі рівні домагань:

Ц1 не менше 145 – відповідно відпадають А3 і А4;

Ц2 не менше 45 – відповідно відпадає А6;

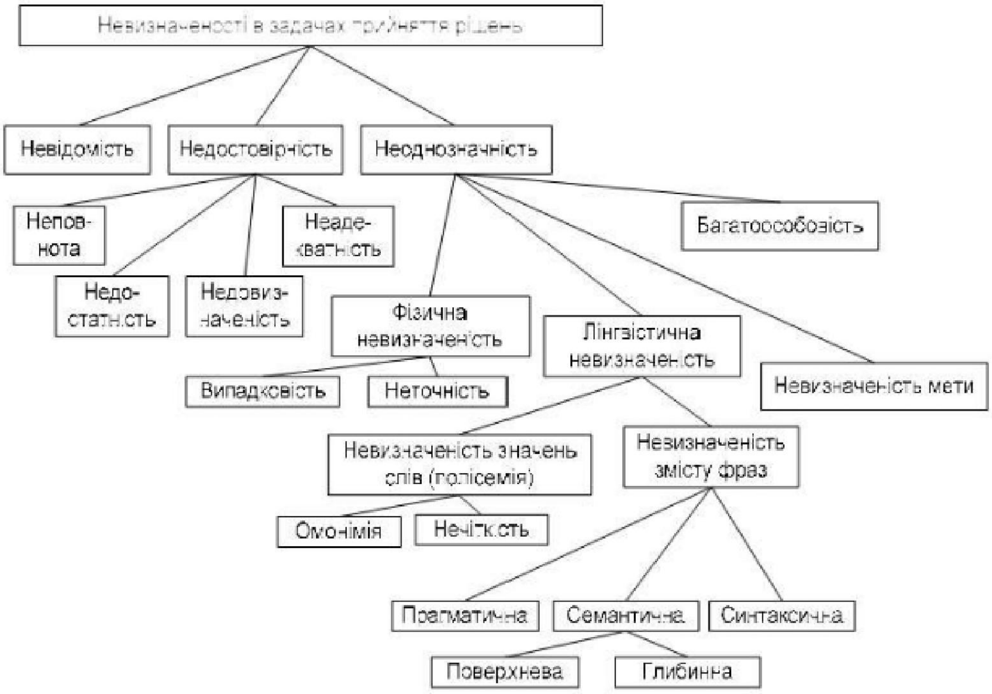
Ц3 не більше 7,5 – відповідно відпадають А3 і А6

Ц4 не менше «задовільно» – відповідно відпадає А4;

Ц5 підлягає максимізації – відповідно з решти альтернатив А1, А2 і А5 оптимальним варіантом є А5.

	Ц1	Ц2	Ц3	Ц4	Ц5
А1	160	45	6,5	удовлетворительно	60
А2	150	45	6,0	хорошо	70
А3	95	70	8,0	почти удовлетворительно	65
А4	130	50	6,5	достаточно	55
А5	145	50	7,0	хорошо	85
А6	155	40	9,0	хорошо	90

6.2 Класифікація невизначеностей



6.3 Поняття ризику

Ризик – діяльність, пов’язана з подоланням невизначеності в ситуації неминучого вибору, в процесі якої є можливість кількісно і якісно оцінити ймовірність досягнення передбачуваного результату, невдачі чи відхилення від мети.

Ризик – характеристика ситуації, що має невизначеність результату, при обов'язковій наявності несприятливих наслідків.

З найпоширенішої точки зору, кожен ризик у певному сенсі пропорційний як очікуваним втратам, заподіяних ризиковою подією, так і ймовірності цієї події. Відмінності у визначеннях ризику залежать від контексту втрат, їх оцінки та вимірювання.

Сутність ризику

– можливість відхилення від передбачуваної мети, заради якої здійснюється обрана альтернатива;

– імовірність досягнення бажаного результату;

– відсутність впевненості в досягненні мети;

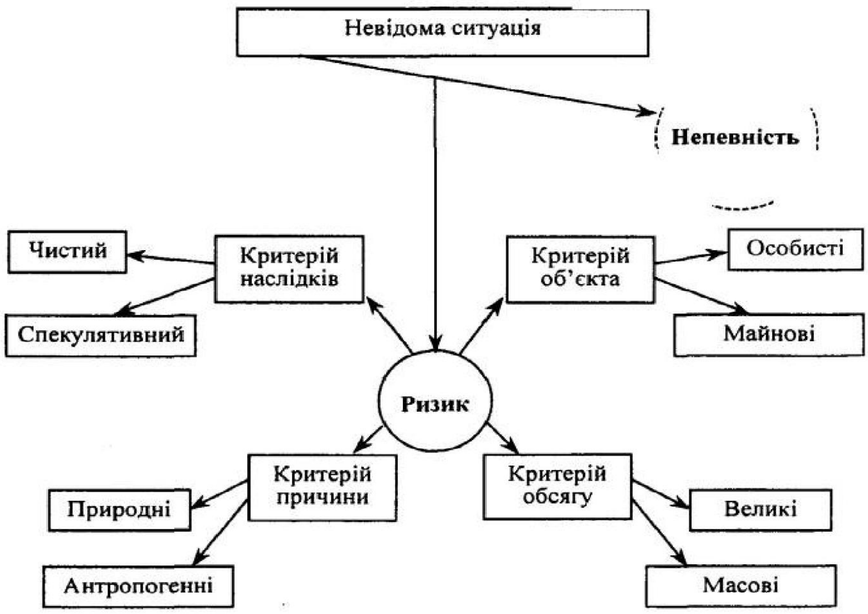
– можливість настання несприятливих наслідків (матеріальних або фізичних) при здійсненні тих або інших дій в умовах невизначеності для суб’єкта, що йде на ризик;

– матеріальні, екологічні, морально-ідеологічні й інші втрати, зв’язані зі здійсненням обраної в умовах невизначеності альтернативи;

– чекання небезпеки (невдачі) внаслідок вибору альтернативи та її реалізацій.

Класи ризиків за критерієм розміру

Види ризиків за критеріями



Види ризиків за критерієм: природа виникнення

Суб'єктивний (особистісний)	Нерозвинені здатності до ризику; недостатній досвід, необґрунтовані амбіції; порушення правил поведінки; недостатнє розуміння угоди чи навпаки, високий рівень здібностей, освіти, професіоналізму тощо
Об'єктивний	Недостатня інформація; стихійні лиха; несподівані зміни: кон'юнктури ринку, рівня інфляції, законодавства, умов кредитування, оподатковування, інвестування тощо

Види ризиків за критерієм: етап розв'язання проблеми

На етапі прийняття рішень	Помилки в застосуванні методів визначення рівня ризику через недостатню інформацію чи її низьку якість, дезінформацію; чи, навпаки, відмінне володіння цими методами, залучення якісної інформації, розвинену інтуїцію тощо
На етапі реалізації рішень	Помилки і реалізації правильного рішення, несподівані зміни суб'єктивних умов

Види ризиків за критерієм: масштаб

Локальний	Ризик окремої фірми (компанії, об'єднання. їхніх структурних ланок)
Галузевий	Ризик, пов'язаний зі специфікою галузі
Регіональний	Охоплює проблему на рівні території, економічних
Національний	Стосується проблеми на рівні макроекономіки (через несподівані зміни в політиці, законодавстві, кредитуванні, оподатковуванні тощо)
Міжнародний (міжкраїнний)	Пов'язаний зі змінами в кон'юнктурі світового ринку, відносинами між країнами, масштабними стихійними лихами тощо

Види ризиків за критерієм: сфера виникнення

Зовнішній	Несподівані зміни в економічній політиці, макроумовах відтворення; стихійні лиха на великих територіях; валютний ризик; стрибки кон'юнктури на світовому ринку тощо
Внутрішній	Ризики зумовлені спеціалізацією: виробничий, фінансовий, страховий і т. ін.

Види ризиків за критерієм: можливість страхування

Які страхують	Які організації, що приймають на себе ризик страхувальників, кількісно визначають і страхують
Які не страхують	Форсмажорні ризики, оцінити рівень яких неможливо, а також масштабні ризики, коли ніхто не готовий прийняти на себе ризик страхувальника

Види ризиків за критерієм: вид діяльності

Фінансовий	Ризики на фондовому ринку ліквідності, інфляційний, валютний і т.ін.; банківські кредитний, процентним, портфельний; ризик падіння загальноринкових цін (інфляційний); лізинговий і факторинговий; пов'язані зі специфікою клієнта банку
Юридичний	Зумовлений низькою якістю законодавчих актів і несподіваних змін у законодавстві
Виробничий	Через вимушені перерви у виробництві, вихід із ладу виробничих фондів, утрату оборотних коштів, несвоєчасність постачання устаткування, сировини тощо
Комерційний	Унаслідок несподіваних змін у кон'юнктурі ринку та інших умов комерційної діяльності
Інвестиційний	Зумовлений невизначеностями, непередбачуваними обставинами в інвестиційній сфері, інноваційній діяльності
Страховий	Формування страхового фонду, керування останнім, а також власним майном, коштами та персоналом
Інноваційний	Випливає з невизначеностей в інноваційній сфері (починаючи від вироблення інноваційної ідеї, втілення її в продукті чи технології та закінчуючи реалізацією відповідного продукту на ринку)

Види ризиків за критерієм: можливість диверсифікації

Систематичний	Властивий певній сфері діяльності (так, на фондовому ринку систематичним уважають ризик зменшення цінності паперів загалом)
Специфічний	Пов'язаний з одержанням підприємницького доходу від конкретної операції в даній сфері діяльності

Види ризиків за критерієм: ступінь допустимості

Мінімальний	Характеризується рівнем можливих втрат розрахункового прибутку в межах 0-25 %
Підвищений	Не перевищує можливі втрати розрахункового прибутку 25-50 %
Критичний	Характеризується можливими втратами розрахункового прибутку 50-70 %
Недопустимий	Можливі втрати близькі до розміру власних засобів, що може призвести до банкрутства фірми. Коефіцієнт ризику дорівнює 75-100 %

Види ризиків за критерієм: природа виникнення

Суб'єктивний (особистісний)	Нерозвинені здатності до ризику; недостатній досвід, необґрунтовані амбіції; порушення правил поведінки; недостатнє розуміння угоди чи навпаки, високий рівень здібностей, освіти, професіоналізму тощо
Об'єктивний	Недостатня інформація; стихійні лиха; несподівані зміни: кон'юнктури ринку, рівня інфляції, законодавства, умов кредитування, оподатковування, інвестування тощо

6.4 Ідентифікація, контроль та управління ризиками

Ідентифікація ризиків – це дослідження, виявлення, опис, документування та групове обговорення ризиків до того, як вони стають проблемами та несприятливим чином впливають на діяльність

Цілі процесу ідентифікації ризиків:

1) виявлення та категоризація (систематизація) ризиків, які можуть несприятливо вплинути на процес;

2) документарне оформлення цих ризиків.

Ідентифікувати ризики можна способом:

– causes-and-effects (що могло статись і які будуть наслідки)

– effects-and-causes (яких результатів потрібно уникати, а які заохочувати, і як їх можна реалізувати).

Найпоширеніші техніки ідентифікації :

– суб'єктивно-орієнтовані (*анкетування, експертне опитування, Делфі*) – визначення ризиків на підставі одноосібного і, подекуди, анонімного висловлення особистого бачення ситуації фахівцями;

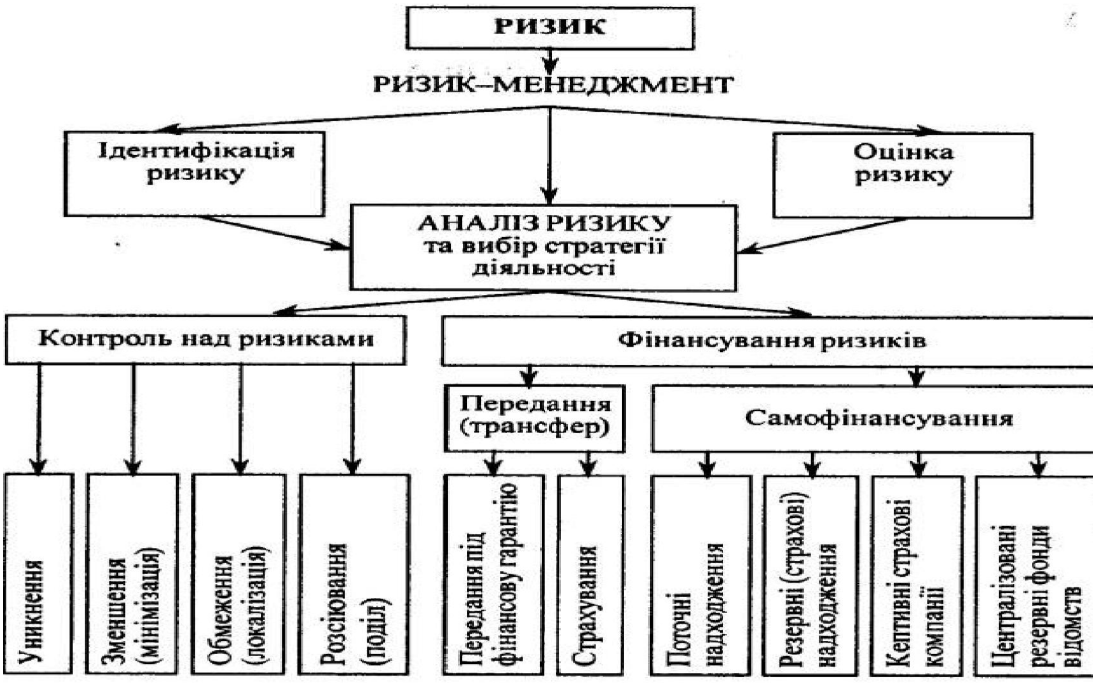
– динамічні (*мозковий штурм, малі робочі групи, ковзна Кроуфорда*);

– аналогові (*переліки ризиків, шаблони (стандарти поведінки), питання-зачіпки, історична інформація*) – передбачають визначення ризиків на підставі порівняння досліджуваної ситуації з аналогічними, здійснюваними в минулому, або беззаперечними фактами, характерними для галузі функціонування підприємства (або сфери реалізації проекту);

– аналітичні (*сценарне планування, результати ризик-орієнтованого аналізу*) – дають змогу одержати відносно точний сценарій можливого розвитку подій та пов'язаних із ними (зумовлених ними) ризиків.

Управління ризиками

Ризик-менеджмент



Регулювання ризиків

Основна відмінність рішень в умовах ризику полягає в тому, що настання певних умов зовнішнього середовища є не чисто випадковим, а очікується з певною ймовірністю.

Значення цієї ймовірності можуть бути визначені або об'єктивно на підставі статистики чи випробувань, або суб'єктивно.

У всякому випадку, ОПР ці ймовірності відомі.

Логічно припустити, що ОПР приймають рішення на основі двох величин: математичного сподівання альтернативи (простіше кажучи, середнього розміру виграшу / програшу) і ступеня ризику, властивого цій альтернативі.

Математичне сподівання для альтернативи *EV* може бути представлено формулою

$$EV = \sum_{j=1}^{m} Pj \cdot Wj$$

де P_j – ймовірність результатів; W_j – цінності результатів.

Очікувана грошова віддача **EMV** (expected monetary value)

EMV для варіанту = Сума можливих поступлень (віддач) варіанта, кожна зважена на ймовірність появи віддачі

– Кожен із можливих станів природи має передбачувану ймовірність

– Стани природи є взаємовиключними
– Ймовірності мають в сумі давати 1
– Визначають **очікувану грошову віддачу – expected monetary value (EMV)** – для кожної альтернативи

EMV (альтернатива *i*)	=	(Виграш 1-го стану природи) x (Ймовірність 1-го стану природи)
	+	(Виграш 2-го стану природи) x (Ймовірність 2-го стану природи)
	+ … +	(Виграш останнього стану природи) x (Ймовірність останнього стану природи)

<u>Приклад</u>.
Менеджер компанії вірить, що ймовірність сприятливого ринку така ж, як і несприятливого. Це означає, що кожний стан природи має шанс 0,50.
EMV 1 = 0,50 x $200 000 + 0,50 x $(-180 000) = $10 000
EMV 2 = 0,50 x $100 000 + 0.50 x $(-20 000) = $40 000
EMV 3 = 0,50 x 0 + 0,50 x 0 = 0

Очікувана цінність досконалої інформації
EVPI *(expected value of perfect information)*
EVPI = *різниця між віддачею (від рішень) в умовах визначеності та віддачею в умовах ризику*
EVPI = (очікувана цінність в умовах невизначеності) – max **EMV**
Очікувана цінність в умовах невизначеності =
$200 000 x 0,50 + $0 x 0,50 = $100 000
EVPI = $100 000- $40 000 = $60 000
<u>Сума, яку компанія може заплатити за досконалу інформацію</u>

Стосовно оцінки ступеня ризику, притаманного кожній альтернативі, то емпіричні дослідження Р. Кетлінського показали, що, оцінюючи ризик, люди враховують дві змінні – суб'єктивну ймовірність програшу (СЙП) і розмір програшу (РП).

Кетлінський визначив, що ризик (R) визначається не дисперсією або величиною очікуваного збитку, як можна було б припустити, а сумою суб'єктивної ймовірності програшу і логарифма розміру програшу:

$$R = 3{,}12(СЙП) + lg(РП).$$

Правило модального значення:
– Враховуються лише ті результати, ймовірність появи яких максимальна.

Це правило називають також аксіомою раціональності, оскільки при одиничному виборі представляється розумним припускати, що саме подія з максимальною ймовірністю появи і настане.

Такий підхід переважно приводитиме до позитивного результату. Однак він має і певні недоліки, стикаючись з труднощами, коли:

– ряд станів мають рівну ймовірність появи;

– максимальний результат дають кілька альтернатив;

– коли ймовірність появи модального значення при одному з станів середовища тільки незначно вище, ніж для інших станів середовища, а при цьому інші альтернативи є оптимальнішими (іноді значно).

Правило модального значення

Стан середовища	Р1	Р2	Р3	Р4	Р5	Р6	Р7	Р8	Р9	Р10
Ймовірність появи	0,14	0,10	0,06	0,08	0,07	0,15	0,13	0,12	0,07	0,08
А1 А2 А3	5 10 11	4 4 3	4 6 7	5 7 7	1 2 1	**6** 5 3	8 9 7	6 8 7	10 13 12	3 5 3

Стан середовища Р6 має найбільшу ймовірність 0,15 і згідно з правилом має бути обрана альтернатива А1, що дає результат, рівний 6. Проте стан середовища Р1, що має трохи меншу ймовірність появи 0,14, для альтернатив А2 і А3 дає помітно кращий результат. Тому доцільність вибору альтернативи А1 може викликати сумніви.

Правило Баєса (очікуваного значення)

Стан середовища	Р1	Р2	Р3	Р4	Р5	Р6	Р7	Р8	Р9	Р10	Сумма
Ймовірність появи	0,14	0,10	0,06	0,08	0,07	0,15	0,13	0,12	0,07	0,08	
А1 А2 А3	0,70 1,40 1,54	0,4 0,4 0,3	0,24 0,56 0,56	0,40 0,56 0,56	0,07 0,14 0,07	0,90 0,75 0,45	1,04 1,17 0,91	0,72 0,96 0,84	0,07 0,91 0,84	0,24 0,40 0,32	4,78 **7,05** 5,25

Правило Баєса, на відміну від попереднього, залучає до процесу вибору рішення усі наявні значення.

Для цього результат кожної альтернативи для кожного стану середовища множиться на ймовірність її появи (наприклад, для попередньої таблиці для альтернативи А1 і стани середовища Р1: 5 x 0,14 = 0,70). Сума по кожній альтернативі дає очікуваний результат альтернативи в цілому для усіх можливих станів середовища.

Небезпека формального застосування правила Баєса

Стан середовища	P1	P2	Сума
Ймовірність	0,4	0,6	
А1 А2	-600 -10	+410 +15	+6 +5

У таблиці наведено приклад, коли як згідно з правилом модального значення (при P2 маємо максимальний результат), так і згідно з правилом Баєса (сума+6) вибір падає на альтернативу А1. При неодноразовому виборі це рішення було б дійсно оптимальним, але при одноразовому виборі альтернатива А1 може виявитися убивчою, якщо реалізується значення середовища P1. Наступного вибору, який дав би змогу нарешті виграти, може просто не бути із-за банкрутства внаслідок першого вибору.

Правило Бернуллі досить широко застосовується для ухвалення економічних рішень в умовах ризику.

Воно відрізняється від правила Баєса тим, що вводиться індивідуальна функція корисності. При цьому кожне значення в таблиці спочатку множиться на відповідне значення функції корисності, а вже потім на ймовірність відповідного стану середовища. Далі для кожної альтернативи проводиться підсумовування по всіх станах середовища. Максимальна сума визначає кращу альтернативу.

Перевага цього підходу полягає у врахуванні індивідуальних переваг ОПР.

Недолік правила пов'язаний з тим, що функція корисності має бути визначена настільки точно, що вона має бути справедлива для ОПР і в інших ситуаціях і має бути стабільна в часі, тобто має бути застосовна для конкретних ситуацій і в інший час.

Правило Ферстнера спрямоване на компенсацію недоліків правила очікувань(правила Баєса). Згідно із правилом Ферстнера значення очікувань коригуються на деяку зважену стандартну величину відхилень. Ця поправка є суб'єктивною оцінкою, що враховує переваги ОПР стосовно ризику. При цьому вона має, природно, різний знак залежно від того, чи йде мова про максимізацію корисності або мінімізацію збитку. Проблемою залишається визначення величини поправки для конкретної ОПР.

Поправочний коефіцієнт	Для корисних результатів	Для шкідливих результатів
= 0	ОПР нейтрально ставиться до ризику	ОПР нейтрально ставиться до ризику
> 0	ОПР боїться ризикувати	ОПР любить ризикувати
< 0	ОПР любить ризикувати	ОПР боїться ризикувати

6.5 Задача прийняття рішень в умовах невизначеності

Прийняття рішення в умовах невизначеності має місце, коли та чи інша дія (або всі дії) призводить до безлічі можливих результатів, ймовірності яких ОПР невідомі.

Часто результат рішення залежить від настання певних зовнішніх ситуацій, які не лише не контролюються ОПР, а й по яких у нього відсутня інформація, завдяки якій у цих ситуаціях його рішення має бути ефективним.

Особлива складність з'являється тоді, коли у конкретних зовнішніх ситуаціях щоразу оптимальною була б інша альтернатива. Вибір рішення в таких умовах і називають **прийняттям рішення в умовах невизначеності**

Приклад.

Метою фірми є збільшення прибутку завдяки:
– або нового продукту (альтернатива А1),
– або завоювання нового ринку (А2),
– або кооперації з іншими фірмами (А3),
– або збільшення активності на існуючих ринках (А4).

Всі чотири альтернативи призводять до різних результатів залежно від можливої кон'юнктури і умов конкуренції (Р1, Р2, Р3).

Розглянемо матрицю рішень

а) початкова матриця

	Р1	Р2	Р3
А1	92	160	40
А2	100	76	120
А3	68	80	140
А4	62	74	105

б) після вилучення неефективної альтернативи

	P1	P2	P3
A1 A2 A3	92 100 68	160 76 80	40 120 140

Спершу може бути виконаний попередній відбір альтернатив на основі принципів ухвалення рішень. Зокрема, альтернатива А4 може бути вилучена, оскільки вона неефективна порівняно з альтернативою А3.

Для вибору альтернативи в умовах невизначеності розроблено ряд **стратегій**:

– правило Вальда (максимін-правило), іноді називають мінімакс-правилом;

– правило: «береженого Бог береже»;

– максимакс-правило (іноді мінімін-правило);

– правило: «хто не ризикує, той не п'є шампанського»;

– правило Гурвіца (правило оптимізму-песимізму);

– правило: «Бог не видасть, свиня не з'їсть»;

– правило Севіджа-Нігана (правило мінімаксу жалю);

– правило Лапласа;

– правило Крелле.

Правило Вальда

	P1	P2	P3	Правило мінімакса
A1 A2 A3	92 100 **68**	160 **76** 80	**40** 120 140	40 **76** 68

Правило Вальда орієнтується на ОПР, яка налаштована песимістично і прагне мінімізувати втрати.

Воно визнає лише мінімальний прибуток, а не збитки, і вибирає опцію, яка максимізує мінімальний прибуток. У таблиці для кожної зовнішньої ситуації фіксується мінімальне значення, а потім з цих гірших значень вибирається максимальне. Найприйнятнішою альтернативою при цьому підході є альтернатива А2.

Правило максимаксу

	P1	P2	P3	Правило максимаксу
A1	92	**160**	40	**160**
A2	100	76	**120**	120
A3	68	80	**140**	140

Максимакс-правило орієнтується на гранично оптимістичну ОПР, для якої визначальним є лише результат, який досягається в кращому випадку.

Правило Гурвіца (правило оптимізму-песимізму)

Правило Гурвіца є компромісом між двома розглянутими стратегіями. Для кожної альтернативи враховуються два значення – максимальне і мінімальне. Для цього вводиться додатковий параметр оптимізму-песимізму α, який враховує індивідуальний підхід до ризику ОПР. У песиміста α лежить у діапазоні від 0 до 0,5, у оптиміста від 0,5 до 1. Далі кожен максимум у рядку множиться на α, а кожен мінімум на (1-α). Для випадку помірного песиміста (α = 0,3) результат надано в таблиці

	P1	P2	P3	Правило Гурвіца
A1	92	160	40	160×0,3 + 40×0,7 = 76
A2	100	76	120	120×0,3 + 76×0,7 = 89,2
A3	68	80	140	140×0,3 + 68×0,7 **= 89,6**

Правило Севіджа-Нігано (правило мінімального жалю)

У цій стратегії ОПР орієнтується не на абсолютний результат, а на мінімізацію максимально поганого результату. Для цього обчислюється таблиця «жалю». У ній для кожного стану зовнішнього середовища для кожної альтернативи обчислюється збиток/втрати, які витікають при виборі цієї альтернативи порівняно з оптимальною альтернативою. Для кожної альтернативи визначають максимальний збиток. Вибирають альтернативу з мінімумом максимального збитку. Перевага цього підходу полягає в тому, що мінімізується максимально можлива похибка. Це відображає позицію песимістичної або обережної ОПР.

	Стан внутрішнього середовища			Матриця жалю			Правило мінімального жалю
	P1	P2	P3	P1	P2	P3	
A1	92	160	40	8	0	**100**	100
A2	100	76	120	0	**84**	20	84
A3	68	80	140	32	**80**	0	**80**

Правило Лапласа

Правило Лапласа припускає ОПР з нейтральним ставленням до ризику і дає змогу вибрати альтернативу з максимальною сумарною корисністю. Для цього кожному стану зовнішнього середовища приписується рівна імовірність(тобто визначається як 1, поділена на кількість даних станів середовища). Далі визначається сума для кожної альтернативи.

	P1	P2	P3	Правило Лапласа
A1 A2 A3	92 100 68	160 76 80	40 120 140	92×0,33 + 160×0,33 + 40×0,33 = 97,33 100×0,33 + 76×0,33 + 120×0,33 = **98, 67** 68×0,33 + 80×0,33 + 140×0,33 = 96

За допомогою правила Крелле намагаються врахувати індивідуальні переваги ОПР відносно ризику. Для цього необхідно визначити індивідуальну функцію переваг ОПР, що є складним завданням. Далі усі значення для кожної альтернативи перераховуються за допомогою цієї функції в цифри корисності в очах ОПР. Якби вдалося досить об'єктивно визначити цю функцію суб'єктивних переваг ОПР, правило Крелле могло би бути дуже ефективним. Але оскільки можливість її надійного визначення є спірною, правило Крелле практично не застосовується.

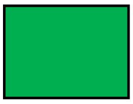
Порівняння результатів вибору альтернатив за допомогою різних критеріїв

	P1	P2	P3	Правило міні-максу	Правило макси-максу	Правило Гурвіча	Правило Севіджа	Правило Лапласа
A1 A2 A3	92 100 68	160 76 80	40 120 140	40 **76** 68	**160** 120 140	76 89,2 **89,6**	100 84 **80**	96,3 **98,7** 96

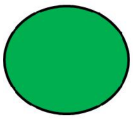
На перший погляд здається безглуздим, що найкраща альтернатива залежить від методу її визначення. Насправді тут немає протиріччя, оскільки метод вибору враховує індивідуальні переваги ОПР.

6.6 Метод дерева рішень

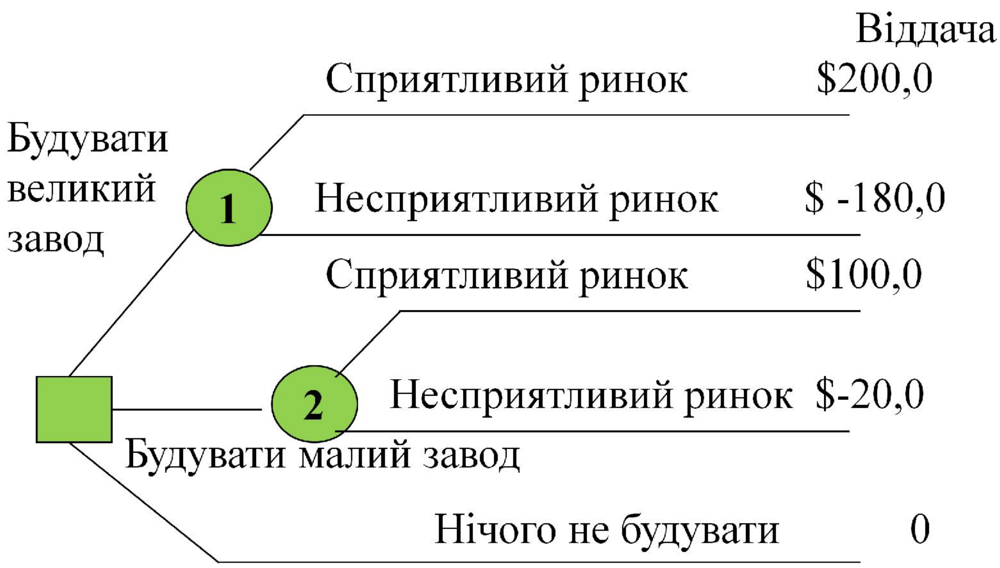
Дерево рішень – графічне відображення процесу, яке визначає альтернативи рішення, стану природи та їхні відповідні ймовірності віддачі для кожної комбінації альтернатив і станів природи



екілька



природи



Приклад таблиці рішень

Таблиця рішень		
	СТАНИ ПРИРОДИ	
АЛЬТЕРНАТИВИ	**СПРИЯТЛИВИЙ РИНОК**	**НЕСПРИЯТЛИВИЙ РИНОК**
Будувати великий завод	$200 000	–$180 000
Будувати малий завод	$100 000	–$ 20 000
Нічого не будувати	$ 0	$ 0

Таблиця	Таблиця рішень для умов невизначеності				
	СТАНИ ПРИРОДИ				
АЛЬТЕРНАТИВИ	СПРИЯТЛИВИЙ РИНОК	НЕСПРИЯТЛИВИЙ РИНОК	МАКСИМУМ В РЯДКУ	МІНІМУМ В РЯДКУ	СЕРЕДНЄ ДЛЯ РЯДКА
Будувати великий завод	$200,000	–$180,000	$200,000	–$180,000	$10,000
Будувати малий завод	$100,000	–$ 20,000	$100,000	–$ 20,000	$40,000
Нічого не будувати	$ 0	$ 0	$ 0	$ 0	$ 0
			Maximax	Maximin	Рівно-ймовірн. критерій

1. Maximax вибір – будувати великий завод
2. Maximin вибір – нічого не будувати
3. Рівноймовірнісний вибір – будувати малий завод

Зведення прийняття рішень в умовах невизначеності до рішень в умовах визначеності

Жодне з розглянутих правил не гарантує вибору оптимального рішення. У зв'язку з цим на практиці застосовується цілий ряд методів введення поправок.

Одним з них є, наприклад, розрахунок з використанням так званих еквівалентів надійності. Наприклад, 5% на депозит у банку ОПР може розглядати як еквівалент 10% на вклад до фонду, схильного до ризику курсових коливань. У такий спосіб матриця рішень може бути перетворена із заміною ненадійних результатів на суб'єктивні еквіваленти.

Можуть і безпосередньо вводитися до цифр матриці рішень поправки (позитивні або негативні) на ризик.

Недоліком усіх цих поправок є те, що вони не підвищують прозорості ситуації і, в той же час можуть, як би об'єктивно, відхилити вигідне рішення. Незважаючи на це, поправки досить широко використовуються на практиці при розробленні економічних рішень.

Аналіз чутливості дає змогу визначити межі, при яких переважна альтернатива змінюється на іншу. При цьому визначається, до яких пір обрана альтернатива залишається і далі оптимальною, коли одне чи більше покладених в основу рішення значень міняється. Для аналізу використовуються два підходи:

Метод критичного значення. При цьому визначається, при яких параметрах зовнішнього середовища, переважна альтернатива змінюється на іншу.

Метод аналізу відхилень. Згідно з цим підходом визначається, наскільки чутливо реагує критерій ухвалення рішення на зміну заданих параметрів середовища.

Метод критичного значення

Щоб з'ясувати, при яких параметрах зовнішнього середовища переважна альтернатива змінюється на іншу, конкретний параметр зовнішнього середовища варіюється до тих пір, поки рішення, що було досі оптимальним, не є вже таким. Це значення параметра називають **критичним**.

Якщо перевищення критичного значення може розглядатися як малоймовірне, то прийняте рішення може вважатися робастним (стійким). Якщо ж уже при незначних відхиленнях значень зовнішнього середовища варто було б віддати перевагу іншій альтернативі, рішення називають **чутливим**.

Цю інформацію ОПР може застосувати як при оцінюванні ризику при прийнятті рішення, так і в процесі подальшого контролінгу. Якщо параметри середовища наближаються до критичних значень, то потрібно буде оцінити, чи не варто відкоригувати рішення чи вжити якісь додаткові заходи.

Метод аналізу відхилень

Щоб визначити наскільки чутливо реагує критерій ухвалення рішення на зміну заданих параметрів середовища, з певним кроком змінюють параметр зовнішнього середовища і аналізують, наскільки реагує результуюче значення вибраної альтернативи на ці зміни.

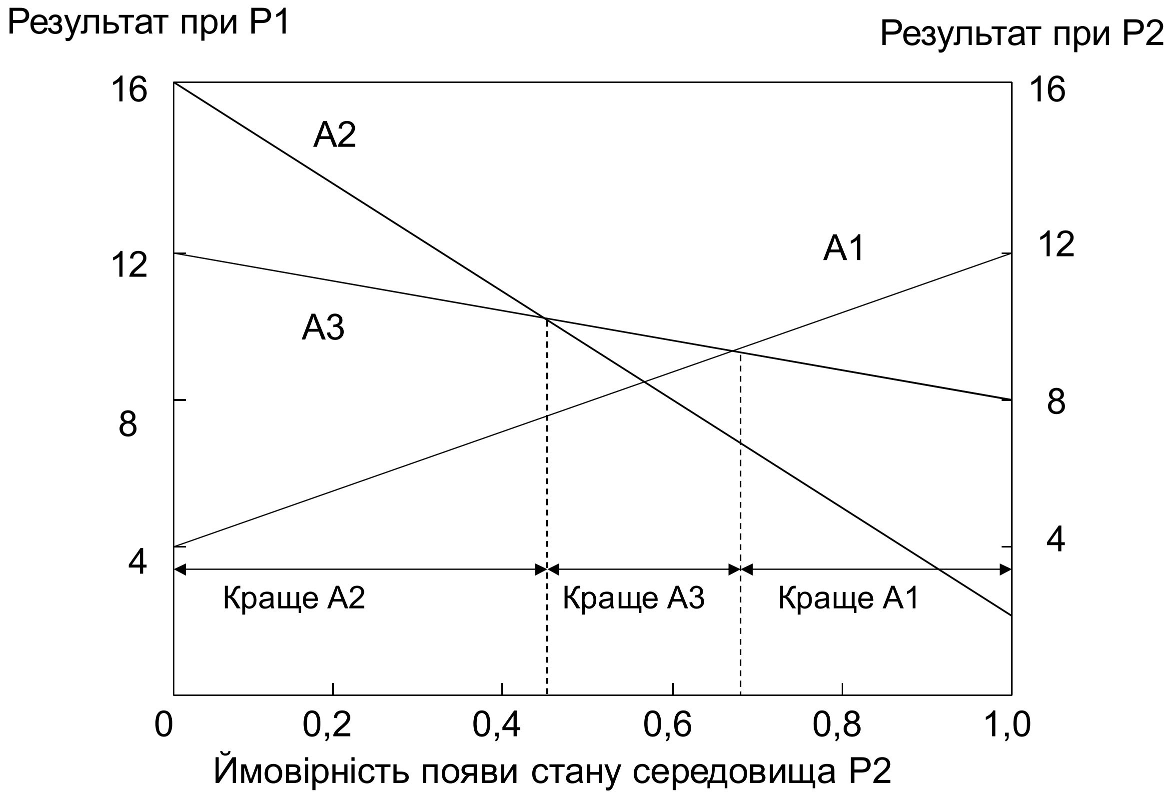
Отримана інформація дає змогу ОПР виявити ті параметри зовнішнього середовища, які призводять до найсуттєвіших відхилень результату, і відстежувати ці параметри з найбільшою увагою.

Аналіз чутливості

Є простий спосіб аналізу чутливості рішення для випадку двох можливих варіантів умов (станів середовища). Спосіб дає змогу визначити рівень ймовірності, за яким вибір варіанту не змінюється.

Приклад: є ряд альтернатив А1- А3 і два варіанти умов Р1 і Р2.

Альтернативи	Стан середовища	
	Р1	Р2
А1	4	12
А2	16	2
А3	12	8

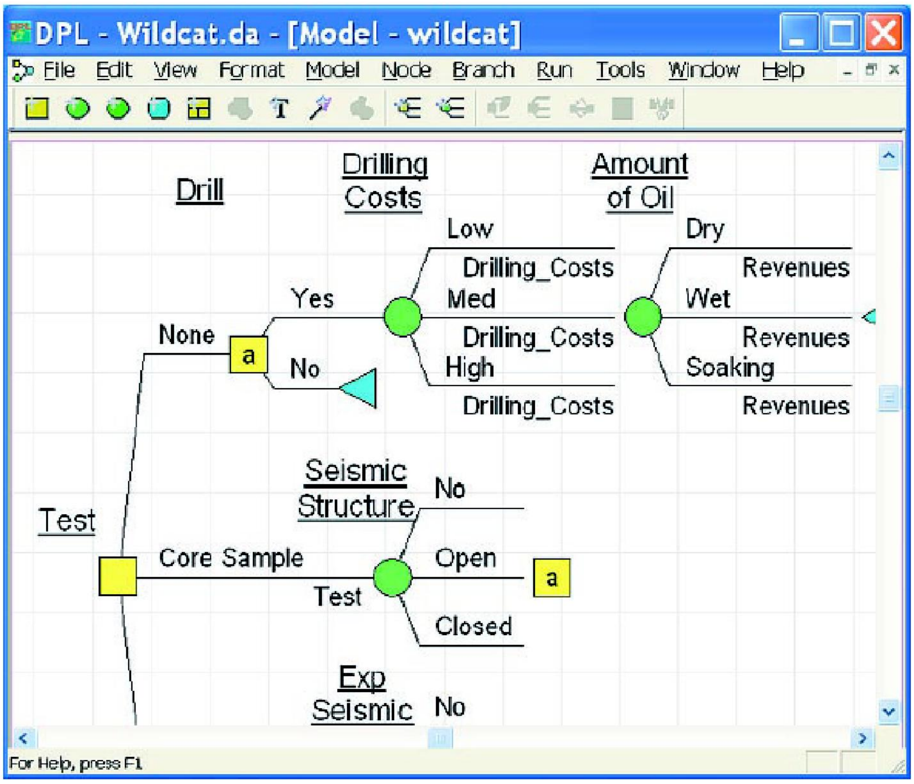


Дерева рішень

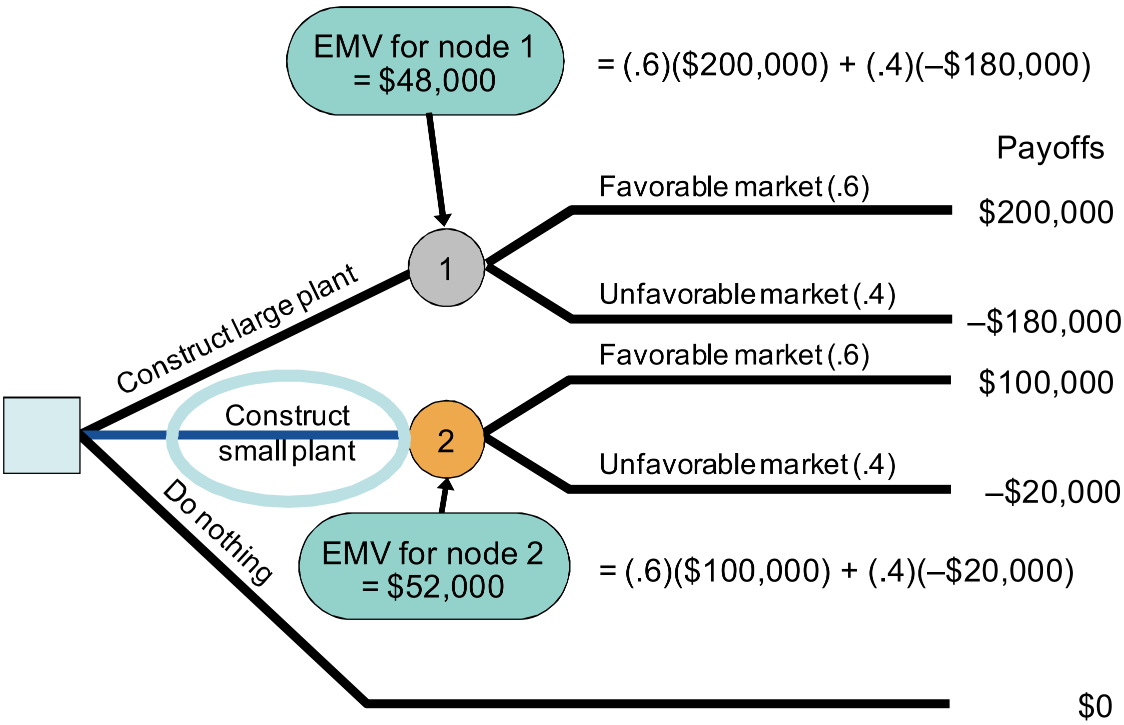
– Інформація з таблиці рішень може бути відображена як дерева рішень

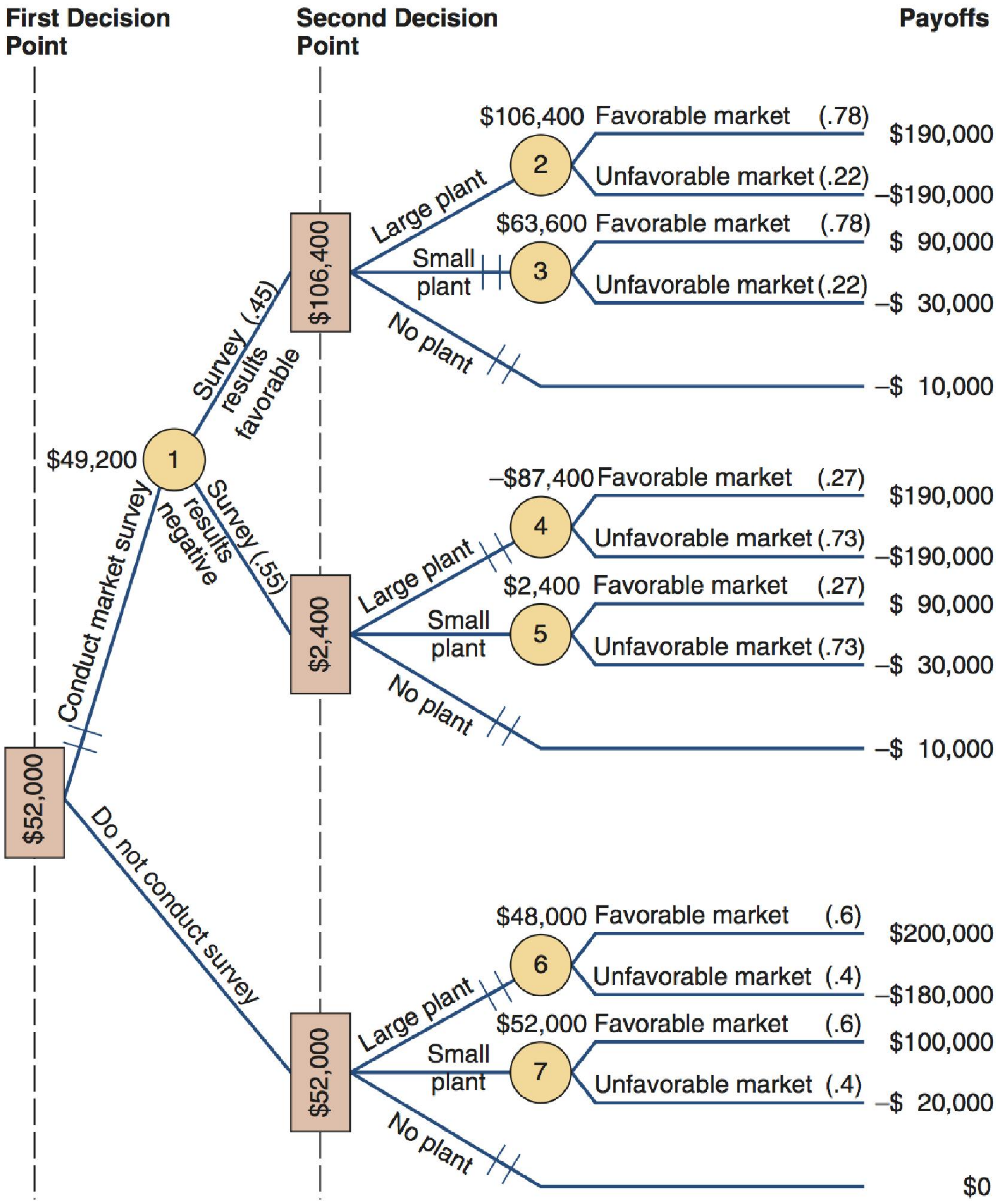
– Дерево рішень – графічне зображення процесу прийняття рішень, яке показує альтернативи рішень, стани природи та їхні ймовірності, а також віддачу для кожної комбінації альтернативи рішень і стану природи

– Підходять для показу послідовних рішень



1. Визначте проблему
2. Структуруйте або намалюйте дерево рішень
3. Призначте ймовірності станів природи
4. Оцініть віддачу для кожної можливої комбінації вирішальних альтернатив і станів природи
5. Вирішіть проблему, опрацьовуючи назад деревовидну схему, що обчислює EMV для кожного вузла стану природи




First Decision Point
Second Decision Point
Payoffs
$52,000
Conduct market survey
Do not conduct survey
$49,200
1
Survey (.45) results favorable
Survey (.55) results negative
$106,400
Large plant
Small plant
No plant
$106,400
2
Favorable market (.78)
Unfavorable market (.22)
$190,000
–$190,000
$63,600
3
Favorable market (.78)
Unfavorable market (.22)
$ 90,000
–$ 30,000
–$ 10,000
$2,400
Large plant
Small plant
No plant
–$87,400
4
Favorable market (.27)
Unfavorable market (.73)
$190,000
–$190,000
$2,400
5
Favorable market (.27)
Unfavorable market (.73)
$ 90,000
–$ 30,000
–$ 10,000
$52,000
Large plant
Small plant
No plant
$48,000
6
Favorable market (.6)
Unfavorable market (.4)
$200,000
–$180,000
$52,000
7
Favorable market (.6)
Unfavorable market (.4)
$100,000
–$ 20,000
$0

ЛЕКЦІЯ 7. БАГАТООСОБОВЕ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Парадокс Кондорсе. Одним з перших, хто зацікавився системами голосування, був французький вчений – маркіз де Кондорсе (1743-1794) за часів, коли Франція переходила від абсолютної монархії до нової системи управління, що дає змогу кожному виборцю голосувати вільно і таємно.

Згідно Кондорсе, справедливе визначення переможця можливе шляхом попарного порівняння кандидатів за кількістю голосів, поданих за них. Принцип Кондорсе, який визначає переможця в демократичних виборах, полягає в наступному: кандидат, який перемагає при порівнянні один на один з будь-яким з інших кандидатів, є переможцем на виборах.

Розглянемо приклад голосування в зборах представників з 60 чол. Нехай на голосування поставлено три кандидата: A, B і C, і голоси розподілилися так

Кількість голосуючих	Вподобання
23	A->C->B
19	B->C->A
16	C->B->A
2	C->A->B

Порівняємо переваги відносно кандидатів. Беремо A і C. A кращий в порівнянні з C на думку 23 осіб, в той час як C віддають перевагу перед A: 19+16+2=37. Тобто C > A. Порівнюючи A і B, B і C одержимо B > A (19+16 проти 23+2) і C > B (23+16+2 проти 19). В результаті отримаємо C >B > A і перемагає кандидат C. Поки все досить розумно.

Зауважимо, що рішення, прийнята відповідно до принципу Кондорсе, відрізняється від того, що було б прийняте простою більшістю, коли переміг би кандидат A.

Однак незабаром Кондорсе зіткнувся з парадоксом, який отримав згодом його ім'я. Парадокс полягав у тому, що переваги виборців, виявлені в ході голосування, суперечать один одному.

Кількість голосуючих	Вподобання
23	A->B->C
17	B->C->A
2	B->A->C
10	C->A->B
8	C->B->A

Порівняємо переваги відносно кандидатів. Більшість виборців висловилися, що C > A (17+10+8 проти 23+2), B > C (23+17+2 проти 10+8) і

A > B (23 +10 проти 17+2+8). Отже, ми прийшли до протиріччя, до нетранзитивного відношенню: A > B > C > A.

Зіткнувшись з цим парадоксом, Кондорсе запропонував вибирати «найменше зло», а саме – ту думку, яку підтримують більшість голосів (обраним слід вважати A).

Метод Борда. Розглянемо варіант процедур и голосування, запропонований Борда. Згідно з ним, кожен, хто голосує ранжує кандидатів або предмети вибору в порядку переваги. Результати голосування виражаються у вигляді кількості балів, набраних кожним з кандидатів. Нехай кількість кандидатів рівне N. Тоді за перше місце присуджується N балів, за друге – N–1,..., нарешті, за останнє – один бал. Голоси за кожного кандидата підсумовуються, і той, хто отримав найбільшу кількість голосів, оголошується переможцем.

Застосуємо метод Борда до прикладу з 1-ї таблиці. Підрахуємо кількість балів для кожного з кандидатів:

A: 23*3+2*2+19*1+16*1=108;
B: 19*3+16*2+23*1+2*1=114;
C: 16*3+2*3+23*2+19*2=138.

Відповідно до методу Борда ми повинні оголосити переможцем кандидата C.

Однак і з методом Борда, як і з принципом Кондорсе, виникають проблеми. Припустимо, що результати голосування у виборчому органі представлені нижче.

Кількість голосуючих	Вподобання
31	A->C->B
10	B->C->A
17	C->B->A
2	C->A->B

Підрахувавши бали відповідно до методом Борда. отримаємо: A (31*3+10+17+2*2)=124, B (31+10*3+17*2+2)=97, C (31*2+12*2+17*3+2*3)=143. Відповідно до методу Борда переможцем треба оголосити кандидата C. Однак в даному випадку явним переможцем є кандидат A, який набрав абсолютну більшість голосів: 31 з 60. Тобто, метод Борда також потребує уточнень в ситуаціях, коли один з кандидатів набрав абсолютну більшість голосів.

Метод Борда часто використовують при обранні кандидатів на посаду і рідко на іншого роду виборах. Цікаво, що метод Борда не завжди дає можливість визначити переможця по Кондорсе.

Спробуємо розібратися з виявленими парадоксом. Для цього розглянемо вибір між трьома альтернативами, який здійснюють три людини.

	Альтернатива	Альтернатива	Альтернатива

	A	B	C
Іваненко	2	1	3
Петренко	1	3	2
Сидоренко	3	2	1

Альтернативи ранжуються за їх перевагами для учасників голосування (3 вважаємо найвищим рангом, 1 – нижчим). Оскільки просте голосування не може виявити переважну альтернативу, доводиться вдаватися до їх попарного порівняння. При виборі між альтернативами A і B, перемагає A, за неї голосують Іванов і Сидоров. При виборі між B і C перемагає B, за неї голосують Петров і Сидоров. Тобто, A > B і B > C. Здавалося б, при виборі між A і C повинна перемогти A. Але ні... Порівняння переваг показує, що перемагає C.

Це відбувається через те, що переваги деяких виборців (в даному випадку Іванова) не є величиною з єдиним максимумом. Щоб зрозуміти, що це означає, уявімо собі вісь на якій розташовані альтернативи A, B, і C. Переваги Петрова мають один максимум (B). Те ж можна сказати і про Сидорова, тому що віддаляючись від своєї кращої альтернативи – A – він все більше втрачає потенційну користь. Однак переваги Іванова виглядають інакше: його кращий варіант – C, тому просування до B не приносить йому користі, але подальше просування до A – приносить.

Взагалі кажучи, раціональна поведінка індивідів жодним чином не означає наявності у них переваг з одним максимумом. Наприклад, в роки війни у В'єтнамі часто стверджувалося, що деякі американці виступають або за негайне виведення військ, або за радикальне збільшення контингенту для досягнення повної перемоги.

Отже, навіть якщо індивідуальний вибір щодо будь-яких альтернатив голосування (три альтернативи і більше) раціональний, колективний вибір може не володіти властивістю транзитивності, тобто з виконання умов A > B і B > C не буде випливати, що A > C. У цьому випадку результат голосування буде визначатися використанням тієї чи іншої процедури голосування. Тоді, організовуючи певним чином цю процедуру, можна управляти вибором переможця.

Другий тор. Наведені приклади показують, що парадокси при голосуванні не виникають тільки у випадку, коли переможець визначається за принципом абсолютної більшості голосів. Однак такий випадок нетиповий для більшості виборів в демократичних країнах. Зазвичай кількість кандидатів більша, ніж два, і випадки, коли хтось із них відразу ж отримує підтримку абсолютної більшості виборців, досить рідкісні.

Розглянемо практику, що широко застосовується голосуванні у два етапи, коли до другого туру виборів виходять два кандидати, за яких проголосувало найбільша кількість виборців.

Повернемося до табл. 2 (нижче, зліва)

Кількість голосуючих	Вподобання
23	A->B->C
17	B->C->A
2	B->A->C
10	C->A->B
8	C->B->A

Кількість голосуючих	Вподобання
23	A->B->C
17	B->C->A
2	A->B->C
10	C->A->B
8	C->B->A

Відповідно до власних уподобань, у другий тур виходять А (23 голоси) і В (17+2=19 голосів), після чого перемагає А. Припустимо тепер, що початкові перші позиції А трохи посилилися (табл. праворуч), і віддавши перевага двох виборців (в 3-му рядку) виглядають тепер як А -> В-> С. Тоді до другого туру виходять А (25 голосів) і С (18 голосів), після чого перемагає С! Таким чином, використання голосування в два тури також не знімає всіх питань.

У подібних ситуаціях велике значення набуває той, хто складає порядок денний – той, хто вирішує, які альтернативи повинні ставитися на голосування і може під підібрати варіанти так, щоб отримати результат, відповідний його власним уподобанням.

Так в США сенаторів спочатку вибирали не прямим всенародним голосуванням, а законодавчими органами відповідного штату. У тому, щоб ввести пряме голосування на пост сенатора, полягала 17-а поправка до Конституції США, яка була прийнята в 1913.

Проблема полягала в тому, що південні сенатори побоювалися, що коли федерація візьме вибори сенаторів під свій контроль, то північні республіканці зроблять що-небудь жахливе, наприклад, допустять до участі в виборах чорношкірих.

Був досягнутий компроміс: законопроект, який вводив прямі вибори сенаторів, але містив поправки, що обмежують контроль федерального уряду над виборами в південних штатах. Його підтримувала більшість (це була можливість А), і при прямому голосуванні між цим проектом і тим, щоб взагалі не проводити прямі вибори (можливість В), проект А набрав би більшість голосів.

Однак сенатор Сазерленд, лідер меншості, яка було проти виборів сенаторів взагалі, вніс поправку: пропозиція про прямі вибори сенаторів без будь-яких особливих умов для Південних штатів (можливість С).

Сазерленд спочатку запустив голосування між А і С. Меншість Сазерленда проголосувала за С, північні республіканці теж проголосували за С, і С перемогло А. Потім постав вибір між С і В, і Сазерленд «раптово» змінив точку зору і проголосував за В, тобто проти прямих виборів взагалі.

Поправка С виконала свою функцію: спочатку вибила підтримуваний більшістю проект А, а потім не пройшла на наступних виборах. Такий прийом отримав назву «Поправка-вбивця». До подібних прийомів відноситься і практика використання «технічного кандидата».

Теорема Ерроу. Систематичне дослідження всіх можливих систем голосування провів у1951 році Кеннет Ерроу з Стенфордского університету. Він поставив питання в найбільш загальному вигляді: чи можна створити таку систему голосування, щоб вона була одночасно раціональною (без протиріч), демократичною (одна людина – один голос) і вирішальною (давала можливість здійснити вибір)? Замість спроб винаходу такої системи Ерроу запропонував набір вимог, аксіом, яким ця система повинна задовольняти. Ці аксіоми повинні бути прийнятними з точки зору здорового глузду і допускати математичні вирази у вигляді деяких умов. На основі цих аксіом Ерроу спробував у загальному вигляді довести існування системи голосування, що задовольняє одночасно трьом перерахованим вище принципам.

Ось ці аксіоми.

1) Аксіома універсальності. Для будь-якого даного ранжування існує такий набір індивідуальних ранжувань, що їх підсумкове ранжування збігається з даним.

2) Аксіома монотонності. Якщо один з голосуючих змінив свою думку на користь кандидата А, а думки інших не змінилися, то в підсумковому ранжуванні положення А не може погіршитися.

З цих аксіом, зокрема, випливає, що якщо всі індивідуальні ранжування збігаються, то і підсумкова збігається з ними, тобто колективний вибір точно повторює одностайну думку всіх голосуючих.

3) Аксіома незалежності. Результат порівняння між двома об’єктами А і В має залежати тільки від результатів порівняння їх в індивідуальних ранжуваннях, але не від порівнянні їх з іншими об’єктами.

Нехай виборець вважає, що з пари кандидатів А і В кращим є А. Ця перевага не повинна залежати від ставлення виборця до інших кандидатів.

Третя аксіома досить приваблива, проте не настільки очевидна з точки зору повсякденної людської поведінки. Так, третя аксіома Ерроу порушується суддями у фігурному катанні. Даючи порівняльні оцінки двом сильним фігуристам в одиночному катанні, вони намагаються врахувати можливість гарного виступу третього сильного кандидата, залишаючи йому шанси стати переможцем. Проте сама можливість пред'явлення вимоги незалежності до системи голосування в якості обов’язкового не викликає сумніву.

Визначивши аксіом – бажані властивості системи голосування – необхідно знайти саму цю систему (правила голосування), або хоча б довести можливість її існування.

Перш за все, відзначимо, що такі правила існують. Наприклад, можна виділити одного з голосуючих і завжди вибирати його ранжування в якості підсумкового. Такі правила природно називати диктаторськими. Ерроу сформулював свої результати у вигляді теореми: будь-які системи голосування, що задовольняють аксіомам універсальності, монотонності та незалежності, засновані на диктаторському правилі. Додавання вимоги виключення диктатора до системи аксіом призводить до неможливості створення системи голосування, що задовольняє всім аксіомам Ерроу. Тому результат Ерроу називають «теоремою неможливості».

Результати, виявлені Ерроу, отримали широку популярність. Вони розвіяли надії знайти досконалу систему голосування.

Проте, результат Ерроу, ще не означає остаточного вирішення цієї проблеми. Близько 60 років математики та економісти роблять спроби змінити вимоги Ерроу, «пом’якшити» аксіоми, щоб уникнути виводу, настільки неприємного для демократичної системи голосування. Однак системи аксіом, що виходять виявляються навіть більш спірними, ніж початкові аксіоми Ерроу.

Звернемо увагу на ще одну грань результату Ерроу. Проблема створення ідеальної системи голосування – це, по суті, проблема ранжування. Переможець голосування повинен бути найкращою з можливих альтернатив. Таким чином, результат Ерроу показує нерозв’язність проблеми вибору колективом найкращого рішення.

Виборчі системи. Історично першою виборчою системою стала мажоритарна система. Мажоритарна система (від французького слова majorite – більшість) – загальна назва виборчих систем, в основу яких, при визначенні результатів голосування, закладено принцип більшості. За цією системою обраним вважається той, за кого було подано більшість голосів. Залежно від вимог до величини необхідного для обрання більшості голосів розрізняють мажоритарні системи відносної, абсолютної і кваліфікованої більшості.

При мажоритарній системі відносної більшості потрібно зібрати просту більшість голосів, тобто кількість голосів більша, ніж у опонентів. Така система застосовується, наприклад, на парламентських виборах у Великобританії і США.

Дана виборча система має низку переваг:

- вона результативна, тобто кожне депутатське місце заміщається відразу, в результаті тільки одного голосування;
- вона економна, оскільки немає необхідності проводити повторне голосування в округах;
- зрозуміла виборцям (на відміну від змішаних і нетрадиційних систем);
- вона забезпечує пряме представництво для жителів конкретного виборчого округу. Виборці можуть краще знати свого депутата, який представляє їх інтереси в представницьких органах;
- вона дає можливість великим партіям отримати «тверду» більшість і сформувати стійкий уряд.

Однак мажоритарна система відносної більшості має ряд істотних, з точки зору представництва, недоліків:

1. Дана виборча система на рівні виборчого округу призводить до втрати голосів виборців, іноді досить значної.

Припустимо, по одному округу балотуються 4 кандидати, і голоси виборців розподілилися між ними в такий спосіб:

А – 11%; Б – 23%; В – 34%; Г – 32%.

Переможцем на виборах буде визнаний кандидат B, який набрав 34% голосів виборців. Голоси, подані за інших кандидатів, в цілому складають 66%. Таким чином, голоси 2/3 виборців залишаються неврахованими і не представленими, а депутат у виборному органі представляє лише 1/3 виборців свого округу.

Якщо в окрузі боротьбу ведуть троє або більше претендентів, кандидат, який отримав менше половини від загальної кількості голосів, може отримати мандат завдяки тому, що інші голоси «розпорошуються» між його суперниками. Наприклад, в Великобританії на виборах в 1992 році в окрузі Інвернесс в важкому протистоянні з трьома іншими партіями гору взяли ліберальні демократи, які набрали всього 26% голосів.

2. Застосування мажоритарної системи відносної більшості на національному рівні може призвести до суттєвого спотворення результатів виборів.

Англійські вчені Е. Лейкман і Дж. Д. Ламберт, досліджуючи механізм дії виборчої системи відносної більшості в Англії, писали: «Часто кожні вибори виявляють приголомшливу невідповідність між нацією, якою її відображає голосування, і палатою громад, що утворюється в результаті цього голосування». Таке «відображення» зазвичай нагадує криве дзеркало: кожна риса нібито відповідає певною мірою оригіналу, але одна з них несподівано набуває величезних розмірів, тоді як інша, можливо не менш важлива, стає ледь помітною».

Наприклад, в 1997 році на парламентських виборах у Великій Британії партія лейбористів отримала 64% мандатів – такої більшості ще ніхто не отримував в історії сучасного парламентаризму, і при цьому за неї проголосувало лише 44% виборців. Консерватори отримали відповідно 31% голосів і 25% мандатів, а ліберальні демократи, яких підтримало 17% виборців, – всього 7% місць. (Кандидати від інших партій набрали 7% голосів і 4% місць).

У деяких випадках, при використанні мажоритарної виборчої системи, може статися і так, що політична партія, за яку голосує більшість виборців, отримає в парламенті меншість місць. Таким чином, розкидані по країні меншини не можуть домогтися більшості в кожному окремо взятому окрузі. Щоб «проштовхнути» свого депутата в парламент, потрібно компактне проживання. Крім того, можливі махінації з «нарізкою» виборчих округів (джеримендерінг).

3. Мажоритарна система відносної більшості не виконує також умову рівного представництва від округів.

Нерівність в представництві може проявлятися, по-перше, в тому, що від різних округів можуть обиратися депутати, за яких проголосувала різна кількість виборців. Одні депутати можуть набрати менше половини, інші 90% всіх поданих голосів. По-друге, одні виборчі округи можуть перевершувати інші за чисельністю виборців і голоси виборців з різних округів можуть мати нерівну «вагу». Наприклад, якщо в одному з округів – дві тисячі виборців, а в іншому – п'ятсот, то в більше населеному окрузі норма представництва дорівнює 0,5 на тисячу виборців, а в менш населеному – 2 на тисячу виборців.

Розглянемо тепер механізм дії пропорційної системи. Відповідно до цієї системи кожна партія, що бере участь у виборах, отримує кількість депутатських місць, пропорційну кількості поданих за неї голосів виборців. Пропорційна виборча система діє тільки в багатомандатних виборчих округах, і голосування ведеться за партійними списками.

Сьогодні багато країн використовують певну форму пропорційної системи. У їх числі Німеччина, Італія, Іспанія, Швеція і Швейцарія. В нашій країні за пропорційною системою обирається половина депутатів Верховної Ради (225) – по загальнонаціональному багатомандатному виборчому округу.

Існують різні способи пропорційного розподілу мандатів. Один з них – метод, заснований на методі виборчої квоти. Виборча квота обчислюється шляхом ділення загальної кількості голосів виборців, поданих в окрузі, на кількість мандатів, що підлягають розподілу. Іншими словами, визначається мінімальна кількість голосів виборців, яку необхідно набрати партії, щоб отримати один мандат. Цей спосіб визначення квоти відомий як метод Томаса Гера (англійського адвоката, який запропонував його в 1855 році).

Припустимо, що в багатомандатному окрузі за вісім депутатських мандатів ведуть боротьбу п’ять партійних списків кандидатів, за які в цілому подано 400 тис. голосів виборців. Список партії А отримав 126 тис. голосів, список партії Б – 94 тис., список партії В – 88 тис., список партії Г – 65 тис., і список партії Д – 27 тис. голосів. Квота Гера в цьому випадку складе 400 000: 8 = 50 000.

Відповідно до отриманої квоти розподіляємо мандати між партіями. Для цього кількість голосів виборців, поданих за кожен партійний список кандидатів, ділимо на виборчу квоту:

Партія	Кількість голосів, поділене на квоту	Кількість мандатів	Залишок голосів
А	126 000: 50 000	2	26 000
Б	94 000: 50 000	1	44 000
В	88 000: 50 000	1	38 000
Г	65 000: 50 000	1	15 000
Д	27 000: 50 000	0	27 000

З восьми мандатів відразу розподілити вдалося лише п’ять. Виникає проблема розподілу решти мандатів. Крім того, зберігається великий залишок «незатребуваних» голосів, який в сумі складає 150 тис. (37,5%).

Для подальшого розподілу мандатів може використовуватися, наприклад, правило найбільшого залишку.

Правило найбільшого залишку вимагає передати нерозподілені мандати тим партійними списками кандидатів, у яких є найбільші залишки голосів виборців. У нашому випадку по одному мандату отримають партійні списки Б, В і Д. Остаточні результати будуть такі:

А – 2; Б – 2; В 2; Г – 1; Д 1.

Партійний список Д, який зібрав 27 тис. голосів виборців, отримав один мандат. Партійний список Г також отримав один мандат, хоча за нього проголосувало 65 тис. виборців, тобто в 2,4 рази більше. Партійний список А, який зібрав 126 тис. голосів виборців, отримав тільки два мандати. Таким чином, відбулося відхилення від пропорційності.

Крім того, при застосуванні пропорційної системи необхідно враховувати механізм розподілу мандатів всередині партійних списків.

Існує два основні варіанти розподілу мандатів всередині партійного списку: система «жорстких» і система «гнучких» списків. При застосуванні системи «жорстких» списків, виборець голосує виключно за партійний список. Такий варіант потенційно збільшує вплив центрального керівництва партій, так як саме лідери визначають порядок розташування кандидатів.

При «жорстких» списках можливе використання «технології паровоза», коли на чільне виборчого списку ставляться популярні особи, які потім відмовляються від своїх мандатів, в результаті чого в парламент потрапляють нікому не відомі особистості з кінця списку («вагони»).

Якщо партійні списки «жорсткі» і виборці голосують за весь список, то слабшає зв'язок між виборцями і їх виборними представниками. Ця проблема не виникає в разі «гнучких» партійних списків. Система «гнучких» списків дає виборцям можливість змінити порядок розташування кандидатів у списках. Простим варіантом цієї системи є «список з порядковими номерами з правом вибору одного кандидата», який використовується, наприклад, в Бельгії та Данії. Кожна партія представляє список кандидатів під номерами. Виборці можуть відзначити в бюлетені або весь список, або окремого кандидата зі списку. Голосування за окремих кандидатів приєднується до голосів, відданих за партію, для пропорційного розподілу місць, а також просуває кандидата вгору за списком. В системі, що використовує «список з порядковими номерами з правом вибору кількох кандидатів», яка, наприклад, діє в Італії, виборці можуть голосувати за трьох або чотирьох кандидатів із партійного списку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Теорія прийняття рішень: підручник / А. В. Катренко, В. В. Пасічник, В. П. Пасько. – К.: BHV, 2009. – 447 с.
2. Лепа Р. М. Прийняття управлінських рішень на підприємстві: теорія та практика: Моногр. / Р. М. Лепа, В. М. Тимохін; НАН України. Ін-т економіки пром-сті. – Донецьк: Юго-Восток, ЛТД, 2004. – 262 с.
3. Введение в теорию и методы принятия решений: учеб. пособие / В. Д. Дмитриенко, В. А. Кравец, С. Ю. Леонов. – Х.: ХПИ, 2008. – 141 с.
4. Приймак В. М. Прийняття управлінських рішень: навч. посібник / Приймак В. М. – К.: Атіка, 2008. – 240 с.
5. Гевко І. Б. Методи прийняття управлінських рішень: Підручник. / І. Б. Гевко. – К.: Кондор, 2009. – 187 с.
6. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. / Т. Саати. – М.: Радио и связь, 1993.
7. Эддоус Р. Методы принятия решений / Эддоус Р., Стенсфилд М. – М.: Инфра, 2000.
8. Деордица Ю. С. Модели и методы принятия решений / Ю. С. Деордица. – Луганск: ВНУ, 2005.
9. Бродецкий Г. Л. Системный анализ в логистике, выбор в условиях неопределённости / Г. Л. Бродецкий. – Москва: Academia, 2010. – 336 с.
10. Ногин В. Д. Принятие решений при многих критериях: учебн.-метод. пособ. / В. Д. Ногин. – СПб: ЮТАС, 2007. – 104 с.