Київський національний університет

імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

Хома-Могильська Світлана Григорівна

УДК 517.944

КРАЙОВІ ПЕРІОДИЧНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

01.01.02 – диференціальні рівняння

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Самойленко Анатолій Михайлович,
доктор фізико-математичних наук,
академік НАН України

Київ – 2007

З М І С Т

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

Введемо деякі позначення.

C_π – простір функцій двох змінних *x* і *t*, неперервних і обмежених на $[0,\pi]\times R$.

$C_\pi^{k,l}$ – простір функцій $u \in C_\pi$ таких, що $D_t^k D_x^l u \in C_\pi$.

$G_{\pi t}$ – простір функцій двох змінних *x* і *t*, неперервних і обмежених на $[0,\pi]\times R$ разом із похідною по *t*.

Q_ω – простір функцій $g(x,t)$, які задовольняють на $[0,\pi]\times R$ співвідношення $g(x,\ t+\omega)=g(x,t)$. Сюди будемо включати і ω – періодичні функції $\mu=\mu(t)$ однієї змінної.

$L(X,Y)$ – простір лінійних і обмежених відображень *X* в *Y*.

$A_2=\{g: g(x,t)=g(\pi-x,t+\pi)=g(x,t+2\pi)\}$.

$A_2^+=\{g: g(x,t)=-g(\pi-x,t)=-g(x,\pi-t)=g(x,-t)\}$.

$A_{4\pi}=\{g: g(x,t)=-g(x,t+2\pi)\}$.

$A_1=\{g: g(x,t)=g(\pi-x,\ t)=g(x,\ t+\pi)\}$.

$A_2^-=\{g: g(x,t)=g(\pi-x,t+\pi)=g(x,t+2\pi)=-g(x,-t)\}$.

$A_1^-=\{g: g(x,t)=g(\pi-x,t)=g(x,t+\pi)=-g(x,-t)\}$.

$A_{2\pi}^-=\{f: f(x,t)=f(x,t+2\pi)=-f(x,-t)\}$.

$A_{2\pi}^+=\{f: f(x,t)=f(x,t+2\pi)=f(x,-t)\}$.

$Q_{2\pi}^-=\{\mu: \mu(t)=\mu(t+2\pi)=-\mu(-t)\}$.

ВСТУП

Актуальність теми. При дослідженні крайових періодичних задач як для звичайних диференціальних рівнянь, так і рівнянь з частинними похідними, завжди виникають такі дві проблеми: відшукання методу знаходження розв'язку крайової періодичної задачі та встановлення умов існування таких розв'язків. Відомо, що для звичайних диференціальних рівнянь розроблено достатньо методів відшукання періодичних розв'язків, у тому числі і чисельно-аналітичний метод А. Самойленка [39]. Що ж стосується рівнянь з частинними похідними, особливо як лінійних, так і нелінійних рівнянь гіперболічного типу, то слід зазначити, що існують методи, за допомогою яких доводять лише існування розв'язків крайових періодичних задач. Усіх їх можна поділити на чотири види.

До першого можна віднести так звані класичні методи, які передбачають відшукання розв'язку методом розділення змінних (методом Фур'є) [5, 9, 13, 29, 31, 34, 35, 41, 44].

Другий вид – це функціональні методи, які почали розвиватися в 60–х роках XX століття і передбачали доведення лише існування розв'язку на підставі властивостей оберненого оператора. Це методи Г. Брезіса, Д. Корона, Л. Ніренберга, П. Рабиновича, І. Рудакова [11, 16, 38, 41, 61–74].

Третій вид – методи малих знаменників (метод Б. Пташника та його учнів) [3, 4, 31, 34, 35].

Четвертий вид – аналітичні методи, запропоновані чеськими математиками О. Вейводою та М. Штедри [8, 75–77] та продовжені українськими математиками Ю. Митропольським та Н. Хомою [20, 21].

Слід зазначити, що результати, отримані математиками, які використовували різні методи відшукання розв'язків крайових періодичних задач, не пов'язані між собою. Наприклад, якщо взяти роботу О. Вейводи і

М. Штедри за 1984 рік [8], то в ній немає посилань на результати, одержані Б. Пташником та П. Рабиновичем у 1967 році (посилань на роботи [31, 71–74]). З вищесказаного випливає, що розв'язність крайових періодичних задач вимагає встановлення нових умов розв'язності та проведення порівняння даних результатів.

Отже, поставлена проблема є актуальною тепер і її розв'язності присвячена ця дисертаційна робота.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тема дисертаційної роботи пов'язана з тематикою досліджень кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, тема 06БФ038-01 „Якісні та аналітичні методи дослідження і моделювання нелінійних систем та фізико–механічних полів" (керівник М. Перестюк, номер державної реєстрації 0106U005863). Частково дисертаційні дослідження виконувалися в рамках держбюджетної теми „Методи відшукання періодичних розв'язків крайових задач" (номер державної реєстрації №0106U000518), розробкою якої займається кафедра економіко–математичних методів і моделей Тернопільського національного економічного університету.

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційного дослідження є встановлення нових форм і методів відшукання періодичних розв'язків крайових задач для гіперболічного рівняння другого порядку.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі завдання:

1. Встановити зв'язок між різними результатами, одержаними в другій половині XX століття.

2. Встановити умови існування розв'язку крайової періодичної задачі для лінійного неоднорідного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = g(x,t)$.

3. Провести порівняльну характеристику одержаних результатів.

4. Довести, що узагальнені розв'язки крайової періодичної задачі легко встановлюються за допомогою класичного методу характеристик.

5. Показати, що одержані результати можна застосувати і для більш загальних крайових періодичних задач.

Об'єктом дослідження є крайові періодичні задачі для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку.

Предметом дослідження є відшукання періодичних розв'язків вказаних вище задач.

Наукова новизна отриманих результатів:

– встановлено умови розв'язності крайової $\omega -$ періодичної задачі.

– на підставі даних умов уперше сформульовано основну теорему про розв'язність крайової періодичної задачі у випадку $\frac{2\pi}{\omega} -$ ірраціональне число ($\omega -$ період).

– за допомогою одержаного методу доведено ряд формул точного розв'язку крайової періодичної задачі для різних значень періоду $\omega = 2\pi$, $\omega = \pi$, $\omega = 4\pi$.

– побудовано узагальнено неперервні розв'язки крайової періодичної задачі.

– показано практичне застосування одержаних результатів.

Практичне значення одержаних результатів. Усі отримані в дисертаційній роботі результати мають теоретичне значення. Вони можуть бути використані для подальшого розвитку теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними.

Особистий внесок здобувача. Усі наукові результати, включені в дисертацію, одержані здобувачем особисто. Щодо розглянутих в дисертації задач, які розв'язані в працях спільно з академіком НАН України Ю. Митропольським, співавтору належить їх постановка і загальне керівництво роботою.

Апробація результатів дослідження. Результати дисертаційного дослідження доповідались та обговорювалися на:

- Восьмій Міжнародній науковій конференції ім. академіка М. Кравчука (Київ, 2000 р.);
- Міжнародній науковій конференції "Диференціальні та інтегральні рівняння" (Одеса, 2000 р.);
- Міжнародній науковій конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (Дрогобич, 2001 р.);
- Міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння і нелінійні коливання" (Чернівці, 2001 р.);
- X Міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 2004 р.);
- Конференції молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. Підстригача (Львів, 2004 р.);
- Міжнародній науково–практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених „Шевченківська весна. Сучасний стан науки: досягнення, проблеми та перспективи розвитку" (Київ, 2005 р.);
- XI Міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 2006 р.);
- Всеукраїнській науковій конференції молодих вчених і студентів з диференціальних рівнянь та їх застосувань, присвяченій 100-річневому ювілею Я. Б. Лопатинського (Донецьк, 6-7 грудня 2006 р.);
- Науковому семінарі кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь КНУ ім. Тараса Шевченка;
- Науковому семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник академік НАН України А. Самойленко).

Публікації. За результатами дисертаційного дослідження опубліковано 17 робіт, з них 8 – у фахових виданнях, що входять до переліку №1, затвердженого ВАК України, та 9 – у матеріалах міжнародних та всеукраїнських наукових конференцій.

РОЗДІЛ І
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ, ПРИСВЯЧЕНОЇ ДОСЛІДЖЕННЮ КРАЙОВИХ ПЕРІОДИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

При розв'язанні крайових задач для рівнянь із частинними похідними першочерговими є питання про встановлення умов їх розв'язності та існування єдиного розв'язку. Як приклад, можна навести відомі умови Шапіро-Лопатинського, що стосуються розв'язності крайових задач для еліптичних рівнянь[14]. З іншого боку, метод відшукання розв'язку вважається досконалим і обґрунтованим, якщо він допускає широке застосування і узагальнення. Інколи автори, розробляючи методи відшукання розв'язків крайових задач, не задумуються над проблемою їх значущості для розвитку математики. Про це може свідчити порівняльна характеристика з іншими відомими методами. Щоб проілюструвати сказане, розглянемо таку крайову періодичну задачу:

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x,t), \qquad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathrm{R}, \tag{1.1}$$

$$u(0,t) = u(\pi, t) = 0, \qquad t \in \mathrm{R}, \tag{1.2}$$

$$u(x, t + 2\pi) = u(x,t), \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \in \mathrm{R}. \tag{1.3}$$

Як відомо, існують різні способи дослідження цієї задачі, але більшість з них використовують метод, згідно з яким розв'язок шукаємо у вигляді тригонометричного ряду

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin kx. \tag{1.4}$$

Таке зображення розв'язку вперше знаходимо в роботі [4], де в області $\{0 \le t, \ x \le 1\}$ розглянуто задачу

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \Phi(x,t) + \varepsilon f(z),$$

$$z(0,t) = z(1,t) = 0,$$

$$z(x,0)=z(x,1)\,,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=1}.$$

Доведено, якщо $a=(2m+1)/p$ (m, p – цілі числа, $p\neq 0$), то при відповідних умовах, що задовольняють функції $\Phi(x,t)$ та $f(z)$ вказана задача при достатньо малому значенні параметра $|\varepsilon|$ має єдиний класичний розв'язок у класі функцій, зображених рядами

$$z(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty} z_{2k+1}(t)\sin(2k+1)\pi x\,.$$

Відшукання розв'язку у формі (1.4) автоматично забезпечує виконання умови (1.2), але, з іншого боку, вимагає накладання додаткових умов [42, 44] на праву частину неоднорідного рівняння (1.1), зокрема виконання умов Стєклова [42]:

$$g(0,t)=g(\pi,t)=0\,,\qquad \frac{\partial^2 g(0,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 g(\pi,t)}{\partial x^2}=0\,. \tag{1.5}$$

Виявляється, що розв'язок задачі (1.1)–(1.3) може існувати і без накладання умов (1.5). Справді, розглянемо функцію

$$\tilde{u}(x,t)=-\frac{1}{2}\,x\sin x\sin t\,. \tag{1.6}$$

Легко переконуємося, що ця функція задовольняє крайову умову (1.2) і є 2π–періодичною по t, тобто задовольняє умову (1.3). На підставі безпосередньої перевірки отримуємо, що функція (1.6) задовольняє рівняння

$$u_{tt}-u_{xx}=\cos x\sin t\,. \tag{1.7}$$

Отже, якщо покласти $g(x,t)=\cos x\sin t$, то звідси випливає, що для такої функції умови (1.5) не виконуються. Це означає, що умови (1.5) не охоплюють усіх класів функцій, для яких існує розв'язок задачі (1.1)–(1.3). Більш того, розв'язок задачі (1.1) може бути записаний у вигляді

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kt+b_k\sin kt\right)\sin kx-\frac{1}{2}x\sin x\sin t=u^0(x,t)+\tilde{u}(x,t),\qquad(1.8)$$

де a_k і b_k – довільні числа. Саме коефіцієнти a_k і b_k вказують на те, що існує нескінченна множина розв'язків крайової періодичної задачі (3.1)–(3.3). Слід зазначити, що на такий момент дослідження задачі (1.1)–(1.3) вперше було звернуто увагу в 1984 році в роботі чеських математиків О. Вейводи і М. Штедри [8]. Ними встановлено, що єдиність розв'язку можна досягнути лише при виборі конкретного періоду ω, замінивши умову (1.3) на більш загальну умову періодичності

$$u(x,t+\omega)=u(x,t),\quad 0\le x\le\pi,\quad t\in \mathrm{R}.\qquad(1.9)$$

У цій роботі [8] вперше виділено три класи функцій A_1, A_2, A_3, що відповідні періоду $\omega=\dfrac{2\pi p}{q}$, $p,q\in \mathrm{N}$, у яких можуть існувати класичні розв'язки задачі (1.1), (1.2), (1.9) і ці розв'язки задаються аналітично, тобто за допомогою формул. Це дає змогу уникнути виразів вигляду (1.4), в яких потрібно сумувати нескінченні ряди Фур'є і встановлювати умови їх диференційованості. Як вважають автори роботи [8], при такому дослідженні відсутні умови на праву частину $g(x,t)$ рівняння (1.1) у граничних точках $x=0$ та $x=\pi$. Основними ж недоліками роботи [8] є :

1) неправильність формули розв'язку у класі функцій $A_2=\{g: g(x,t)=g(\pi-x,t+\pi)=g(x,t+2\pi)\}$;

2) твердження, що класичний розв'язок існує лише у формі $u(x,t)=\tilde{u}(x,t)$, де $\tilde{u}(x,t)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1.1);

3) відсутність апріорних оцінок як самого розв'язку, так і його похідних, що не дає можливості застосувати одержані результати для дослідження квазілінійних рівнянь вигляду

$$u_{tt}-u_{xx}=F(x,t,u,u_t,u_x).\qquad(1.10)$$

Узагальненням результатів О. Вейводи і М. Штедри присвячені роботи українських математиків, зокрема роботи Ю. Митропольського та його учнів [20, 21, 23]. У них вперше наведено формулу точного розв'язку крайової періодичної задачі (1.1)–(1.3) у просторі A_2 для $\omega = 2\pi$. До того ж для одержаного розв'язку зроблені точні оцінки як розв'язків, так і їх похідних і отримані результати використано для дослідження квазілінійних періодичних задач вигляду (1.10), (1.2), (1.3).

Слід зазначити, що при дослідженні крайової періодичної задачі (1.10), (1.2), (1.3) раніше було одержано два різних результати. Один з них належить П. Рабиновичу [71, 72], а другий – чеським математикам О. Вейводі та М. Штедри [8, 75–77]. Згідно з результатом П. Рабиновича [71], єдиний розв'язок (навіть класичний) квазілінійної задачі

$$u_{tt} - u_{xx} = F(x,t,u,u_t,u_x),\ 0 < x < \pi, \quad t \in \mathrm{R}, \tag{1.11}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \in \mathrm{R}, \tag{1.12}$$

$$u(x,t+2\pi) = u(x,t), \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \in \mathrm{R}, \tag{1.13}$$

при достатній гладкості функції $F(x, t, u)$ за всіма змінними і при достатньо малому значенні параметра ε завжди зображується у вигляді $u(x,t) = u^0(x,t) + \varepsilon w(x,t)$, де $u^0(x,t)$ – розв'язок однорідного рівняння $u^0_{tt} - u^0_{xx} = 0$, а $w(x,t)$ – розв'язок неоднорідного рівняння (1.11). З іншого боку, згідно з результатом О. Вейводи і М. Штедри [8] розв'язок задачі (1.11)–(1.13) існує лише для спеціального класу функцій, а саме A_2, при цьому єдиний розв'язок може існувати тільки тоді, коли $u^0(x,t) \equiv 0$. Зауважимо, що робота [8] опублікована у 1984 році, а роботи П. Рабиновича – у 1967 і 1969 роках. Як не дивно, але у вказаній роботі О. Вейводи і М. Штедри немає навіть посилання на роботи П. Рабиновича, а отже, немає порівняння отриманих результатів.

Більш того, потрібно зазначити, що в кінці двадцятого століття багато робіт було присвячено дослідженню лише існування розв'язків нелінійних гіперболічних рівнянь і систем рівнянь, які мають практичне застосування у різноманітних сферах математичної фізики. Особливо цікавою була задача про існування періодичних розв'язків. Саме над нею працювала велика кількість закордонних математиків [32, 33, 61–77]. У багатьох роботах розглядалося одновимірне гіперболічне рівняння, лінійна частина якого є оператор Даламбера, а нелінійність набувала вигляду $F(x, t, u)$ [61–68, 74]. Для одержання результату використовувалися найновіші методи функціонального аналізу відшукання розв'язків операторних рівнянь. На підставі вивчення властивостей відповідного оператора і доводилося лише існування розв'язку для окремого випадку правої частини рівняння (1.10).

Проілюструємо сказане результатом, одержаним у 90-х роках XX століття московським математиком І. Рудаковим [36-38]. Розглядається така крайова періодична задача:

$$u_{tt} - u_{xx} = g(u), \qquad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathrm{R}, \tag{1.14}$$

$$u(0,t) = u(\pi, t) = 0, \qquad t \in \mathrm{R}, \tag{1.15}$$

$$u(x, t+2\pi) = u(x,t), \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \in \mathrm{R}. \tag{1.16}$$

Функція $g(u)$ –неперервна і

$$g(0) = 0. \tag{1.17}$$

Потрібно довести існування нетривіального розв'язку задачі (1.14)–(1.16). Позначимо через Ω множину $(0,\pi)\times(0,2\pi)$ і задамо оператор

$$\square : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega) \tag{1.18}$$

таким чином: область визначення

$$D(\square) = \left\{ u(x,t) \in C^{\infty}(\Omega) \right| \quad u(x,t) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=0}^{M} \sin kx \left(a_{kl} \cos lt + b_{kl} \sin lt \right),$$

де $\quad M, N = 1, 2, ..., \quad a_{kl},\ b_{kl} \in \mathrm{R}\}$

і

$$\Box u = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u, \quad \forall u \in D(\Box).$$

Позначимо буквою A оператор, який є замиканням за графіком оператора $\Box$. Після вивчення властивостей оператора A встановлено, що він є самоспряжений, має замкнений образ $R(\mathrm{A})$ і нескінченновимірне замкнене ядро $N(\mathrm{A})$ таке, що $R(\mathrm{A}) = N(\mathrm{A})^{\perp}$ в $L_2(\Omega)$, до того ж потрібно зауважити, що нескінченновимірність ядра оператора A є основною перешкодою при дослідженні квазілінійних гіперболічних рівнянь вигляду (1.10).

Функції $\{\sin kx \cos lt, \quad \sin kx \sin lt\}$ є власними векторами оператора A з власними числами $k^2 - l^2$. У роботі [38, §1] доведено, що множина власних чисел оператора A складається із всіх цілих непарних чисел, крім -1 і всіх цілих чисел, які діляться на 4, крім -4. Проводиться нумерація цих власних чисел у порядку зростання:

$$... < ... < \lambda_{-m} < ... < \lambda_{-1} < \lambda_0 = 0 < \lambda_1 < ... < \lambda_m < ....$$

Доведено, що якщо $g(u)$ задовольняє умову (1.17) і існує ціле число n і стала $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ такі, що графік функції $g(u)$ лежить між прямими $y = (\lambda_n + \delta) u$ і $y = (\lambda_{n+1} - \delta) u$, то квазілінійна задача (1.14)–(1.16) не має нетривіального розв’язку. Ця ситуація спонукала багатьох математиків побудувати нову модель відшукання нетривіального розв’язку квазілінійної задачі (1.14)–(1.16), а саме: розглядається новий оператор $\mathcal{A}$, який є звуженням A на підпростір

$$\mathrm{H} = \{ u \in L_2(\Omega) \mid \quad u - 2\pi\text{–періодична по } t \text{ і } \quad u(x,t) = u(\pi - x, t + \pi),$$
$$\forall x \in (0, \pi), \quad \forall t \in \mathrm{R} \}.$$

Відмітимо, що простір H було введено Ж. Короном [68] і не доведено, як такий простір виникає, що потребує подальшого дослідження. Однак необхідно зазначити, що введення нового оператора $\mathcal{A}$ дало змогу одержати низку нових результатів про існування нетривіальних розв'язків квазілінійної задачі (1.14)–(1.16). Нехай

$$\ldots < \mu_{-2} < \mu_{-1} < 0 < \mu_0 < \mu_1 < \ldots$$

власні числа оператора $\mathcal{A}$. Множина $\{\mu_i\}$ є підмножиною множини $\{\lambda_i\}$ і складається зі всіх непарних цілих чисел, крім -1.

Якщо припустити, що $g(u)$ задовольняє такі умови: 1) існують дійсні числа $R > 0$, $\delta \in (0, 1/2)$ і ціле число n такі, що при $|u| \geq R$ графік функції $g(u)$ лежить між прямими $y = (\mu_n + \delta)u$ і $y = (\mu_{n+1} - \delta)u$; 2) при малих $|u|$ $(0 < |u| < \varepsilon)$ графік $g(u)$ знаходиться ззовні сектора, обмеженого прямими $y = \mu_n u$ і $y = \mu_{n+1} u$.

Теорема 1.1 **[38].** *Якщо $g(u)$ задовольняє вказані припущення і умову (1.17), а також деякі умови зростання на відрізку $[-R, R]$, то задача (1.14)–(1.16) має нетривіальний слабкий розв'язок $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Крім цього, якщо $g \in C^k(\mathrm{R})$ при $k \geq 1$, то $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$, до того ж, якщо $g \in C^1(\mathrm{R})$, то слабкий розв'язок задачі (1.14)–(1.16) буде класичним.*

Зауважимо, що у теоремі Ж. Корона (див. теорему 2 в оглядовій статті Х. Брезіса [67], яка присвячена задачі про вільні коливання) вимагається монотонність функції $g(u)$, а в роботах [61], [66], [68] доведено існування нетривіальних розв'язків задачі (1.14)–(1.16) при асимптотичних лінійних функціях $g(u)$, що означає існування такої границі:

$$\lim_{|u| \to \infty} \frac{\mathrm{g(u)}}{\mathrm{u}} < \infty .$$

У теоремі 1.1 таких умов від $g(u)$ не вимагається.

Як зазначено в роботі [38], досліджувати на розв'язність крайову періодичну задачу (1.14)–(1.16) можна лише при додаткових умовах, накладених на праву частину $g(u)$. Іншими словами, виділяються певні класи функцій, на підставі властивостей яких доводиться існування нетривіальних розв'язків задачі (1.14)–(1.16). Наприклад, якщо дати наступне означення: функція $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ називається сублінійною, якщо

$$\overline{\lim_{|u|\to\infty}} \left| \frac{g(u)}{u} \right| < \infty$$

і суперлінійною, якщо

$$\underline{\lim_{|u|\to\infty}} \left| \frac{g(u)}{u} \right| = \infty .$$

Тому слід зазначити, що в роботах І. Рудакова [38] розглянуто випадок, коли функція $g(u)$ є сублінійною. Доведення існування нетривіальних розв'язків задачі (1.14)–(1.16) з суперлінійною функцією можна знайти в роботах Х. Брезіса, Л. Ніренберга і Ж. Корона [65], [68], П. Рабиновича [74].

РОЗДІЛ ІІ
УМОВИ ІСНУВАННЯ КЛАСИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВОЇ ПЕРІОДИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНОГО НЕОДНОРІДНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

У цьому розділі встановлено умови існування періодичного розв'язку $u\left(x,t+\omega\right)=u\left(x,t\right)$, $0\le x\le\pi$, $t\in\mathrm{R}$, що задовольняє крайові умови $u\left(0,t\right)=u\left(\pi,t\right)=0$, $t\in\mathrm{R}$, для лінійного неоднорідного рівняння $u_{tt}-u_{xx}=g\left(x,t\right)$. Показано, що у випадку ірраціональності періоду ω ($\omega\notin\mathrm{Q}$) завжди існує єдиний формальний розв'язок вигляду $u(x,t)=u^{0}(x,t)+\tilde{u}(x,t)$, де $u^{0}(x,t)$ – розв'язок однорідного рівняння $u_{tt}^{0}-u_{xx}^{0}=0$, а $\tilde{u}(x,t)$ – частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $u_{tt}-u_{xx}=g\left(x,t\right)$ такий, що $\tilde{u}(x,t+\omega)=\tilde{u}(x,t)$.

Обґрунтовано, що з умов існування розв'язку випливають раніше встановлені, але не доведені в літературі результати Ю. Митропольського та його учнів, а також у випадку $\omega=2\pi$ існує новий клас функцій, для якого розв'язок має вигляд $u(x,t)=\sum\limits_{s=1}^{\infty}a_{2s-1}(x)\cos(2s-1)t$, що не відповідне методам відшукання розв'язку лише у вигляді $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_{k}(t)\sin kx$ (тобто раніше встановленим результатам Б. Пташника та П. Рабиновича).

2.1. Точні періодичні розв’язки

2.1.1. Допоміжні твердження про частинні розв’язки лінійного неоднорідного рівняння. Розглянемо таку крайову періодичну задачу

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x,t), \qquad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathrm{R}, \tag{2.1}$$

$$u(0,t) = u(\pi, t) = 0, \qquad t \in \mathrm{R}, \tag{2.2}$$

$$u(x, t + \omega) = u(x,t), \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \in \mathrm{R}. \tag{2.3}$$

Справедливими є твердження.

Теорема 2.1 [8, 21]. *Якщо* $g \in G_{\pi t} \bigcap Q_{\omega}$, *то функція*

$$\tilde{u}_1(x,t) = -\frac{1}{2}\int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau \equiv \left(S_1 g\right)(x,t) \tag{2.4}$$

є класичним ω*–періодичним по t розв’язком задачі (2.1), (2.3).*

Доведення. Обчислимо частинні похідні першого і другого порядків від функції $\tilde{u}_1(x,t)$. На підставі формули (2.4) одержуємо

$$\frac{\partial \tilde{u}_1(x,t)}{\partial x} = -\frac{1}{2}\int_0^x \left\{ g(\xi, t + x - \xi) + g(\xi, t - x + \xi) \right\} d\xi;$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_1(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}\int_0^x \left\{ \frac{\partial g(\xi, t + x - \xi)}{\partial (t + x - \xi)} - \frac{\partial g(\xi, t - x + \xi)}{\partial (t - x + \xi)} \right\} d\xi - g(x,t);$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_1(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2}\int_0^x \left\{ g(\xi, t + x - \xi) - g(\xi, t - x + \xi) \right\} d\xi;$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_1(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{2}\int_0^x \left\{ \frac{\partial g(\xi, t + x - \xi)}{\partial (t + x - \xi)} - \frac{\partial g(\xi, t - x + \xi)}{\partial (t - x + \xi)} \right\} d\xi.$$

Отже,

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_1(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}_1(x,t)}{\partial x^2} = g(x,t).$$

Доведемо тепер, що функція $\tilde{u}_1(x,t)$ є періодичною по t. Нехай $g \in G_{\pi t} \bigcap Q_\omega$. Тоді на підставі (2.1) маємо

$$\tilde{u}_1(x, t+\omega) = -\frac{1}{2}\int_0^x d\xi \int_{t+\omega-x+\xi}^{t+\omega+x-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau = -\frac{1}{2}\int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\theta+\omega)\,d\theta =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\theta)\,d\theta = \tilde{u}_1(x,t),$$

що й потрібно було довести.

Аналогічно доводяться наступні твердження.

Теорема 2.2 [8, 21]. *Якщо* $g \in G_{\pi t} \bigcap Q_\omega$, *то функція*

$$\tilde{u}_2(x,t) = -\frac{1}{2}\int_x^\pi d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau \equiv \left(S_2 g\right)(x,t) \tag{2.5}$$

є класичним ω*–періодичним по t розв'язком задачі (2.1), (2.3).*

Теорема 2.3 [8, 21]. *Якщо* $g \in G_{\pi t} \bigcap Q_\omega$, *то функція*

$$\tilde{u}_{\text{Н}}(x,t) = \frac{1}{2}\left(S_1 g + S_2 g\right)(x,t) \equiv \left(Sg\right)(x,t),$$

де

$$\left(Sg\right)(x,t) = -\frac{1}{4}\int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau - \frac{1}{4}\int_x^\pi d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau, \tag{2.6}$$

є класичним ω*–періодичним по t розв'язком задачі (2.1), (2.3).*

Крім цього, оператор S володіє такими властивостями:

$$S \in L\left(C_\pi \bigcap Q_\omega,\ C_\pi^{1,1} \bigcap Q_\omega\right), \quad S \in L\left(G_{\pi t} \bigcap Q_\omega,\ C_\pi^{2,2} \bigcap Q_\omega\right).$$

Більш того, якщо $g \in G_{\pi t} \bigcap A_2 = \left\{g : g(x,t) = g(\pi - x, t+\pi) = g(x, t+2\pi)\right\}$, то функція $\tilde{u}_{\text{Н}}(x,t) = \left(Sg\right)(x,t)$ має властивість $\tilde{u}_{\text{Н}}(\pi - x, t+\pi) = \tilde{u}_{\text{Н}}(x,t)$, тобто

$$\left(Sg\right)(\pi - x, t+\pi) = \left(Sg\right)(x,t). \tag{2.7}$$

Справді, на підставі формули (2.6) маємо, що

$$\left(Sg\right)(\pi - x, t + \pi) = -\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{\pi-x} d\xi \int\limits_{t+x+\xi}^{t-x-\xi+2\pi} g(\xi,\tau)\,d\tau - \frac{1}{4}\int\limits_{\pi-x}^{\pi} d\xi \int\limits_{t-x-\xi+2\pi}^{t+x+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau .$$

Після елементарних перетворень одержуємо

$$\left(Sg\right)(\pi - x, t + \pi) = \frac{1}{4}\int\limits_{\pi}^{x} d\eta \int\limits_{t+x+\pi-\eta}^{t-x+\pi+\eta} g(\pi - \eta, \tau)\,d\tau + \frac{1}{4}\int\limits_{x}^{0} d\eta \int\limits_{t-x+\pi+\eta}^{t+x+\pi-\eta} g(\pi - \eta, \tau)\,d\tau$$

або

$$\left(Sg\right)(\pi - x, t + \pi) = -\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{x} d\eta \int\limits_{t-x+\eta}^{t+x-\eta} g(\pi - \eta, \theta + \pi)\,d\theta -$$

$$-\frac{1}{4}\int\limits_{x}^{\pi} d\eta \int\limits_{t+x-\eta}^{t-x+\eta} g(\pi - \eta, \theta + \pi)\,d\theta = \left(Sg\right)(x,t),$$

що й потрібно було довести.

Зауваження 2.1. На підставі теореми 2.3 і рівності (2.7) можна стверджувати, що функція

$$\tilde{u}_{\text{Н}}(\pi - x, t + \pi) = \left(Sg\right)(\pi - x, t + \pi) \equiv \left(Sg\right)(x,t)$$

при $g \in G_{\pi t} \cap A_2$ є також розв'язком неоднорідного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = g(x,t)$ у класі $2\pi-$періодичних функцій.

2.1.2. Умови розв'язності крайової періодичної задачі. Встановимо умови існування єдиного розв'язку лінійної неоднорідної крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3) у припущенні, що $g(x, t + \omega) = g(x,t)$. Розв'язок цієї задачі будемо шукати у вигляді

$$u(x,t) = u^{0}(x,t) + \tilde{u}(x,t), \qquad (2.8)$$

де $u^{0}(x,t)$ – розв'язок однорідної періодичної задачі

$$u^{0}_{tt} - u^{0}_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathrm{R}, \qquad (2.9)$$

$$u^{0}(x, t + \omega) = u^{0}(x,t), \; 0 \le x \le \pi, \quad t \in \mathrm{R}, \qquad (2.10)$$

$\tilde{u}(x,t)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = g(x,t)$ такий, що $\tilde{u}(x, t+\omega) = \tilde{u}(x,t)$.

За допомогою методу Фур'є встановлено, що загальним розв'язком однорідної періодичної задачі (2.9), (2.10) є функція

$$u^0(x,t) = Ax + B + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^1 \cos \nu_k x + A_k^2 \sin \nu_k x\right)\cos \nu_k t +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^3 \cos \nu_k x + A_k^4 \sin \nu_k x\right)\sin \nu_k t, \qquad (2.11)$$

де $\nu_k = \dfrac{2\pi k}{\omega}$, A, B, A_k^1, A_k^2, A_k^3, A_k^4, $k \in \mathrm{N}$, – довільні сталі.

Припустимо тепер, що відомий частинний розв'язок $\tilde{u}(x,t)$ неоднорідного рівняння (2.1) такий, що $\tilde{u}(x, t+\omega) = \tilde{u}(x,t)$.

Узагалі такі розв'язки дійсно існують і при $g \in G_{\pi t} \bigcap Q_\omega$ задаються формулами (2.4)–(2.6), тобто $\tilde{u}(x,t) = \tilde{u}_1(x,t) \equiv \left(S_1 g\right)(x,t)$, або $\tilde{u}(x,t) = \tilde{u}_2(x,t) \equiv \left(S_2 g\right)(x,t)$, або $\tilde{u}(x,t) = \tilde{u}_{\mathrm{H}}(x,t) \equiv \left(S g\right)(x,t)$. Тоді розв'язок (2.8) крайової періодичної задачі (2.1) –(2.3) запишеться у вигляді

$$u(x,t) = Ax + B + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^1 \cos \nu_k x + A_k^2 \sin \nu_k x\right)\cos \nu_k t +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^3 \cos \nu_k x + A_k^4 \sin \nu_k x\right)\sin \nu_k t + \tilde{u}(x,t), \qquad (2.12)$$

де $\nu_k = \dfrac{2\pi k}{\omega}$, A, B, A_k^i, $i = 1, 2, 3, 4$, $k \in \mathrm{N}$, – довільні сталі.

Очевидно, що розв'язок (2.12) буде єдиним формальним розв'язком крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3), якщо при врахуванні крайових умов $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ система

$$B+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^1\cos\nu_k t+A_k^3\sin\nu_k t\right)+\tilde{u}(0,t)=0,$$

$$A\pi+B+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^1\cos\nu_k\pi+A_k^2\sin\nu_k\pi\right)\cos\nu_k t+ \tag{2.13}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^3\cos\nu_k\pi+A_k^4\sin\nu_k\pi\right)\sin\nu_k t+\tilde{u}(\pi,t)=0$$

відносно нескінченного числа невідомих коефіцієнтів $A,\ B,\ A_k^i,\ i=1,2,3,4$, $k\in\mathrm{N}$, матиме єдиний розв'язок. Ця система є специфічною у тому розумінні, що вона набуває різного вигляду залежно від значення періоду ω, а тому загального методу її розв'язання не існує. Досліджувати систему (2.13) необхідно для кожного випадку окремо. Крім цього, проводити дослідження ми зможемо, якщо буде відомий частинний розв'язок $\tilde{u}(x,t)$ періодичної задачі (2.1)–(2.3).

2.1.3. Основна теорема. Проведемо дослідження системи (2.13) залежно від конкретно вибраного періоду ω. Нехай $\nu_k=\dfrac{2\pi k}{\omega}\notin \mathrm{Q}/,\ k\in\mathrm{N}$, тобто $\omega\neq\dfrac{2\pi p}{q},\ p,q\in\mathrm{N}$.

Припустимо, що ω–періодичні функції $\tilde{u}(0,t)$ і $\tilde{u}(\pi,t)$ розкладаються у такі рівномірно збіжні ряди Фур'є:

$$\tilde{u}(0,t)=\frac{a_0^0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^0\cos\nu_k t+b_k^0\sin\nu_k t\right), \tag{2.14}$$

$$\tilde{u}(\pi,t)=\frac{a_0^\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^\pi\cos\nu_k t+b_k^\pi\sin\nu_k t\right), \tag{2.15}$$

де $a_k^0,\ a_k^\pi\ ,\ b_k^0,\ b_k^\pi$– відомі коефіцієнти Фур'є, які визначаються за формулами

$$a_k^0 = \frac{2}{\omega} \int\limits_{-\omega/2}^{\omega/2} \tilde{u}(0,t) \cos \frac{2k\pi}{\omega} t\, dt, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots;$$

$$b_k^0 = \frac{2}{\omega} \int\limits_{-\omega/2}^{\omega/2} \tilde{u}(0,t) \sin \frac{2k\pi}{\omega} t\, dt, \quad k = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$a_k^\pi = \frac{2}{\omega} \int\limits_{-\omega/2}^{\omega/2} \tilde{u}(\pi,t) \cos \frac{2k\pi}{\omega} t\, dt, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots;$$

$$b_k^\pi = \frac{2}{\omega} \int\limits_{-\omega/2}^{\omega/2} \tilde{u}(\pi,t) \sin \frac{2k\pi}{\omega} t\, dt, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Основна теорема. *Нехай функції* $\tilde{u}(0,t)$ *і* $\tilde{u}(\pi,t)$ *розкладаються у рівномірно збіжні ряди Фур'є (2.14) і (2.15). Якщо* $\nu_k = \dfrac{2\pi k}{\omega}$ *не є раціональним числом, тобто,* $\nu_k \notin \mathrm{Q}$, $k \in \mathrm{N}$, *то система (2.13) має єдиний розв'язок, а отже, крайова періодична задача (2.1)–(2.3) має єдиний формальний розв'язок.*

Доведення. Справді, при виконанні умов основної теореми, підставляючи ряди (2.14) і (2.15) у систему (2.13), одержуємо

$$B = -\frac{a_0^0}{2}; \quad A_k^1 = -a_k^0; \quad A_k^3 = -b_k^0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$A\pi + B = -\frac{a_0^\pi}{2}; \quad A_k^1 \cos \nu_k \pi + A_k^2 \sin \nu_k \pi = -a_k^\pi, \tag{2.16}$$

$$A_k^3 \cos \nu_k \pi + A_k^4 \sin \nu_k \pi = -b_k^\pi, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Оскільки $\nu_k \notin \mathrm{Q}$, то $\sin \nu_k \pi \neq 0$. Отже, згідно з рівностями (2.16), коефіцієнти A, B, A_k^i, $i = 1, 2, 3, 4$, $k \in \mathrm{N}$ визначаються однозначно, а саме

$$B = -\frac{a_0^0}{2}; \quad A_k^1 = -a_k^0; \quad A_k^3 = -b_k^0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$A = \frac{a_0^0 - a_0^\pi}{2\pi}, \quad A_k^2 = \frac{a_k^0 \cos \nu_k \pi - a_k^\pi}{\sin \nu_k \pi}, \quad A_k^4 = \frac{b_k^0 \cos \nu_k \pi - b_k^\pi}{\sin \nu_k \pi}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

що й потрібно було довести.

Отже, можна стверджувати, що для розглянутого випадку $\frac{2\pi}{\omega} \notin Q$ ми вперше одержали формулу для відшукання єдиного точного розв'язку задачі (2.1)–(2.3) у вигляді

$$u(x,t) = u^0(x,t) + \tilde{u}(x,t) \equiv$$

$$\equiv \frac{a_0^0 - a_0^\pi}{2\pi} x - \frac{a_0^0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-a_k^0 \cos \nu_k x + \frac{a_k^0 \cos \nu_k \pi - a_k^\pi}{\sin \nu_k \pi} \sin \nu_k x \right) \cos \nu_k t +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(-b_k^0 \cos \nu_k x + \frac{b_k^0 \cos \nu_k \pi - b_k^\pi}{\sin \nu_k \pi} \sin \nu_k x \right) \sin \nu_k t + \left(Sg\right)(x,t), \quad (2.17)$$

де функція $\left(Sg\right)(x,t)$ визначається за формулою (2.6).

2.2. 2π – періодичні розв'язки крайової 2π – періодичної задачі для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку

Припустимо, що $\omega = \frac{2\pi p}{q}$, $p = 2s - 1$, $q = 2m - 1$, $s, m \in N$, $(p,q) = 1$, де запис $(p,q) = 1$ означає, що числа p і q є взаємно простими.

2.2.1. Розв'язність крайової 2π – періодичної задачі. Розглянемо частковий випадок, коли $p = q = 1$, $\omega = 2\pi$. Тоді $\nu_k = k$, $k \in N$, і система розв'язності (2.13) крайової 2π–періодичної задачі набуває вигляду

$$\begin{aligned} &B + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k^1 \cos kt + A_k^3 \sin kt \right) + \tilde{u}(0,t) = 0, \\ &A\pi + B + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k^1 \cos k\pi \cos kt + A_k^3 \cos k\pi \sin kt \right) + \tilde{u}(\pi,t) = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Таким чином, ми одержали систему двох різних рівнянь для визначення одних і тих самих коефіцієнтів A_k^1 і A_k^3, $k \in \mathrm{N}$. Оскільки ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^1 \cos kt + A_k^3 \sin kt\right)$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^1 \cos k\pi \cos kt + A_k^3 \cos k\pi \sin kt\right)$$

збігаються при $k = 2n$ і набувають протилежних значень при $k = 2n+1$, то найпростішим випадком розв'язності системи (2.18), на нашу думку, буде випадок, коли існує клас функцій $g(x,t)$ правої частини неоднорідного рівняння (2.1), для яких частинний розв'язок $\tilde{u}(x,t)$ періодичної задачі (2.1)–(2.3) при $x = 0$ і $x = \pi$ набуває постійного значення, тобто

$$\tilde{u}(0,t) = const, \quad \tilde{u}(\pi,t) = const. \tag{2.19}$$

Тоді, припускаючи, що виконуються умови (2.19), на підставі властивостей рядів Фур'є із системи (2.18) маємо

$$B = -\tilde{u}(0,t), \quad A_k^1 = 0, \quad A_k^3 = 0, \quad k \in \mathrm{N}, \quad A\pi + B = -\tilde{u}(\pi,t)$$

або

$$B = -\tilde{u}(0,t), \quad A = \frac{1}{\pi}\left(\tilde{u}(0,t) - \tilde{u}(\pi,t)\right), \quad A_k^1 = 0, \; A_k^3 = 0, \; k \in \mathrm{N}. \tag{2.20}$$

Отже, при виконанні умов (2.19) у випадку $\omega = 2\pi$ лінійна неоднорідна крайова періодична задача (2.1)–(2.3) має безліч розв'язків, які задаються формулою

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k^2 \cos kt + A_k^4 \sin kt)\sin kx + \tilde{u}(x,t) + \frac{x}{\pi}\left(\tilde{u}(0,t) - \tilde{u}(\pi,t)\right) - \tilde{u}(0,t), \tag{2.21}$$

де A_k^2, A_k^4, $k \in \mathrm{N}$, – довільні сталі.

Однак існує клас 2π–періодичних функцій [8, 21]

$$A_2 = \left\{g : g(x,t) = g(\pi - x, t + \pi) = g(x, t + 2\pi)\right\},$$

визначених на $[0,\pi]\times \mathrm{R}$, для яких розв'язок крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3) єдиний у тому розумінні, що розв'язок

$$u_1^0(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^2\cos kt+A_k^4\sin kt\right)\sin kx \tag{2.22}$$

однорідної крайової періодичної задачі

$$u_{tt}^0-u_{xx}^0=0,\quad 0<x<\pi,\quad t\in \mathrm{R}, \tag{2.23}$$

$$u^0\left(0,t\right)=u^0\left(\pi,t\right)=0,\ \ t\in \mathrm{R}, \tag{2.24}$$

$$u^0\left(x,t+2\pi\right)=u^0\left(x,t\right),\quad 0\le x\le\pi,\ \ t\in \mathrm{R}, \tag{2.25}$$

у класі функцій A_2 є тривіальним.

Справедливим є твердження.

Лема 2.1. *Якщо функція $u_1^0(x,t)$, яка визначена формулою (2.22), є розв'язком однорідної крайової періодичної задачі (2.23)–(2.25) і $u_1^0\in A_2$, то* $u_1^0(x,t)\equiv 0$.

Доведення. Оскільки $u_1^0\in A_2$, то виконується умова

$$u_1^0(\pi-x,t+\pi)=u_1^0(x,t). \tag{2.26}$$

Підставляючи (2.22) у рівність (2.26), знаходимо

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^2\cos k(t+\pi)+A_k^4\sin k(t+\pi)\right)\sin k(\pi-x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^2\cos kt+A_k^4\sin kt\right)\sin kx$$

або

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^2\cos kt+A_k^4\sin kt\right)\sin kx=0.$$

Звідси $A_k^2\equiv 0$ і $A_k^4\equiv 0,\ \ k\in \mathrm{N}$, що й потрібно було довести.

Тепер, покладаючи $\tilde{u}(x,t)=\left(Sg\right)(x,t)$, де функція $\left(Sg\right)(x,t)$ визначається згідно з формулою (2.6), одержуємо такі твердження.

Лема 2.2 [21]. *Якщо* $g \in C_\pi \bigcap A_2$, *то функції*

$$\tilde{u}(0,t) \equiv \big(Sg\big)(0,t) = -\frac{1}{4}\int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau \qquad (2.27)$$

і

$$\tilde{u}(\pi,t) \equiv \big(Sg\big)(\pi,t) = -\frac{1}{4}\int_0^\pi d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)d\tau \qquad (2.28)$$

є тотожньо сталими, тобто $\tilde{u}(0,t) \equiv \big(Sg\big)(0,t) = const$ *і* $\tilde{u}(\pi,t) \equiv \big(Sg\big)(\pi,t) = const$ *для всіх* $t \in \mathbb{R}$.

Доведення. Обчислимо похідну $\tilde{u}_t'(0,t)$. На підставі формули (2.27) маємо

$$\tilde{u}_t'(0,t) = -\frac{1}{4}\int_0^\pi g(\xi, t+\xi)\,d\xi + \frac{1}{4}\int_0^\pi g(\xi, t-\xi)\,d\xi .$$

Зробивши у другому інтегралі заміну $\xi = \pi - \eta$, одержуємо

$$\tilde{u}_t'(0,t) = -\frac{1}{4}\int_0^\pi g(\xi, t+\xi)d\xi + \frac{1}{4}\int_0^\pi g(\pi-\eta, t-\pi+\eta)\,d\eta . \qquad (2.29)$$

Нехай $g \in A_2$. Тоді з (2.29) випливає, що

$$\tilde{u}_t'(0,t) = -\frac{1}{4}\int_0^\pi g(\xi, t+\xi)d\xi + \frac{1}{4}\int_0^\pi g(\pi-\eta, \pi+(t+\eta)d\eta =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^\pi g(\xi, t+\xi)d\xi + \frac{1}{4}\int_0^\pi g(\eta, t+\eta)d\eta \equiv 0 ,$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Отже, $\tilde{u}(0,t) \equiv \big(Sg\big)(0,t) = const$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Аналогічно доводимо, що $\tilde{u}(\pi,t) \equiv \big(Sg\big)(\pi,t) = const$ для всіх $t \in \mathrm{R}$.

Лему 2.2 доведено.

Таким чином, припускаючи, що $g \in C_\pi \bigcap A_2$, на підставі лем 2.1 і 2.2, використовуючи рівності (2.6) і (2.21), отримуємо відому формулу точного розв’язку

$$u(x,t) = \left(R_2 g\right)(x,t) \equiv$$

$$\equiv \left(Sg\right)(x,t) + \frac{\pi - x}{4\pi}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau + \frac{x}{4\pi}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau \qquad (2.30)$$

крайової 2π–періодичної задачі (2.1)–(2.3), яку вперше наведено в роботі [21, с.60]. Далі, на підставі формули (2.30), маємо умови існування розв'язків крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3) у вигляді твердження.

Теорема 2.4 [21]. *Якщо* $g \in G_{\pi t} \cap A_2$, *то функція* $u(x,t) = \left(R_2 g\right)(x,t)$, *визначена формулою (2.30), є єдиною функцією із простору* $C_{\pi}^{2,2} \cap A_2$, *яка задовольняє умови крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3) при* $\omega = 2\pi$. *Крім цього,* $R_2 \in L\left(C_{\pi} \cap A_2,\quad C_{\pi}^{1,1} \cap A_2\right)$, $R_2 \in L\left(G_{\pi t} \cap A_2,\quad C_{\pi}^{2,2} \cap A_2\right)$.

2.2.2. Окремий випадок існування $2\pi-$періодичних розв'язків. Розглянемо ще один частковий випадок розв'язності системи (2.18) у класі 2π–періодичних функцій, визначених таким чином:

$$A_2^+ = \left\{g : g(x,t) = -g(\pi - x, t) = -g(x, \pi - t) = g(x, -t)\right\} \qquad (2.31)$$

Доведемо, що $A_2^+ \subset A_2$. Справедливим є таке твердження.

Лема 2.3. *Якщо* $g \in A_2^+$, *то* $g \in A_2$.

Доведення. Нехай $g \in A_2^+$. Тоді $g(x, t + 2\pi) = g(x, \pi - (-\pi - t)) = -g(x, -\pi - t) = -g(x, \pi + t) = = -g(x, \pi - (-t)) = g(x, -t) = g(x,t)$, тобто $g(x, t + 2\pi) = g(x,t)$.

Перевіримо тепер умову $g(\pi - x, t + \pi) = g(x,t)$. Справді, нехай $g \in A_2^+$. Тоді $g(\pi - x, t + \pi) = -g(x, t + \pi) = -g(x, -t - \pi) = -g(x, \pi - t) = g(x,t)$. Отже, $g \in A_2$, що й потрібно було довести.

Вважатимемо знову, що $\tilde{u}(x,t)=\left(Sg\right)(x,t)$, де функція $\left(Sg\right)(x,t)$ визначена формулою (2.6). Справедливим є твердження.

Лема 2.4. *Якщо* $g\in C_{\pi}\bigcap A_2^{+}$*, то* $Sg\in C_{\pi}^{1,1}\bigcap A_2^{+}$.

Доведення. Те, що $Sg\in C_{\pi}^{1,1}$, випливає з теореми 2.3. Перевіримо, чи $Sg\in A_2^{+}$, тобто, чи виконуються такі рівності:

$$\left(Sg\right)(x,-t)=\left(Sg\right)(x,t),$$

$$\left(Sg\right)(\pi-x,t)=-\left(Sg\right)(x,t),$$

$$\left(Sg\right)(x,\pi-t)=-\left(Sg\right)(x,t).$$

На підставі формули (2.6) маємо

$$\left(Sg\right)(x,-t)=-\frac{1}{4}\int_0^x d\xi\int_{-t-x+\xi}^{-t+x-\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau-\frac{1}{4}\int_x^{\pi}d\xi\int_{-t+x-\xi}^{-t-x+\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^x d\xi\int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi}g(\xi,-\theta)\,d\theta+\frac{1}{4}\int_x^{\pi}d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}g(\xi,-\theta)\,d\theta=$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^x d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}g(\xi,\theta)\,d\theta-\frac{1}{4}\int_x^{\pi}d\xi\int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi}g(\xi,\theta)\,d\theta=\left(Sg\right)(x,t);$$

$$\left(Sg\right)(\pi-x,t)=-\frac{1}{4}\int_0^{\pi-x}d\xi\int_{t-\pi+x+\xi}^{t+\pi-x-\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau-\frac{1}{4}\int_{\pi-x}^{\pi}d\xi\int_{t+\pi-x-\xi}^{t-\pi+x+\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{\pi}^{x}d\eta\int_{t+x-\eta}^{t-x+\eta}g(\pi-\eta,\tau)\,d\tau+\frac{1}{4}\int_x^{0}d\eta\int_{t-x+\eta}^{t+x-\eta}g(\pi-\eta,\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^x d\eta\int_{t-x+\eta}^{t+x-\eta}g(\eta,\tau)\,d\tau+\frac{1}{4}\int_x^{\pi}d\eta\int_{t+x-\eta}^{t-x+\eta}g(\eta,\tau)\,d\tau=-\left(Sg\right)(x,t);$$

$$\left(Sg\right)(x,\pi-t)=-\frac{1}{4}\int_0^x d\xi\int_{\pi-t-x+\xi}^{\pi-t+x-\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau-\frac{1}{4}\int_x^{\pi}d\xi\int_{\pi-t+x-\xi}^{\pi-t-x+\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^x d\xi\int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi}g(\xi,\pi-\theta)\,d\theta+\frac{1}{4}\int_x^{\pi}d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}g(\xi,\pi-\theta)\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^x d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\theta)\,d\theta+\frac{1}{4}\int_x^{\pi} d\xi\int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi,\theta)\,d\theta=-\big(Sg\big)(x,t)\,,$$

що й потрібно було довести.

Слід зауважити, що оскільки при $g\in C_\pi\bigcap A_2^+$

$$\tilde{u}(\pi,t)\equiv\big(Sg\big)(\pi,t)=-\Big(\tilde{u}(0,t)\equiv\big(Sg\big)(0,t)\Big), \tag{2.32}$$

$$\big(Sg\big)(0,t)=const\,,\quad \big(Sg\big)(\pi,t)=const\,, \tag{2.33}$$

то система (2.18) на підставі (2.33) має розв’язок

$$B=-\tilde{u}(0,t),\quad A_k^1=0,\ \ A_k^3=0,\quad k\in\mathrm{N}\,,\quad 2B+A\pi=0\,.$$

Отже,

$$B=-\tilde{u}(0,t),\quad A=\frac{2}{\pi}\tilde{u}(0,t),\quad A_k^1=0,\ A_k^3=0,\ k\in\mathrm{N}\,. \tag{2.34}$$

Враховуючи, що $\tilde{u}(0,t)\equiv\big(Sg\big)(0,t)=-\frac{1}{4}\int_0^{\pi} d\xi\int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau$, на підставі лем 2.1, 2.2, 2.3 та рівностей (2.30), (2.33) і (2.34) одержуємо таке твердження.

Теорема 2.5. *Якщо $g\in G_{\pi\,t}\bigcap A_2^+$, то функція $u(x,t)=\big(R_2^+g\big)(x,t)$, яка визначена формулою*

$$u(x,t)=\big(R_2^+g\big)(x,t)\equiv\big(Sg\big)(x,t)+\frac{\pi-2x}{4\pi}\int_0^{\pi} d\xi\int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)d\tau, \tag{2.35}$$

є єдиною функцією із простору $C_\pi^{2,2}\bigcap A_2^+$, яка задовольняє умови крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3) при $\omega=2\pi$. Крім цього, $R_2^+\in L\Big(C_\pi\bigcap A_2^+,\quad C_\pi^{1,1}\bigcap A_2^+\Big)$, $R_2^+\in L\Big(G_{\pi t}\bigcap A_2^+,\quad C_\pi^{2,2}\bigcap A_2^+\Big)$, при цьому

$$\Big\|\big(R_2^+g\big)(x,t)\Big\|_{C_\pi}\le\frac{\pi^2}{2}\big\|g(x,t)\big\|_{C_\pi};$$

$$\Big\|\big(R_2^+g\big)_t(x,t)\Big\|_{C_\pi}\le\frac{\pi}{2}\big\|g(x,t)\big\|_{C_\pi}; \tag{2.36}$$

$$\left\| \left(R_2^+ g \right)_x (x,t) \right\|_{C_\pi} \le \pi \left\| g(x,t) \right\|_{C_\pi} ;$$

де $\left\| \varphi(x,t) \right\|_{C_\pi} = \sup\limits_{(x,t)\in[0,\pi]\times \mathrm{R}} \left| \varphi(x,t) \right|$.

Доведення. Оскільки при $g \in G_{\pi t} \cap A_2^+$ функція $\left(Sg \right)(x,t)$ є розв'язком неоднорідного рівняння (2.1), а функція

$$\left(Z_2^+ g \right)(x,t) = \frac{\pi - 2x}{4\pi} \int\limits_0^\pi d\xi \int\limits_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau \tag{2.37}$$

з урахуванням того, що при $g \in G_{\pi t} \cap A_2^+$

$$\int\limits_0^\pi d\xi \int\limits_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau \equiv \left(Sg \right)(0,t) = const$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$ є розв'язком однорідного рівняння $u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = 0$, то функція $u = R_2^+ g = Sg + Z_2^+ g$ є розв'язком $\omega = 2\pi$–періодичної задачі (2.1), (2.3). Вона також задовольняє крайові умови $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$. Справді,

$$\left(R_2^+ g \right)(0,t) = -\frac{1}{4} \int\limits_0^\pi d\xi \int\limits_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau + \frac{1}{4} \int\limits_0^\pi d\xi \int\limits_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau = 0, \quad t \in \mathbb{R} ;$$

$$\left(R_2^+ g \right)(\pi,t) = -\frac{1}{4} \int\limits_0^\pi d\xi \int\limits_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau) d\tau - \frac{1}{4} \int\limits_0^\pi d\xi \int\limits_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau) d\tau =$$

$$= +\frac{1}{4} \int\limits_0^\pi d\eta \int\limits_{t-\eta}^{t+\eta} g(\pi-\eta,\tau) d\tau - \frac{1}{4} \int\limits_0^\pi d\xi \int\limits_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau) d\tau =$$

$$= +\frac{1}{4} \int\limits_0^\pi d\eta \int\limits_{t-\eta}^{t+\eta} g(\eta,\tau) d\tau - \frac{1}{4} \int\limits_0^\pi d\xi \int\limits_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau) d\tau = 0, \quad t \in \mathbb{R} .$$

Отже, $\left(R_2^+ g \right)(0,t) = \left(R_2^+ g \right)(\pi,t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Таким чином, $u(x,t) = \left(R_2^+ g \right)(x,t)$ задовольняє крайові умови (2.2).

Доведемо тепер, що оператор $R_2^+ : A_2^+ \to A_2^+$. Оскільки $R_2^+ = S + Z_2^+$, а за лемою 2.4 $S : A_2^+ \to A_2^+$, то для доведення потрібно показати, що $Z_2^+ : A_2^+ \to A_2^+$.

Використовуючи (2.37) при $g \in G_{\pi t} \cap A_2^+$, одержуємо

$$\left(Z_2^+ g\right)(x,-t) = \frac{\pi - 2x}{4\pi}\int_0^{\pi} d\xi \int_{-t-\xi}^{-t+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{-\pi - 2x}{4\pi}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t+\xi}^{t-\xi} g(\xi,-\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{\pi - 2x}{4\pi}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\theta)\,d\theta = \left(Z_2^+ g\right)(x,t);$$

$$\left(Z_2^+ g\right)(\pi - x,t) = \frac{-\pi + 2x}{4\pi}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau =$$

$$= -\frac{\pi - 2x}{4\pi}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau = -\left(Z_2^+ g\right)(x,t);$$

$$\left(Z_2^+ g\right)(x,\pi - t) = \frac{\pi - 2x}{4\pi}\int_0^{\pi} d\xi \int_{\pi-t-\xi}^{\pi-t+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau =$$

$$= -\frac{\pi - 2x}{4\pi}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t+\xi}^{t-\xi} g(\xi,\pi-\theta)\,d\theta =$$

$$= -\frac{\pi - 2x}{4\pi}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\theta)\,d\theta = -\left(Z_2^+ g\right)(x,t).$$

Звідси, на підставі одержаних рівностей, випливає, що $Z_2^+ : A_2^+ \to A_2^+$.

Доведемо тепер справедливість оцінок (2.36). Оскільки

$$\left\|\left(R_2^+ g\right)(x,t)\right\|_{C_\pi} \le \left\|\left(Sg\right)(x,t)\right\|_{C_\pi} + \left\|\left(Z_2^+ g\right)(x,t)\right\|_{C_\pi}, \qquad (2.38)$$

то доведемо, що

$$\left\|\left(Sg\right)(x,t)\right\|_{C_\pi} \le \frac{\pi^2}{4}\left\|g(x,t)\right\|_{C_\pi}$$

і

$$\left\|\left(Z_2^+ g\right)(x,t)\right\|_{C_\pi} \le \frac{\pi^2}{4}\left\|g(x,t)\right\|_{C_\pi}.$$

Записавши функцію $\tilde{u}(x,t) = \left(Sg\right)(x,t)$, визначену згідно з формулою (2.6) у вигляді

$$\left(Sg\right)(x,t) = \int_0^\pi Q(\xi)\,d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau,$$

де

$$Q(\xi) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4}, & 0 \le \xi \le x, \\ \dfrac{1}{4}, & x < \xi < \pi, \end{cases}$$

знаходимо, що

$$\left|\left(Sg\right)(x,t)\right| \le \frac{1}{2}\left\|g(x,t)\right\|_{C_\pi} \int_0^\pi |x-\xi|\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\left\|g(x,t)\right\|_{C_\pi}\left(\int_0^x (x-\xi)\,d\xi - \int_x^\pi (x-\xi)\,d\xi\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left\|g(x,t)\right\|_{C_\pi}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{(\pi-x)^2}{2}\right) \le \frac{\pi^2}{4}\left\|g(x,t)\right\|_{C_\pi}.$$

Отже,

$$\left\|\left(Sg\right)(x,t)\right\|_{C_\pi} \le \frac{\pi^2}{4}\left\|g(x,t)\right\|_{C_\pi}. \tag{2.39}$$

Оскільки

$$\max_{[0,\pi]}\left|\frac{\pi-2x}{4\pi}\right| \le \frac{1}{4}$$

і

$$\left|\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)d\tau\right| \le \pi^2 \left\|g(x,t)\right\|_{C_\pi},$$

то

$$\left\|\left(Z_2^+ g\right)(x,t)\right\|_{C_\pi} \le \frac{\pi^2}{4}\left\|g(x,t)\right\|_{C_\pi}. \qquad (2.40)$$

Таким чином, підставляючи оцінки (2.39) і (2.40) у (2.38), одержуємо першу оцінку (2.36).

Ураховуючи, що при $g \in G_{\pi t} \bigcap A_2^+$

$$\left(R_2^+ g\right)_t (x,t) = \left(Sg\right)_t (x,t) \equiv \int_0^{\pi} Q(\xi)\left\{g(\xi,\, t+x-\xi) - g(\xi,\, t-x+\xi)\right\} d\xi,$$

одержуємо

$$\left\|\left(R_2^+ g\right)_t (x,t)\right\|_{C_\pi} \le \frac{\pi}{2}\left\|g(x,t)\right\|_{C_\pi}.$$

Оскільки

$$\left(R_2^+ g\right)_x (x,t) = \left(Sg\right)_x (x,t) + \left(Z_2^+ g\right)_x (x,t) \equiv$$

$$\equiv \int_0^{\pi} Q(\xi)\left\{g(\xi, t+x-\xi) + g(\xi, t-x+\xi)\right\} d\xi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau,$$

то

$$\left\|\left(R_2^+ g\right)_x (x,t)\right\|_{C_\pi} \le \frac{\pi}{2}\left\|g(x,t)\right\|_{C_\pi} + \frac{\pi}{2}\left\|g(x,t)\right\|_{C_\pi} = \pi\left\|g(x,t)\right\|_{C_\pi}.$$

Теорему 2.5 доведено.

Беручи до уваги те, що оператор R_2^+ переводить парну по t функцію $g(x,t)$ у парну функцію $\left(R_2^+ g\right)(x,t)$, і враховуючи властивості тригонометричних рядів Фур'є, доведемо, що розв'язок $u(x,t) = (R_2^+ g)(x,t)$ крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3) при $\omega = 2\pi$ розкладається лише по косинусах, тобто при певних умовах він зображається рядом

$$u(x,t)=\left(R_2^+g\right)(x,t)=\frac{a_0(x)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x)\cos kt\,. \tag{2.41}$$

Окрім цього, враховуючи формулу обчислення коефіцієнтів Фур’є $a_k(x)$ функції $\left(R_2^+g\right)(x,t)\in A_2^+$, тобто формулу

$$a_k(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(R_2^+g\right)(x,t)\cos kt\,dt,\ k=0,1,2,... \tag{2.42}$$

переконуємося в справедливості такого твердження.

Лема 2.5. *Якщо* $g\in G_{\pi t}\cap A_2^+$, *то* $a_{2n}(x)=0$, $n\in\mathbb{N}$.

Доведення. Справді, на підставі теореми 2.5 та формули (2.42) при $g\in G_{\pi t}\cap A_2^+$ маємо, що $R_2^+g\in A_2^+\cap C_\pi^{2,2}$ і

$$a_k(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(R_2^+g\right)(x,t)\cos kt\,dt+\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\left(R_2^+g\right)(x,t)\cos kt\,dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(R_2^+g\right)(x,t)\cos kt\;dt+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(R_2^+g\right)(x,\pi-\tau)\cos k(\pi-\tau)\;d\tau=$$

$$=\begin{cases}0, & k=2n,\quad n=0,1,2,...\\ \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left(R_2^+g\right)(x,\tau)\,d\tau, & k=2n-1\quad n=1,2,...,\end{cases}$$

що й потрібно було довести.

Отже, при відповідних умовах, накладених на функцію $g(x,t)-$ праву частину неоднорідного рівняння (2.1), розв’язок крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3) у класі функцій A_2^+ має вигляд

$$u(x,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{2s-1}(x)\cos\,(2s-1)t\,. \tag{2.43}$$

2.2.3. Нескінченна множина $2\pi-$періодичних розв'язків (проблема П. Рабиновича). Зауважимо, що дослідження умов розв'язності крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3) при $\omega = 2\pi$ у попередніх пунктах проводилося на основі використання частинного розв'язку $\tilde{u}(x,t) = \left(Sg\right)(x,t)$, тобто на підставі формули (2.6).

Однак, у випадку $\omega = 2\pi$ для розв'язності системи двох лінійних алгебраїчних рівнянь (2.13) можна використати і частинний розв'язок $\tilde{u}_1(x,t) = \left(S_1 g\right)(x,t)$, записаний у вигляді формули (2.4). Покладемо у системі (2.13) $\widetilde{u}(x,t) = \widetilde{u}_1(x,t)$. Тоді одержуємо

$$\begin{aligned} &\tilde{u}_1(0,t) \equiv 0, \quad t \in \mathrm{R}, \\ &\tilde{u}_1(\pi,t) = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)d\tau, \quad t \in \mathrm{R}./\ \ /\ \ / \end{aligned} \tag{2.44}$$

Тоді на підставі перших рівнянь систем (2.13) і (2.44) знаходимо

$$B = 0,\ A_k^1 = 0,\ A_k^3 = 0,\ k \in \mathrm{N}, \tag{2.45}$$

і друге рівняння системи (2.13) при одержаних $B = A_k^1 = A_k^3 = 0$ набуває вигляду

$$A\pi + \tilde{u}_1(\pi,t) = 0. \tag{2.46}$$

Таким чином, з (2.46) маємо $A = -\dfrac{1}{\pi}\tilde{u}_1(\pi,t)$, що суперечить визначеності числа *A* (*A* в цьому випадку є функцією від *t*, $t \in \mathrm{R}$). Зрозуміло, що тоді повинні існувати додаткові умови розв'язності крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3) при $\omega = 2\pi$. На нашу думку, це пов'язано з структурою самого розв'язку задачі (2.1)–(2.3) при $\omega = 2\pi$, який при цьому має вигляд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^2 \cos kt + A_k^4 \sin kt\right)\sin kx + \tilde{u}_1(x,t) - \frac{x}{\pi}\tilde{u}_1(\pi,t), \tag{2.47}$$

де A_k^2, A_k^4, $k \in \mathrm{N}$, – довільні сталі. Зауважимо, що функція

$$u_2^0(x,t) = -\frac{x}{\pi}\,\tilde{u}_1(\pi,t) \equiv \frac{x}{2\pi}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau\,, \tag{2.48}$$

яка входить до розв'язку (2.47), не завжди буде розв'язком однорідної крайової періодичної задачі $u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = 0$, $u^0(0,t) = u^0(\pi,t) = 0$, $u^0(x,t+2\pi) = u^0(x,t)$, оскільки безпосередньою перевіркою переконуємося, що $u_{2xx}^0(x,t) \equiv 0$, $x \in [0,\pi]$, $t \in \mathrm{R}$, а $u_{2tt}^0 \neq 0$ (не для кожної функції $g(x,t)$ друга похідна u_{2tt}^0 може дорівнювати нулю). Покажемо, що ця проблема розв'язності крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3) при $\omega = 2\pi$ тісно пов'язана з вибором невідомих коефіцієнтів A_k^2 і A_k^4.

Має місце твердження.

Лема 2.6. *Для кожної функції* $\mu(t) \in C^1(\mathrm{R}) \bigcap Q_{2\pi}$, *яка розкладається у рівномірно збіжний ряд Фур'є*

$$\mu(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right)\,, \tag{2.49}$$

справедливим є зображення

$$\frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\,d\alpha - \frac{x}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha)\,d\alpha \equiv \sum_{k=1}^{\infty}(A_k^2 \cos kt + A_k^4 \sin kt)\sin kx\,, \tag{2.50}$$

де $A_k^2 = a_k / k$, $A_k^4 = b_k / k$, $k \in \mathrm{N}$.

Доведення. Використовуючи зображення (2.49), обчислимо інтеграли:

$$\frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x}\left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\alpha + b_k \sin k\alpha\right\} d\alpha =$$

$$= \frac{a_0}{2}x + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \int_{t-x}^{t+x} \cos k\alpha\, d\alpha + b_k \int_{t-x}^{t+x} \sin k\alpha\, d\alpha\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{2k}\sin k\alpha - \frac{b_k}{2k}\cos k\alpha\right)\Bigg|_{t-x}^{t+x} =$$

$$=\frac{a_0}{2}x+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{2k}\sin k\alpha\right)\Bigg|_{t-x}^{t+x}-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{b_k}{2k}\cos k\alpha\right)\Bigg|_{t-x}^{t+x}=$$

$$=\frac{a_0}{2}x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2k}\big(\sin k(t+x)-\sin k(t-x)\big)-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{2k}\big(\cos k(t+x)-\cos k(t-x)\big)=$$

$$=\frac{a_0}{2}x+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{k}\cos kt\,\sin kx+\frac{b_k}{k}\sin kt\,\sin kx\right)\equiv$$

$$\equiv\frac{a_0}{2}x+\sum_{k=1}^{\infty}\big(A_k^2\cos kt+A_k^4\sin kt\,\big)\sin kx\,, \qquad (2.51)$$

де

$$A_k^2=\frac{a_k}{k},\;\; A_k^4=\frac{b_k}{k},\;\; k\in\mathbb{N}\,. \qquad (2.52)$$

Аналогічно одержуємо

$$\frac{x}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi}\mu(\alpha)d\alpha=\frac{x}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi}\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos k\alpha+b_k\sin k\alpha\right\}d\alpha=$$

$$=\frac{a_0}{2}x+\frac{x}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{t-\pi}^{t+\pi}\cos k\alpha\,d\alpha+b_k\int_{t-\pi}^{t+\pi}\sin k\alpha\,d\alpha\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}x+\frac{x}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{k}\sin k\,\alpha-\frac{b_k}{k}\cos k\,\alpha\right)\Bigg|_{t-\pi}^{t+\pi}=$$

$$=\frac{a_0}{2}x+\frac{x}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{k}\sin k\alpha\right)\Bigg|_{t-\pi}^{t+\pi}-\frac{x}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{b_k}{k}\cos k\alpha\right)\Bigg|_{t-\pi}^{t+\pi}=$$

$$=\frac{a_0}{2}x+\frac{x}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k}\big(\sin k(t+\pi)-\sin k(t-\pi)\big)-$$

$$-\frac{x}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}\big(\cos k(t+\pi)-\cos k(t-\pi)\big)\equiv\frac{a_0}{2}x\,. \qquad (2.53)$$

Таким чином, враховуючи (2.51)–(2.53), знаходимо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{x}{2\pi}\int\limits_{t-\pi}^{t+\pi}\mu(\alpha)d\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}(A_k^2\cos kt+A_k^4\sin kt)\sin kx,$$

де $A_k^2=a_k/k$, $A_k^4=b_k/k$, $k\in\mathbb{N}$, що й потрібно було довести.

Отже, на підставі леми 2.6 розв'язок (2.47) крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3) при $\omega=2\pi$ можна зобразити у вигляді

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}d\xi\int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}g(\xi,\tau)d\tau+$$

$$+\frac{x}{2\pi}\left\{\int\limits_{0}^{\pi}d\xi\int\limits_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi}g(\xi,\tau)d\tau-\int\limits_{t-\pi}^{t+\pi}\mu(\alpha)d\alpha\right\}. \tag{2.54}$$

Це дає можливість сформулювати результат, аналогічний результату П. Рабиновича [24].

Теорема 2.6. *Нехай* $g\in G_{\pi t}\bigcap Q_{2\pi}$. *Тоді для кожної функції* $\mu(t)\in C^1\bigcap Q_{2\pi}$, *яка задовольняє рівняння*

$$\int\limits_{t-\pi}^{t+\pi}\mu(\alpha)d\alpha=\int\limits_{0}^{\pi}d\xi\int\limits_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau, \tag{2.55}$$

функція

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}d\xi\int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau\equiv u^0(x,t)+\tilde{u}_1(x,t) \tag{2.56}$$

є єдиним класичним розв'язком крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3) при $\omega=2\pi$.

Доведення. Справді, диференціюючи двічі по t і x функцію $u_1(x,t)$, визначену формулою (2.56), отримуємо $u_{1tt}-u_{1xx}=g(x,t)$. На підставі формули (2.56) переконуємося, що при $\mu\in C\bigcap Q_{2\pi}$, $g\in G_{\pi t}\bigcap Q_{2\pi}$ функція $u_1(x,t)$ задовольняє умови періодичності

$$u_1(x,t+2\pi)=\frac{1}{2}\int\limits_{t+2\pi-x}^{t+2\pi+x}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}d\xi\int\limits_{t+2\pi-x+\xi}^{t+2\pi+x-\xi}g(\xi,\tau)d\tau\equiv u_1(x,t)$$

для всіх $0 \le x \le \pi$, $t \in \mathbb{R}$. Підставляючи у (2.56) $x = 0$ та $x = \pi$, і використовуючи рівність (2.55), знаходимо, що

$$u_1(0,t) = 0,$$

$$u_1(\pi, t) = \frac{1}{2}\int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau) d\tau \equiv 0,$$

що й потрібно було довести.

Отже, на нашу думку, доведена теорема 2.6 підтверджує результат роботи [71] (результат П. Рабиновича) про можливість існування класичних $2\pi -$періодичних розв'язків крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3) при $\omega = 2\pi$ у вигляді $u_1(x,t) = u^0(x,t) + \tilde{u}_1(x,t)$, де $u^0(x,t)$ – розв'язок однорідного рівняння $u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = 0$, а $\tilde{u}_1(x,t)$ – розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = g(x,t)$.

Більше того, (2.55) є рівнянням для відшукання невідомої функції $\mu(t)$, оскільки воно означає рівність двох функцій однієї змінної t. З іншого боку, рівність (2.55) є умовою виділення класу функцій $g(x,t)$, для яких справедливою є теорема 2.6.

Мають місце наступні твердження.

Лема 2.7. *Для кожної непарної функції* $\mu(t) \in C(\mathbf{R}) \cap Q_{2\pi}$ *виконується умова*

$$\int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Доведення. Позначимо

$$I(t) = \int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha) d\alpha, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Диференціюючи функцію $I(t)$ і враховуючи умови леми 2.7, знаходимо

$$I'(t) = \mu(t+\pi) - \mu(t-\pi) = \mu(t+\pi) - \mu(t+\pi) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Отже, $I(t)=const$ для всіх $t\in\mathbb{R}$. Оскільки на підставі умов леми 2.7 $I(0)=0$, то

$$\int\limits_{t-\pi}^{t+\pi}\mu(\alpha)\,d\alpha\equiv 0,\quad t\in\mathbb{R},$$

що й потрібно було довести.

Теорема 2.7. *Нехай $g\in G_{\pi t}\cap Q_{2\pi}$ і функція $g(x,t)$ задовольняє рівняння*

$$\int\limits_0^{\pi}d\xi\int\limits_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau=0,\quad t\in\mathrm{R}. \tag{2.57}$$

Тоді для кожної непарної функції $\mu(t)\in C^1\cap Q_{2\pi}$ функція $u_1(x,t)$, яка визначена формулою (2.56), є єдиним класичним розв'язком крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3) при $\omega=2\pi$.

Доведення теореми 2.7 випливає з леми 2.7 та теореми 2.6.

Як було зазначено вище, рівність (2.55) є умовою виділення класу функцій $g(x,t)$, для яких справедливою є теорема 2.6. Однак, досліджуючи ліву частину, одержуємо

$$\int\limits_{t-\pi}^{t+\pi}\mu(\alpha)\,d\alpha=\int\limits_0^{2\pi}\mu(\alpha)\,d\alpha \tag{2.58}$$

для кожної функції $\mu(t)\in C\cap Q_{2\pi}$. Справді,

$$\int\limits_{t-\pi}^{t+\pi}\mu(\alpha)\,d\alpha=\int\limits_{t-\pi}^{0}\mu(\alpha)\,d\alpha+\int\limits_0^{2\pi}\mu(\alpha)\,d\alpha+\int\limits_{2\pi}^{t+\pi}\mu(\alpha)\,d\alpha=$$

$$=\int\limits_{t-\pi}^{0}\mu(\alpha)\,d\alpha+\int\limits_0^{2\pi}\mu(\alpha)\,d\alpha+\int\limits_0^{t-\pi}\mu(\beta)\,d\beta=\int\limits_0^{2\pi}\mu(\alpha)\,d\alpha.$$

Таким чином, ліва частина рівності (2.55) є сталою величиною. Отже, щоб була справедливою теорема 2.6, необхідно, щоб і права частина рівності (2.55), тобто інтеграл

$$\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau \tag{2.59}$$

набував постійного значення. Справді, інтеграл (2.59), як було доведено раніше (зокрема, лема 2.2), набуває постійного значення в класі функцій $g \in C_{\pi} \cap A_2 = \left\{ g : g(x,t) = g(\pi - x, t + \pi) = g(x, t + 2\pi) \right\}$. Тому, покладаючи $t = \pi$, рівність (2.55) може бути записана у вигляді

$$\int_0^{2\pi} \mu(\alpha)\,d\alpha = \int_0^{\pi} d\xi \int_{\xi}^{2\pi-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau\,. \tag{2.60}$$

Звідси випливає, що для $g \in A_2$ справедливе твердження.

Теорема 2.8. *Нехай*

1) $g(x,t) \in G_{\pi t}\ \mathrm{I}\ A_2$ і $\int_0^{\pi} d\xi \int_{\xi}^{2\pi-\xi} g(\xi,\tau)d\tau = \delta \neq 0$;

2) $\mu(t) \in C^1(\square) \cap Q_{2\pi}$, $\mu(t + 2\pi) = \mu(t)$ і $\int_0^{2\pi} \mu(\alpha)d\alpha = \gamma \neq 0$.

Тоді для кожної функції $\beta(t) = \dfrac{\delta}{\gamma}\mu(t)$ функція

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} \beta(\alpha)d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^{x} d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau \equiv u^0(x,t) + \tilde{u}_1(x,t) \tag{2.61}$$

є єдиним класичним розв'язком крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3) при $\omega = 2\pi$.

Доведення. Справді, те, що функція (2.61) є розв'язком рівняння (2.1) доведено в теоремі 2.6. Вона також є $2\pi-$ періодичною по t і задовольняє крайові умови

$$u_1(0,t)=0,$$

$$u_1(\pi,t)=\frac{1}{2}\int_{t-\pi}^{t+\pi}\beta(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\xi\int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi}g(\xi,\tau)d\tau\equiv\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\beta(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\xi\int_{\xi}^{2\pi-\xi}g(\xi,\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\delta}{\gamma}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\xi\int_{\xi}^{2\pi-\xi}g(\xi,\tau)d\tau=\frac{1}{2}\frac{\delta}{\gamma}\gamma-\frac{1}{2}\delta=0, \tag{2.62}$$

що й потрібно було довести.

2.3. $\pi-$періодичні розв'язки крайової періодичної задачі

Припустимо, що $\omega=\dfrac{2s-1}{2m-1}\pi$, $s,m\in\mathrm{N}$, $(2s-1,2m-1)=1$.

Тоді

$$\nu_k=\frac{2\pi k}{\omega}=\frac{2(2m-1)}{2s-1}k,\quad k\in\mathrm{N}.$$

Розглянемо найпростіший випадок *m=s=1*, для якого $\nu_k=2k$ і система (2.13) набуває вигляду

$$\begin{gathered}B+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^1\cos 2kt+A_k^3\sin 2kt\right)+\tilde{u}(0,t)=0,\\ A\pi+B+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^1\cos 2kt+A_k^3\sin 2kt\right)+\tilde{u}(\pi,t)=0.\end{gathered}\tag{2.63}$$

Очевидно, що система (2.63) при $\tilde{u}(0,t)=\tilde{u}(\pi,t)=const$ для всіх $t\in\mathrm{R}$ завжди має єдиний розв'язок

$$B=-\tilde{u}(0,t),\quad A=0,\quad A_k^1=A_k^3=0,\quad k\in\mathrm{N}.$$

Вважатимемо знову, що $\tilde{u}(x,t)=\left(Sg\right)(x,t)$, де функція $\left(Sg\right)(x,t)$ визначена формулою (2.6).

Справедливі твердження.

Лема 2.8. *Якщо* $g \in C_\pi \bigcap A_1 = \{ g : g(x,t) = g(\pi - x, t) = g(x, t+\pi) \}$, *то* $g \in A_2 = \{ g : g(x,t) = g(\pi - x, t+\pi) = g(x, t+2\pi) \}$.

Лема 2.9. *Якщо* $g \in C_\pi \bigcap A_1$, *то*

$$\left(Sg\right)(0,t) = \left(Sg\right)(\pi,t) = const\,. \tag{2.64}$$

Доведення. Те, що $\left(Sg\right)(0,t) = const$ і $\left(Sg\right)(\pi,t) = const$ випливає з леми 2.8, оскільки $A_1 \subset A_2$, та леми 2.2. Нехай $g \in A_1$. Тоді

$$\left(Sg\right)(\pi,t) = -\frac{1}{4}\int_0^\pi d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau = -\frac{1}{4}\int_0^\pi d\eta \int_{t-\eta}^{t+\eta} g(\pi-\eta,\tau)d\tau =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^\pi d\eta \int_{t-\eta}^{t+\eta} g(\eta,\tau)d\tau \equiv \left(Sg\right)(0,t),$$

що й потрібно було довести.

Отже, покладаючи $\tilde{u}(x,t) = \left(Sg\right)(x,t)$, у випадку $\omega = \pi$ на підставі лем 2.8 і 2.9 та теореми 2.4 ми отримуємо такий відомий результат.

Теорема 2.9 [23]. *Якщо* $g \in G_{\pi t} \bigcap A_1$, *то функція* $u = R_1 g$, *яка визначена формулою*

$$u(x,t) = \left(R_1 g\right)(x,t) \equiv \left(Sg\right)(x,t) + \frac{1}{4}\int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)d\tau, \tag{2.65}$$

є єдиною функцією із класу $C_\pi^{2,2} \bigcap A_1$, *яка задовольняє умови крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3) при* $\omega = \pi$. *Крім цього,* $R_1 \in L(C_\pi \bigcap A_1,\ C_\pi^{1,1} \bigcap A_1)$, $R_1 \in L(G_{\pi t} \bigcap A_1,\ C_\pi^{2,2} \bigcap A_1)$.

Система (2.63) розв’язності крайової $\omega = \pi -$періодичної задачі (2.1)–(2.3) завжди має тривіальний розв’язок, якщо $\tilde{u}(0,t) = \tilde{u}(\pi,t) \equiv 0$, $t \in \mathrm{R}$. Справедливі твердження.

Лема 2.10. *Якщо* $g \in C_\pi \bigcap A_2^- = \{g : g(x,t) = g(\pi - x, t+\pi) = g(x, t+2\pi) = = -g(x,-t)\}$, *то* $\tilde{u}(0,t) \equiv \big(Sg\big)(0,t) = 0$ *і* $\tilde{u}(\pi,t) \equiv \big(Sg\big)(\pi,t) = 0$, $t \in \mathrm{R}$.

Доведення. Оскільки при $g \in C_\pi \bigcap A_2^-$

$$\big(Sg\big)(0,0) = -\frac{1}{4}\int_0^\pi d\xi \int_{-\xi}^{\xi} g(\xi,\tau)d\tau \equiv 0;$$

$$\big(Sg\big)(\pi,0) = -\frac{1}{4}\int_0^\pi d\xi \int_{-\pi+\xi}^{\pi-\xi} g(\xi,\tau)d\tau = -\frac{1}{4}\int_0^\pi d\xi \int_{-(\pi-\xi)}^{\pi-\xi} g(\xi,\tau)d\tau \equiv 0,$$

то на підставі леми 2.9 маємо $\big(Sg\big)(0,t) = \big(Sg\big)(\pi,t) = 0$, $t \in \mathrm{R}$, що й потрібно було довести.

Теорема 2.10. *Якщо* $g \in G_{\pi t} \bigcap A_k^-$, $k = 1,2$, *то функція* $u(x,t) = \big(Sg\big)(x,t)$ *є єдиною функцією із класу* $C_\pi^{2,2} \bigcap A_k^-$, $k = 1,2$, *яка задовольняє умови крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3) при* $\omega = k\pi$, $k = 1, 2$, *і оператор* S *володіє властивостями:* $S \in L(C_\pi \bigcap A_k^-,\ C_\pi^{1,1} \bigcap A_k^-)$, $S \in L(G_{\pi t} \bigcap A_k^-,\ C_\pi^{2,2} \bigcap A_k^-)$, $k = 1,2$.

2.4. 4π – періодичні розв'язки крайової періодичної задачі

Припустимо, що $\omega = \dfrac{2\pi p}{2s-1}$, $p = 2m$, $m, s \in \mathrm{N}$, $(p, 2s-1) = 1$.

Тоді

$$\nu_k = \frac{2\pi k}{\omega} = \frac{2s-1}{2m} k.$$

Розглянемо знову частковий випадок $s = m = 1$, тобто, коли $\omega = 4\pi$. У цьому випадку $\nu_k = k/2$, $k \in \mathrm{N}$, і система (2.13) розв'язності крайової $\omega = 4\pi$ періодичної задачі (2.1)–(2.3) набуває вигляду

$$B+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k^1\cos\frac{kt}{2}+A_k^3\sin\frac{kt}{2})+\tilde{u}(0,t)=0\,,$$

$$A\pi+B+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k^1\cos\frac{k\pi}{2}+A_k^2\sin\frac{k\pi}{2})\cos\frac{kt}{2}+ \tag{2.66}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k^3\cos\frac{k\pi}{2}+A_k^4\sin\frac{k\pi}{2})\sin\frac{kt}{2}+\tilde{u}(\pi,t)=0\,.$$

Припустимо, що значення $\tilde{u}(0,t)$ частинного розв'язку неоднорідного рівняння $u_{tt}-u_{xx}=g(x,t)$ тотожньо дорівнює нулеві, тобто, $\tilde{u}(0,t)\equiv 0$ для всіх $t\in\mathrm{R}$. Тоді перше рівняння системи (2.68) має єдиний нульовий розв'язок

$$B=0\,,\quad A_k^1=A_k^3=0\,,\quad k\in\mathrm{N}\,. \tag{2.69}$$

Підставляючи розв'язок (2.69) у друге рівняння системи (2.68), одержуємо таку рівність:

$$A\pi+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k^2\sin\frac{k\pi}{2}\cos\frac{kt}{2}+A_k^4\sin\frac{k\pi}{2}\sin\frac{kt}{2})+\tilde{u}(\pi,t)=0\,. \tag{2.70}$$

Припустимо, що при $\tilde{u}(\pi,t)\neq const$ рівняння (2.70) має єдиний ненульовий розв'язок. Тоді згідно з формулою (2.12) розв'язок крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3) при $\omega=4\pi$ запишеться так:

$$u(x,t)=Ax+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k^2\cos\frac{kt}{2}+A_k^4\sin\frac{kt}{2})\sin\frac{kx}{2}+\tilde{u}(x,t)\equiv u^0(x,t)+\tilde{u}(x,t)\,, \tag{2.71}$$

де $u^0(x,t)$ – розв'язок однорідного рівняння $u_{tt}^0-u_{xx}^0=0$, а $\tilde{u}(x,t)$ – розв'язок неоднорідного рівняння $u_{tt}-u_{xx}=g(x,t)$ такий, що $\tilde{u}(0,t)=0$ і $\tilde{u}(\pi,t)\neq const$ для всіх $t\in\mathrm{R}$.

Вкажемо клас функцій, для якого існує точний розв'язок крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3) при $\omega=4\pi$. Для цього доведемо, що при умові, коли невідома $4\pi-$періодична функція $\mu(t)$ для всіх $t\in\mathrm{R}$ допускає розклад у рівномірно збіжний ряд Фур'є вигляду

$$\mu(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\frac{kt}{2}+b_k\sin\frac{kt}{2}), \tag{2.72}$$

розв'язок

$$u^0(x,t)=Ax+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k^2\cos\frac{kt}{2}+A_k^4\sin\frac{kt}{2})\sin\frac{kx}{2}$$

однорідного рівняння $u_{tt}^0-u_{xx}^0=0$, що входить у формулу (2.71), може бути зображений у вигляді

$$u^0(x,t)=\frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha. \tag{2.73}$$

Справді, підставляючи (2.72) у формулу (2.73), одержуємо

$$u^0(x,t)=\frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x}\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\alpha}{2}+b_k\sin\frac{k\alpha}{2}\right)\right\}d\alpha=$$

$$=\frac{a_0}{2}x+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2a_k}{k}\sin\frac{k\alpha}{2}\bigg|_{t-x}^{t+x}-\frac{2b_k}{k}\cos\frac{k\alpha}{2}\bigg|_{t-x}^{t+x}\right\}=$$

$$=\frac{a_0}{2}x+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2a_k}{k}\left(\sin\frac{k}{2}(t+x)-\sin\frac{k}{2}(t-x)\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{2b_k}{k}\left(\cos\frac{k}{2}(t+x)-\cos\frac{k}{2}(t-x)\right)\right\}=\frac{a_0}{2}x+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2a_k}{k}\cos\frac{kt}{2}+\frac{2b_k}{k}\sin\frac{kt}{2}\right)\sin\frac{kx}{2}.$$

Таким чином, покладаючи в останній рівності

$$\frac{a_0}{2}=A,\quad \frac{2a_k}{k}=A_k^2,\quad \frac{2b_k}{k}=A_k^4,\quad k\in\mathrm{N}, \tag{2.74}$$

і враховуючи позначення $u^0(x,t)$ у формулах (2.71) і (2.73), отримуємо при нашому припущенні $u^0(x,t)=\frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha$, що й потрібно було довести.

Отже, у випадку $\omega=4\pi$ розв'язок крайової 4π–періодичної задачі (2.1)–(2.3) має вигляд

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha+\tilde{u}(x,t), \qquad (2.75)$$

де $\mu(t)$ – невідома неперервно–диференційована і 4π–періодична функція, а $\widetilde{u}(x,t)$ – частинний розв'язок крайової $\omega=4\pi$–періодичної задачі (2.1)–(2.3) такий, що $\widetilde{u}(0,t)\equiv 0$, $\tilde{u}(\pi,t)\not\equiv const$ для всіх $t\in \mathrm{R}$.

Якщо вважати, що

$$\tilde{u}(x,t)=\left(S_1 g\right)(x,t)\equiv -\frac{1}{2}\int_0^x d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau, \qquad (2.76)$$

і припустити, що $g\in G_{\pi t}$, $g(x,t+4\pi)=g(x,t)$, $\mu\in C_\pi^1(\mathrm{R})$, $\mu(t+4\pi)=\mu(t)$, $t\in\mathrm{R}$, то функція

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha+\left(S_1 g\right)(x,t) \qquad (2.77)$$

є єдиним класичним розв'язком $\omega=4\pi$–періодичної задачі (2.1)–(2.3), при цьому $u(0,t)=0$ для всіх $t\in\mathrm{R}$.

Покажемо, що існує клас функцій $\mu(t)$, для яких виконується друга крайова умова

$$u(\pi,t)\equiv\frac{1}{2}\int_{t-\pi}^{t+\pi}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int_0^\pi d\xi\int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)d\tau=0. \qquad (2.78)$$

Продиференціювавши рівність (2.78), отримаємо

$$\mu(t+\pi)-\mu(t-\pi)=\int_0^\pi\left\{g(\xi,\,t+\pi-\xi)-g(\xi,\,t-\pi+\xi)\right\}d\xi. \qquad (2.79)$$

Позначимо через $A_{4\pi}$ такий клас функцій: $A_{4\pi}=\left\{g: g(x,t)=-g(x,t+2\pi)\right\}$.

Лема 2.11. *Якщо* $g\in C_\pi\bigcap A_{4\pi}$, *то* $g\in Q_{4\pi}$.

Доведення. Справді,

$$g(x,t+4\pi)=g(x,t+2\pi+2\pi)=-g(x,t+2\pi)=g(x,t),$$

що й потрібно було довести.

Замінюючи у рівності (2.79) t на $t+\pi$ і припускаючи, що $\mu(t)\in A_{4\pi}$ і $g\in A_{4\pi}$, знаходимо

$$\mu(t)=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\left\{g(\xi,t-\xi)+g(\xi,t+\xi)\right\}d\xi. \qquad (2.80)$$

Отже, ми показали, що для кожної функції $g\in A_{4\pi}$ існує функція $\mu(t)$, яка належить класу $A_{4\pi}$. У результаті підстановки її у формулу (2.77) одержуємо в класі функцій $A_{4\pi}$ такий точний розв'язок:

$$u(x,t)=\frac{1}{4}\int_{t-x}^{t+x}d\alpha\int_{0}^{\pi}\left(g(\xi,\alpha-\xi)+g(\xi,\alpha+\xi)\right)d\xi-\frac{1}{2}\int_{0}^{x}d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau \qquad (2.81)$$

крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3) при $\omega=4\pi$.

Перетворюючи (2.81), знаходимо

$$u(x,t)=\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi}d\xi\int_{t-x}^{t+x}\left(g(\xi,\alpha-\xi)+g(\xi,\alpha+\xi)\right)d\alpha-\frac{1}{2}\int_{0}^{x}d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi}d\xi\int_{t-x-\xi}^{t+x-\xi}g(\xi,\tau)d\tau+\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi}d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x+\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau-\frac{1}{2}\int_{0}^{x}d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi}d\xi\int_{t-x-\xi}^{t+x-\xi}g(\xi,\tau)d\tau+\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi}d\xi\int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau+\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi}d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x+\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi}d\xi\int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau-\frac{1}{2}\int_{0}^{x}d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi}d\xi\int_{t-x-\xi}^{t+x+\xi}g(\xi,\tau)d\tau-\frac{1}{4}\int_{x}^{\pi}d\xi\int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau-\frac{1}{4}\int_{0}^{x}d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau\equiv$$

$$\equiv\left(Sg\right)(x,t)+\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi}d\xi\int_{t-x-\xi}^{t+x+\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau.$$

Справедливими є твердження.

Лема 2.12. *Якщо* $u^{0}(x,t)\in A_{4\pi}$ *і є розв'язком однорідної крайової* $\omega=4\pi-$ *періодичної задачі*

$$u^0_{tt} - u^0_{xx} = 0, \quad u^0(x, t + 4\pi) = u^0(x,t), \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \in \mathrm{R}, \tag{2.82}$$

$$u^0(0,t) = u^0(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathrm{R}, \tag{2.83}$$

то $u^0(x,t) \equiv 0$.

Доведення. Справді, згідно з формулою (2.11) розв'язок однорідної $\omega = 4\pi-$ періодичної задачі (2.82) має вигляд

$$u^0(x,t) = Ax + B + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^1 \cos\frac{kx}{2} + A_k^2 \sin\frac{kx}{2}\right)\cos\frac{kt}{2} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^3 \cos\frac{kx}{2} + A_k^4 \sin\frac{kx}{2}\right)\sin\frac{kt}{2}. \tag{2.84}$$

Покладаючи у формулі (2.84) $x = 0$ і враховуючи першу крайову умову $u^0(0,t) = 0$, маємо

$$B + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^1 \cos\frac{kt}{2} + A_k^3 \sin\frac{kt}{2}\right) = 0. \tag{2.85}$$

На підставі властивостей тригонометричних рядів рівність (2.85) можлива лише, коли

$$B = 0, \quad A_k^1 = A_k^3 = 0, \quad k \in \mathrm{N}. \tag{2.86}$$

Тепер, покладаючи $x = \pi$ у формулі (2.84) і враховуючи другу крайову умову $u^0(\pi,t) = 0$ і рівності (2.86), отримуємо

$$A\pi + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k^2 \sin\frac{k\pi}{2}\cos\frac{kt}{2} + A_k^4 \sin\frac{k\pi}{2}\sin\frac{kt}{2}\right) = 0. \tag{2.87}$$

Оскільки $\sin\frac{k\pi}{2} = 0$ при $k = 2n$, то можна стверджувати, що рівність (2.87) виконується лише, коли

$$A = 0, \ A_{2s-1}^2 = 0, \ A_{2s-1}^4 = 0, \ s \in \mathrm{N}. \tag{2.88}$$

Таким чином, розв'язок однорідної крайової $\omega = 4\pi-$періодичної задачі (2.82), (2.83) має вигляд

$$u^0(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{2n}^2\cos nt+A_{2n}^4\sin nt\right)\sin nx. \qquad (2.89)$$

Згідно з умовою леми 2.12 $u^0(x,t)\in A_{4\pi}=\{u:u(x,t)=-u(x,\ t+2\pi)\}$. Це, у свою чергу, означає, що виконується рівність $u^0(x,t+2\pi)=-u^0(x,t)$. Звідси, враховуючи (2.89), маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{2n}^2\cos n(t+2\pi)+A_{2n}^4\sin n(t+2\pi)\right)\sin nx=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{2n}^2\cos nt+A_{2n}^4\sin nt\right)\sin nx$$

або

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{2n}^2\cos nt+A_{2n}^4\sin nt\right)\sin nx=0.$$

Остання рівність можлива лише, коли

$$A_{2n}^2=0,\quad A_{2n}^4=0,\quad n\in\mathrm{N}, \qquad (2.90)$$

а це означає, що $u^0(x,t)\equiv 0$. Отже, враховуючи (2.88)–(2.90), в класі функцій $A_{4\pi}$ однорідна крайова періодична задача (2.82), (2.83) має лише нульовий розв'язок, що й потрібно було довести.

Теорема 2.11. *Якщо* $g\in G_{\pi t}\cap A_{4\pi}$, *то функція*

$$u(x,t)=\left(R_{4\pi}g\right)(x,t)\equiv\left(Sg\right)(x,t)+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}d\xi\int_{t-x-\xi}^{t+x+\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau \qquad (2.91)$$

є єдиною функцією із класу $C_{\pi}^{2,2}\cap A_{4\pi}$, *яка задовольняє умови крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3) при* $\omega=4\pi$. *Крім цього,*

$$R_{4\pi}\in L(C_{\pi}\cap A_{4\pi},\ C_{\pi}^{1,1}\cap A_{4\pi}),\quad R_{4\pi}\in L(G_{\pi t}\cap A_{4\pi},\ C_{\pi}^{2,2}\cap A_{4\pi}),$$

при цьому

$$\|(R_{4\pi}g)(x,t)\|_{C_{\pi}}\le\pi^2\|g(x,t)\|_{C_{\pi}};$$

$$\|(R_{4\pi}g)_t(x,t)\|_{C_{\pi}}\le\pi\|g(x,t)\|_{C_{\pi}};$$

$$\|(R_{4\pi}g)_x(x,t)\|_{C_{\pi}}\le\pi\|g(x,t)\|_{C_{\pi}},$$

де $\left\|\varphi(x,t)\right\|_{C_\pi} = \sup\limits_{(x,t)\in[0,\pi]\times R}\left|\varphi(x,t)\right|.$

Висновки

1. Для випадку $\frac{2\pi}{\omega}\notin Q$ ми одержали формулу для відшукання єдиного формального розв'язку крайової $\omega-$ періодичної задачі (2.1)–(2.3) – формулу (2.17).

2. На підставі умови розв'язності (2.13) крайової $\omega-$ періодичної задачі (2.1)–(2.3) підтверджено відомі (але раніше не доведені) результати.

3. У випадку $\omega = 2\pi$ на підставі умови розв'язності (2.13) підтверджено результат П. Рабиновича, який сформульовано у вигляді теореми 2.6. Це результат про можливість існування $2\pi-$періодичних розв'язків крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3) у вигляді $u(x,t) = u^0(x,t) + \tilde{u}_1(x,t)$, де $u^0(x,t)$ – розв'язок однорідного рівняння $u^0_{tt} - u^0_{xx} = 0$, а $\tilde{u}_1(x,t)-$ розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = g\left(x,t\right)$.

4. На підставі умови розв'язності (2.13) досліджено існування $\pi-$ періодичних і 4π–періодичних розв'язків крайової ω–періодичної задачі.

5. Знайдено точні класичні π, 2π і $4\pi-$ періодичні розв'язки крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3).

РОЗДІЛ III
НЕПЕРЕРВНІ РОЗВ'ЯЗКИ КРАЙОВОЇ ПЕРІОДИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНОГО НЕОДНОРІДНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Дослідження, проведені у другому розділі, дають змогу зробити висновок, що крайова періодична задача $u(0,t)=u(\pi,t)=0$, $u(x,t+2\pi)=u(x,t)$ для лінійного гіперболічного рівняння $u_{tt}-u_{xx}=g(x,t)$ може бути розв'язана різними операторними методами залежно від класу функцій $g(x,t)$ і періоду ω. Як було показано в другому розділі, крайова періодична задача може мати і нескінченну множину розв'язків, що є передумовою встановлення єдиності розв'язку цієї задачі. Розв'язанню такої проблеми присвячено пункт 2.2.3 другого розділу, де встановлено, що класичний розв'язок крайової 2π– періодичної задачі має вигляд $u(x,t)=u^0(x,t)+\tilde{u}(x,t)$, де $u^0(x,t)$– розв'язок однорідної 2π–періодичної задачі, з визначення якого і випливає, при яких умовах існує єдиність класичного розв'язку. Відповідь на це питання одержано у третьому розділі, де доведено існування узагальнених (неперервних $u\in C\big([0,\pi]\times \mathrm{R}\big)$) розв'язків крайової 2π–періодичної задачі і встановлено, при яких умовах узагальнено неперервні розв'язки можуть бути класичними. Класичні результати повністю збігаються з результатами другого розділу.

3.1. Побудова неперервного розв'язку у прямокутнику $[0,\pi]\times[0,2\pi]$

3.1.1. Розв'язок задачі Коші для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку. Розглянемо в області $Q_\infty = \left\{(x,t)\in \mathrm{R}^{22}\colon\ 0\le x\le \pi,\ t\ge 0\right\}$ лінійне неоднорідне рівняння другого порядку вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\qquad (x,t)\in Q_\infty,\quad a^2=1,\qquad f\in C(Q_\infty), \tag{3.1}$$

для якого задані початкові умови

$$u(0,t)=\nu(t),\quad u_x(0,t)=\mu(t),\quad 0\le t<\infty\,. \tag{3.2}$$

Відомо [13, 21, 29], що для рівняння (3.1) у класі гладких функцій можна записати відповідну систему першого порядку

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{\partial u_1}{\partial x}=f(x,t)\,,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+\frac{\partial u_2}{\partial x}=f(x,t)\,, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u_1-u_2}{2}\,,$$

де

$$u_1=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x},\qquad u_2=\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}\,. \tag{3.4}$$

На підставі рівностей (3.4) і початкових умов (3.2) для системи (3.3) одержуємо такі початкові умови:

$$u_1(0,t)=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=0}+\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\nu'(t)+\mu(t)=\nu_1(t)\,,$$

$$u_2(0,t)=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=0}-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\nu'(t)-\mu(t)=\nu_2(t)\,, \tag{3.5}$$

$$u(0,t)=\nu(t)\,.$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші (3.3), (3.5) у характеристичному трикутнику $\overline{\Delta}=\{(x,t)\in \mathbb{R}^2 : x\le t\le 2\pi - x,\ 0\le x\le \pi\}$.

Нехай (x,t) – довільна фіксована точка трикутника $\overline{\Delta}$. Тоді прямі, в точках яких перші два рівняння системи (3.3) будуть повними диференціалами і які проходять через фіксовану точку (x,t), мають вигляд

$$\xi_1=-\tau+t+x \quad \text{і} \quad \xi_2=\tau-t+x, \tag{3.6}$$

де (ξ,τ) – координати біжучих точок цих прямих.

Знайдемо точки $(0,t_0^1)$ і $(0,t_0^2)$ – точки перетину прямих (3.6) з віссю $0t \quad (x=0)$. Маємо

$$0=-t_0^1+t+x \quad \text{і} \quad 0=t_0^2-t+x,$$

або

$$t_0^1=t+x \qquad \text{і} \qquad t_0^2=t-x. \tag{3.7}$$

Використовуючи метод характеристик [2, 13, 29] у класі неперервних функцій, одержуємо такі розв'язки:

$$u_1(x,t)=u_1(-t_0^1+t+x,t_0^1)+\int_{t_0^1}^{t} f(x+t-\tau,\tau)\,d\tau, \quad (x,t)\in\overline{\Delta},$$

$$u_2(x,t)=u_2(t_0^2-t+x,t_0^2)+\int_{t_0^2}^{t} f(x-t+\tau,\tau)\,d\tau, \quad (x,t)\in\overline{\Delta},$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^x\{u_1(\xi,t)-u_2(\xi,t)\}\,d\xi, \quad (x,t)\in\overline{\Delta}.$$

Ураховуючи знайдені t_0^- і t_0^+ згідно з формулами (3.7), одержуємо

$$u_1(x,t)=u_1(0,t+x)+\int_{t+x}^{t} f(x+t-\tau,\tau)\,d\tau,$$

$$u_2(x,t)=u_2(0,t-x)+\int_{t-x}^{t} f(x-t+\tau,\tau)\,d\tau,$$

або, беручи до уваги початкові умови (3.4), остаточно маємо

$$
\begin{aligned}
u_1(x,t) &= \nu_1(t+x) + \int\limits_{t+x}^{t} f(x+t-\tau,\, \tau)\, d\tau, \\
u_2(x,t) &= \nu_2(t-x) + \int\limits_{t-x}^{t} f(x-t+\tau,\, \tau)\, d\tau.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Зробивши заміну змінних $\xi = x + t - \tau$ і $\xi = x - t + \tau$ в інтегралах правих частин функцій (3.8), знаходимо

$$
\begin{aligned}
u_1(x,t) &= \nu_1(t+x) - \int\limits_{0}^{x} f(\xi,\, t+x-\xi)\, d\xi, \\
u_2(x,t) &= \nu_2(t-x) + \int\limits_{0}^{x} f(\xi,\, t-x+\xi)\, d\xi.
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

Тепер, інтегруючи третє рівняння системи (3.3) від 0 до x і враховуючи початкову умову $u(0,t) = \nu(t)$, одержуємо

$$
u(x,t) = \nu(t) + \int\limits_{0}^{x} \frac{u_1(\eta, t) - u_2(\eta, t)}{2}\, d\eta . \tag{3.10}
$$

Звідси, на підставі знайдених функцій (3.9), одержуємо

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \nu(t) + \int\limits_{0}^{x} \frac{\nu_1(t+\eta) - \nu_2(t-\eta)}{2}\, d\eta - \\
&- \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}\left(\int\limits_{0}^{\eta} \big(f(\xi,\, t+\eta-\xi) + f(\xi,\, t-\eta+\xi) \big) d\xi \right) d\eta \equiv \\
&\equiv \nu(t) + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x} \big(\nu_1(t+\eta) - \nu_2(t-\eta) \big) d\eta - \\
&- \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x} d\eta \int\limits_{0}^{\eta} \big(f(\xi, t+\eta-\xi) + f(\xi, t-\eta+\xi) \big) d\xi .
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

Інтеграли розв’язку (3.11) допускають такі перетворення. Підставляючи в інтеграл

$$\int_0^x \left(\nu_1(t+\eta)-\nu_2(t-\eta)\right)d\eta$$

одержані початкові умови (3.5) для функцій $\nu_1(t+x)$ і $\nu_2(t-x)$, маємо

$$\int_0^x \left(\nu_1(t+\eta)-\nu_2(t-\eta)\right)d\eta = \int_0^x \left(\nu'(t+\eta)-\nu'(t-\eta)\right)d\eta +$$

$$+\int_0^x \left(\mu(t+\eta)+\mu(t-\eta)\right)d\eta = \nu(t+x)-\nu(t)+\nu(t-x)-\nu(t)+$$

$$+\int_t^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha - \int_t^{t-x}\mu(\alpha)d\alpha .$$

Таким чином,

$$\frac{1}{2}\int_0^x \left(\nu_1(t+\eta)-\nu_2(t-\eta)\right)d\eta = -\nu(t)+\frac{\nu(t+x)+\nu(t-x)}{2}+\frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha . \qquad (3.12)$$

Розглядаючи повторний інтеграл

$$\int_0^x d\eta\int_0^\eta \left(f(\xi,t+\eta-\xi)+f(\xi,t-\eta+\xi)\right)d\xi \qquad (3.13)$$

і змінюючи в ньому порядок інтегрування, маємо

$$\int_0^x d\eta\int_0^\eta \left(f(\xi,t+\eta-\xi)+f(\xi,t-\eta+\xi)\right)d\xi =$$

$$=\int_0^x d\xi\int_\xi^x \left(f(\xi,t+\eta-\xi)+f(\xi,t-\eta+\xi)\right)d\eta =$$

$$=\int_0^x d\xi\int_\xi^x f(\xi,t+\eta-\xi)\,d\eta+\int_0^x d\xi\int_\xi^x f(\xi,t-\eta+\xi)\,d\eta \equiv I_1+I_2 . \qquad (3.14)$$

Далі, проводячи у внутрішніх інтегралах інтегралів I_1 і I_2 відповідні заміни $\tau = t+\eta-\xi$ і $\tau = t-\eta+\xi$, остаточно отримуємо

$$\int_0^x d\xi\int_\xi^x f(\xi,t+\eta-\xi)\,d\eta+\int_0^x d\xi\int_\xi^x f(\xi,t-\eta+\xi)\,d\eta = \int_0^x d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} f(\xi,\tau)\,d\tau . \qquad (3.15)$$

Отже, на підставі (3.11), (3.12) і (3.15) одержуємо таку формулу формального розв’язку задачі Коші (3.1), (3.2):

$$u(x,t)=\frac{\nu(t+x)+\nu(t-x)}{2}+\frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{0}^{x}d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}f(\xi,\tau)\,d\tau,\ (x,t)\in\overline{\Delta}. \qquad (3.16)$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося у справедливості такого твердження.

Теорема 3.1 *Нехай функції* $\nu(t)$, $\mu(t)$ *і* $f(x,t)$ *задовольняють такі умови:*

1) $\nu(t)\in C^{2}\left([0,2\pi]\right)$*;*

2) $\mu(t)\in C^{1}\left([0,2\pi]\right)$*;*

3) $f(x,t)\in C^{0,1}\left([0,\pi]\times[0,2\pi]\right)$.

Тоді функція $u=u(x,t)$*, визначена згідно з формулою (3.11), є єдиним класичним розв’язком задачі Коші (3.1), (3.2) у характеристичному трикутнику* $\overline{\Delta}$.

3.1.2. Неперервний розв’язок крайової задачі. У цьому пункті знайдемо у прямокутнику $[0,\pi]\times[0,2\pi]$ неперервний розв’язок крайової задачі вигляду

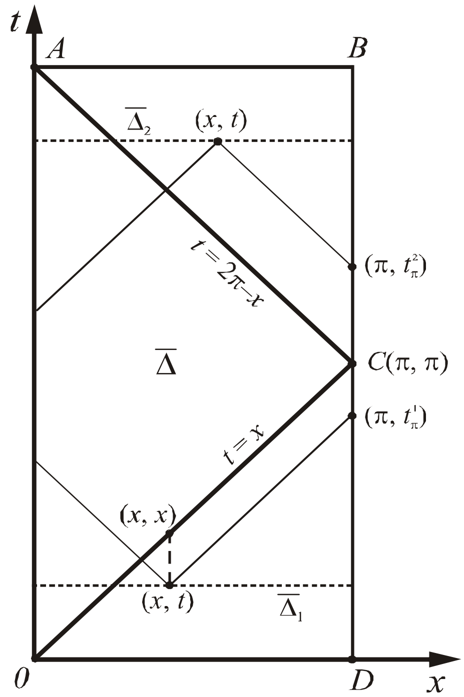
$$u_{t\,t}-u_{x\,x}=f(x,t),\quad 0<x<\pi,\quad 0\le t\le 2\pi, \qquad (3.17)$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad 0\le t\le 2\pi, \qquad (3.18)$$

$$u_{x}(0,t)=\mu(t),\quad 0\le t\le 2\pi, \qquad (3.19)$$

і дослідимо деякі його властивості.

Розіб’ємо прямокутник $\overline{\Pi}_{2\pi}=\left\{\,(x,t)\in\mathbb{R}^{2}:\quad 0\le x\le\pi,\quad 0\le t\le 2\pi\right\}$ прямими $t=x$ і $t=2\pi-x$ на такі три трикутники (мал. 1):



$$\overline{\Delta}=\{(x,t)\in \mathrm{R}^2:\ 0\le x\le \pi,\quad x\le t\le 2\pi-x\};$$

$$\overline{\Delta}_1=\{(x,t)\in \mathrm{R}^2:\ 0\le x\le \pi,\quad 0\le t\le x\};$$

$$\overline{\Delta}_2=\{(x,t)\in \mathrm{R}^2:\ 0\le x\le \pi,\quad 2\pi-x\le t\le 2\pi\};$$

$$\overline{\Pi}_{2\pi}=[0,\pi]\times[0,2\pi]=\overline{\Delta}\cup\overline{\Delta}_1\cup\overline{\Delta}_2.$$

Малюнок 1.

На підставі теореми 3.1 за умови, що $\mu(t)\in C^1(\mathbb{R})$, $\nu(t)\equiv 0$ і $f(x,t)\in C^{0,1}\left([0,\pi]\times\mathbb{R}\right)$, функція

$$u_\Delta(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)\,d\alpha-\frac{1}{2}\int\limits_0^x d\eta\int\limits_{t-x+\eta}^{t+x-\eta}f(\eta,\tau)\,d\tau \tag{3.20}$$

є єдиним класичним розв'язком задачі Коші

$$u_{tt}-u_{xx}=f(x,t),\quad 0<x<\pi,\quad 0\le t\le 2\pi, \tag{3.21}$$

$$u(0,t)=0,\qquad u_x(0,t)=\mu(t),\quad 0\le t\le 2\pi, \tag{3.22}$$

у характеристичному трикутнику $\overline{\Delta}$.

Тепер доведемо, що функція

$$u_{\Delta_1}(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2}\int\limits_{2\pi+t-x}^{2\pi}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int\limits_0^x d\eta\int\limits_{t-x+\eta}^{t+x-\eta}f(\eta,\tau)d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi d\eta\int\limits_\eta^{t-x+\eta}f(\eta,\tau)d\tau-\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi d\eta\int\limits_{2\pi+t-x-\eta}^{2\pi-\eta}f(\eta,\tau)d\tau \tag{3.23}$$

при $\mu(t)\in C^1(\mathbb{R})$ і $f(x,t)\in C^{0,1}\left([0,\pi]\times\mathbb{R}\right)$ є класичним розв'язком рівняння (3.17) у трикутнику $\overline{\Delta}_1=\left\{0\le x\le\pi,\quad 0\le t\le x\right\}$. Справді, оскільки розв'язок задачі Коші (3.1), (3.2) знайдено у трикутнику $\overline{\Delta}$, то відомо його значення на характеристиці $t=x$:

$$u_\Delta(x,x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2x}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int\limits_0^{x}d\eta\int\limits_{\eta}^{2x-\eta}f(\eta,\tau)d\tau .$$

При $\mu(t)\in C^1(\mathbb{R})$ і $f(x,t)\in C^{0,1}\left([0,\pi]\times\mathbb{R}\right)$ рівняння (3.17) еквівалентне у трикутнику $\overline{\Delta}_1$ системі першого порядку

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{\partial u_1}{\partial x}=f(x,t),\quad (x,t)\in\overline{\Delta}_1,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+\frac{\partial u_2}{\partial x}=f(x,t),\quad (x,t)\in\overline{\Delta}_1, \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u_1+u_2}{2},$$

для якої згідно з умовами (3.18), (3.19) визначаються такі початкові умови:

$$u_1(0,t)=\mu(t),\quad 0\le t\le 2\pi, \tag{3.25}$$

$$u_2(\pi,t)=\beta(t),\quad 0\le t\le 2\pi, \tag{3.26}$$

$$u(x,x)=u_\Delta(x,x),\quad 0\le x\le\pi, \tag{3.27}$$

де $\beta(t)$ – невідома функція.

Знайдемо значення t_0^1 і t_π^2 (мал. 1). Очевидно, характеристика $\xi=x+t-\tau$, що проходить через фіксовану точку $(x,t)\in\overline{\Delta}_1$, перетинає вісь $\tau\,(\xi=0)$ в точці $(0,t_0^1=x+t)$, а характеристика $\xi=x-t+\tau$ перетинає пряму $\xi=\pi$ в точці $(\pi,t_\pi^2=\pi+t-x)$.

Інтегруючи кожне рівняння системи (3.24) по відповідних характеристиках, що виходять з фіксованої точки $(x,t)\in\overline{\Delta}_1$, переходимо до такої системи функцій:

$$u_1(x,t)=u_1(t+x-t_0^1,t_0^1)+\int_{t_0^1}^{t} f(x+t-\tau,\tau)d\tau,\quad (x,t)\in\overline{\Delta}_1,$$

$$u_2(x,t)=u_2(t_\pi^2-t+x,t_\pi^2)+\int_{t_\pi^2}^{t} f(x-t+\tau,\tau)d\tau,\quad (x,t)\in\overline{\Delta}_1,$$

$$u(x,t)=u_\Delta(x,x)+\frac{1}{2}\int_x^t\bigl(u_1(x,\tau)+u_2(x,\tau)\bigr)d\tau,\quad (x,t)\in\overline{\Delta}_1.$$

Ураховуючи знайдені t_0^1 і t_π^2 і беручи до уваги початкові умови (3.25)–(3.27), одержуємо

$$u_1(x,t)=\mu(t+x)+\int_{t+x}^{t} f(x+t-\tau,\tau)d\tau,$$

$$u_2(x,t)=u_2(\pi,t-x+\pi)+\int_{t-x+\pi}^{t} f(x-t+\tau,\tau)d\tau\equiv$$

$$\equiv\beta(t-x+\pi)+\int_{t-x+\pi}^{t} f(x-t+\tau,\tau)\,d\tau,\tag{3.28}$$

$$u(x,t)=u_\Delta(x,x)+\frac{1}{2}\int_x^t\bigl(u_1(x,\tau)+u_2(x,\tau)\bigr)d\tau.$$

Оскільки згідно з (3.18) $u(\pi,t)=0$, то $u_t(\pi,t)=0$. Тепер, використовуючи позначення $u_t=\dfrac{u_1+u_2}{2}$ і умову $u_t(\pi,t)=0$, маємо

$$u_1(\pi,t)+u_2(\pi,t)=0\quad\Leftrightarrow\quad u_2(\pi,t)=-u_1(\pi,t).$$

Далі на підставі першого рівняння системи (3.28) знаходимо

$$u_2(\pi,t)=-u_1(\pi,t)\equiv-\mu(t+\pi)-\int_{t+\pi}^{t} f(\pi+t-\tau,\tau)d\tau\equiv\beta(t),$$

і друге рівняння системи (3.28) перепишеться так:

$$u_2(x,t) = -\mu(t-x+2\pi) - \int\limits_{t-x+2\pi}^{t-x+\pi} f(t-x+2\pi-\tau,\tau)d\tau +$$

$$+\int\limits_{t-x+\pi}^{t} f(x-t+\tau,\tau)d\tau .$$

Ураховуючи третє рівняння системи (3.28) і значення $u_\Delta(x,x)$, знаходимо

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2x} \mu(\alpha)d\alpha - \frac{1}{2}\int\limits_0^{x} d\eta \int\limits_{\eta}^{2x-\eta} f(\eta,\tau)d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_x^t \big(u_1(x,\tau)+u_2(x,\tau)\big)d\tau .$$

Підставляючи у знайдену формулу значення $u_1(x,t)$ і $u_2(x,t)$, отримуємо

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2x} \mu(\alpha)d\alpha - \frac{1}{2}\int\limits_0^{x} d\eta \int\limits_{\eta}^{2x-\eta} f(\eta,\tau)d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_x^t \big(\mu(\tau+x)-\mu(\tau-x+2\pi)\big)d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_x^t \left(\int\limits_{s+x}^{s} f(x+s-\tau,\tau)d\tau - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{s-x+2\pi}^{s-x+\pi} f(s-x+2\pi-\tau,\tau)d\tau + \int\limits_{s-x+\pi}^{s} f(x-s+\tau,\tau)d\tau \right) ds \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2}\int\limits_0^{2x} \mu(\alpha)d\alpha - \frac{1}{2}\int\limits_0^{x} d\eta \int\limits_{\eta}^{2x-\eta} f(\eta,\tau)d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_x^t \big(\mu(\tau+x)-\mu(\tau-x+2\pi)\big)d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_x^t ds \int\limits_{s+x}^{s} f(x+s-\tau,\tau)d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_x^t ds \int\limits_{s-x+2\pi}^{s-x+\pi} f(s-x+2\pi-\tau,\tau)d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_x^t ds \int\limits_{s-x+\pi}^{s} f(x-s+\tau,\tau)d\tau . \qquad (3.29)$$

Об’єднуючи перший і третій інтеграли (3.29), одержуємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{2x} \mu(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2}\int\limits_x^t \mu(\tau+x)d\tau - \frac{1}{2}\int\limits_x^t \mu(\tau-x+2\pi)d\tau =$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2x}\mu(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2}\int\limits_{2x}^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int\limits_{2\pi}^{t-x+2\pi}\mu(\alpha)d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2}\int\limits_{2\pi+t-x}^{2\pi}\mu(\alpha)d\alpha\,. \qquad (3.30)$$

Далі, перетворюючи другий, четвертий, п'ятий і шостий інтеграли рівності (3.29), маємо

$$-\int\limits_0^x d\eta\int\limits_\eta^{2x-\eta}f(\eta,\tau)d\tau+\int\limits_x^t ds\int\limits_{s+x}^{s}f(x+s-\tau,\tau)d\tau-$$

$$-\int\limits_x^t ds\int\limits_{s-x+2\pi}^{s-x+\pi}f(s-x+2\pi-\tau,\tau)d\tau+\int\limits_x^t ds\int\limits_{s-x+\pi}^{s}f(x-s+\tau,\tau)d\tau=$$

$$=-\int\limits_0^x d\eta\int\limits_\eta^{2x-\eta}f(\eta,\tau)d\tau-\int\limits_x^t ds\int\limits_0^x f(\eta,x+s-\eta)d\eta+$$

$$+\int\limits_x^t ds\int\limits_0^\pi f(\eta,s-x+2\pi-\eta)d\eta+\int\limits_x^t ds\int\limits_\pi^x f(\eta,\eta-x+s)d\eta\equiv 2I_1\,.$$

Змінюючи порядок інтегрування у другому, третьому та четвертому інтегралах і здійснюючи відповідні заміни змінних, приходимо до таких виразів:

$$2I_1=-\int\limits_0^x d\eta\int\limits_\eta^{2x-\eta}f(\eta,\tau)d\tau-\int\limits_0^x d\eta\int\limits_{2x-\eta}^{x+t-\eta}f(\eta,\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^\pi d\eta\int\limits_{2\pi-\eta}^{t-x+2\pi-\eta}f(\eta,\tau)d\tau+\int\limits_\pi^x d\eta\int\limits_\eta^{t-x+\eta}f(\eta,\tau)d\tau=$$

$$=-\int\limits_0^x d\eta\int\limits_\eta^{t+x-\eta}f(\eta,\tau)d\tau+\int\limits_0^\pi d\eta\int\limits_{2\pi-\eta}^{t-x+2\pi-\eta}f(\eta,\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_\pi^x d\eta\int\limits_\eta^{t-x+\eta}f(\eta,\tau)d\tau+\int\limits_0^x d\eta\int\limits_\eta^{t-x+\eta}f(\eta,\tau)d\tau-\int\limits_0^x d\eta\int\limits_\eta^{t-x+\eta}f(\eta,\tau)d\tau=$$

$$
= -\int_0^x d\eta \int_{t-x+\eta}^{t+x-\eta} f(\eta,\tau)d\tau - \int_0^\pi d\eta \int_\eta^{t-x+\eta} f(\eta,\tau)d\tau -
$$

$$
-\int_0^\pi d\eta \int_{2\pi+t-x-\eta}^{2\pi-\eta} f(\eta,\tau)d\tau . \tag{3.31}
$$

Ураховуючи (3.30), (3.31), на підставі формули (3.29) отримуємо

$$
u(x,t) \equiv u_{\Delta_1}(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^{t+x} \mu(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2}\int_{2\pi+t-x}^{2\pi} \mu(\alpha)d\alpha -
$$

$$
-\frac{1}{2}\int_0^x d\eta \int_{t-x+\eta}^{t+x-\eta} f(\eta,\tau)d\tau - \frac{1}{2}\int_0^\pi d\eta \int_\eta^{t-x+\eta} f(\eta,\tau)d\tau -
$$

$$
-\frac{1}{2}\int_0^\pi d\eta \int_{2\pi+t-x-\eta}^{2\pi-\eta} f(\eta,\tau)d\tau, \quad (x,t) \in \overline{\Delta}_1,
$$

що й потрібно було довести.

Тепер доведемо, що функція

$$
u_{\Delta_2}(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^{t+x-2\pi} \mu(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{2\pi} \mu(\alpha)d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^x d\eta \int_{t-x+\eta}^{t+x-\eta} f(\eta,\tau)d\tau +
$$

$$
+\frac{1}{2}\int_0^\pi d\eta \int_{2\pi-\eta}^{t+x-\eta} f(\eta,\tau)d\tau - \frac{1}{2}\int_0^\pi d\eta \int_\eta^{t+x+\eta-2\pi} f(\eta,\tau)d\tau \tag{3.32}
$$

при $\mu(t) \in C^1(\mathbb{R})$ і $f(x,t) \in C^{0,1}\left([0,\pi]\times\mathbb{R}\right)$ є класичним розв'язком рівняння (3.17) у трикутнику $\overline{\Delta}_2 = \left\{0 \le x \le \pi,\ \ 2\pi - x \le t \le 2\pi\right\}$.

При $\mu(t) \in C^1(\mathbb{R})$ і $f(x,t) \in C^{0,1}\left([0,\pi]\times\mathbb{R}\right)$ рівняння (3.17) у трикутнику $\overline{\Delta}_2$ еквівалентне системі першого порядку (3.24), для якої визначаються такі початкові умови:

$$
u_1(\pi, t) = \gamma(t), \quad 0 \le t \le 2\pi, \tag{3.33}
$$

$$
u_2(0,t) = -\mu(t), \quad 0 \le t \le 2\pi, \tag{3.34}
$$

$$
u(x, 2\pi - x) = u_\Delta(x, 2\pi - x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{3.35}
$$

де $\gamma(t)$ – невідома функція.

Знайдемо точки $(0, t_0^2)$ і (π, t_π^1) (мал. 1). Точка $(0, t_0^2)$ – це точка перетину характеристики $\xi = x - t + \tau$, що проходить через фіксовану точку $(x,t) \in \overline{\Delta}_2$, з віссю $\tau\,(\xi = 0)$. Тому $t_0^2 = t - x$.

Точка (π, t_π^1) – це точка перетину характеристики $\xi = x + t - \tau$ з прямою $\xi = \pi$. Тому $t_\pi^1 = x + t - \pi$.

Тепер, на підставі результатів [21], у класі неперервних функцій одержимо такі розв'язки:

$$u_1(x,t) = u_1(x + t - t_\pi^1,\, t_\pi^1) + \int_{t_\pi^1}^{t} f(x + t - \tau, \tau)d\tau, \quad (x,t) \in \overline{\Delta}_2,$$

$$u_2(x,t) = u_2(x - t + t_0^2,\, t_0^2) + \int_{t_0^2}^{t} f(x - t + \tau, \tau)d\tau, \quad (x,t) \in \overline{\Delta}_2,$$

$$u(x,t) = u_\Delta(x, 2\pi - x) + \frac{1}{2}\int_{2\pi - x}^{t} \big(u_1(x,\tau) + u_2(x,\tau)\big)d\tau, \ (x,t) \in \overline{\Delta}_2.$$

Ураховуючи знайдені t_0^2 і t_π^1, маємо

$$u_1(x,t) = u_1(\pi, x + t - \pi) + \int_{t+x-\pi}^{t} f(x + t - \tau, \tau)d\tau,$$

$$u_2(x,t) = u_2(0, t - x) + \int_{t-x}^{t} f(x - t + \tau, \tau)d\tau,$$

$$u(x,t) = u_\Delta(x, 2\pi - x) + \frac{1}{2}\int_{2\pi - x}^{t} \big(u_1(x,\tau) + u_2(x,\tau)\big)d\tau$$

або, беручи до уваги початкові умови (3.33)–(3.35), остаточно отримаємо

$$u_1(x,t) = u_1(\pi, x + t - \pi) + \int_{t+x-\pi}^{t} f(x + t - \tau, \tau)d\tau \equiv$$

$$\equiv \gamma(x+t-\pi) + \int\limits_{t+x-\pi}^{t} f(x+t-\tau,\tau)\,d\tau\,,$$

$$u_2(x,t) = -\mu(t-x) + \int\limits_{t-x}^{t} f(x-t+\tau,\tau)\,d\tau\,, \tag{3.36}$$

$$u(x,t) = u_\Delta(x,\,2\pi - x) + \frac{1}{2}\int\limits_{2\pi-x}^{t} \big(u_1(x,\tau) + u_2(x,\tau)\big)\,d\tau\,.$$

Оскільки розв’язок задачі Коші (3.1), (3.2) знайдено у трикутнику $\overline{\Delta}$, то відомо його значення на характеристиці $t = 2\pi - x$:

$$u_\Delta(x,\,2\pi - x) = \frac{1}{2}\int\limits_{2\pi-2x}^{2\pi} \mu(\alpha)\,d\alpha - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x} d\eta \int\limits_{2\pi-2x+\eta}^{2\pi-\eta} f(\eta,\tau)\,d\tau\,.$$

Ураховуючи третє рівняння системи (3.36) і значення $u_\Delta(x,\,2\pi - x)$, одержимо

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{2\pi-2x}^{2\pi} \mu(\alpha)\,d\alpha - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x} d\eta \int\limits_{2\pi-2x+\eta}^{2\pi-\eta} f(\eta,\tau)\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{t} \big(u_1(x,\tau) + u_2(x,\tau)\big)\,d\tau\,. \tag{3.37}$$

Оскільки згідно з (3.18) $u(\pi,\,t) = 0$, то $u_t(\pi,\,t) = 0$. Тепер, з рівності $u_t = \dfrac{u_1 + u_2}{2}$ і умови $u_t(\pi,\,t) = 0$ випливає, що

$$u_1(\pi,\,t) + u_2(\pi,\,t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_1(\pi,\,t) = -u_2(\pi,\,t)\,.$$

Тоді на підставі другого рівняння системи (3.36) знаходимо

$$u_1(\pi,\,t) = -u_2(\pi,\,t) \equiv \mu(t-\pi) - \int\limits_{t-\pi}^{t} f(\pi - t + \tau,\tau)\,d\tau \equiv \gamma(t)\,,$$

і перше рівняння системи (3.36) запишемо так:

$$u_1(x,t) = \mu(t + x - 2\pi) - \int\limits_{t+x-2\pi}^{t+x-\pi} f(2\pi - t - x + \tau,\tau)\,d\tau +$$

$$+\int\limits_{t+x-\pi}^{t} f(x+t-\tau,\tau)d\tau\,.$$

Підставляючи у формулу (3.37) значення $u_1(x,t)$ і $u_2(x,t)$, остаточно отримуємо

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{2\pi-2x}^{2\pi}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}d\eta\int\limits_{2\pi-2x+\eta}^{2\pi-\eta}f(\eta,\tau)d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{2\pi-x}^{t}\left(\mu(\tau+x-2\pi)-\mu(\tau-x)\right)d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_{2\pi-x}^{t}ds\left(-\int\limits_{s+x-2\pi}^{s+x-\pi}f(2\pi-x-s+\tau,\tau)d\tau+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{s+x-\pi}^{s}f(x+s-\tau,\tau)d\tau+\int\limits_{s-x}^{s}f(x-s+\tau,\tau)d\tau\right)\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{2}\int\limits_{2\pi-2x}^{2\pi}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}d\eta\int\limits_{2\pi-2x+\eta}^{2\pi-\eta}f(\eta,\tau)d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_{2\pi-x}^{t}\left(\mu(\tau+x-2\pi)-\mu(\tau-x)\right)d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{2\pi-x}^{t}ds\int\limits_{s+x-2\pi}^{s+x-\pi}f(2\pi-x-s+\tau,\tau)d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{2\pi-x}^{t}ds\int\limits_{s+x-\pi}^{s}f(x+s-\tau,\tau)d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_{2\pi-x}^{t}ds\int\limits_{s-x}^{s}f(x-s+\tau,\tau)d\tau.\qquad(3.38)$$

Об’єднавши перший і третій інтеграли (3.38), та зробивши відповідні заміни змінних, одержуємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{2\pi-2x}^{2\pi}\mu(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2}\int\limits_{2\pi-x}^{t}\mu(\tau+x-2\pi)d\tau-\frac{1}{2}\int\limits_{2\pi-x}^{t}\mu(\tau-x)d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{2\pi-2x}^{2\pi}\mu(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t+x-2\pi}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int\limits_{2\pi-2x}^{t-x}\mu(\alpha)d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t+x-2\pi}\mu(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{2\pi}\mu(\alpha)d\alpha\,.\qquad(3.39)$$

Другий, четвертий, п’ятий і шостий повторні інтеграли розв’язку (3.38) допускають такі перетворення:

$$-\int_0^x d\eta \int_{2\pi-2x+\eta}^{2\pi-\eta} f(\eta,\tau)d\tau - \int_{2\pi-x}^{t} ds \int_{s+x-2\pi}^{s+x-\pi} f(2\pi-x-s+\tau,\tau)d\tau +$$

$$+\int_{2\pi-x}^{t} ds \int_{s+x-\pi}^{s} f(x+s-\tau,\tau)d\tau + \int_{2\pi-x}^{t} ds \int_{s-x}^{s} f(x-s+\tau,\tau)d\tau =$$

$$=-\int_0^x d\eta \int_{2\pi-2x+\eta}^{2\pi-\eta} f(\eta,\tau)d\tau - \int_{2\pi-x}^{t} ds \int_0^{\pi} f(\eta,\eta-2\pi+s+x)d\eta -$$

$$-\int_{2\pi-x}^{t} ds \int_{\pi}^{x} f(\eta,x+s-\eta)d\eta + \int_{2\pi-x}^{t} ds \int_0^{x} f(\eta,\eta-x+s)d\eta \equiv 2I_2 .$$

Змінюючи порядок інтегрування у другому, третьому та четвертому інтегралах і здійснюючи відповідні заміни змінних, одержуємо:

$$2I_2 = -\int_0^x d\eta \int_{2\pi-2x+\eta}^{2\pi-\eta} f(\eta,\tau)d\tau - \int_0^{\pi} d\eta \int_{2\pi-x}^{t} f(\eta,\eta-2\pi+s+x)ds -$$

$$-\int_{\pi}^{x} d\eta \int_{2\pi-x}^{t} f(\eta,x+s-\eta)ds + \int_0^{x} d\eta \int_{2\pi-x}^{t} f(\eta,\eta-x+s)ds = -\int_0^x d\eta \int_{2\pi-2x+\eta}^{2\pi-\eta} f(\eta,\tau)d\tau -$$

$$-\int_0^{\pi} d\eta \int_{\eta}^{\eta-2\pi+t+x} f(\eta,\tau)d\tau - \int_{\pi}^{x} d\eta \int_{2\pi-\eta}^{x+t-\eta} f(\eta,\tau)d\tau + \int_0^{x} d\eta \int_{\eta+2\pi-2x}^{\eta-x+t} f(\eta,\tau)d\tau =$$

$$=\int_0^x d\eta \int_{2\pi-\eta}^{t-x+\eta} f(\eta,\tau)d\tau - \int_0^{\pi} d\eta \int_{\eta}^{t+x+\eta-2\pi} f(\eta,\tau)d\tau - \int_{\pi}^{x} d\eta \int_{2\pi-\eta}^{x+t-\eta} f(\eta,\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^x d\eta \int_{2\pi-\eta}^{x+t-\eta} f(\eta,\tau)d\tau - \int_0^{x} d\eta \int_{2\pi-\eta}^{x+t-\eta} f(\eta,\tau)d\tau = -\int_0^{x} d\eta \int_{t-x+\eta}^{t+x-\eta} f(\eta,\tau)d\tau -$$

$$-\int_0^{\pi} d\eta \int_{\eta}^{t+x+\eta-2\pi} f(\eta,\tau)d\tau + \int_0^{\pi} d\eta \int_{2\pi-\eta}^{t+x-\eta} f(\eta,\tau)d\tau . \qquad (3.40)$$

Враховуючи (3.39) і (3.40), на підставі третього рівняння (3.36) остаточно отримуємо таку формулу:

$$u(x,t) \equiv u_{\Delta_2}(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t+x-2\pi} \mu(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{2\pi} \mu(\alpha)d\alpha - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x} d\eta \int\limits_{t-x+\eta}^{t+x-\eta} f(\eta,\tau)d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} d\eta \int\limits_{2\pi-\eta}^{t+x-\eta} f(\eta,\tau)d\tau - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} d\eta \int\limits_{\eta}^{t+x+\eta-2\pi} f(\eta,\tau)d\tau, \quad (x,t) \in \overline{\Delta}_2, \qquad (3.41)$$

що й потрібно було довести.

3.1.3. Властивості неперервного розв'язку. Тепер на підставі формул (3.20), (3.23) і (3.32) побудуємо функцію

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u_{\Delta}(x,t), & (x,t) \in \overline{\Delta}, \\ u_{\Delta_1}(x,t), & (x,t) \in \Delta_1 \setminus \{t = x, \quad 0 \le x \le \pi\}, \\ u_{\Delta_2}(x,t), & (x,t) \in \Delta_2 \setminus \{t = 2\pi - x, \quad 0 \le x \le \pi\}, \end{cases} \qquad (3.42)$$

яка визначена у прямокутнику $\overline{\Pi}_{2\pi}$.

Досліджуючи функцію $\tilde{u}(x,t)$, переконуємося у справедливості таких тверджень.

Теорема 3.2. *Якщо* $\mu(t) \in C(\mathbb{R})$ *і* $f(x,t) \in C\left([0,\pi]\times\mathbb{R}\right)$, *то функція* $\tilde{u}(x,t)$, *визначена формулою (3.42), є неперервною функцією у прямокутнику* $\overline{\Pi}_{2\pi}$.

Доведення. Оскільки $\mu(t) \in C(\mathbb{R})$ *і* $f(x,t) \in C^{0,1}\left([0,\pi]\times\mathbb{R}\right)$, то інтеграли із змінними межами, що входять у формулу (3.20), є неперервними функціями у всіх точках $(x,t) \in \overline{\Delta}$. Це означає, що $u_{\Delta} \in C(\overline{\Delta})$. Аналогічно $u_{\Delta_1} \in C(\overline{\Delta}_1)$ і $u_{\Delta_2} \in C(\overline{\Delta}_2)$. Розриви функції $\tilde{u}(x,t)$ можуть бути лише на прямих $t = x$ і $t = 2\pi - x$, $0 \le x \le \pi$.

Покажемо, що на прямій $t = x$ функції $u_{\Delta}(x,t)$ і $u_{\Delta_1}(x,t)$ мають рівні значення, а на прямій $t = 2\pi - x$ функції $u_{\Delta}(x,t)$ і $u_{\Delta_2}(x,t)$ також мають рівні значення. Справді, покладаючи $t = x$ у формулах (3.20) і (3.23), одержуємо

$$u_{\Delta}(x,x) = \frac{1}{2}\int_0^{2x} \mu(\alpha)d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^x d\eta \int_{\eta}^{2x-\eta} f(\eta,\tau)d\tau$$

і

$$u_{\Delta_1}(x,x) = \frac{1}{2}\int_0^{2x} \mu(\alpha)d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^x d\eta \int_{\eta}^{2x-\eta} f(\eta,\tau)d\tau.$$

Отже, $u_{\Delta}(x,x) = u_{\Delta_1}(x,x)$.

Аналогічно, покладаючи $t = 2\pi - x$ у формулах (3.20) і (3.32), знаходимо

$$u_{\Delta}(x, 2\pi - x) = \frac{1}{2}\int_{2\pi-2x}^{2\pi} \mu(\alpha)d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^x d\eta \int_{2\pi-2x+\eta}^{2\pi-\eta} f(\eta,\tau)d\tau$$

і

$$u_{\Delta_2}(x, 2\pi - x) = \frac{1}{2}\int_{2\pi-2x}^{2\pi} \mu(\alpha)d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^x d\eta \int_{2\pi-2x+\eta}^{2\pi-\eta} f(\eta,\tau)d\tau.$$

Отже, $u_{\Delta}(x, 2\pi - x) = u_{\Delta_2}(x, 2\pi - x)$.

Теорему 3.2 доведено.

Зауваження 3.1. Зазначимо, що за відповідних умов, накладених на праву частину $f(x,t)$ неоднорідного рівняння (3.1), а також початкову функцію $\mu(t)$, формула (3.42) містить класичні розв’язки крайової задачі (3.17)–(3.19) [50], класичні розв’язки періодичної задачі $u(x, t + 2\pi) = u(x,t)$ [53].

Теорема 3.3 *При виконанні умов теореми 3.2 і умови*

$$\int_0^{2\pi} \mu(\alpha)d\alpha - \int_0^{\pi} d\eta \int_{\eta}^{2\pi-\eta} f(\eta,\tau)d\tau = 0 \tag{3.43}$$

функція $\tilde{u}(x,t)$, визначена згідно з (3.42), задовольняє крайові умови

$$\tilde{u}(0,t) = \tilde{u}(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le 2\pi. \tag{3.44}$$

Доведення. Справді, використовуючи означення (3.42) функції $\tilde{u}(x,t)$, маємо

$$\tilde{u}(0,t) = u_{\Delta}(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

тобто перша крайова умова (3.44) завжди виконується. Тепер, обчислюючи $u_{\Delta}(\pi,\pi)$, $u_{\Delta_1}(\pi,t)$ і $u_{\Delta_2}(\pi,t)$, $0 \le t \le 2\pi$, знаходимо

$$\tilde{u}(\pi,t) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mu(\alpha)\,d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\eta \int_{\eta}^{2\pi-\eta} f(\eta,\tau)\,d\tau .$$

Звідси, припускаючи виконання рівності (3.43) теореми 3.3, переконуємося, що $\tilde{u}(\pi,t) = 0$, $0 \le t \le 2\pi$.

Теорему 3.3 доведено.

Теорема 3.4. *При виконанні умов теореми 3.2 і умов*

1) $\mu(0) = \mu(2\pi)$*;*

2) $\int_0^{\pi} \{ f(\eta, 2\pi - \eta) - f(\eta,\eta) \}\,d\eta = 0$

функція $\tilde{u}(x,t)$*, визначена згідно з формулою (3.42), має неперервні частинні похідні першого порядку у прямокутнику* $\overline{\Pi}_{2\pi}$.

Доведення. Доведемо справедливість теореми для частинної похідної $\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t}$. Для цього на підставі рівностей (3.20), (3.23) і (3.32) обчислимо такі похідні

$$\frac{\partial u_{\Delta}(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\big(\mu(t+x) - \mu(t-x)\big) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{x} \{ f(\eta, t+x-\eta) - f(\eta, t-x+\eta) \}\,d\eta, \quad (x,t) \in \overline{\Delta}; \qquad (3.45)$$

$$\frac{\partial u_{\Delta_1}(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\mu(t+x) - \frac{1}{2}\mu(2\pi + t - x) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x \{f(\eta, t+x-\eta) - f(\eta, t-x+\eta)\}\, d\eta -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\pi \{f(\eta, t-x+\eta) - f(\eta, 2\pi+t-x-\eta)\}\, d\eta, \quad (x,t)\in\overline{\Delta}_1\,; \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial u_{\Delta_2}(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\mu(t+x-2\pi) - \frac{1}{2}\mu(t-x) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x \{f(\eta, t+x-\eta) - f(\eta, t-x+\eta)\}\, d\eta +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\pi \{f(\eta, t+x-\eta) - f(\eta, t+x+\eta-2\pi)\}\, d\eta, \quad (x,t)\in\overline{\Delta}_2\,. \quad (3.47)$$

Ураховуючи рівності (3.45)–(3.46) і умови теореми, стверджуємо, по-перше, що похідні $\frac{\partial u_{\Delta}}{\partial t}$, $\frac{\partial u_{\Delta_1}}{\partial t}$, $\frac{\partial u_{\Delta_2}}{\partial t}$ неперервні у своїх областях визначення. По-друге, покладаючи $t = x$ у виразах $\frac{\partial u_{\Delta}(x,t)}{\partial t}$, $\frac{\partial u_{\Delta_1}(x,t)}{\partial t}$, бачимо, що вони будуть рівними тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$$\mu(0) = \mu(2\pi) + \int_0^\pi \{f(\eta,\eta) - f(\eta, 2\pi-\eta)\}\, d\eta\,. \quad (3.48)$$

Аналогічно, покладаючи $t = 2\pi - x$ у виразах $\frac{\partial u_{\Delta}(x,t)}{\partial t}$, $\frac{\partial u_{\Delta_2}(x,t)}{\partial t}$, стверджуємо, що вони будуть рівними тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$$\mu(2\pi) = \mu(0) + \int_0^\pi \{f(\eta, 2\pi-\eta) - f(\eta,\eta)\}\, d\eta\,. \quad (3.49)$$

Отже, при виконанні умов 1) і 2) теореми 3.4 рівності (3.48) і (3.49) істинні, а отже, функція $\tilde{u}(x,t)$, визначена формулою (3.42), має неперервні частинні похідні

$$\frac{\partial u_{\Delta}(x,t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_{\Delta_1}(x,t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_{\Delta_2}(x,t)}{\partial t}$$

у всіх точках прямокутника $\overline{\Pi}_{2\pi}$.

Далі, на підставі похідних

$$\frac{\partial u_{\Delta}(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{2}\big(\mu(t+x)+\mu(t-x)\big) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x \left\{ f(\eta, t+x-\eta) + f(\eta, t-x+\eta) \right\} d\eta, \qquad (x,t)\in\overline{\Delta};$$

$$\frac{\partial u_{\Delta_1}(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{2}\big(\mu(t+x)+\mu(2\pi+t-x)\big) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x \left\{ f(\eta, t+x-\eta) + f(\eta, t-x+\eta) \right\} d\eta +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left\{ f(\eta, t-x+\eta) + f(\eta, 2\pi+t-x-\eta) \right\} d\eta, \qquad (x,t)\in\overline{\Delta}_1$$

$$\frac{\partial u_{\Delta_2}(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{2}\big(\mu(t+x-2\pi)+\mu(t-x)\big) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x \left\{ f(\eta, t+x-\eta) + f(\eta, t-x+\eta) \right\} d\eta +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left\{ f(\eta, t+x-\eta) - f(\eta, t+x+\eta-2\pi) \right\} d\eta, \qquad (x,t)\in\overline{\Delta}_2,$$

переконуємося також, що при виконанні умов 1) і 2) теореми 3.4

$$\frac{\partial u_{\Delta}(x,x)}{\partial x} = \frac{\partial u_{\Delta_1}(x,x)}{\partial x} \quad \text{і} \quad \frac{\partial u_{\Delta}(x,2\pi-x)}{\partial x} = \frac{\partial u_{\Delta_2}(x,2\pi-x)}{\partial x}.$$

Отже, функція $\tilde{u}(x,t)$, визначена згідно з формулою (3.42), має неперервні частинні похідні першого порядку, що й потрібно було довести.

Зауваження 3.2. Якщо для правої частини $f(x,t)$ рівняння (3.17) виконується умова

$$\int_0^{\pi} d\eta \int_{\eta}^{2\pi-\eta} f(\eta,\tau)d\tau = b \neq 0,$$

то для кожної функції $\mu(t) \in C(\mathbb{R})$, для якої виконується умова

$$\int_0^{2\pi} \mu(\alpha)d\alpha = a \neq 0$$

завжди існує неперервний розв'язок у прямокутнику $\bar{\Pi} = [0,\pi]\times[0,2\pi]$ задачі (3.17)–(3.19).

3.2. Структура неперервного розв'язку в класі періодичних функцій

3.2.1. Випадок $2\pi-$періодичних функцій. У цьому пункті доведемо, що існують класи 2π–періодичних по t функцій, для яких справедливі теореми 3.3 і 3.4.

Розглянемо такі простори і класи функцій:

$C_{\pi}^{i,j}$ – простір обмежених функцій двох змінних x і t, неперервно-диференційованих i раз по x та j раз неперервно-диференційованих по t на множині $[0,\pi]\times\mathbb{R}$;

$C_{\pi}^{0,0} = C_{\pi}$;

$G_{\pi t}$ – простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $[0,\pi]\times\mathrm{R}$ разом із похідною по t.

$A_{2\pi}^{-} = \{ f : f(x,t) = f(x, t+2\pi) = -f(x,-t) \}$.

$A_{2\pi}^{+} = \{ f : f(x,t) = f(x, t+2\pi) = f(x,-t) \}$.

$A_{2} = \{ f : f(x,t) = f(\pi - x, \pi + t) = f(x, t+2\pi) \}$.

$A_{2}^{-} = \{ f : f(x,t) = f(\pi - x, \pi + t) = f(x, t+2\pi) = -f(x,-t) \}$.

$Q_{2\pi} = \{ \mu : \mu(t) = \mu(t+2\pi) \}$.

$Q_{2\pi}^{-} = \{ \mu : \mu(t) = \mu(t+2\pi) = -\mu(-t) \}$.

Теорема 3.5. *Нехай функції* $\mu(t)$ *і* $f(x,t)$ *задовольняють такі умови:*

1) $\mu(t) \in C(\mathbb{R}) \bigcap Q_{2\pi}^{-}$*;*

2) $f(x,t) \in A_{2\pi}^{-} \bigcap C_{\pi}$.

Тоді функція $\tilde{u}(x,t)$*, визначена формулою (3.42), задовольняє крайові умови* $\tilde{u}(0,t) = \tilde{u}(\pi,t) = 0$.

Доведення. Для доведення теореми 3.5 потрібно показати виконання умов теореми 3.3, тобто виконання умови (3.43). Справді, через непарність і 2π–періодичність функції $\mu(t)$ маємо

$$\int_0^{2\pi} \mu(\alpha)\, d\alpha = 0.$$

Аналогічно одержуємо, що при $f \in A_{2\pi}^{-} \bigcap C_{\pi}$ інтеграл

$$\int_0^{\pi} d\eta \int_{\eta}^{2\pi-\eta} f(\eta,\tau)\, d\tau = \int_0^{\pi} d\eta \int_{\eta}^{-\eta} f(\eta,\tau)\, d\tau + \int_0^{\pi} d\eta \int_{-\eta}^{2\pi-\eta} f(\eta,\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^{\pi} d\eta \int_0^{2\pi} f(\eta,\tau)\, d\tau \equiv 0.$$

Таким чином, виконується умова (3.43) теореми 3.3, а отже, функція $\tilde{u}(x,t)$ задовольняє крайові умови $\tilde{u}(0,t) = \tilde{u}(\pi,t) = 0$, що й потрібно було довести.

Теорема 3.6. *Нехай*

1) $\mu(t) \in C(\mathbb{R}) \cap Q_{2\pi}$*;*

2) $f(x,t) \in A_2 \cap C_\pi$*.*

Тоді функція $\tilde{u}(x,t)$*, визначена формулою (3.42), має неперервні частинні похідні першого порядку у прямокутнику* $\overline{\Pi}_{2\pi}$*.*

Доведення. Для доведення теореми 3.6 потрібно показати виконання умов теореми 3.4, а саме, умов:

1) $\mu(0) = \mu(2\pi)$; (3.50)

2) $\int_0^\pi \{f(\eta, 2\pi - \eta) - f(\eta,\eta)\} d\eta = 0$. (3.51)

Оскільки $\mu(t)$ неперервна і 2π–періодична функція, то умова (3.50) завжди виконується.

Нехай тепер $f \in A_2 \cap C_\pi$. Тоді на підставі виразу лівої частини рівності (3.51) маємо

$$\int_0^\pi f(\eta, -\eta)\, d\eta - \int_0^\pi f(\eta,\eta)\, d\eta =$$

$$= \int_0^\pi f(\pi - \xi, -\pi + \xi)\, d\xi - \int_0^\pi f(\eta,\eta)\, d\eta =$$

$$= \int_0^\pi f(\pi - \xi, \pi + \xi)\, d\xi - \int_0^\pi f(\eta,\eta)\, d\eta = 0,$$

тобто при виконанні умов теореми 3.6 завжди виконуються умови (3.50) і (3.51). Таким чином, у цьому випадку справедливе твердження теореми 3.4, а отже, і твердження теореми 3.6. Теорему 3.6 доведено.

3.2.2. $2\pi-$періодичні розв'язки крайової задачі. Слід зазначити, що функція $\tilde{u}(x,t)$, побудована згідно з формулою (3.42), у класі 2π–періодичних по змінній t функцій не завжди буде 2π–періодичною по t функцією. Справді, для цього обчислимо її значення $\tilde{u}(x,0)$ і $\tilde{u}(x,2\pi)$.

Використовуючи формули (3.23) і (3.32), знаходимо

$$\tilde{u}(x,0)\equiv u_{\Delta_1}(x,0)=\frac{1}{2}\int_0^x \mu(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{2}\int_{2\pi-x}^{2\pi}\mu(\alpha)\,d\alpha-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x d\eta\int_{-x+\eta}^{x-\eta} f(\eta,\tau)\,d\tau-\frac{1}{2}\int_0^\pi d\eta\int_{\eta}^{-x+\eta} f(\eta,\tau)\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\pi d\eta\int_{2\pi-x-\eta}^{2\pi-\eta} f(\eta,\tau)\,d\tau=I_1^1+I_2^1+I_3^1+I_4^1+I_5^1; \tag{3.52}$$

$$\tilde{u}(x,2\pi)\equiv u_{\Delta_2}(x,2\pi)=\frac{1}{2}\int_0^x \mu(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{2}\int_{2\pi-x}^{2\pi}\mu(\alpha)\,d\alpha-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x d\eta\int_{2\pi-x+\eta}^{2\pi+x-\eta} f(\eta,\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\int_0^\pi d\eta\int_{2\pi-\eta}^{2\pi+x-\eta} f(\eta,\tau)\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\pi d\eta\int_{\eta}^{x+\eta} f(\eta,\tau)\,d\tau=I_1^2+I_2^2+I_3^2+I_4^2+I_5^2. \tag{3.53}$$

Отже, припускаючи, що $f(x,t)$ – 2π–періодична по t функція, легко переконуємося, що перших три інтеграли рівностей (3.52) і (3.53) рівні між собою, тобто $I_k^1=I_k^2,\ \ k=1,2,3$. Відрізняються між собою лише I_k^1 і I_k^2, $k=4,5$. Таким чином, взагалі кажучи, $\tilde{u}(x,0)\neq\tilde{u}(x,2\pi)$. Але у вище введеному класі функцій $A_{2\pi}^{+}$ переконуємося, що $I_k^1=I_k^2,\quad k=4,5$. Справді,

$$I_4^2=\frac{1}{2}\int_0^\pi d\eta\int_{2\pi-\eta}^{2\pi+x-\eta} f(\eta,\tau)\,d\tau=-\frac{1}{2}\int_0^\pi d\eta\int_{\eta}^{-x+\eta} f(\eta,2\pi-\theta)\,d\theta=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^\pi d\eta\int_{\eta}^{-x+\eta} f(\eta,\theta)\,d\theta=I_4^1;$$

$$I_5^1 = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\eta \int_{2\pi - x - \eta}^{2\pi-\eta} f(\eta,\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\eta \int_{x+\eta}^{\eta} f(\eta, 2\pi - \theta)\,d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\eta \int_{\eta}^{x+\eta} f(\eta,\theta)\,d\theta = I_5^2 .$$

Звідси випливає, що існують класи 2π–періодичних по t функцій, для яких побудована згідно з формулою (3.42) функція $\tilde{u}(x,t)$ є також 2π–періодичною по t функцією.

Зауваження 3.3. Покажемо, що при $\mu \in C(\mathbb{R}) \cap Q_{2\pi}$ і $f \in C_{\pi} \cap A_2$ функції $u_{\Delta}(x,t)$, $u_{\Delta_1}(x,t)$ і $u_{\Delta_2}(x,t)$ визначаються однією і тією ж формулою (3.20). Справді, нехай $\mu \in C(\mathbb{R}) \cap Q_{2\pi}$ і $f \in C_{\pi} \cap A_2$. Ураховуючи формулу (3.23), маємо

$$u_{\Delta_1}(x,t) = \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\,d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^{x} d\eta \int_{t-x+\eta}^{t+x-\eta} f(\eta,\tau)\,d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\eta \int_{\eta}^{t-x+\eta} f(\eta,\tau)\,d\tau - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-x+\xi}^{\xi} f(\pi-\xi, \pi+\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\,d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^{x} d\eta \int_{t-x+\eta}^{t+x-\eta} f(\eta,\tau)\,d\tau \equiv u_{\Delta}(x,t) .$$

Аналогічно на підставі формули (3.32) одержуємо, що

$$u_{\Delta_2}(x,t) = \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\,d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^{x} d\eta \int_{t-x+\eta}^{t+x-\eta} f(\eta,\tau)\,d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\xi \int_{\xi}^{t+x+\xi-2\pi} f(\pi-\xi, \pi+\theta)\,d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\eta \int_{\eta}^{t+x+\eta-2\pi} f(\eta,\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\,d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^{x} d\eta \int_{t-x+\eta}^{t+x-\eta} f(\eta,\tau)\,d\tau \equiv u_{\Delta}(x,t) .$$

Таким чином, справедливе твердження.

Теорема 3.7. *Нехай функції* $\mu(t)$ *і* $f(x,t)$ *задовольняють такі умови:*

1) $\mu \in C^1(\mathbb{R}) \bigcap Q_{2\pi}^-$*;* *2)* $f \in G_{\pi t} \bigcap A_2^-$.

Тоді функція $u_\Delta(x,t)$*, визначена формулою (3.20), є єдиним у прямокутнику* $\overline{\Pi}_{2\pi}$ 2π*–періодичним класичним* $\left(u_\Delta \in C_\pi^{2,2}\right)$ *розв'язком крайової задачі*

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.54}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.55}$$

$$u_x(0,t) = \mu(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.56}$$

Доведення. Про те, що при $\mu \in C^1(\mathbb{R}) \bigcap Q_{2\pi}^-$ і $f \in G_{\pi t} \bigcap A_2^-$ функція $u_\Delta(x,t)$ є класичним розв'язком рівняння (3.54), задовольняє першу крайову умову (3.55) $u_\Delta(0,t) = 0$ і умову (3.56), переконуємося безпосередньою перевіркою, використовуючи формулу

$$u_\Delta(x,t) = \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\,d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^x d\eta \int_{t-x+\eta}^{t+x-\eta} f(\eta,\tau)\,d\tau, \quad (x,t) \in \overline{\Pi}_{2\pi}. \tag{3.57}$$

Справді, на підставі формули (3.57) знаходимо, що

$$u_\Delta(0,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R};$$

$$\frac{\partial u_\Delta(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}(\mu(t+x) - \mu(t-x)) - \frac{1}{2}\int_0^x \{f(\eta, t+x-\eta) - f(\eta, t-x+\eta)\}\,d\eta;$$

$$\frac{\partial^2 u_\Delta(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{2}(\mu'(t+x) - \mu'(t-x)) - \frac{1}{2}\int_0^x \left\{\frac{\partial f(\eta, t+x-\eta)}{\partial(t+x-\eta)} - \frac{\partial f(\eta, t-x+\eta)}{\partial(t-x+\eta)}\right\} d\eta;$$

$$\frac{\partial u_\Delta(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{2}(\mu(t+x) + \mu(t-x)) - \frac{1}{2}\int_0^x \{f(\eta, t+x-\eta) + f(\eta, t-x+\eta)\}\,d\eta;$$

$$\frac{\partial^2 u_\Delta(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{2}(\mu'(t+x) - \mu'(t-x)) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x \left\{ \frac{\partial f(\eta, t+x-\eta)}{\partial(t+x-\eta)} - \frac{\partial f(\eta, t-x+\eta)}{\partial(t-x+\eta)} \right\} d\eta - f(x,t);$$

$$\frac{\partial u_\Delta(0,t)}{\partial x} = \mu(t);$$

$$\frac{\partial^2 u_\Delta(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_\Delta(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t).$$

Доведемо далі, що при виконанні умов теореми 3.7 функція $u_\Delta(x,t)$ задовольняє і другу крайову умову $u_\Delta(\pi,t) = 0,\ t \in \mathbb{R}$. Покладаючи $x = \pi$ у формулі (3.57), одержуємо

$$u_\Delta(\pi,t) = \frac{1}{2}\int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha)\,d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^\pi d\eta \int_{t-\pi+\eta}^{t+\pi-\eta} f(\eta,\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t-\pi}^{-\pi} \mu(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \mu(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha)\,d\alpha -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi-\pi}^{t+\xi-\pi} f(\pi-\xi, \pi+\theta)\,d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi-\pi}^{t+\xi-\pi} f(\xi,\theta)\,d\theta \equiv K(t).$$

Ураховуючи, що при $f \in G_{\pi t} \bigcap A_2^-$ $\quad K(\pi) = 0$ і

$$K'(t) = -\frac{1}{2}\int_0^\pi f(\xi, t+\xi-\pi)\,d\xi + \frac{1}{2}\int_0^\pi f(\xi, t-\xi-\pi)\,d\xi =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\pi f(\xi, t+\xi-\pi)\,d\xi + \frac{1}{2}\int_0^\pi f(\pi-\eta, \pi+t+\eta-\pi)\,d\eta \equiv 0$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$, маємо, що $K(t) = 0,\quad t \in \mathbb{R}$.

Отже, $u_\Delta(\pi,t) = 0$, що й потрібно було довести.

Оскільки при виконанні умов теореми 3.7 функція $\mathrm{v}(x,t) = u_\Delta(\pi - x, \pi + t)$ є класичним розв'язком крайової задачі (3.54) і (3.55), то на підставі формули (3.57) знаходимо ще один $2\pi-$ періодичний розв'язок цієї задачі. Справді, покладаючи $\pi - x$ замість x і $\pi + t$ замість t у формулі (3.57), одержуємо

$$\mathrm{v}(x,t)=u_{\Delta}(\pi-x,\pi+t)=\frac{1}{2}\int\limits_{t+x}^{t-x+2\pi}\mu(\alpha)\,d\alpha-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi-x}d\eta\int\limits_{t+x+\eta}^{t-x-\eta+2\pi}f(\eta,\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{t+x}^{t-x}\mu(\alpha)\,d\alpha-\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t-x+2\pi}\mu(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{2}\int\limits_{\pi}^{x}d\eta\int\limits_{t+\pi+x-\xi}^{t+\pi-x+\xi}f(\pi-\xi,\tau)\,d\tau=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_{t+x}^{t-x}\mu(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\mu(\alpha)\,d\alpha-\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\pi}d\xi\int\limits_{t+x-\xi}^{t-x+\xi}f(\pi-\xi,\pi+\theta)\,d\theta=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)\,d\alpha-\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\pi}d\xi\int\limits_{t+x-\xi}^{t-x+\xi}f(\xi,\theta)\,d\theta. \tag{3.58}$$

Ураховуючи те, що в просторі $A_2=\{f: f(x,t)=f(\pi-x,\pi+t)= =f(x,t+2\pi)\}$ однорідна крайова періодична задача $u^0_{tt}-u^0_{xx}=0$, $u^0(0,t)=u^0(\pi,t)=0$, $u^0(x,t+2\pi)=u^0(x,t)$ має лише нульовий розв’язок $\left(u^0(x,t)\equiv 0\right)$, справедливе твердження.

Теорема 3.8. *Якщо* $f\in G_{\pi t}\bigcap A_2^-$, *то функція* $u=Sf$, *визначена формулою*

$$(Sf)(x,t)=-\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{x}d\xi\int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}f(\xi,\tau)\,d\tau-\frac{1}{4}\int\limits_{x}^{\pi}d\xi\int\limits_{t+x-\xi}^{t-x+\xi}f(\xi,\tau)\,d\tau, \tag{3.59}$$

є єдиною функцією із простору $C^{2,2}_{\pi}\bigcap A_2^-$, *яка задовольняє умови крайової* 2π*–періодичної задачі*

$$u_{tt}-u_{xx}=f(x,t),\quad 0<x<\pi,\quad t\in\mathbb{R}, \tag{3.60}$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad t\in\mathbb{R}, \tag{3.61}$$

$$u(x,t+2\pi)=u(x,t),\quad 0<x<\pi,\quad t\in\mathbb{R}. \tag{3.62}$$

Далі доведемо, що на підставі формули (3.57) $f\in G_{\pi t}\bigcap A_2$ можна одержати більш загальну формулу розв’язку крайової періодичної задачі (3.60) – (3.62). Припустимо, що $\mu(t)=a=const$. Тоді на підставі формули (3.57) маємо

$$u_\Delta(x,t) = ax - \frac{1}{2}\int_0^x d\eta \int_{t-x+\eta}^{t+x-\eta} f(\eta,\tau)\, d\tau\,. \tag{3.63}$$

Звідси, враховуючи рівність $u_\Delta(\pi,t)=0$, тобто будемо вимагати, щоб функція (3.63) задовольняла крайові умови $u_\Delta(0,t)=u_\Delta(\pi,t)=0$, знаходимо, що $u_\Delta(\pi,t)=0$ тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$$a\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi d\eta \int_{t-\pi+\eta}^{t+\pi-\eta} f(\eta,\tau)\, d\tau = 0\,.$$

Це можливо, коли

$$a = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi d\eta \int_{t-\pi+\eta}^{t+\pi-\eta} f(\eta,\tau)\, d\tau = const\,. \tag{3.64}$$

Доведемо, що інтеграл рівності (3.64) при $f \in G_{\pi t} \cap A_2$ справді набуває постійного значення. Маємо

$$I'(t) = \left(\int_0^\pi d\eta \int_{t-\pi+\eta}^{t+\pi-\eta} f(\eta,\tau)\, d\tau \right)' =$$

$$= \int_0^\pi f(\eta, t+\pi-\eta)\, d\eta - \int_0^\pi f(\eta, t-\pi+\eta)\, d\eta =$$

$$= \int_0^\pi f(\pi-\xi, \pi+t-\pi+\xi)\, d\xi - \int_0^\pi f(\eta, t-\pi+\eta)\, d\eta =$$

$$= \int_0^\pi f(\xi, t-\pi+\xi)\, d\xi - \int_0^\pi f(\eta, t-\pi+\eta)\, d\eta \equiv 0$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$. Отже,

$$I(t) = \int_0^\pi d\eta \int_{t-\pi+\eta}^{t+\pi-\eta} f(\eta,\tau)\, d\tau \equiv const,\ \ t \in \mathbb{R}\,.$$

Таким чином, при $f \in G_{\pi t} \cap A_2$ функції

$$u_{\Delta}(x,t)=\frac{x}{2\pi}\int_{0}^{\pi}d\eta\int_{t-\pi+\eta}^{t+\pi-\eta}f(\eta,\tau)\,d\tau-\frac{1}{2}\int_{0}^{x}d\eta\int_{t-x+\eta}^{t+x-\eta}f(\eta,\tau)\,d\tau \tag{3.65}$$

і

$$z(x,t)=\frac{\pi-x}{2\pi}\int_{0}^{\pi}d\xi\int_{t-\xi}^{t+\xi}f(\xi,\theta)\,d\theta-\frac{1}{2}\int_{x}^{\pi}d\xi\int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi}f(\xi,\theta)\,d\theta \tag{3.66}$$

є класичними розв'язками крайової періодичної задачі (3.60)–(3.62).

Отже, на підставі рівностей (3.65) і (3.66) одержуємо формулу

$$u(x,t)=\left(Sg\right)(x,t)+\frac{x}{4\pi}\int_{0}^{\pi}d\eta\int_{t-\pi+\eta}^{t+\pi-\eta}f(\eta,\tau)\,d\tau+\frac{\pi-x}{4\pi}\int_{0}^{\pi}d\eta\int_{t-\eta}^{t+\eta}f(\eta,\tau)d\tau\,,$$

де $\left(Sg\right)(x,t)=-\frac{1}{4}\int_{0}^{x}d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}g(\xi,\tau)d\tau-\frac{1}{4}\int_{x}^{\pi}d\xi\int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi}g(\xi,\tau)d\tau\,.$

Ця формула вперше наведена у роботі [21] і при $f\in G_{\pi t}\cap A_2$ є єдиним класичним $\left(u\in C_{\pi}^{2,2}\cap A_2\right)$ розв'язком крайової періодичної задачі (3.60)–(3.62).

3.2.3. Узагальнено неперервний розв'язок крайової задачі. У пункті 3.1.3 встановлено класи 2π–періодичних функцій, для яких завжди існує неперервний розв'язок у прямокутнику $\overline{\Pi}_{2\pi}$ крайової задачі (3.17), (3.18) (теорема 3.3). Однак цей результат справедливий і для більш широкого класу неперервних функцій.

Теорема 3.9. *Нехай* $f(x,t)\in C_{\pi}$ і

$$\int_{0}^{\pi}d\eta\int_{\eta}^{2\pi-\eta}f(\eta,\tau)d\tau=\delta\neq 0\,. \tag{3.67}$$

Тоді для кожної функції $\mu(t)\in C(\breve{У})$*, для якої*

$$\int_{0}^{2\pi}\mu(\alpha)d\alpha=\gamma\neq 0\,, \tag{3.68}$$

крайова задача (3.17), (3.18) має єдиний узагальнено неперервний розв'язок у прямокутнику $\overline{\Pi}_{2\pi}$.

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію $\beta(t)=\dfrac{\delta}{\gamma}\mu(t)$, де δ і γ визначені формулами (3.67), (3.68), і на підставі формул (3.20), (3.23) і (3.32), покладаючи замість $\mu(t)$ функцію $\beta(t)$, побудуємо розв'язки $u_{\Delta}(x,t,\beta)$, $u_{\Delta_1}(x,t,\beta)$ і $u_{\Delta_2}(x,t,\beta)$ у трикутниках $\overline{\Delta}$, $\overline{\Delta}_1$ і $\overline{\Delta}_2$. Тоді, згідно з теоремою 3.2, функція

$$\tilde{u}(x,t,\beta)=\begin{cases} u_{\Delta}(x,t,\beta), & (x,t)\in\overline{\Delta},\\ u_{\Delta_1}(x,t,\beta), & (x,t)\in\Delta_1\setminus\{t=x,\quad 0\le x\le\pi\},\\ u_{\Delta_2}(x,t,\beta), & (x,t)\in\Delta_2\setminus\{t=2\pi-x,\quad 0\le x\le\pi\},\end{cases} \tag{3.69}$$

буде неперервною у прямокутнику $\overline{\Pi}_{2\pi}$, а отже, неперервним розв'язком рівняння (3.17). Покажемо, що функція $\tilde{u}(x,t,\beta)$ задовольняє крайові умови (3.18). Справді, $\tilde{u}(0,t,\beta)=u_{\Delta}(0,t,\beta)\equiv 0$, $\quad 0\le t\le 2\pi$. Аналогічно в силу позначень (3.67) і (3.68), ураховуючи, що $\beta(t)=\dfrac{\delta}{\gamma}\mu(t)$, маємо

$$\tilde{u}(\pi,t,\beta)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\beta(\alpha)\,d\alpha-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\eta\int_{\eta}^{2\pi-\eta}f(\eta,\tau)\,d\tau=\frac{1}{2}\frac{\delta}{\gamma}\gamma-\frac{1}{2}\delta\equiv 0,\quad 0\le t\le 2\pi,$$

що й потрібно було довести.

Висновки

У цьому розділі наведено нову схему дослідження розв'язків крайової періодичної задачі для лінійного неоднорідного рівняння $u_{tt}-u_{xx}=f\left(x,t\right)$. Вказаний метод побудови розв'язку лінійної задачі дає змогу досліджувати умови існування неперервних розв'язків (згідно з означеннями, поданими в роботах [2], [29]) багатьох нелінійних крайових періодичних задач для гіперболічних рівнянь.

РОЗДІЛ IV
ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМ ІСНУВАННЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАГАЛЬНИХ КРАЙОВИХ ПЕРІОДИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

У цьому розділі ми вказуємо на практичне застосування результатів (умов існування), одержаних у другому і третьому розділах, для дослідження загальної крайової $\left(u(0,t)=\mu_1(t),\ \ u(\pi,t)=\mu_2(t),\ \ t\in \mathrm{R}\right)$ періодичної задачі $\left(u(x,t+\omega)=u(x,t),\ \ 0\le x\le \pi,\ \ t\in \mathrm{R}\right)$ для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку $u_{tt}-u_{xx}=f(x,t)$. Приведено заміну змінних, на підставі якої досягнуто даний результат.

Сформульовано основну теорему, а також доведено існування гладких розв'язків квазілінійної крайової періодичної задачі.

4.1. Загальна крайова періодична задача для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння

4.1.1. Класична заміна змінних. Розглянемо таку загальну крайову $2\pi-$періодичну задачу:

$$u_{tt}-u_{xx}=f(x,t),\quad 0<x<\pi,\quad t\in \mathrm{R}, \tag{4.1}$$

$$u(0,t)=\mu_1(t),\quad u(\pi,t)=\mu_2(t),\quad t\in \mathrm{R}, \tag{4.2}$$

$$u(x,\ t+2\pi)=u(x,t),\quad 0\le x\le \pi,\quad t\in \mathrm{R}. \tag{4.3}$$

Встановимо умови, за яких існують класичні розв'язки задачі (4.1)–(4.3). Для цього використаємо доведені нами раніше такі результати.

Теорема 4.1 [24, с. 918]. *Якщо* $g \in G_{\pi t} \cap A_2$, *то функція*

$$\mathrm{v}(x,t) = -\frac{1}{4}\int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau - \frac{1}{4}\int_x^\pi d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau +$$

$$+\frac{\pi-x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau + \frac{x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau \equiv$$

$$\equiv \left(Sg\right)(x,t) + \frac{\pi-x}{4\pi}v_1(t) + \frac{x}{4\pi}v_2(t) \qquad (4.4)$$

є єдиним класичним $\left(\mathrm{v} \in C_\pi^{2,2}\right)$*розв'язком крайової* 2π*–періодичної задачі*

$$\mathrm{v}_{tt} - \mathrm{v}_{xx} = g\left(x,t\right), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathrm{R}, \qquad (4.5)$$

$$\mathrm{v}(0,t) = 0, \quad \mathrm{v}(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathrm{R}, \qquad (4.6)$$

$$\mathrm{v}(x, t+2\pi) = \mathrm{v}(x,t), \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \in \mathrm{R}. \qquad (4.7)$$

Теорема 4.2 [Ч2]. *Якщо* $g \in G_{\pi t} \cap A_1$, *то функція*

$$z(x,t) = \left(Sg\right)(x,t) + \frac{1}{4}v_1(t) \qquad (4.8)$$

є єдиним класичним $\left(z \in C_\pi^{2,2} \cap A_1\right)$ *розв'язком крайової* π*–періодичної задачі*

$$z_{tt} - z_{xx} = g\left(x,t\right), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathrm{R}, \qquad (4.9)$$

$$z(0,t) = z(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathrm{R}, \qquad (4.10)$$

$$z(x, t+\pi) = z(x,t), \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \in \mathrm{R}. \qquad (4.11)$$

Зведення загальної крайової задачі (4.1), (4.2) до відповідної крайової задачі (4.5), (4.6) з нульовими крайовими умовами $\mathrm{v}(0,t) = \mathrm{v}(\pi,t) = 0$ проводиться здебільшого за допомогою відомої [44, с. 103] класичної заміни функцій

$$u(x,t) = \mathrm{v}(x,t) + \mu_1(t) + \frac{x}{\pi}\left(\mu_2(t) - \mu_1(t)\right) \equiv \mathrm{v}(x,t) + U(x,t), \qquad (4.12)$$

де $\mathrm{v}(x,t)$ – нова шукана функція, а $U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{\pi}\left(\mu_2(t) - \mu_1(t)\right)$.

При такій заміні (4.12) функція $g(x,t)$ визначається за формулою

$$g(x,t)=f(x,t)-\mu_1''(t)-\frac{x}{\pi}\left(\mu_2''(t)-\mu_1''(t)\right). \qquad (4.13)$$

Через наявність аргументу *x* у формулі (4.13) нова функція $g(x,t)$ не буде належати ні A_2, ні A_1. Тому вивчати питання про існування 2π–періодичних розв'язків задачі (4.1)–(4.3) на підставі формул (4.4), (4.8) неможливо.

Розв'язність задачі (4.1)–(4.3) дає змогу дослідити новий запис заміни

$$u(x,t)=\mathrm{v}(x,t)+U_1(x,t)\,, \qquad (4.14)$$

де

$$U_1(x,t)=\frac{\pi-x}{\pi}\mu_1(t)+\frac{x}{\pi}\mu_2(t). \qquad (4.15)$$

Якщо застосувати заміну (4.14), то шукана функція $\mathrm{v}(x,t)$ повинна задовольняти рівняння $\mathrm{v}_{tt}-\mathrm{v}_{xx}=g\left(x,t\right)$, де

$$g(x,t)=f(x,t)-\frac{\pi-x}{\pi}\mu_1''(t)-\frac{x}{\pi}\mu_2''(t). \qquad (4.16)$$

Лема 4.1. *Якщо* $f\in C_\pi\bigcap A_1$ *і* $\mu_1(t)\in Q_\pi$, $\mu_2(t)\in Q_\pi$, $\mu_1''(t)=\mu_2''(t)$, *то функція* $g(x,t)$*, визначена згідно з формулою (4.16), також належить* A_1.

Доведення. Справді, якщо виконуються умови леми 4.1, то $g(x,t+\pi)=g(x,t)$ і $g(\pi-x,t)=f\left(\pi-x,t\right)-\frac{x}{\pi}\mu_1''(t)-\frac{\pi-x}{\pi}\mu_2''(t)=g(x,t)$, що й потрібно було довести.

Теорема 4.3. *Якщо* $f\in G_{\pi\,t}\bigcap A_1$, $\mu_1(t)\in Q_\pi\bigcap C^3$, $\mu_2(t)\in Q_\pi\bigcap C^3$, $\mu_1''(t)=\mu_2''(t)$, *то функція* $u(x,t)=z(x,t)+U_1(x,t)$, *де* $z(x,t)$ *визначена формулою (4.8), а* $U_1(x,t)$ *визначена формулою (4.15), є єдиним класичним розв'язком крайової періодичної задачі (4.1)–(4.3).*

Аналогічний результат можна сформулювати і для просторів A_2, $A_{4\pi}$.

4.1.2. Основна теорема. Використовуючи методику відшукання розв'язків, яка викладена у другому розділі, можна стверджувати, що розв'язок

$$u(x,t) = u^0(x,t) + \tilde{u}(x,t) \equiv$$

$$\equiv \tilde{A}x + \tilde{B} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\tilde{A}_k^1 \cos\nu_k x + \tilde{A}_k^2 \sin\nu_k x\right)\cos\nu_k t + \tag{4.17}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tilde{A}_k^3 \cos\nu_k x + \tilde{A}_k^4 \sin\nu_k x\right)\sin\nu_k t + \tilde{u}(x,t),$$

де $\nu_k = \dfrac{2\pi k}{\omega}$, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{A}_k^i$, $i = 1, 2, 3, 4$, $k \in \mathrm{N}$, – довільні сталі, $\tilde{u}(x,t)$ – частинний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння (4.1), такий, що $\tilde{u}(x,t+\omega) = \tilde{u}(x,t)$, буде єдиним формальним розв'язком крайової періодичної задачі (4.1)–(4.3), якщо при врахуванні крайових умов $u(0,t) = \mu_1(t)$ і $u(\pi,t) = \mu_2(t)$ система

$$\tilde{B} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\tilde{A}_k^1 \cos\nu_k t + \tilde{A}_k^3 \sin\nu_k t\right) + \tilde{u}(0,t) = \mu_1(t),$$

$$\tilde{A}\pi + \tilde{B} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\tilde{A}_k^1 \cos\nu_k \pi + \tilde{A}_k^2 \sin\nu_k \pi\right)\cos\nu_k t + \tag{4.18}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tilde{A}_k^3 \cos\nu_k \pi + \tilde{A}_k^4 \sin\nu_k \pi\right)\sin\nu_k t + \tilde{u}(\pi,t) = \mu_2(t)$$

відносно невідомих коефіцієнтів $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{A}_k^i$, $i = 1, 2, 3, 4$, $k \in \mathrm{N}$, має єдиний розв'язок.

Нехай $\nu_k = \dfrac{2\pi k}{\omega} \notin \mathrm{Q}$, $k \in \mathrm{N}$, тобто, $\omega \neq \dfrac{2\pi p}{q}$, $p, q \in \mathrm{N}$.

Припустимо, що ω–періодичні функції $\tilde{u}(0,t) - \mu_1(t)$ і $\tilde{u}(\pi,t) - \mu_2(t)$ розкладаються у такі рівномірно збіжні ряди Фур'є:

$$\tilde{u}(0,t) - \mu_1(t) = \frac{\tilde{a}_0^0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\tilde{a}_k^0 \cos\nu_k t + \tilde{b}_k^0 \sin\nu_k t\right); \tag{4.19}$$

$$\tilde{u}(\pi,t) - \mu_2(t) = \frac{\tilde{a}_0^\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\tilde{a}_k^\pi \cos\nu_k t + \tilde{b}_k^\pi \sin\nu_k t\right), \tag{4.20}$$

де $\tilde{a}_k^0$, $\tilde{a}_k^\pi$, $\tilde{b}_k^0$, $\tilde{b}_k^\pi$ – відомі коефіцієнти Фур'є, які визначаються за формулами

$$\tilde{a}_k^0 = \frac{2}{\omega}\int\limits_{-\omega/2}^{\omega/2}\left(\tilde{u}(0,t) - \mu_1(t)\right)\cos\frac{2k\pi}{\omega}\,tdt, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots;$$

$$\tilde{b}_k^0 = \frac{2}{\omega}\int\limits_{-\omega/2}^{\omega/2}\left(\tilde{u}(0,t) - \mu_1(t)\right)\sin\frac{2k\pi}{\omega}\,tdt, \quad k = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$\tilde{a}_k^\pi = \frac{2}{\omega}\int\limits_{-\omega/2}^{\omega/2}\left(\tilde{u}(\pi,t) - \mu_2(t)\right)\cos\frac{2k\pi}{\omega}\,tdt, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots;$$

$$\tilde{b}_k^\pi = \frac{2}{\omega}\int\limits_{-\omega/2}^{\omega/2}\left(\tilde{u}(\pi,t) - \mu_2(t)\right)\sin\frac{2k\pi}{\omega}\,tdt, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Основна теорема. *Нехай функції* $\left(\tilde{u}(0,t) - \mu_1(t)\right)$ *і* $\left(\tilde{u}(\pi,t) - \mu_2(t)\right)$ *розкладаються у рівномірно збіжні ряди Фур'є (4.19) і (4.20). Якщо* $\nu_k = \dfrac{2\pi k}{\omega}$ *не є раціональним числом, тобто,* $\nu_k \notin \mathrm{Q}$, $k \in \mathrm{N}$, *то система (4.18) має єдиний розв'язок, а отже, крайова періодична задача (4.1)–(4.3) має єдиний формальний розв'язок.*

Доведення. Справді, при виконанні умов основної теореми, підставляючи ряди (4.19) і (4.20) у систему (4.18), одержуємо, що

$$\begin{gathered}
\tilde{B} = -\frac{\tilde{a}_0^0}{2}; \quad \tilde{A}_k^1 = -\tilde{a}_k^0; \quad \tilde{A}_k^3 = -\tilde{b}_k^0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots; \\
\tilde{A}\pi + \tilde{B} = -\frac{\tilde{a}_0^\pi}{2}; \quad \tilde{A}_k^1 \cos\nu_k\pi + \tilde{A}_k^2 \sin\nu_k\pi = -\tilde{a}_k^\pi; \\
\tilde{A}_k^3 \cos\nu_k\pi + \tilde{A}_k^4 \sin\nu_k\pi = -\tilde{b}_k^\pi, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.
\end{gathered} \tag{4.21}$$

Оскільки $\nu_k \notin \mathrm{Q}$, то $\sin\nu_k\pi \neq 0$. Отже, згідно з рівностями (4.21), коефіцієнти $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{A}_k^i$, $i = 1, 2, 3, 4$, $k \in \mathrm{N}$ визначаються однозначно, що й потрібно було довести.

Зауваження 4.1. Наші дослідження спрямовані на більш детальне вивчення умов існування єдиного розв'язку загальної крайової періодичної задачі (4.1)–(4.3) і можемо стверджувати, що для розглянутого випадку $\frac{2\pi}{\omega} \notin \mathrm{Q}$ ми отримали формулу для відшукання єдиного формального розв'язку цієї задачі у вигляді

$$u(x,t) = u^0(x,t) + \tilde{u}(x,t) \equiv$$

$$\equiv \tilde{A}x + \tilde{B} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\tilde{A}_k^1 \cos\nu_k x + \tilde{A}_k^2 \sin\nu_k x\right)\cos\nu_k t + \tag{4.22}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tilde{A}_k^3 \cos\nu_k x + \tilde{A}_k^4 \sin\nu_k x\right)\sin\nu_k t + \left(Sg\right)(x,t),$$

де функція $\left(Sg\right)(x,t)$ визначається з формули (4.4), а коефіцієнти $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{A}_k^i$, $i = 1, 2, 3, 4$, $k \in \mathrm{N}$, – за формулами (4.21).

4.2. Узагальнені розв'язки

4.2.1. Квазілінійна крайова періодична задача. Розглянемо таку квазілінійну крайову періодичну задачу:

$$u_{tt} - u_{xx} = F[u,u_t], \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathrm{R}, \tag{4.23}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathrm{R}, \tag{4.24}$$

$$u(x, t + 2\pi) = u(x,t), \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \in \mathrm{R}, \tag{4.25}$$

і встановимо умови існування ще одного вигляду розв'язку задачі (4.23)–(4.25), а саме, у класі функцій $A_2^+ = \left\{g : g(x,t) = -\,g(\pi - x, t) = -g(x, \pi - t) = g(x, -t)\right\}$.

Заданий тут оператор $F[u,u_t]$, взагалі кажучи, нелінійний, переводить гладку $\left(u \in C^1\left([0,\pi]\times \mathrm{R}\right)\right)$ функцію $u(x,t)$ у скалярну функцію $F[u,u_t](x,t)$, визначену на $[0,\pi]\times \mathrm{R}$.

Використовуючи результати, одержані в другому розділі дисертаційної роботи для лінійної неоднорідної крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3) при

$\omega = 2\pi$, наприклад, той факт, що у розглянутих класах функцій A_2^+, A_i, $i = 1, 2$, $A_{4\pi}$, відповідна лінійна однорідна крайова періодична задача має лише тривіальний розв'язок $\left(u^0(x,t) \equiv 0\right)$, ми можемо на підставі знайдених операторів R_2^+, R_i, $i = 1, 2$, $R_{4\pi}$ дати відповідь на поставлену задачу. Оскільки лише оператори R відображають вказані простори функцій A_i самих в себе і лінійна однорідна задача в цих просторах має єдиний тривіальний розв'язок, то найпростіше побудувати алгоритм відшукання розв'язку нелінійної крайової періодичної задачі в цих просторах. Приведемо одну із таких схем для простору A_2^+.

За аналогією з лінійним випадком розглянемо таку систему інтегральних рівнянь:

$$
\begin{aligned}
&u(x,t) = \left(R_2^+ F[u,u_t]\right)(x,t) \equiv \left(SF[u,u_t]\right)(x,t) + \frac{\pi - 2x}{4\pi}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} F[u,u_t](\xi,\tau)\,d\tau, \\
&u_t(x,t) = \left(R_2^+ F[u,u_t]\right)_t(x,t) \equiv \left(SF[u,u_t]\right)_t(x,t), \qquad\qquad (4.26) \\
&u_x(x,t) = \left(R_2^+ F[u,u_t]\right)_x(x,t) \equiv \left(SF[u,u_t]\right)_x(x,t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} F[u,u_t](\xi,\tau)\,d\tau,
\end{aligned}
$$

де

$$
\left(SF[u,u_t]\right)(x,t) = -\frac{1}{4}\int_0^{x} d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} F[u,u_t](\xi,\tau)\,d\tau - \frac{1}{4}\int_x^{\pi} d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} F[u,u_t](\xi,\tau)\,d\tau,
$$

$F[u,u_t](x,t) = f(x,t,u(x,t),u_t(x,t))$ – значення оператора *F,* а $f(x,t,u,u_t)$ – вираз нелінійності правої частини рівняння (4.23).

Означення 4.1*. Неперервний розв'язок* $\left(u, u_t, u_x\right)$, $u \in A_2^+$, *системи інтегральних рівнянь (4.26) будемо називати гладким розв'язком крайової періодичної задачі (4.23)–(4.25).*

Використовуючи інтегральне зображення (2.35) розв'язку $u(x,t)=\left(R_2^+ g\right)(x,t)$ лінійної неоднорідної крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3) при $\omega=2\pi$, на підставі теореми 2.5 переконуємося у справедливості наступного твердження.

Лема 4.2. *Нехай* $g\in C_\pi \bigcap A_2^+$. *Тоді лінійна задача (2.1)–(2.3) при* $\omega=2\pi$ *має єдиний гладкий розв'язок* $u=R_2^+ g$, *для якого справедливі оцінки (2.36):*

$$\left\|\left(R_2^+ g\right)(x,t)\right\|_{C_\pi}\le\frac{\pi^2}{2}\|g\|_{C_\pi};$$

$$\left\|\left(R_2^+ g\right)_t(x,t)\right\|_{C_\pi}\le\frac{\pi}{2}\|g\|_{C_\pi}; \qquad (4.27)$$

$$\left\|\left(R_2^+ g\right)_x(x,t)\right\|_{C_\pi}\le\pi\|g\|_{C_\pi};$$

де $\|\varphi(x,t)\|_{C_\pi}=\sup\limits_{(x,t)\in[0,\pi]\times\mathrm{R}}|\varphi(x,t)|$.

Теорема 4.4. *Нехай скалярна функція* $F[u,u_t](x,t)=f\left(x,t,u(x,t),u_t(x,t)\right)$ *задовольняє такі умови:*

1) $f(x,t,u,u_t)\in C_\pi\Big([0,\pi]\times\mathrm{R}\times\|u\|_{C_\pi}<\infty\times\|u_t\|_{C_\pi}<\infty\Big)$; $\qquad (4.28)$

2) $0<\|F[0,0](x,t)\|_{C_\pi}=\Gamma<\infty$; $\qquad (4.29)$

3) $\left|F[\tilde{\tilde{u}},\tilde{\tilde{u}}_t](x,t)-F[\tilde{u},\tilde{u}_t](x,t)\right|\le N_1\left|\tilde{\tilde{u}}(x,t)-\tilde{u}(x,t)\right|+N_2\left|\tilde{\tilde{u}}_t(x,t)-\tilde{u}_t(x,t)\right|$; $\qquad (4.30)$

4) $F[0,0](x,t)\in A_2^+$; $\qquad (4.31)$

5) *для всіх* $u(x,t)\in A_2^+\bigcap C_\pi^{1,1}$

$$F[u,u_t](x,t)\in A_2^+\bigcap C_\pi. \qquad (4.32)$$

Тоді при виконанні умови

$$\frac{\pi^2}{2}N_1+\frac{\pi}{2}N_2<\frac{1}{2} \qquad (4.33)$$

задача (4.23)–(4.25) має єдиний гладкий $\left(u\in C_\pi^{1,1}\bigcap A_2^+\right)$ *розв'язок.*

Доведення. Означимо нульове наближення за такою формулою:

$$u_0(x,t)=\left(R_2^{+}F[0,0]\right)(x,t)\equiv\left(SF[0,0]\right)(x,t)+\frac{\pi-2x}{4\pi}\int_0^{\pi}d\xi\int_{t-\xi}^{t+\xi}F[0,0](\xi,\tau)d\tau\,. \quad (4.34)$$

Використовуючи оцінки (4.27), (4.29), (4.31) на підставі властивостей лінійного оператора (4.34) маємо, що $u_0(x,t)\in A_2^{+}\cap C_{\pi}^{1,1}\left([0,\pi]\times\mathrm{R}\right)$ і

$$\left|u_0(x,t)\right|\le\frac{\Gamma\pi^2}{2}=K_1;\qquad \frac{\pi}{2}\left|u_{0\,t}(x,t)\right|\le K_1\,. \quad (4.35)$$

Візьмемо число M таке, що

$$M>2K_1\,. \quad (4.36)$$

У банаховому просторі функцій

$$D=\{u\in A_2^{+}\cap C_{\pi}^{1,1}\left([0,\pi]\times\mathrm{R}\right):\ \|u\|_{C_{\pi}^{1,1}}\le M\} \quad (4.37)$$

з нормою

$$\|u\|_{C_{\pi}^{1,1}}=\max\{\|u\|_{C_{\pi}},\ \pi\|u_t\|_{C_{\pi}}\} \quad (4.38)$$

розглянемо оператор R_2^{+}, що визначається за допомогою правої частини першого інтегрального рівняння системи (4.26):

$$\left(R_2^{+}F[u,u_t]\right)(x,t)=\left(SF[u,u_t]\right)(x,t)+\frac{\pi-2x}{4\pi}\int_0^{\pi}d\xi\int_{t-\xi}^{t+\xi}F[u,u_t](\xi,\tau)d\tau\,. \quad (4.39)$$

На підставі (4.28), (4.32) одержимо

$$\left(R_2^{+}F[u,u_t]\right)(x,t)\in A_2^{+}\cap C_{\pi}^{1,1}([0,\pi]\times\mathrm{R})\,. \quad (4.40)$$

Тепер для довільного $u(x,t)\in D$ будемо мати

$$\left(R_2^{+}F[u,u_t]\right)(x,t)=u_0(x,t)+$$

$$+\left(S\left(F[u,u_t]-F[0,0]\right)\right)(x,t)+\frac{\pi-2x}{4\pi}\int_0^{\pi}d\xi\int_{t-\xi}^{t+\xi}\left(F[u,u_t]-F[0,0]\right)(\xi,\tau)d\tau\,.$$

Звідси, враховуючи (4.26), (4.30), знаходимо

$$\left|\left(R_2^+F[u,u_t]\right)(x,t)\right| \le \left|u_0(x,t)\right| + \frac{\pi^2}{2}\left(N_1\|u\|_{C_\pi} + N_2\|u_t\|_{C_\pi}\right),$$

$$\left|\left(R_2^+F[u,u_t]\right)_t(x,t)\right| \le \left|u_{0\,t}(x,t)\right| + \frac{\pi}{2}\left(N_1\|u\|_{C_\pi} + N_2\|u_t\|_{C_\pi}\right).$$

Якщо останню нерівність помножити на π, а $\left(N_2\dfrac{\pi^2}{2}\right)\|u_t\|_{C_\pi}$ переписати у вигляді $\left(N_2\dfrac{\pi}{2}\right)\left(\pi\|u_t\|_{C_\pi}\right)$, то ми одержуємо

$$\left\|\left(R_2^+F[u,u_t]\right)(x,t)\right\|_{C_\pi^{1,1}} \le K_1 + \left(\frac{\pi^2}{2}N_1 + \frac{\pi}{2}N_2\right)\|u\|_{C_\pi^{1,1}} \le K_1 + \left(\frac{\pi^2}{2}N_1 + \frac{\pi}{2}N_2\right)M\,. \quad (4.41)$$

Якщо вибрати константи Ліпшиця N_1, N_2 такими, щоб виконувалася умова (4.33) теореми 4.4, то з нерівності (4.41), беручи до уваги, що $K_1 < M/2$, знаходимо

$$\left\|\left(R_2^+F[u,u_t]\right)(x,t)\right\|_{C_\pi^{1,1}} \le K_1 + M/2 < M\,.$$

Отже, при вибраних N_1, N_2, що задовольняють нерівність (4.33), отримуємо, що коли $u(x,t)\in D$, то $\left(R_2^+F[u,u_t]\right)(x,t)\in D$.

Уведемо для функцій $u(x,t)$ і $z(x,t)$ відстань $\rho(u,z)$, покладаючи

$$\rho(u,z) = \|u(x,t) - z(x,t)\|_{C_\pi^{1,1}}.$$

Тоді D буде метричним простором, до того ж, цей простір повний.

Тепер переконаємося, що при виконанні умови (4.33) відображення $R_2^+F[u,u_t]$ буде стисненим. Справді, якщо $u(x,t)\in D$ і $z(x,t)\in D$, то з формули (4.39) і формули

$$\left(R_2^+F[z,z_t]\right)(x,t) = \left(SF[z,z_t]\right)(x,t) + \frac{\pi-2x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi\int_{t-\xi}^{t+\xi}F[z,z_t](\xi,\tau)\,d\tau,$$

використовуючи умову Ліпшиця (4.30), отримаємо

$$\left|\left(R_2^+F[u,u_t]\right)(x,t)-\left(R_2^+F[z,z_t]\right)(x,t)\right|\le\frac{\pi^2}{2}\left(N_1\|u-z\|_{C_\pi}+N_2\|u_t-z_t\|_{C_\pi}\right),$$

$$\pi\left|\left(R_2^+F[u,u_t]\right)_t(x,t)-\left(R_2^+F[z,z_t]\right)_t(x,t)\right|\le\frac{\pi^2}{2}\left(N_1\|u-z\|_{C_\pi}+N_2\|u_t-z_t\|_{C_\pi}\right).$$

Звідси маємо

$$\rho\left(R_2^+F[u,u_t],R_2^+F[z,z_t]\right)\le\left(\frac{\pi^2}{2}N_1+\frac{\pi}{2}N_2\right)\rho(u,z)\equiv\alpha\rho(u,z),$$

де $0<\alpha<\dfrac{1}{2}$.

Таким чином, виконуються всі умови принципу стиснених відображень [15]. Отже, існує єдиний неперервний обмежений на $[0,\pi]\times\mathrm{R}$ розв’язок $\left(u(x,t),u_t(x,t)\right)$ системи інтегральних рівнянь (4.26), а отже, і гладкий $\left(u\in A_2^+\cap C^{1,1}\left([0,\pi]\times\mathrm{R}\right)\right)$ розв’язок крайової періодичної задачі вигляду (4.23)–(4.25), до того ж

$$\|u(x,t)\|_{C_\pi^{1,1}}\le M\,.$$

Теорему 4.4 доведено.

Зауваження 4.2. Умову (4.33) можна послабити, якщо доведення теореми 4.4 проводити на підставі теореми 0.1 [45, с. 475]. Більш того, для нелінійної задачі з малим параметром вигляду

$$u_{tt}-u_{xx}=\varepsilon F[u,u_t],\quad 0<x<\pi,\quad t\in\mathrm{R},\tag{4.42}$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad t\in\mathrm{R},\tag{4.43}$$

$$u(x,t+2\pi)=u(x,t),\quad 0\le x\le\pi\quad t\in\mathrm{R},\tag{4.44}$$

справедливе твердження.

Теорема 4.5. *Нехай виконуються умови 1)–5) теореми 4.4. Тоді при достатньо малому параметрі* ε *(*$0<\varepsilon<\varepsilon_0$*) задача (4.42)–(4.44) має єдиний гладкий* $\left(u(x,t)\in A_2^+\cap C_\pi^{1,1}\left([0,\pi]\times\mathrm{R}\right)\right)$ *розв’язок.*

4.2.2. Гладкий розв’язок крайової задачі. У пункті 2.4 доведено наступне твердження:

Теорема 2.12. *Якщо* $g \in G_{\pi t} \cap A_{4\pi}$, *то функція*

$$\mathrm{v}(x,t) = \left(R_{4\pi} g\right)(x,t) \equiv \left(Sg\right)(x,t) + \frac{1}{4}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-x-\xi}^{t+x+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau \tag{4.45}$$

є єдиною функцією із класу $C_{\pi}^{2,2} \cap A_{4\pi}$, *яка задовольняє умови крайової періодичної задачі*

$$\mathrm{v}_{tt} - \mathrm{v}_{xx} = g(x,t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathrm{R}, \tag{4.46}$$

$$\mathrm{v}(0,t) = \mathrm{v}(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathrm{R}, \tag{4.47}$$

$$\mathrm{v}(x, t + 4\pi) = \mathrm{v}(x,t), \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \in \mathrm{R}. \tag{4.48}$$

Крім цього,

$$R_{4\pi} \in L\left(C_{\pi} \cap A_{4\pi},\ C_{\pi}^{1,1} \cap A_{4\pi}\right), \quad R_{4\pi} \in L\left(G_{\pi t} \cap A_{4\pi},\ C_{\pi}^{2,2} \cap A_{4\pi}\right),$$

при цьому

$$\left\|\left(R_{4\pi} g\right)(x,t)\right\|_{C_{\pi}} \le \pi^2 \left\|g(x,t)\right\|_{C_{\pi}};$$

$$\left\|\left(R_{4\pi} g\right)_t (x,t)\right\|_{C_{\pi}} \le \pi \left\|g(x,t)\right\|_{C_{\pi}};$$

$$\left\|\left(R_{4\pi} g\right)_x (x,t)\right\|_{C_{\pi}} \le \pi \left\|g(x,t)\right\|_{C_{\pi}},$$

де $\left\|\varphi(x,t)\right\|_{C_{\pi}} = \sup\limits_{(x,t)\in[0,\pi]\times\mathrm{R}} \left|\varphi(x,t)\right|$.

Існування узагальнених (класичних) розв’язків квазілінійної крайової періодичної задачі

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t,u), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathrm{R},$$

$$u(0,t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathrm{R},$$

$$u(x, t + 4\pi) = u(x,t), \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \in \mathrm{R}$$

доводилося здебільшого за умови, що $f(x,t,0) \ne 0$ для всіх $(x,t) \in [0,\pi] \times \mathrm{R}$ [8, 21, 77]. Природно виникає питання: за яких додаткових умов вказана задача має класичний розв'язок, коли $f(x,t,0)=0$? У цьому пункті дослідимо умови існування такої крайової періодичної задачі:

$$u_{tt}-u_{xx}=f(x,t,u), \quad 0<x<\pi, \quad t\in \mathrm{R}, \tag{4.49}$$

$$u(0,t)=\mu_1(t), \quad u(\pi,t)=0, \quad \mu_1(t+4\pi)=\mu_1(t), \quad t\in \mathrm{R}, \tag{4.50}$$

$$u(x,t+4\pi)=u(x,t), \quad 0\le x\le \pi, \quad t\in \mathrm{R}. \tag{4.51}$$

У такому випадку ми припускаємо, що може виконуватися умова $f(x,t,0)=0$. Відомо [44], що задачу (4.49)–(4.51) заміною

$$u(x,t)=\mathrm{v}(x,t)+z(x,t), \quad z(x,t)=\frac{\pi-x}{\pi}\mu_1(t), \tag{4.52}$$

за умови, що $\mu_1(t)\in C^2(\mathrm{R})$, можна звести до такої задачі:

$$\mathrm{v}_{tt}-\mathrm{v}_{xx}=g(x,t)+f_1(x,t,\mathrm{v}) \quad 0<x<\pi, \quad t\in \mathrm{R}, \tag{4.53}$$

$$\mathrm{v}(0,t)=\mathrm{v}(\pi,t)=0, \quad t\in \mathrm{R}, \tag{4.54}$$

$$\mathrm{v}(x,t+4\pi)=\mathrm{v}(x,t), \quad 0\le x\le \pi, \quad t\in \mathrm{R}, \tag{4.55}$$

де $f_1(x,t,\mathrm{v})=f(x,t,\mathrm{v}+z)$,

$$g(x,t)=\frac{x-\pi}{\pi}\mu_1''(t), \quad g(x,t+4\pi)=g(x,t). \tag{4.56}$$

За аналогією з лінійним випадком (4.45)–(4.48) розглянемо інтегральне рівняння

$$\mathrm{v}(x,t)=\left(R_{4\pi}F[\mathrm{v}]\right)(x,t), \tag{4.57}$$

де $F[\mathrm{v}](x,t)=\dfrac{x-\pi}{\pi}\mu_1''(t)+f_1\left(x,t,\mathrm{v}(x,t)\right)=g(x,t)+f_1\left(x,t,\mathrm{v}(x,t)\right)$.

Означення 4.2. *Розв'язок* $\mathrm{v}\in C_\pi\bigcap A_{4\pi}$ *інтегрального рівняння (4.57) будемо називати неперервним розв'язком квазілінійної крайової періодичної задачі (4.53)–(4.55).*

Використовуючи принцип стисненого відображення, аналогічно тому, як це доведено в роботі [23], на підставі інтегрального рівняння (4.57) переконуємося в справедливості наступного твердження.

Теорема 4.6 [49]. *Нехай функція* $F[\mathrm{v}](x,t)=g(x,t)+f_1\left(x,t,\mathrm{v}(x,t)\right)$ *задовольняє такі умови:*

1) оператор F *кожну неперервну функцію* $\mathrm{v}\in C_\pi$ *переводить в неперервну функцію* $F[\mathrm{v}](x,t)$*, визначену на* $[0,\pi]\times\mathrm{R}$*;*

2) $0<\left\|F[0](x,t)\right\|_{C_\pi}=\Gamma<\infty$*;*

3) $\left|F[\mathrm{v}''](x,t)-F[\mathrm{v}'](x,t)\right|\le N\left|\mathrm{v}''-\mathrm{v}'\right| \quad (N=const)$*;*

4) $F[0](x,t)\in C_\pi\bigcap A_{4\pi}$*;*

5) для всіх $\mathrm{v}\in C_\pi\bigcap A_{4\pi}$ *функція* $F[\mathrm{v}](x,t)\in C_\pi\bigcap A_{4\pi}$.

Тоді при виконанні умови

$$2N\pi^2<1$$

квазілінійна крайова періодична задача (4.53)–(4.55) має єдиний гладкий $\left(\mathrm{v}\in C_\pi^{1,1}\right)$ *розв'язок.*

На підставі теорем 2.12 та 4.6 одержуємо такі результати.

Наслідок 4.1. Нехай $\mu_1(t)\in C^3(\mathrm{R})$ і $\mu_1(t+2\pi)=-\mu_1(t)$. Тоді лінійна задача

$$u_{tt}-u_{xx}=0,\quad u(0,t)=\mu_1(t),\quad u(\pi,t)=0,\quad u(x,t+4\pi)=u(x,t), \tag{4.58}$$

має єдиний класичний розв'язок вигляду

$$u(x,t)=\frac{\pi-x}{\pi}\mu_1(t)+\left(R_{4\pi}g\right)(x,t), \tag{4.59}$$

де

$$g(x,t)=\frac{x-\pi}{\pi}\mu_1''(t),\quad g(x,t+2\pi)=-g(x,t). \tag{4.60}$$

Приклад 4.1. Якщо покласти $\mu_1(t) = \cos\frac{t}{2}$, то на підставі формули (4.59) розв'язком задачі (4.58) буде функція $u(x,t) = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{t}{2}$.

Наслідок 4.2. Нехай функція $F_1[\mathrm{v}](x,t) = \frac{x-\pi}{\pi}\mu_1''(t) + f(x,t,u)$ задовольняє такі умови:

1) $\mu_1(t) \in C^2(\mathrm{R})$ і $\mu_1(t+2\pi) = -\mu_1(t)$;

2) $f(x,t,u) \in C\left([0,\pi]\times \mathrm{R}^{22}\right)$;

3) $0 < \left\|F_1[0](x,t)\right\|_{C_\pi} = \Gamma < \infty$;

4) $\left|f(x,t,u'') - f(x,t,u')\right| \le N_1\left|u''-u'\right| \quad (N = const)$;

5) $F_1[0](x,t) \in C_\pi \cap A_{4\pi}$;

6) для всіх $u \in C_\pi \cap A_{4\pi}$ функція $f(x,t,u) \in C_\pi \cap A_{4\pi}$.

Тоді при виконанні умови

$$2N_1\pi^2 < 1$$

крайова періодична задача (4.49)–(4.51) має єдиний гладкий $\left(u \in C_\pi^{1,1} \cap A_{4\pi}\right)$ розв'язок, який можна знайти методом послідовних наближень, поклавши

$$u_0(x,t) = \frac{\pi - x}{\pi}\mu_1(t),$$

$$u_n(x,t) = \frac{\pi - x}{\pi}\mu_1(t) + \left(R_{4\pi}F_1[u_{n-1}]\right)(x,t), \quad n = 1, 2, ...$$

4.2.3. Узагальнені періодичні розв'язки гіперболічного рівняння другого порядку. Розглянемо крайову періодичну задачу вигляду

$$\mathrm{v}_{tt}-\mathrm{v}_{xx}=g_1(x,t), \quad 0<x<\pi, \quad t\in\mathrm{R}, \tag{4.61}$$

$$\mathrm{v}(0,t)=v_1(t), \quad \mathrm{v}(\pi,t)=v_2(t), \quad t\in\mathrm{R}, \tag{4.62}$$

$$\mathrm{v}(x,t+\pi)=\mathrm{v}(x,t), \quad v_i(t+\pi)=v_i(t), \quad i=1,2, \quad 0\le x\le\pi, \quad t\in\mathrm{R}. \tag{4.63}$$

Заміною змінних [44]

$$\mathrm{v}(x,t)=u(x,t)+z(x,t),$$

$$z(x,t)=v_1(t)+\frac{x}{\pi}\left(v_2(t)-v_1(t)\right),$$

$$v_i(t+\pi)=v_i(t), \quad i=1,2,$$

задача (4.61)–(4.63) зводиться до задачі

$$u_{tt}-u_{xx}=g(x,t), \quad 0<x<\pi, \quad t\in\mathrm{R}, \tag{4.64}$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0, \quad t\in\mathrm{R}, \tag{4.65}$$

$$u(x,t+\pi)=u(x,t), \quad 0\le x\le\pi, \quad t\in\mathrm{R}, \tag{4.66}$$

де

$$g(x,t)=g_1(x,t)+z_{xx}-z_{tt}\equiv g_1(x,t)-v_1''(t)-\frac{x}{\pi}\left(v_2''(t)-v_1''(t)\right). \tag{4.67}$$

Виходячи з зображення (4.67) функції $g(x,t)$ переконуємося, що $g\notin A_i, \quad i=1,2$.

Доведемо, що при виконанні умови

$$g_1(x,t+\pi)=g_1(x,t), \quad v_i(t+\pi)=v_i(t), \quad i=1,2,$$

крайова періодична задача (4.61)–(4.63) має π–періодичний узагальнений $\left(u\in L_\infty\right)$ розв'язок. Для цього знайдемо розв'язок таких двох задач Коші:

$$u_{tt}^1-u_{xx}^1=f(x,t), \tag{4.68}$$

$$u^1(0,t)=0, \quad u_x^1(0,t)=0, \quad 0\le x\le\pi, \quad x\le t\le 2\pi-x, \tag{4.69}$$

$$u_{tt}^2-u_{xx}^2=f(x,t), \tag{4.70}$$

$$u^2(\pi,t)=0\,,\quad u_x^2(\pi,t)=0\,,\quad 0\le x\le\pi\,,\quad \pi-x\le t\le\pi+x\,. \tag{4.71}$$

Легко доводиться наступне твердження.

Лема 4.3. *Якщо* $f\in C^{0,1}(X_1)$*, то функція*

$$u^1(x,t)=-\frac{1}{2}\int\limits_0^x d\xi\int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau$$

є єдиним розв'язком задачі Коші (4.68)–(4.69) у характеристичному трикутнику $X_1=\{(x,t):\ 0\le x\le\pi,\quad x\le t\le 2\pi-x\}$*, а при* $f\in C^{0,1}(X_2)$ *функція*

$$u^2(x,t)=-\frac{1}{2}\int\limits_x^\pi d\xi\int\limits_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau$$

є єдиним розв'язком задачі Коші (4.70)–(4.71) у характеристичному трикутнику $X_2=\{(x,t):\ 0\le x\le\pi,\quad \pi-x\le t\le\pi+x\}$.

Позначимо через C і C_π простори функцій, неперервних і обмежених відповідно на R і $[0,\pi]\times\mathrm{R}$, а через Q_π– клас π–періодичних за змінною t функцій. У прямокутнику $\Pi=\{\,(x,t):\ \ 0\le x\le\pi,\quad 0\le t\le\pi\}$ для $g\in C_\pi\bigcap Q_\pi$ побудуємо розривну функцію

$$\tilde{\tilde{u}}(x,t)=\begin{cases}u^1(x,t), & (x,t)\in D_1,\\ u^2(x,t), & (x,t)\in D_2,\end{cases} \tag{4.72}$$

де $u^1(x,t)$ і $u^2(x,t)$ визначаються за формулами

$$u^1(x,t)=-\frac{1}{2}\int\limits_0^x d\xi\int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}\left\{g_1(\xi,\tau)-v_1''(\tau)-\frac{\xi}{\pi}\big(v_2''(\tau)-v_1''(\tau)\big)\right\}d\tau\,, \tag{4.73}$$

$$u^2(x,t)=-\frac{1}{2}\int\limits_x^\pi d\xi\int\limits_{t+x-\xi}^{t-x+\xi}\left\{g_1(\xi,\tau)-v_1''(\tau)-\frac{\xi}{\pi}\big(v_2''(\tau)-v_1''(\tau)\big)\right\}d\tau\,, \tag{4.74}$$

де

$$D_1=\{0\le x\le\pi,\quad x\le t\le\pi\}/\{(\pi,\pi)\}\,,$$

$$D_2=\{0\le x\le\pi,\quad 0\le t\le x\}/\{(x,t):\ t=x,\quad 0<x<\pi\}\,.$$

Справедливе твердження.

Теорема 4.7. *Якщо* $v_i(t) \in C(\mathrm{R}) \bigcap Q_\pi$, $i = 1, 2$, $g_1 \in C_\pi \bigcap Q_\pi$, *то існує узагальнений* $\left(\mathrm{v} \in L_\infty \bigcap Q_\pi\right)$ *розв'язок крайової періодичної задачі (4.61)–(4.63), заданий формулою*

$$\mathrm{v}(x,t) = v_1(t) + \frac{x}{\pi}\left(v_2(t) - v_1(t)\right) + \tilde{\tilde{u}}(x,t), \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \in \mathrm{R}, \tag{4.75}$$

де $\tilde{u}(x,t)$ *визначена формулами (4.72)–(4.74), до того ж*

$$\left\|\tilde{\tilde{u}}(x,t)\right\|_{C_\pi} \le \frac{\pi}{2}\left\|g(x,t)\right\|_{C_\pi}.$$

Приклад 4.2. Нехай $g_1(x,t) = 0$, $\mu_1(t) = 0$, $\mu_2(t) = \sin 2t$. На підставі формул (4.73), (4.74) одержуємо, що

$$u^1(x,t) = -\frac{x \sin 2t}{\pi} - \frac{\sin 2t}{2\pi} \sin 2x,$$

$$u^2(x,t) = -\frac{x \sin 2t}{\pi} + \sin 2x \cos 2x + \frac{\sin 2t \sin 2x}{2\pi},$$

а, отже, в цьому випадку розв'язок задачі (4.61)–(4.63) має вигляд

$$\mathrm{v}(x,t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \sin 2t \sin 2x, & (x,t) \in D_1, \\ \sin 2t \cos 2x + \dfrac{1}{2\pi} \sin 2t \sin 2x, & (x,t) \in D_2. \end{cases}$$

Висновки

У цьому розділі встановлено нові результати про існування періодичних розв'язків загальних крайових періодичних задач для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння 2-го порядку, а також умови існування узагальнених періодичних розв'язків для квазілінійних рівнянь.

ВИСНОВКИ

1. Як відомо з літературних джерел, у теорії звичайних диференціальних рівнянь розроблено низку аналітичних методів відшукання періодичних розв'язків як лінійних, так і нелінійних диференціальних рівнянь. Щодо рівнянь у частинних похідних, особливо рівнянь другого порядку гіперболічного типу, можна стверджувати, що аналітичні методи відшукання періодичних розв'язків почали розроблятися відносно недавно. Донедавна доведення існування періодичних розв'язків гіперболічних рівнянь другого порядку здебільшого проводилося за допомогою рядів Фур'є, до того ж період T і крайова умова підбиралися так, щоб можна було б досягти бажаного результату.

2. У другому розділі встановлено умови існування періодичного розв'язку $u(x,t+\omega)=u(x,t)$, $0\le x\le\pi$, $t\in \mathrm{R}$, що задовольняє крайові умови $u(0,t)=u(\pi,t)=0$, $t\in \mathrm{R}$, для лінійного неоднорідного рівняння $u_{tt}-u_{xx}=g(x,t)$. Показано, що у випадку ірраціональності періоду ω $(\omega\notin \mathrm{Q})$ завжди існує єдиний формальний розв'язок вигляду $u(x,t)=u^0(x,t)+\tilde{u}(x,t)$, де $u^0(x,t)$ – розв'язок однорідного рівняння $u^0_{tt}-u^0_{xx}=0$, а $\tilde{u}(x,t)$ – частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $u_{tt}-u_{xx}=g(x,t)$ такий, що $\tilde{u}(x,t+\omega)=\tilde{u}(x,t)$.

3. У дисертації обґрунтовано, що з умов існування розв'язку випливають раніше встановлені, але не доведені в літературі результати Ю. Митропольського та його учнів, а також у випадку $\omega=2\pi$ існує новий клас функцій, для якого розв'язок має вигляд $u(x,t)=\sum\limits_{s=1}^{\infty}a_{2s-1}(x)\cos(2s-1)t$, що не відповідне методам відшукання розв'язку лише у вигляді $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(t)\sin kx$

(тобто раніше встановленим результатам Б. Пташника та П. Рабиновича).

4. Дослідження, проведені у другому розділі, дають змогу зробити висновок, що крайова періодична задача $u(0,t)=u(\pi,t)=0$, $u(x,t+2\pi)=u(x,t)$ для лінійного гіперболічного рівняння $u_{tt}-u_{xx}=g(x,t)$ може бути розв'язана різними операторними методами залежно від класу функцій $g(x,t)$ і періоду ω. Як було показано в другому розділі, крайова періодична задача може мати і нескінченну множину розв'язків, що є передумовою встановлення єдиності розв'язку цієї задачі. Розв'язанню такої проблеми присвячено пункт 2.2.3 другого розділу, де встановлено, що класичний розв'язок крайової $2\pi-$ періодичної задачі має вигляд $u(x,t)=u^0(x,t)+\tilde{u}(x,t)$, де $u^0(x,t)-$ розв'язок однорідної $2\pi-$періодичної задачі, з визначення якого і випливає, за яких умов існує єдиність класичного розв'язку. Відповідь на це питання одержано у третьому розділі, де доведено існування узагальнених (неперервних $u\in C\big([0,\pi]\times \mathrm{R}\big)$) розв'язків крайової $2\pi-$періодичної задачі і встановлено, за яких умов узагальнено неперервні розв'язки можуть бути класичними. Класичні результати повністю збігаються з результатами другого розділу.

5. У випадку $\omega=2\pi$ на підставі умови розв'язності (2.13) підтверджено результат П. Рабиновича, який сформульовано у вигляді теореми 2.6. Це результат про можливість існування $2\pi-$періодичних розв'язків крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3) у вигляді $u(x,t)=u^0(x,t)+\tilde{u}_1(x,t)$, де $u^0(x,t)$ – розв'язок однорідного рівняння $u^0_{tt}-u^0_{xx}=0$, а $\tilde{u}_1(x,t)-$ розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $u_{tt}-u_{xx}=g\left(x,t\right)$.

6. На підставі умов розв'язності (2.13) досліджено існування $\pi-$ періодичних і $4\pi-$періодичних розв'язків крайової $\omega-$періодичної задачі.

7. Знайдено точні класичні π, 2π і $4\pi-$ періодичні розв'язки крайової періодичної задачі (2.1)–(2.3).

8. У третьому розділі наведено нову схему дослідження розв'язків крайової періодичної задачі для лінійного неоднорідного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = f\left(x,t\right)$. Вказаний метод побудови розв'язку лінійної задачі дає змогу досліджувати умови існування неперервних розв'язків багатьох нелінійних крайових періодичних задач для гіперболічних рівнянь.

9. У четвертому розділі вказано на практичне застосування результатів (умов існування), одержаних у другому і третьому розділах, для дослідження загальної крайової $\left(u(0,t) = \mu_1(t),\ \ u(\pi,t) = \mu_2(t),\ \ t \in \mathrm{R}\right)$ періодичної задачі $\left(u(x,t+\omega) = u(x,t),\ \ 0 \le x \le \pi,\ \ t \in \mathrm{R}\right)$ для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку $u_{tt} - u_{xx} = f(x,t)$. Приведено новий запис заміни змінних, який дозволяє використовувати одержані результати для дослідження загальних крайових періодичних задач.

Сформульовано основну теорему, а також доведено існування гладких розв'язків квазілінійної крайової періодичної задачі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аболиня В. Э., Мышкис А. Д. Смешанная задача для линейной гиперболической системы на плоскости //Мат. сб. – 1960. – Т. 50, № 4. – С. 423–442.
2. Аболиня В. Э., Мышкис А. Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости //Учен. зап. Латв. ун-та. – 1958. – Т. 20. – С. 87–104.
3. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблема устойчивости в классической и небесной механике //Успехи мат. наук. – 1963. – Т. 18, вып. 6. – С. 92–191.
4. Артемьев Н. А. Периодические решения одного класса уравнений в частных производных //Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1937. – № 1. – С. 15–50.
5. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
6. Вайнберг М. М., Качуровский Р. И. К вариационной теории нелинейных операторов и уравнений //Докл. АН СССР.–1959. – Т. 129, № 6. – С. 1199–1202.
7. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. – М.: Наука, –1972. – 432 с.
8. Вейвода О., Штедры М. Существование классических периодических решений волнового уравнения: Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений //Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20, № 10.– С. 1733–1739.
9. Владимиров В. С. Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1967.– 436 с.

10. Домбровський І. В. Існування гладкого розв’язку квазілінійного гіперболічного рівняння другого порядку //Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2000. – № 6 (14). – С. 136-141.
11. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.– М.: Наука, 1977.– 742 с.
12. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.– М.: Изд. иностр. лит., 1959.– 474 с.
13. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
14. Лопатинский Я. Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям //Укр. мат. журн. –1953.– Т. 5, № 2.– С.123–151.
15. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и нелинейные уравнения эллиптического типа.– М.: Наука, 1973. – 576 с.
16. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа.– М.: Высш. шк., 1982. – 271 с.
17. Мандельштам Л. И. Лекции по теории колебаний.– М.: Наука, 1972.– 470 с.
18. Мельник З. О. Об одной смешанной задаче //Докл. АН СССР.–1964. – Т. 157, № 5. – С. 1039–1042.
19. Мигович Ф., Хома С. Операторне дослідження крайових задач //Міжнародна наукова конференція “Нові підходи до розв’язання диференціальних рівнянь” (Дрогобич, 1–5 жовтня 2001 року).– К.: Інститут математики НАН України, 2001.–С. 97.
20. Митропольский Ю. А., Хома Г. П. О периодических решениях волновых уравнений второго порядка. II //Укр. мат. журн. – 1987. – Т. 39, № 3. – С. 347–353.
21. Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.

22. Митропольський Ю. О., Хома Н. Г., Хома С. Г. Гладкий розв’язок задачі Діріхле для квазілінійного гіперболічного рівняння другого порядку //Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, № 7. – С. 931–935.
23. Митропольський Ю. О., Хома Н. Г. Періодичні розв’язки квазілінійних гіперболічних рівнянь другого порядку //Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, № 10. – С. 1370–1375.
24. Митропольський Ю. О., Хома-Могильська С. Г. Умови існування розв’язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку. I //Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, № 7. – С. 912–921.
25. Хома–Могильська С. Г. Форми і методи відшукання періодичних розв’язків диференціальних рівнянь //Матеріали Одинадцятої міжнародної наукової конференції ім. акад. М.Кравчука (Київ, 18–20 травня 2006 р.).– Київ, 2006.–С.286.
26. Митропольський Ю. О., Хома-Могильська С. Г. Побудова неперервного розв’язку в прямокутнику $[0,\pi]\times[0,2\pi]$ //Доп. НАН України. – 2005, № 2. – С. 33–37.
27. Митропольський Ю. О., Хома Г. П., Хома-Могильська С. Г. Форми і методи відшукання періодичних розв’язків //Міжнародна конференція, присвячена 60–річчю кафедри інтегральних і диференціальних рівнянь КНУ ім. Т. Г. Шевченка (Київ, 6–9 червня 2005 р.). – К., 2005. – С. 75.
28. Мосеенков В. Б. Квазипериодические решения слабо диссипативного нелинейного волнового уравнения //Укр. мат. журн. – 1978. – Т. 30, № 2. – С. 254–257.
29. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физ-матгиз, 1961. – 400 с.
30. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1964. – 272 с.

31. Полищук В. Н., Пташник Б. И. Периодическая краевая задача для линейных гиперболических уравнений и систем.– Львов, 1982.– 60 с.
32. Похожаев С. И. О периодических решениях некоторых нелинейных гиперболических уравнений //ДАН.– 1971– Т. 198, № 6.– С. 1274–1277.
33. Похожаев С. И. О периодических решениях нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений //Дифференциальные уравнения. – 1980 – Т. 16, № 1.– С. 108–116.
34. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
35. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наукова думка, 2002. – 416 с.
36. Рудаков И. А. Задача о свободных периодических колебаниях струны с немонотонной нелинейностью //Успехи мат. наук.– 1985.– Т. 241, вып. 1.– С. 215–216.
37. Рудаков И. А. Нелинейные колебания струны //Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1, Математика и механика.– 1984.– № 2. – С. 9–13.
38. Рудаков И. А. Периодические решения нелинейного волнового уравнения //Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02.– М., 1985.–94 с.
39. Самойленко А. М., Ронто Н. И. Чисельно-аналитические методы исследования периодических решений. – К.: Вища шк., 1976. – 180 с.
40. Самойленко А. М., Хома Н. Г., Хома–Могильська С. Г. Використання методу Я.Б.Лопатинського для дослідження однієї загальної крайової задачі.//Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених і студентів з диференціальних рівнянь та їх застосувань, присвячена 100-річневому ювілею Я.Б.Лопатинського (Донецьк, 6-7 грудня 2006 р.). – Донецьк: ДонНУ., 2006.–С.111–112.

41. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.– Изд-во Ленингр. ун-та, 1950.–222 с.
42. Стеклов В. А. Основные задачи математической физики.– М.: Наука, 1983.– 600 с.
43. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений, изд. 8-е, Физматгиз, 1959.– 440с.
44. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
45. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения.– М.: Мир, 1970. – 720с.
46. Хома Г. П., Хома Н. Г., Хома-Могильська С. Г. Про розв’язки періодичної задачі для гіперболічного рівняння другого порядку //III Всеукраїнська наукова конференція “Нелінійні проблеми аналізу” (9–12 вересня 2003 року, Івано-Франківськ). – Івано-Франківськ: Плай, 2003. – С. 108.
47. Хома С. Г. Узагальнені періодичні розв’язки гіперболічного рівняння другого порядку //Нелінійні коливання. –1999. – № 4. – С. 574–577.
48. Хома С. Г. Розв’язок однієї крайової задачі для гіперболічного рівняння другого порядку //Укр. Мат. Журн. –2000. – Т. 52, № 4. – С. 572–573.
49. Хома С. Г. Гладкий розв’язок однієї крайової задачі //Доп. НАН України. – 2000. –№ 3. – С. 37–39.
50. Хома С. Г. Класичний розв’язок однієї крайової задачі //Доп. НАН України. –2000. –№ 7. – С. 32–34.
51. Хома С. Г. Неперервний розв’язок крайової задачі для гіперболічного рівняння другого порядку //Восьма Міжнародна наукова конференція ім. Академіка М. Кравчука. (Київ, 11–14 травня 2000 року). – Київ: “Задруга”, 2000. – С. 209.
52. Хома С. Г. Єдиність розв’язку деяких крайових періодичних задач для гіперболічного рівняння другого порядку //Міжнародна наукова

конференція "Диференціальні рівняння і нелінійні коливання" (Чернівці, 27–29 серпня 2001 року). –К.: Ін-т математики НАН України, 2001.– С. 162–163.

53. Хома С. Г., Хома Н. Г., Хохлова Л. Г. Класичні розв'язки періодичної задачі для гіперболічного рівняння другого порядку //Міжнародна наукова конференція "Диференціальні та інтегральні рівняння" (Одеса, 12–14 вересня 2000 року). – Одеса: „Астро Принт", 2001. – С. 286–287.
54. Хома-Могильська С. Г. Про один результат П. Рабиновича //Х Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 13–15 травня 2004 р.). – Київ: "Задруга", 2004.– С. 271.
55. Хома-Могильська С. Г. Властивості розв'язків однієї мішаної задачі //Конференція молодих вчених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача (Львів, 24–26 травня 2004 р.). Львів, 2004.– С. 164–165.
56. Хома-Могильська С. Г. Про існування періодичних розв'язків //Матеріали Міжнародної науково–практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених „Шевченківська весна. Сучасний стан науки: досягнення, проблеми та перспективи розвитку" (Київ, 10–11 березня 2005 р.). –К: Логос, 2005. – Ч.2. – С. 261–263.
57. Хома–Могильська С. Г. Неперервний розв'язок крайової задачі //Доп. НАН України. –2005. –№ 3. – С. 28–32.
58. Цинайко П. В., Хома-Могильська С. Г. Умови існування неперервного розв'язку квазілінійного рівняння //Міжнародна конференція. П'яті Боголюбовські читання "Теорія еволюційних рівнянь" (Кам'янець–Подільський, 22–24 травня 2002р.). –Кам'янець–Подільський: Абетка-Нова, 2002.– С. 171.

59. Чернятин В. А. К проблеме существования решений смешанной задачи для одномерного волнового уравнения //Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1, Математика и механика.– 1987.– № 6. – С. 7–16.
60. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.– М.: Наука, 1969.– 424 с.
61. Aman H., Zehnder E. Nontrivial solutions for a class of nonresonans problems and applications to nonlinear differential equations //Ann. Scuola norm. Sup. Pisa. – 1980. – Vol. 5, № 2. – P. 225–326.
62. Bahri A., Brezis H. Periodic solutions of a nonlinear wave equation //Proc. Roy Soc. Edinburg. – 1980, Vol. 85A. – P. 313–320.
63. Brezis H., Nirenberg L. Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems //Ann. Scuola norm. Sup. Pisa. – 1978. – Vol. 5, № 2. – P. 225–326.
64. Brezis H., Nirenberg L. Forced vibrations for a nonlinear wave equations lue problems //Comm. Pure Appl. Math. – 1978. – Vol. 31, № 1. – P. 11–30.
65. Brezis H., Coron J. M., Nirenberg L. Free vibrations for a nonlinear wave equations and a theorem of P. Rabinowitz //Comm. Pure Appl. Math. – 1980. – Vol. 33. – P. 667–689.
66. Brezis H., Coron J. M. Periodic solutions of nonlinear wave equations and Hamiltonian systems //Amer. J. Math. – 1980. – Vol. 103, № 3. – P. 559–570.
67. Brezis H. Periodic solutions of nonlinear vibrating string and duality principles //Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.). – 1983. – Vol. 8, № 3. – P. 409–426.
68. Coron J. M. Periodic solutions of nonlinear wave equations without assumption of monotonicity //Math. Ann. – 1983. – Vol. 262, № 2. – P. 273–285.
69. Lovicarova H. Periodic solutions of a weakly nonlinear wave equation in one dimension //Czech. Math. J. – 1969. – № 19. – P. 324–342.
70. Nirenberg L. Variational and topological methods in nonlinear problems //Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.). – 1981. – Vol. 4, № 3. – P. 267–302.

71. Rabinowitz P. Periodic solution of hyperbolic partial differential equations //Comm. Pure Appl. Math. – 1967. – Vol. 20, № 1. – P. 145–205.
72. Rabinowitz P. Periodic solution of nonlinear hyperbolic partial differential equations //Ibid. – 1969. – Vol. 22, № 1. – P. 15–39.
73. Rabinowitz P. Time periodic solutions of nonlinear wave equation //Manus, Math. – 1971. – Vol. 5, – P. 165–194.
74. Rabinowitz P. Free vibrations for a semilinear wave equation //Comm. Pure Appl. Math. – 1978. – Vol. 31, № 1. – P. 31–68.
75. Vejvoda O. Periodic solutions of a linear and weakly nonlinear wave equation in one dimension //Czech. Math. J. – 1964. – Vol. 14, № 3. – P. 341–382.
76. Vejvoda O., Stedry M. Periodic solutions to weakly nonlinear autonomous wave equations //Czech. Math. J. – 1975. – Vol. 25, № 4. – P. 536–555.
77. Vejvoda O., Hartman L., Lovikarova H. Partial differential equations: time-periodic solutions. – USA: Sijthoff Noordhoff, 1981. – 358 p.