УДК 517.91:532.2

О.М. ЛЕНЮК
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
О.М. НІКІТІНА
Чернівецький факультет НТУ «ХПІ»
М.І. ШИНКАРИК
Тернопільський національний економічний університет

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ДИФУЗІЇ ТЕПЛА СКІНЧЕННИМ ГІБРИДНИМ ІНТЕГРАЛЬНИМ ПЕРЕТВОРЕННЯМ ТИПУ ЛЕЖАНДРА-БЕССЕЛЯ-ФУР'Є НА СЕГМЕНТІ

Розв'язана задача дифузії тепла на трискладовому сегменті $(0, R_3]$. *Розв'язок побудовано за допомогою скінченного гібридного інтегрального перетворення, породженого на даному сегменті з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором Лежандра-Бесселя-Фур'є.*

Ключові слова: гібридний диференціальний оператор, задача дифузії тепла, гібридне інтегральне перетворення.

О.М. ЛЕНЮК
Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича
О.М. НИКИТИНА
Черновицкий факультет НТУ «ХПИ»
Н.И. ШИНКАРИК
Тернопольский национальный экономический университет

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФФУЗИИ ТЕПЛА КОНЕЧНЫМ ГИБРИДНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ТИПА ЛЕЖАНДРА-БЕССЕЛЯ-ФУРЬЕ НА СЕГМЕНТЕ

Решена задача диффузии тепла на трехсоставном сегменте $(0, R_3]$. *Решение построено при помощи конечного гибридного интегрального преобразования, порожденного на данном сегменте с двумя точками сопряжения гибридным дифференциальным оператором Лежандра-Бесселя-Фурье.*

Ключевые слова: гибридный дифференциальный оператор, задача диффузии тепла, гибридное интегральное преобразование.

O.M. LENYUK
Chernivtsi National University by Yuriy Fed'kovych
O.M. NIKITINA
Chernivtsi department of National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"
M.I. SHYNKARYK
Ternopil National Economic University

SOLVING OF THE PROBLEM OF HEAT DIFFUSION BY FINITE HYBRID INTEGRAL TRANSFORM OF LEGENDRE-BESSEL-FOURIER TYPE ON THE SEGMENT

The problem of heat diffusion on three-part segment $(0, R_3]$ *is solved. The solution is conctructed by finite hybrid integral transform generated on the given segment with two points of conjugation by hybrid differential Legendre-Bessel-Fourier operator.*

Key words: hybrid differential operator, problem of heat diffusion, hybrid integral transform.

Постановка проблеми

На сучасному етапі науково-технічного прогресу, особливо у зв'язку із широким застосуванням композитних матеріалів, виникає гостра потреба у вивченні фізико-технічних характеристик даних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, що математично приводить до задач інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі з відповідними початковими та крайовими умовами [1 – 3], зокрема задача дифузії тепла математично приводить до побудови розв'язку системи рівнянь з частинними похідними параболічного типу. Одним із ефективних методів побудови інтегральних зображень аналітичних розв'язків алгоримтічного характеру таких задач є метод гібридних інтегральних перетворень. В [4] побудовано скінченне гібридне інтегральне перетворення (СГІП), породжене на сегменті $(0, R_3]$ з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором (ГДО) Лежандра-Бесселя-Фур'є.

Мета статті

У даній роботі побудовано розв'язок задачі дифузії тепла на трискладовому сегменті $(0, R_3]$ з двома точками спряження за допомогою скінченного гібридного інтегрального перетворення типу Лежандра-Бесселя-Фур'є.

Основна частина

Задача дифузії тепла в трискладовому сегменті математично приводить до побудови в області

$$D_2 = \{(t,r): t > 0, r \in I_2\}, \; I_2 = \{r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3); R_3 < \infty\}$$

обмеженого розв'язку системи рівнянь параболічного типу [5]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 \Lambda_{(\mu)}[u_1] = f_1(t,r), \; r \in (0, R_1), \\ &\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 B_{\nu,\alpha}[u_2] = f_2(t,r), \; r \in (R_1, R_2), \\ &\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}[u_3] = f_3(t,r), \; r \in (R_2, R_3), \end{aligned} \tag{1}$$

за початковими умовами

$$\begin{aligned} &u_1(t,r)\big|_{t=0} = g_1(r), \; r \in (0, R_1), \\ &u_2(t,r)\big|_{t=0} = g_2(r), \; r \in (R_1, R_2), \\ &u_3(t,r)\big|_{t=0} = g_3(r), \; r \in (R_2, R_3), \end{aligned} \tag{2}$$

умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k\right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1}\right]\Big|_{r=R_k} = 0, \; j,k = 1,2, \tag{3}$$

та крайовими умовами

$$\lim_{r \to 0}[r^\gamma u_1] = 0, \quad \left(\alpha_{22}^3 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^3\right) u_3 \big|_{r=R_3} = 0. \tag{4}$$

Тут беруть участь узагальнений диференціальний оператор Лежандра $\Lambda_{(\mu)}$, диференціальний оператор Бесселя $B_{\nu,\alpha}$, диференціальний оператор Фур'є другого порядку (одновимірний диференціальний оператор Лапласа) d^2/dr^2 [4].

Вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $2\alpha + 1 > 0$, $\nu \ge \alpha$; $(\mu) = (\mu_1, \mu_2)$, $\mu_1 \ge \mu_2 \ge 0$; $\alpha_{22}^3 \ge 0$, $\beta_{22}^3 \ge 0$, $\alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \ne 0$; $\alpha_{jm}^k \ge 0$, $\beta_{jm}^k \ge 0$, $c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$, $c_{1k} \cdot c_{2k} > 0$; $j, m, k = 1,2$.

В [4] побудовано пряме $H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ й обернене $H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}$ СГІП, породжене на множині I_2 ГДО

$$M_{\nu,\alpha}^{(\mu)} = \theta(r)\theta(R_1 - r)a_1^2 \Lambda_{(\mu)} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 B_{\nu,\alpha} + \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)a_3^2 \, d^2/dr^2 \; :$$

$$H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[g(r)] = \int_0^{R_3} g(r) v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}_n, \tag{5}$$

$$H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n) \equiv g(r) \tag{6}$$

та виведена основна тотожність СГІП ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$:

$$H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[g(r)]] = -\beta_n^2 \tilde{g}_n - \sum_{i=1}^{3} k_i^2 \tilde{g}_{in} + (\alpha_{22}^3)^{-1} v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(R_3, \beta_n) g_R +$$

$$+ \sum_{k=1}^{2} d_k [Z_{\nu,\alpha;12}^{(\mu);k}(\beta_n)\omega_{2k} - Z_{\nu,\alpha;22}^{(\mu);k}(\beta_n)\omega_{1k}]. \tag{7}$$

Тут $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [1], $\{v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n) : \| V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n) \| \}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормована система власних функцій відповідної задачі Штурма-Ліувілля [4],

$$V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta) = \sum_{k=1}^{3} \theta(r - R_{k-1})\theta(R_k - r) V_{\nu,\alpha;k}^{(\mu)}(r,\beta), \quad R_0 = 0,$$

$$V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n) = q_\alpha(\beta_n) c_{22} b_{3n}, \; q_\alpha(\beta_n) = \frac{2}{\pi} \frac{c_{21}}{b_{2n}^{2\alpha} R_1^{2\alpha+1}},$$

$$V_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n) = c_{22} b_{3n} [Z_{\nu_{1n}^*;21}^{(\mu);11}(chR_1)\psi_{\nu,\alpha;12}^{1}(b_{2n}R_1, b_{2n}r) - Z_{\nu_{1n}^*;11}^{(\mu);11}(chR_1)\psi_{\nu,\alpha;22}^{1}(b_{2n}R_1, b_{2n}r)],$$

$$V_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n) = \omega_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(\beta_n)\cos(b_{3n}r) - \omega_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(\beta_n)\sin(b_{3n}r),$$

$$\psi_{\nu,\alpha;j2}^{1}(b_{2n}R_1, b_{2n}r) = u_{\nu,\alpha;j2}^{11}(b_{2n}R_1) N_{\nu,\alpha}(b_{1n}r) - u_{\nu,\alpha;j2}^{12}(b_{2n}R_1) J_{\nu,\alpha}(b_{1n}r),$$

$$\delta_{\nu,\alpha;jk}(b_2R_1, b_2R_2) = u_{\nu,\alpha;j2}^{11}(b_2R_1) u_{\nu,\alpha;k1}^{22}(b_2R_2) - u_{\nu,\alpha;j2}^{12}(b_2R_1) u_{\nu,\alpha;k1}^{21}(b_2R_2), \; j,k = 1,2,$$

$$\delta_{j2}(b_3R_2, b_3R_3) = v_{j2}^{21}(b_3R_2) v_{22}^{32}(b_3R_3) - v_{j2}^{22}(b_3R_2) v_{22}^{31}(b_3R_3), \; j = 1,2,$$

$$a_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(\beta) = Z_{\nu_1^*;11}^{(\mu);11}(chR_1)\delta_{\nu,\alpha;2j}(b_2R_1, b_2R_2) - Z_{\nu_1^*;21}^{(\mu);11}(chR_1)\delta_{\nu,\alpha;1j}(b_2R_1, b_2R_2),$$

$$b_{\nu,\alpha;j}(\beta) = \delta_{22}(b_3R_2, b_3R_3)\delta_{\nu,\alpha;j1}(b_2R_1, b_2R_2) - \delta_{12}(b_3R_2, b_3R_3)\delta_{\nu,\alpha;j2}(b_2R_1, b_2R_2);$$

$$\omega_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(\beta_n) = a_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(\beta_n) v_{12}^{2j}(b_{3n}R_2) - a_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(\beta_n) v_{22}^{2j}(b_{3n}R_2), \; j = 1,2,$$

$$Z_{\nu,\alpha;m2}^{(\mu);k}(\beta_n) = (\alpha_{m2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{m2}^k) v_{\nu,\alpha;k+1}^{(\mu)}(r,\beta_n)|_{r=R_k}, m,k = 1,2,$$

$$d_1 = a_1^2 \sigma_1 shR_1 : c_{11}, d_2 = a_2^2 \sigma_2 R_2^{2\alpha+1} : c_{12}, \; b_j = a_j^{-1}(\beta^2 + k_j^2)^{1/2}, \; k_j^2 \ge 0, \; j = \overline{1,3},$$

$$a_1^2\sigma_1 = \frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}} \frac{R_1^{2\alpha+1}}{R_2^{2\alpha+1}} \frac{1}{shR_1}, \quad a_2^2\sigma_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}} \frac{1}{R_1^{2\alpha+1}}, \quad a_3^2\sigma_3 = 1,$$

$P_{\nu_1^*}^{(\mu)}(chr)$ та $L_{\nu_1^*}^{(\mu)}(chr)$ – узагальнені приєднані функції Лежандра, які утворюють фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра, $\nu_1^* = -1/2 + ib_1$, $J_{\nu,\alpha}(b_2r)$ та $N_{\nu,\alpha}(b_2r)$ – дійсні функції Бесселя першого роду та другого роду відповідно, які утворюють фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя [4].

Знайдемо інтегральне зображення аналітичного розв’язку задачі (1) – (4) методом СГІП типу Лежандра-Бесселя-Фур'є на трискладовому сегменті $(0, R_3]$ з двома точками спряження, запровадженого правилами (5) – (7).

Запишемо систему (1) та початкові умови (2) у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_1^2 - a_1^2 \Lambda_{(\mu)}\right) u_1(t,r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_2^2 - a_2^2 B_{\nu,\alpha}\right) u_2(t,r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_3^2 - a_3^2 \frac{d^2}{dr^2}\right) u_3(t,r) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t,r) \\ f_2(t,r) \\ f_3(t,r) \end{pmatrix}, \quad \left.\begin{pmatrix} u_1(t,r) \\ u_2(t,r) \\ u_3(t,r) \end{pmatrix}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \\ g_3(r) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Інтегральний оператор $H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ згідно правила (5) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[\ldots] = \left[\int_0^{R_1} \ldots v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_1 sh\, r dr \quad \int_{R_1}^{R_2} \ldots v_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_2 r^{2\alpha+1} dr \quad \int_{R_2}^{R_3} \ldots v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_3 dr \right]. \tag{9}$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (9) за правилом множення матриць до задачі (8). Внаслідок основної тотожності (7) отримуємо задачу Коші [6]:

$$\left(\frac{d}{dt}+\beta_n^2\right)\tilde{u}_n(t,\beta_n)+\left(k_1^2+\gamma_1^2\right)\int_0^{R_1}u_1(t,r)v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_1 sh\,r dr+\left(k_2^2+\gamma_2^2\right)\int_{R_1}^{R_2}u_2(t,r)v_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_2 r^{2\alpha+1}dr+$$

$$+\left(k_3^2+\gamma_3^2\right)\int_{R_2}^{R_3}u_3(t,r)v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_3 dr=\tilde{f}_n(t),$$

$$\tilde{u}_n\big|_{t=0}=\tilde{g}_n(\beta_n).$$

Припустимо, що $\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\}=\gamma_1^2$. Покладемо всюди $k_1^2=0$, $k_2^2=\gamma_1^2-\gamma_2^2\geq 0$, $k_3^2=\gamma_1^2-\gamma_3^2\geq 0$. Одержуємо задачу Коші:

$$\left(\frac{d}{dt}+\beta_n^2+\gamma_1^2\right)\tilde{u}_n(t)=\tilde{f}_n(t), \qquad (10)$$

$$\tilde{u}_n(t)\big|_{t=0}=\tilde{g}_n,$$

$$\tilde{g}_n\equiv\int_0^{R_1}g_1(r)v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_1 sh\,r dr+\int_{R_1}^{R_2}g_2(r)v_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_2 r^{2\alpha+1}dr+\int_{R_2}^{R_3}g_3(r)v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_3 dr.$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком задачі Коші (10) є функція

$$\tilde{u}_n(t)=e^{-(\beta_n^2+\gamma_1^2)t}\tilde{g}_n+\int_0^t e^{-(\beta_n^2+\gamma_1^2)(t-\tau)}\tilde{f}_n(\tau)d\tau. \qquad (11)$$

Інтегральний оператор $H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}$ згідно правила (6), як обернений до (9), зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}[...]=\begin{bmatrix}\sum_{n=1}^{\infty}[...]v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\\ \sum_{n=1}^{\infty}[...]v_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n)\\ \sum_{n=1}^{\infty}[...]v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\end{bmatrix}. \qquad (12)$$

Застосувавши операторну матрицю-стовпець (12) за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\tilde{u}_n(t)]$, де функція $\tilde{u}_n(t)$ визначена формулою (11), одержуємо єдиний розв'язок параболічної задачі (1) – (4):

$$u_j(t,r)=\int_0^t\int_0^{R_1}\mathrm{H}_{\nu,\alpha;j1}^{(\mu)}(t-\tau,r,\rho)[f_1(\tau,\rho)+g_1(\rho)\delta_+(\tau)]\sigma_1 sh\rho\, d\rho\, d\tau+\int_0^t\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{H}_{\nu,\alpha;j2}^{(\mu)}(t-\tau,r,\rho)[f_2(\tau,\rho)+$$

$$+g_2(\rho)\delta_+(\tau)]\sigma_2 r^{2\alpha+1}d\rho\, d\tau+\int_0^t\int_{R_2}^{R_3}\mathrm{H}_{\nu,\alpha;j3}^{(\mu)}(t-\tau,r,\rho)[f_3(\tau,\rho)+g_3(\rho)\delta_+(\tau)]\sigma_3 d\rho\, d\tau,\quad j=1,2,3. \qquad (13)$$

У рівностях (13) беруть участь породжені неоднорідністю системи функції впливу:

$$\mathrm{H}_{\nu,\alpha;jk}^{(\mu)}(t,r,\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\beta_n^2+\gamma_1^2)t}v_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)v_{\nu,\alpha;k}^{(\mu)}(r,\beta_n),\quad j,k=1,2,3. \qquad (14)$$

При цьому $\delta_+(t)$ – дельта-функція Дірака, зосереджена в точці $t=0+$.

Зауваження. При $\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\}=\gamma_m^2$, $k_j^2=\gamma_m^2-\gamma_j^2\geq 0,\ j=1,2,3,\ m=2,3,$ й у формулі (14) вираз $(\beta_n^2+\gamma_1^2)$ міняється на вираз $(\beta_n^2+\gamma_m^2)$.

Висновок

Побудований розв'язок (13) параболічної задачі (1) – (4) має алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати його як в теоретичних дослідженнях, так і в числових розрахунках.

Список використаної літератури

1. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. - К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
2. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М.П. Ленюк. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 188 с.
3. Конет І.М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І.М. Конет. М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут, 2004. – 276 с.
4. Нікітіна О.М., Шинкарик М.І. Скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Лежандра-Бесселя-Фур'є на сегменті з двома точками спряження / О.М. Нікітіна, М.І. Шинкарик // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2015. Вып. 3 (54). – С. 47 – 51.
5. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
6. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.