***Руслана РУСЬКА,***
*ТНЕУ*

*УДК 519.86.336.73*

# ТЕОРЕТИЧНА ПОСТАНОВКА ДИНАМІЧНОЇ МОДЕЛІ ДЛЯ ФУНКЦІОНУВАННЯ КРЕДИТНОЇ СПІЛКИ

Більшість кредитних спілок в Україні працює за класичною схемою фінансової установи і орієнтується на залучення депозитів на договірних умовах з подальшим використанням для надання кредитів, або здійснення фінансових інвестицій – перетворення зобов'язань на продуктивний капітал.

Серед дослідників проблем становлення, розбудови та сучасного розвитку українського кооперативного руху були: Аліман М. В., Витанович І., Гончаренко В. В. [1], Злупко С. М., Кредісов А. І., Марочко В. І., Морозов А. Г., Пантелеймоненко А. О. [2], та моделюваню діяльності кредитних спілок Негребецька Л. А. [3].

Віддаючи належне високому рівню наукових праць зазначених вчених варто зауважити, що проблема уникнення банкрутства кредитної спілки і при цьому виконати свої зобовязання перед членами спілки залишається актуальною.

Розглянемо динамічну модель, завданням якої є визначення ймовірності виконання кредитною спілкою своїх зобов'язань за депозитами в динаміці.

Математично процес отримання доходу можна описати таким чином. В момент $t=0$ кредитна спілка володіє деяким початковим капіталом $r_0=r$ і до моменту пред'явлення першого позову $R_i$ капітал зріс за рахунок надходження внесків до величини $r + cR_i$, де $c$ – швидкістю надходження коштів. Однак у момент $R_i$ кредитна спілка виплатить величину $Y_i$ і капітал зменшиться до величини $r + cR_i - Y_i$. Цей процес продовжується до нескінченості, якщо тільки в момент пред'явлення повернення грошей коштів кредитній спілці не вистачить, щоб виплатити. Отже, в межах цієї моделі кредитна спілка не збанкрутує, якщо на часовому інтервалі $0 \le t \le \infty$ для усіх $n$ справедлива нерівність:

$$r + cR_n - (Y_1 + ... + Y_n) \ge 0. \qquad (1)$$

Якщо ж

$$\begin{aligned} &r + cR_1 - Y \ge 0, \\ &r + cR_2 - (Y_1 + Y_2) \ge 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &r + cR_{n-1} - (Y_1 + ... + Y_{n-1}) \ge 0, \\ &r + cR_n - (Y_1 + ... + Y_n) \le 0, \end{aligned}$$

то в момент поступлення *n-го* позову кредитна спілка збанкрутує.

У загальному випадку процес надходження позовів є випадковою послідовністю точок $R_1, R_2, ...$ на осі часу, однак реальні статистичні дані вказують на те, що цей процес володіє певними властивостями[4]:

- стаціонарністю - розподіл випадкової величини $r(t_1, t_2)$ – кількості позовів, що надійшли за час $(t_1, t_2)$ – залежить від довжини проміжку $(t_1, t_2)$ і не залежить від його розміщення на осі часу.
- ординарністю – неможливістю появи двох або більше позовів за малий проміжок часу $\Delta t$.
- відсутністю післядії – взаємною незалежністю появи тієї чи іншої кількості позовів за часові інтервали, що не перетинаються.

У цьому випадку існує додатне число $\lambda$ таке, що для будь-якого $t$ випадкова величина $r(t)$ має розподіл Пуасона з параметром $\lambda t$. Отже, процес надходження позовів про закриття рахунків з необхідністю буде пуасонівським з інтенсивністю $\lambda$, яка відображає середню кількість позовів за одиницю часу, а ймовірність надходження $i$ позовів за часовий інтервал $(0; t)$ становить:

$$P_i(t) = P(r(t) = i) = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \qquad (2)$$





де $P_i(t)$ – ймовірність надходження $i$ позовів за час $t$

$\lambda$ – інтенсивність процесу Пуасона [5].

Під банкрутством розуміємо подію, коли в деякий момент часу $t$ величина капіталу спілки $U_t = r + ct - (Y_1 + ... + Y_{r(t)})$ стане від'ємною у зв'язку з пред'явленням позову, сума якого перевищує весь наявний на даний момент часу капітал спілки:

$$\varphi(r) = P\{U_t < 0 \text{ для деякого } t > 0\}, \quad r \ge 0,$$

де $\phi(r)$ – ймовірність банкрутства спілки при початковому капіталі $r$.

Оскільки внески поступають безперервно з деякою постійною інтенсивністю $c$, а кількість виплат $r(t)$, які здійснюються протягом інтервалу $(0, t)$ описується розподілом Пуасона з інтенсивністю $\lambda$, то природно вважати, що для виживання кредитній спілці необхідно щоб надходження, зібрані за одиницю часу, перевищували очікувані середні виплати за одиницю часу: $c > \lambda \cdot D(Y)$, тобто

$$c = (1 + \theta) \cdot \lambda \cdot D(Y),$$

де $D(Y)$ – середній розмір виплати;

$\theta$ – відносна відсоткова надбавка, яка показує частку перевищення швидкості надходження вкладів над швидкістю виплат.

Явну формулу для розрахунку ймовірності $\phi(r)$ можна вказати тільки у випадку, якщо виплати спілки є показниково розподіленими випадковими величинами з математичним сподіванням $M(Y)$. Тоді

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\theta} e^{\frac{\theta \cdot r}{(1+\theta)M(Y)}}, & \text{якщо } c > \lambda \cdot M(Y) \ , \\ 1, & \text{якщо } c \le \lambda \cdot M(Y) \end{cases} \qquad (3)$$

Застосувавши нерівність Лундберга[6] отримаємо оцінку зверху для ймовірності банкрутства в динамічній моделі ризику:

$$\varphi(r) \le e^{-Rr} \qquad (4)$$

де $R$ – константа Крамера-Лундберга, характеристичний коефіцієнт, що знаходиться як єдиний додатній корінь рівняння

$$M(e^{R \cdot Y}) = 1 + (1 + \theta) M(Y) \cdot R,$$

у якому $M(e^{RY})$ – перетворення Лапласа величини збитку в точці $(-R)$:

$$M\left(e^{R\cdot Y}\right)=\int_0^{\infty}e^{R\cdot x}dF(x)$$

Таким чином, у динамічній моделі ризику характеристичний коефіцієнт $R$, який відображає основні параметри моделі (швидкість поступлення надходжень $c$, інтенсивність надходження позовів $\lambda$ розподіл величини позовів $F(x)$), є інтегральною характеристикою фінансової безпеки кредитної спілки, а ймовірність банкрутства ставиться в залежність від двох параметрів - початкового капіталу $r$ і відносної надбавки $\theta$. Визначивши за емпіричними даними параметр $\theta$ і розрахувавши коефіцієнт $R$, можна оцінити верхню межу ймовірності банкрутства в залежності від рівня початкового капіталу $r$.

Розглянемо кредитну спілку, що володіє початковим капіталом $Z\geq 0$, оптимальне значення якого є одним із предметів пошуку. У фіксовані дискретні моменти часу до кредитівки надходять вимоги про закриття рахунків. В кожний момент часу кредитівка отримує суму $d$ у вигляді надходжень за користування кредитами.

Нехай $Y_n(n=1,2...)$ – незалежні і однаково розподілені випадкові величини позовів про закриття, які надійшли в момент часу $n$. В реальній ситуації вимоги надходять у випадкові моменти часу і, по суті, $Y_n$ є сумарною величиною вимог, які надійшли між $n$–1 і $n$ моментами. Ідеалізація полягає у припущенні, що позови, що надійшли за одиничний інтервал часу, сплачуються в кінці інтервалу, а початкові надходження $d$ поступають у кредитну спілку на початку цього інтервалу. Середня величина позовів за одиницю часу $M(Y)$ і середня сума надходжень $d$ пов'язані між собою співвідношенням: $d=(1+\theta)M(Y)$, де $\theta$ – надбавка.

Стратегія кредитної спілки така: якщо в даний момент часу капітал спілки перевищує Z, то надлишок вилучається і виплачується у вигляді дивідендів. Якщо поточного капіталу спілки не вистарчає для виплати, то спілка банкрутує, припиняє свою діяльність і сплачує «штраф» $A\geq 0$, який пов'язаний з вимогами кредиторів, – пайовиків і витратами на ліквідацію. Якщо поточний капітал спілки додатній, але не перевищує $Z$, то кредитівка продовжує працювати.





Кредитна спілка вибирає оптимальну дивідендну стратегію так, щоб максимізувати середній сумарний дисконтований дохід членів спілки за весь час її функціонування:

$$V(Z)=M\left(\sum_{n=0}^{\infty}v^n s_n\right)\rightarrow \max, \qquad (5)$$

де $v\in[0,1]$ – коефіцієнт дисконтування;

$S_n=Z_n-Z\geq 0$ – розмір дивідендів, які спілка виплачує в момент часу $n$ якщо поточний капітал спілки на момент $n$ перевищує порогове значення капіталу $Z$. Якщо $Z_n<0$, діяльність спілки припиняється і дивіденди дорівнюють нулю.

Дослідження функції (5) показує, що оптимальна стратегія кредитівки з максимізації прибутку (зокрема, дивідендів) і водночас мінімізації імовірності банкрутства носить пороговий характер, тобто спілка повинна акумулювати свій капітал до деякого рівня $Z\geq 0$, а потім надлишок виплачувати у вигляді дивідендів. У цьому випадку капітал спілки на момент часу $n+1$ становитиме:

$$Z_{n+1}=\min\left(Z,Z_n+d-Y_{n+1}\right).$$

У моделі з дискретним часом капітал спілки до моменту банкрутства або досягнення рівня $Z$ є сумою незалежних випадкових величин, в неперервній моделі – фінансовий стан кредитної спілки описується випадковим процесом з неперервними траєкторіями та незалежними однорідними приростами (якщо величина капіталу досягне рівня $Z$, усе «починається спочатку», незалежно від минулого).

В рамках цієї моделі одержано загальний вигляд функції $V(Z)$, знайдено значення $V(+0)\,i\,V(+\infty)$, а також оцінку зверху для оптимального початкового капіталу $Z$, оскільки точне його значення знайти не вдається [7].

Іншим підходом до вибору політики кредитної спілки є максимізація середньої тривалості життя спілки $D$ ($Z_0$, $Z$) при початковому капіталі $Z_0$ і пороговому значенні капіталу $Z$. У роботі [8] наведено загальний вираз для функції $D$ ($Z_0$, $Z$) у вигляді деякого ряду і розглянуто приклади, з яких видно, що $D(Z_0,Z)\rightarrow\infty$ при $Z\rightarrow\infty$ і зростає із збільшенням $Z_0$.

Оцінивши функції $V(Z)$ і $D(Z_0, Z)$, кредитна спілка, як фінансова компанія, може формувати свою політику шляхом максимізації $V(Z)$ за умови $D(Z_0, Z) \geq D_0$, де $D_0$ - заданий рівень або максимізуючи вираз $\alpha \log V(Z) + (1-\alpha) \log D(Z_0, Z)$, де $\alpha$ і $1-\alpha$ – вагові коефіцієнти, які спілка приписує середньому значенню дивідендів та середній тривалості існування $(\alpha \in [0,1])$.

Використання динамічної моделі повинно бути одним з інструментів управління кредитною спілкою для забезпечення її фінансової стійкості.

### Література

1. Гончаренко В.В. Кредитні спілки як фінансові кооперативи: міжнародний досвід та українська практика. – К: Наукова думка, 1997. – 240 с.
2. Основи кооперації. Бабенко С. Г., Гелей С. Д, та ін.. - К.: Знання, 2004. – 470 с.
3. Негребецька Л. А. Модель визначення відсоткових ставок за позички в кредитних спілках // Экономика промышленности. – 2000. – № 4. – С. 124-128.
4. Теорія імовірностей та математичної статистики. [навчальний посібник.] / В.О. Єрьоменко, М. І. Шинкарик. – Тернопіль: Економічна думка, 2003. – 317 с.
5. Турчин В. М. Математична статистика. – К.: Академія, 1999. – 240 с.
6. Слуцкий Е. Е. Избраные труды. Теория вероятностей. Математическая статистика. – Москва: Издательство Академии наук СССР, 1960. – 288 с.
7. Borch K. The Mathematical Theory. - Lexington Books, 1974.
8. Waldmann K. . On optimal dividend payments and related problems // Insuranse Mathematics and Economis. – 1988. – V.7. – № 4. – P. 237-249.