НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ
МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ ім. Я.С. ПІДСТРИГАЧА

ЛЕСИК
Оксана Федорівна

УДК 539.3

ЛІНІЙНІ ТА ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ПОДАТЛИВИХ ДО ТРАНСВЕРСАЛЬНИХ ЗСУВУ ТА СТИСНЕННЯ ОРТОТРОПНИХ ПЛАСТИН І ЦИЛІНДРИЧНИХ ПАНЕЛЕЙ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів - 2010

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача Національної Академії наук України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Марчук Михайло Володимирович,
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України, завідувач відділу
механіки тонкостінних елементів конструкцій.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Григоренко Олександр Ярославович,
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України,
завідувач відділу обчислювальних методів;

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Кунець Ярослав Іванович,
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України, провідний науковий
співробітник відділу математичних методів механіки
руйнування та контактних явищ.

Захист відбудеться “__” _________ 2010 року о “___” годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.195.01 в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України за адресою: 79060, м.Львів, вул. Наукова, 3-б.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України за адресою: 79060, м.Львів, вул. Наукова, 3-б.

Автореферат розіслано “____” ________________ 2010 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради,
доктор фізико-математичних наук, професор **О.В. Максимук**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Тонкостінні композитні елементи пластинчастого та оболонкового типу з регульованими характеристиками міцності та матеріаломісткості знаходять широке застосування у конструкціях і технічних засобах різноманітного цільового призначення. У більшості випадків вони піддаються інтенсивним динамічним, зокрема циклічним, навантаженням. Тому достовірна оцінка такої їх динамічної характеристики, як спектр власних частот є актуальною проблемою при проектуванні з метою запобігання резонансним явищам в експлуатаційних умовах.

Сучасним композитним матеріалам на полімерній основі, з яких виготовляються оболонкові та пластинчасті елементи конструкцій, притаманні специфічні особливості деформування, серед котрих слід відмітити такі, як анізотропія пружних характеристик і податливість до трансверсальних зсуву та стиснення. Інтенсивні циклічні навантаження на тонкостінні елементи можуть бути причиною значних амплітуд коливань, співмірних з товщиною, що обумовлює геометрично нелінійний характер їх деформованого стану. Слід зазначити, що на даний час в літературі наявна незначна кількість праць з дослідження коливань композитних пластин і оболонок при одночасному врахуванні податливості до трансверсальних зсуву та стиснення, особливо в геометрично нелінійному випадку. Переважна більшість результатів в цьому випадку отримана за допомогою числових методів. Тому розробка математичних моделей процесів вільних коливань, що враховують згадані вище основні особливості деформування композитних тонкостінних елементів конструкцій та дозволяють отримати аналітичні вирази для спектрів власних частот за лінійних і амплітудно-частотні залежності за геометрично нелінійних коливань, є важливим науковим і практичним завданням. Дана робота присвячена створенню на основі уточненої теорії пластин і оболонок таких моделей для ортотропних прямокутних пластин і видовжених циліндричних панелей.

Зв'язок роботи з науковими планами, темами і програмами. Дослідження за темою дисертації виконувалися в рамках держбюджетних наукових тем за відомчими замовленнями НАН України: «Математичне моделювання, теоретичні та експериментальні методи дослідження фізико-механічних полів у конструкціях із композитів і їх динамічних характеристик з урахуванням міжфазних недосконалостей та контактної взаємодії» (2003–2006р.р., державний реєстраційний номер 0103U000128), «Розвиток математичних моделей і методів дослідження нелінійної динаміки тонкостінних конструкцій із композитних матеріалів стосовно прогнозування їх конструктивної міцності та надійності» (2007–2010р.р., державний реєстраційний номер 0107U000358).

Метою дисертаційної роботи є розвиток математичних моделей, що описують лінійні та геометрично нелінійні вільні коливання податливих до трансверсальних зсуву і стиснення ортотропних прямокутних пластин і видовжених циліндричних панелей, розробка ефективних методів і методик відшукання спектрів власних частот за лінійних коливань та амплітудно-частотних залежностей за геометрично нелінійних коливань.

Для досягнення зазначеної мети:

– на основі варіанту уточненої теорії розроблено математичну модель процесів лінійних і геометрично нелінійних коливань податливих до деформацій поперечних зсуву та стиснення прямокутних пластин і видовжених циліндричних панелей;
– запропоновано методику відшукання в замкненому вигляді виразів для спектрів частот лінійних власних коливань прямокутних пластин і видовжених циліндричних панелей;
– отримано кількісні та якісні оцінки впливу податливості до трансверсальних зсуву і стиснення та геометричних параметрів на власні частоти ортотропних прямокутних пластин і видовжених циліндричних панелей за лінійних коливань;
– побудовано аналітичні залежності між амплітудою та основною власною частотою композитних видовжених пластин за геометрично нелінійних коливань.

Об'єкт дослідження – лінійні та геометрично нелінійні коливання податливих до деформацій поперечних зсуву та стиснення ортотропних пластин і циліндричних панелей.

Предмет дослідження – спектри власних частот за лінійних коливань та амплітудно-частотних залежності за геометрично нелінійних коливань податливих до деформацій поперечних зсуву та стиснення ортотропних пластин і циліндричних панелей на базі варіанту уточненої теорії.

Методи досліджень. Дослідження проводились у рамках варіанту уточненої теорії пластин і оболонок, котрий будується шляхом використання методу розвинення функцій, що описують геометрично нелінійну динаміку пружного тонкого шару, у ряди за поліномами Лежандра від нормальної координати при одночасному задоволенні граничних умов у напруженнях на лицевих поверхнях. Для відшукання розв'язків сформульованих задач про лінійні та геометрично нелінійні коливання податливих до трансверсальних зсуву та стиснення ортотропних пластин і циліндричних панелей використано прямі методи інтегрування диференціальних рівнянь.

Обґрунтованість і достовірність наукових результатів забезпечується коректністю та строгістю математичних постановок задач; використанням апробованих математичних методів; узгодженістю окремих результатів, отриманих у роботі, з результатами досліджень, наведеними у літературних джерелах.

Наукова новизна роботи полягає в:

– розробці на основі варіанту уточненої теорії пластин і оболонок, що враховує податливість до трансверсальних зсуву та стиснення,

математичних моделей лінійного та геометрично нелінійного динамічного деформування ортотропних прямокутних пластин і видовжених циліндричних оболонок;
– математичній постановці задач про вільні коливання ортотропних прямокутних пластин і видовжених циліндричних панелей;
– отриманні аналітичних виразів значень власних частот за лінійних коливань ортотропних прямокутних пластин і видовжених циліндричних панелей та дослідженні впливу на них податливості до трансверсальних зсуву та стиснення і геометричних параметрів;
– формулюванні задачі про геометрично нелінійні коливання податливих до поперечних зсуву та стиснення пластини-смуги і зведенні її до відшукання розв’язку нелінійного інтегро-диференціального рівняння відносно амплітуди коливань та розробці методики його розв’язування;
– побудові в замкненому аналітичному вигляді залежностей між амплітудою та основною власною частотою композитних пластин-смуг за нелінійних коливань;
– отриманні шляхом граничного переходу за параметрами податливості до трансверсальних зсуву та стиснення результатів, що базуються на використанні класичної теорії при розв’язуванні задач про геометрично нелінійні вільні коливання пластин-смуг;
– встановленні факту генерування у геометрично нелінійному випадку поперечними коливаннями поздовжніх і зсувних коливних процесів та визначення їх амплітуд і частот.

Теоретичне та практичне значення одержаних результатів. Одержані в роботі рівняння лінійної та геометрично нелінійної динаміки податливих до трансверсальних зсуву та стиснення прямокутних пластин і циліндричних панелей можуть бути використані для дослідження їх динамічного напружено-деформованого стану при заданих реальних експлуатаційних навантаженнях. Побудовані аналітичні розв’язки та висновки, що з них випливають, знайдуть застосування в інженерній практиці при прогнозуванні та оцінці динамічних властивостей відповідальних тонкостінних конструкцій в галузі машинобудування та в науково-дослідних установах.

Апробація результатів роботи. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

- Міжнародних наукових конференціях «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (Львів, 2003, 2006);
- XXII, XXIII та XXV Міжнародних науково-практичних конференціях «Композиційні матеріали в промисловості» (Ялта, 2002, 2003, 2005);
- XXII симпозіумі «Vibration in Physical Systems» (Poznań, 2006);
- Міжнародних симпозіумах Українських інженерів-механіків у Львові (Львів, 2003, 2007, 2009);
- I Міжнародній науково-технічній конференції «Динаміка, міцність і

надійність сільськогосподарських машин» (Тернопіль, 2004);

- Міжнародній науковій конференції «Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій» (Львів, 2008);
- Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки і математики» (Львів, 2008);
- Міжнародній науковій конференції «Актуальные проблемы нелинейной механики оболочек» (Казань, 2008);
- Міжнародній науковій конференції «Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки» (Львів, 2009).

У повному обсязі результати дисертаційної роботи доповідались на:

- науковому семінарі відділу механіки тонкостінних елементів конструкцій Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України;
- спеціалізованому кваліфікаційному семінарі "Математичні проблеми механіки руйнування і поверхневих явищ" Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України під керівництвом члена-кореспондента НАН України, доктора фізико-математичних наук, професора Г. С. Кіта;
- науковому семінарі відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України під керівництвом доктора фізико-математичних наук, професора О. Я. Григоренка;

Публікації. Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані у 14-ти наукових працях [1–14] , з них 5 статей [1–5] у рецензованих наукових журналах із Переліку фахових видань ВАК України для здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук. Основні результати роботи отримані автором самостійно. У всіх працях здобувачеві належить участь у постановці задачі, побудові розв'язків, одержанні числових результатів й участь в обговоренні та аналізі отриманих результатів.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, які містять 17 рисунків, 2 таблиці, висновків, а також списку літератури з 157 назв. Загальний обсяг дисертації становить 137 сторінок.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, відзначено зв'язок роботи з науковими темами і програмами, сформульовано мету і задачі дослідження, викладено суть отриманих результатів, їх наукову новизну, теоретичне і практичне значення, подані відомості про публікації, особистий внесок автора та апробацію результатів..

У **першому розділі** за літературними джерелами проаналізовано двовимірні математичні моделі процесів вільних коливань композитних оболонок і пластин, як раціональних конструктивних елементів різноманітних інженерних споруд і технічних засобів.

Фундаментальну роль у становленні теорії тонких пластин і оболонок відіграли праці В.З. Власова, Й.І. Воровича, К.З. Галімова, О.Л. Гольденвейзера, Я.М. Григоренка, О.М. Гузя, Л. Донелла, А.І. Лурьє, А. Лява, К. Маргерра, Х.М. Муштарі, В.В. Новожилова, С.П. Тимошенка та ін.

Поява та широке застосування композитних матеріалів зумовили розвиток уточнених теорій. Важливі результати в цьому напрямку отримані в працях І. Альтенбаха, С.О. Амбарцумяна, І.М. Векуа, А.Т. Василенка, В.В. Васильєва, К.З. Галімова, Я.М. Григоренка, О.М. Гузя, В.С. Гудрамовича, О.В. Максимука, Р. Міндліна, П. Нагді, Ю.В. Немировського, Б.Л Пелеха, В.Г. Піскунова, Е. Рейснера, М.А. Сухорольського, В.П. Тамужа, С.П. Тимошенка, І.Ю. Хоми, Л.П. Хорошуна, М.П. Шереметьєва та інших учених.

Геометрично нелінійному деформуванню тонкостінних елементів конструкцій присвячені праці Н.А. Алумяе, О.І. Беспалової, А.С. Вольміра, Й.І. Воровича, К.З. Галімова, Е.І. Григолюка, Я.М. Григоренка, О.М. Гузя, Б.Я. Кантора, Я.Ф. Каюка, М.С. Корнішина, М.Ф. Морозова, А.П. Мукоєда, Х.М. Муштарі, І.С. Чернишенка та ін.

Значний вклад у дослідження динамічної поведінки пластин і оболонок внесли І.Ю. Бабич, В.В. Болотін, Я.Й. Бурак, О.Р. Гачкевич, В.Т. Грінченко, Е.І. Григолюк, О.Я. Григоренко, Я.М. Григоренко, О.М. Гузь, С.О. Калоєров, В.Г. Карнаухов, В.А. Крисько, В.Д. Кубенко, Р.М. Кушнір, П.З. Луговий, М.Ф. Морозов, В.Г. Піскунов, В.І. Сторожев, М.П. Саврук, А.Ф. Улітко, В.П. Шевченко, М. О. Шульга та інші вчені.

Постановкам задач про вільні лінійні та геометрично нелінійні коливання пластин й оболонок і розробці методів їх розв’язування присвячені праці О.І. Беспалової, В.В. Болотіна, А.С. Вольміра, В.Т. Грінченка, О.Я. Григоренка, Я.М. Григоренка, П.С. Ковальчука, В.А. Криська, В.Д. Кубенка, Я.І. Кунця, Л.В. Курпи, М.В. Марчука, В.В. Мелешка, В.Г. Піскунова, Я.Г. Савули, В.І. Сторожева, С.П. Тимошенка, M. Amabili, J Awrejcewicz, I.K. Banerjee, I.C. Chen, Li. A. Dong, C.L. Dym, D.A. Evenren, P.B. Goncalves, E.L. Jansen, L. Librescu, F.M.A. Silva, M. Sundhakar, T. Ueda та інших учених.

Проведений ааналіз опублікованих праць з дослідження вільних коливань композитних тонкостінних елементів конструкцій вказує на незначну їх кількість, в котрих одночасно враховуються податливість матеріалу до трансверсальних зсуву та стиснення, особливо за геометрично нелінійних коливань.

Показано місце дисертації серед відомих у літературі результатів в даній науковій тематиці.

У другому розділі наведені співвідношення варіанту уточненої теорії геометрично нелінійного динамічного деформування податливих до трансверсальних зсуву та стиснення ортотропних оболонок. Вони отримані М.В. Марчуком шляхом використання методу представлення функцій, що описують геометрично нелінійну динаміку тонкого пружного шару, скінченними сумами рядів за поліномами Лежандра від нормальної координати при одночасному задоволенні граничних умов у напруженнях на лицевих поверхнях. Оскільки за вільних коливань тонких оболонок на їхніх лицевих поверхнях відсутні навантаження та контакт із жорсткими або пружними тілами, то можна вважати функцію, що явно виражає стиснення нормального перед деформацією до серединної поверхні елемента, достатньо малою в порівнянні з рештою п'яти функціями узагальнених переміщень: двома тангенціальними u_i та одним нормальним w зміщеннями точок серединної поверхні та двома кутами повороту γ_i нормального елемента. Враховуючи також той факт, що при поперечному деформуванні тонкостінного елемента домінуючою функцією є вертикальне зміщення точок серединної поверхні, деформаційні співвідношення між коефіцієнтами розкладів компонент тензора скінченних деформацій e_{ij}^k та узагальненими переміщеннями значно спрощуються. Це в свою чергу спрощує також співвідношення між коефіцієнтами розкладів компонент S_{ij}^k тензора напружень Кірхгофа, відносно яких записані рівняння руху, та коефіцієнтами розкладів компонент σ_{ij}^k тензора напружень Піоли, через які записані співвідношення пружності.

У випадку ортотропної пластини товщини $2h$ з віднесеною до ортогональної системи координат x_i серединною площиною деформаційні співвідношення мають вигляд

$$e_{ii}^0 = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2, \quad e_{ii}^1 = h\,\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i}, \quad e_{i3}^0 = \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{\partial w}{\partial x_i}\right), \quad i = 1, 2,$$

$$e_{12}^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right), \; e_{12}^1 = \frac{h}{2}\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1}\right). \tag{1}$$

Співвідношення між коефіцієнтами розкладів компонент тензорів напружень Кірхгофа та Піоли набудуть вигляду

$$S_k^{ij} \approx \sigma_k^{ij}; \quad k = 0, 1, \quad i, j = 1, 2;$$

$$S_0^{3i} \approx \sigma_0^{3i}; \; S_0^{i3} \approx \sigma_0^{i3} + \sigma_0^{ii} \cdot \varepsilon_{3i}^0 + \sigma_0^{i,3-i} \cdot \varepsilon_{3,3-i}^0, \; i = 1, 2. \tag{2}$$

З використанням загальноприйнятих позначень для узагальнених зусиль

$$\sigma_0^{ii} = N_i / 2h; \quad \sigma_1^{ii} = 3M_i / 2h^2; \quad \sigma_0^{i3} = Q_i / 2h, \quad i = 1, 2;$$

$$\sigma_0^{12} = S / 2h; \quad \sigma_1^{12} = 3H / 2h^2. \tag{3}$$

рівнянням руху (коливань) надамо вигляду

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 2\rho h\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} = 2\rho h\,\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} - Q_1 = \frac{2}{3}\rho h^3\,\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - Q_2 = \frac{2}{3}\rho h^3\,\frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(N_1\frac{\partial w}{\partial x_1}+S\frac{\partial w}{\partial x_2}+Q_1\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(N_2\frac{\partial w}{\partial x_2}+S\frac{\partial w}{\partial x_1}+Q_2\right)=2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (4)$$

де ρ – приведена густина матеріалу пластини.

Залежності між узагальненими зусиллями та коефіцієнтами розкладів компонент тензора деформацій описуються співвідношеннями

$$N_1=B_1[(1+\alpha_1)e_{11}^0+\bar{\nu}_{21}e_{22}^0],\quad M_1=D_1[(1+\alpha_1)e_{11}^1+\bar{\nu}_{21}e_{11}^1],\quad 1\Leftrightarrow 2,$$

$$S=B_{12}\,2e_{12}^0,\quad H=D_{12}\,2e_{12}^1,\quad Q_i=\Lambda_i\,2e_{i3}^0,\quad i=1,2, \quad (5)$$

де

$$B_i=2\bar{\bar{E}}_i h,\quad D_i=h^2B_i/3,\quad \bar{\bar{E}}_i=E_i/(1-\nu_{12}\nu_{21}),\ \Lambda_i=2k'hG_{i3},\quad i=1,2,$$
$$B_{12}=2G_{12}h,\quad D_{12}=2G_{12}h^3/3,\ k'=14/15. \quad (6)$$

У (5) і (6) використані позначення:

$$\alpha_1=\frac{(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32})^2}{D}\frac{E_1}{E_3},\quad \alpha_2=\frac{(\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31})^2}{D}\frac{E_2}{E_3},$$

$$\bar{\nu}_{12}=\nu_{12}+\frac{\nu}{D}\frac{E_1}{E_3},\quad \bar{\nu}_{21}=\nu_{21}+\frac{\nu}{D}\frac{E_2}{E_3},$$

$$\bar{\bar{E}}_i=E_i/\delta^2,\quad i=1,2,\quad \bar{\bar{E}}_0=E_3\delta^2/D,$$

$$D=1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{13}\nu_{31}-\nu_{32}\nu_{23}-\nu_{13}\nu_{32}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{31}\nu_{12},$$

$$\nu=(\nu_{31}+\nu_{32}\nu_{21})(\nu_{32}+\nu_{31}\nu_{12}),\quad \delta^2=1-\nu_{12}\nu_{21}, \quad (7)$$

E_i – модулі Юнга в напрямках x_i; ν_{ij} – коефіцієнти Пуассона, які характеризують скорочення в напрямку x_j при розтязі в напрямку x_i; G_{ij} – модулі зсуву між головними напрямками x_i та x_j, $i,j=1,2,3$.

Для найбільш характерних випадків закріплення країв пластини записані граничні умови. У випадку необхідності визначення амплітуд коливань записані початкові умови для функцій узагальнених переміщень. Перераховані умови та наведені рівняння описують процес вільних поперечних геометрично нелінійних коливань ортотропних пластин. Ці рівняння явно враховують податливість до трансверсального зсуву та неявно – до стиснення.

Аналогічним чином отримані співвідношення, що описують вільні геометрично нелінійні коливання податливих до трансверсальних зсуву та стиснення оболонок. Відмінними від наведених вище будуть лише деформаційні співвідношення

$$e_{11}^0=\frac{\partial u_1}{\partial z}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2,\ e_{22}^0=\frac{1}{R}\frac{\partial u_2}{\partial\varphi}+\frac{w}{R}+\frac{1}{2}\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi}-u_2\right)^2,$$

$$e_{12}^{0}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial u_1}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_2}{\partial z}+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi}-u_2\right)\right],$$

$$e_{11}^{1}=\frac{\partial\gamma_1}{\partial z},\quad e_{22}^{1}=\frac{1}{R}\frac{\partial\gamma_2}{\partial\varphi},\quad e_{12}^{1}=\frac{\partial\gamma_2}{\partial z}+\frac{1}{R}\frac{\partial\gamma_1}{\partial\varphi},$$

$$e_{13}^{0}=\gamma_1+\frac{\partial w}{\partial z},\ e_{23}^{0}=\gamma_2+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi}-u_2\right). \tag{8}$$

та рівняння руху

$$\frac{\partial N_1}{\partial z}+\frac{1}{R}\frac{\partial S}{\partial\varphi}=2\rho h\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial S}{\partial z}+\frac{1}{R}\frac{\partial N_2}{\partial\varphi}+\frac{1}{R}\left[Q_2+\frac{N_2}{R}\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi}-u_2\right)+S\frac{\partial w}{\partial z}\right]=2\rho h\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial z}+\frac{1}{R}\frac{\partial H}{\partial\varphi}-Q_1=\frac{2}{3}\rho h^3\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial t^2},\quad \frac{\partial H}{\partial z}+\frac{\partial M_2}{\partial\varphi}-Q_2=\frac{2}{3}\rho h^3\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[Q_1+N_1\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{S}{R}\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi}-u_2\right)\right]+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[Q_2+\frac{N_2}{R}\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi}-u_2\right)+S\frac{\partial w}{\partial z}\right]-$$

$$-\frac{N_2}{R}=2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{9}$$

Тут використані загальновживані позначення для напрямків циліндричної системи координат.

Таким чином, отримані математичні моделі процесів вільних геометрично нелінійних коливань податливих до трансверсальних зсуву та стиснення ортотропних пластин та циліндричних оболонок (в частковому випадку – циліндричних панелей). Зауважимо, що граничним переходом $E_3\to\infty$ для модуля Юнга в поперечному напрямку в співвідношеннях пружності цих моделей отримуються рівняння узагальненої нелінійної теорії С.П. Тимошенка. Подальший граничний перехід $G_{i3}\to\infty,\ i=1,2$ приводить до рівняння нелінійної квадратичної теорії Кармана.

Частковим випадком отриманих рівнянь є співвідношення, що описують процеси вільних лінійних поперечних коливань вказаних тонкостінних елементів, які будуть наведені та використані нижче.

Третій розділ містить дослідження впливу податливості до трансверсальних зсуву та стиснення на власні частоти ортотропних прямокутних пластин і видовжених циліндричних панелей за лінійних коливань. Спершу розглядаємо композитну прямокутну пластину сталої товщини $2h$ розміру $a_1\times a_2$ з приведеними фізико-механічними характеристиками. Серединну площину пластини віднесемо до декартової системи координат x_1Ox_2 з початком у лівому куті зайнятого нею прямокутника. За нескінченно малих деформацій система рівнянь руху (4) розпадається на дві незалежні підсистеми. Друга підсистема, яка складається з трьох останніх рівнянь, в узагальнених переміщеннях має вигляд

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\varepsilon_1\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-æ_1^2\right)\gamma_1+(\varepsilon_1+\nu_1)\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial x_1\,\partial x_2}-æ_1^2\frac{\partial w}{\partial x_1}=0,$$

$$(\varepsilon_2+\nu_2)\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial x_1\,\partial x_2}+\left(\varepsilon_2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-æ_2^2\right)\gamma_2-æ_2^2\frac{\partial w}{\partial x_2}=0,$$

$$\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}+\frac{1}{g}\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}+\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{1}{g}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)w=\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{10}$$

Тут

$c_2=\sqrt{\Lambda_1/2\rho h}$ – швидкість поширення зсувних хвиль у напрямку Ox_1;

$$\nu_1=\frac{\nu_{21}+\alpha_{12}}{1+\alpha_1},\quad \nu_2=\frac{\nu_{12}+\alpha_{21}}{1+\alpha_2},\quad g=\frac{G_{13}}{G_{23}},$$

$$\varepsilon_i=\frac{D_{12}}{\bar{D}_i},\quad æ_i^2=\frac{\Lambda_i}{\bar{D}_i},\quad \bar{D}_i=(1+\alpha_i)D_i,\quad i=1,2,$$

$$\bar{D}_{ij}=D_{ij}+D_i\nu_{ij}\alpha_{ij},\quad i,j=1,2.$$

У перших двох рівняннях (10), на основі робіт В.А. Осадчука і М.В. Марчука, знехтувано інерцією нормального елемента.

У випадку шарнірного закріплення пластини граничні умови записуємо у вигляді

$$w(x_1,x_2,t)\big|_{x_1=0;\,a_1}=w(x_1,x_2,t)\big|_{x_2=0;\,a_2}=0;$$

$$M_1(x_1,x_2,t)\big|_{x_1=0;\,a_1}=M_2(x_1,x_2,t)\big|_{x_2=0;\,a_2}=0;$$

$$H(x_1,x_2,t)\big|_{x_1=0;\,a_1}=H(x_1,x_2,t)\big|_{x_2=0;\,a_2}=0. \tag{11}$$

Щоб задовольнити граничні умови (11), розв’язок системи (10) вибираємо у вигляді

$$w(x_1,x_2,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}w_{mn}(t)\sin\mu_1^m x_1\sin\mu_2^n x_2,$$

$$\gamma_1(x_1,x_2,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_1^{mn}(t)\cos\mu_1^m x_1\sin\mu_2^n x_2,$$

$$\gamma_2(x_1,x_2,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_2^{mn}(t)\sin\mu_1^m x_1\cos\mu_2^n x_2, \tag{12}$$

де

$$\mu_1^m = \frac{m\,\pi}{a_1};\quad \mu_2^n = \frac{n\,\pi}{a_2}.$$

Підставляючи (12) у рівняння (10) та застосовуючи метод Бубнова-Гальоркіна за змінними x_1 та x_2 при вибраних координатних функціях, одержимо нескінченну систему рівнянь для визначення функцій $w_{mn}(t)$, $\gamma_i^{mn}(t)$, $i=1,2$, яка внаслідок взаємної ортогональності координатних функцій у виразах (12) та їх перших і других похідних, складається з таких незалежних підсистем функціонально-диференціальних рівнянь

$$[(\mu_1^m)^2 + e_1(\mu_2^n)^2 + æ_1^2]\,\gamma_1^{mn} + (\varepsilon_1 + \nu_1)\mu_1^m\mu_2^n\gamma_2^{mn} = -æ_1^2\mu_1^m w_{mn};$$

$$(\varepsilon_2 + \nu_2)\mu_1^m\mu_2^n\gamma_1^{mn} + [e_2(\mu_1^m)^2 + (\mu_2^n)^2 - æ_2^2]\,\gamma_2^{mn} = -æ_2^2\mu_2^n w_{mn};$$

$$\mu_1^m\gamma_1^{mn}\quad \mu_2^n\gamma_2^{mn}\quad [(\mu_1^m)^2 + \frac{1}{g}(\mu_2^n)^2]\,w_{mn} = \frac{1}{c_2^2}\frac{d^2 w_{mn}}{dt^2}. \tag{13}$$

З (13) отримуємо вираз для безрозмірних величин спектру власних частот

$$\bar{\omega}_{mn} = \omega_{mn}\sqrt{\frac{\rho}{E_1}}\,a_1, \tag{14}$$

де

$$\omega_{mn}^2 = \frac{E_1(1+\alpha_1)}{\rho a_1^2}\left(\frac{h}{a_1}\right)^2 \frac{m^4\pi^4}{3(1-\nu_{12}\nu_{21})}\times$$

$$\times\left\{\frac{æ_1^2}{(\mu_1^m)^2}\left[1+\frac{1}{g}\frac{(\mu_2^n)^2}{(\mu_1^m)^2}\right] - \frac{1}{\Delta}\left[\Delta_1 + \frac{1}{g}\frac{(\mu_2^n)^2}{(\mu_1^m)^2}\Delta_2\right]\right\},$$

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$a_{11} = (\mu_1^m)^2 + \varepsilon_2(\mu_2^n)^2 + æ_1^2,\quad ,\; a_{22} = \varepsilon_2(\mu_1^m)^2 + (\mu_2^n)^2 + æ_2^2$$

$$a_{12} = (\varepsilon_1 + \nu_1)\,\mu_1^m\mu_2^n,\quad a_{21} = (\varepsilon_2 + \nu_2)\,\mu_1^m\mu_2^n,$$

$$\Delta_1 = -æ_1^2\,\mu_1^m a_{22} + æ_2^2\,\mu_2^n a_{12},\quad \Delta_2 = -æ_2^2\,\mu_2^n a_{11} + æ_1^2\,\mu_1^m a_{21}.$$

Числові розрахунки за формулою (14) виконані для пластини з параметром тонкостінності $h/a_1 = 0{,}1$ і фізико механічними характеристиками $E_1 = E_2 = E$, $G_{13} = G_{23} = G'$, $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu = 0{,}425$, $G_{12} = E/\,2(1+\nu)$. На рис. 1–3 наведено залежності основної безрозмірної частоти $\bar{\omega}_{00}$ від параметра податливості до трансверсального зсуву E/G' без урахування стиснення ($E/E_3 = 0$) і з урахуванням ($E/E_3 = 1$) при $a_1/a_2 = \lambda = 1{,}0;\,0{,}5;\,0{,}1$ відповідно.

Зниження опору до трансверсального зсуву викликає зменшення жорсткості пластини та відповідно – зниження власної частоти. Врахування ж поперечного стиску навпаки, підвищує у межах 15% значення основної частоти поперечних коливань.

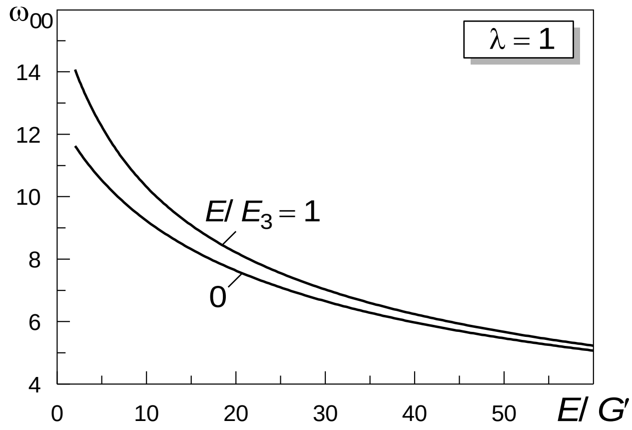


Рис. 1

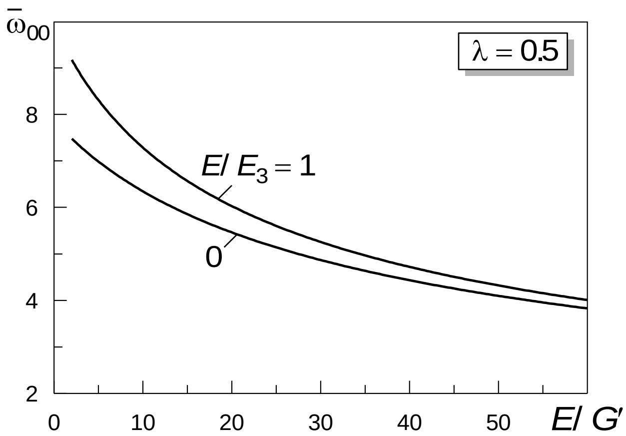


Рис. 2

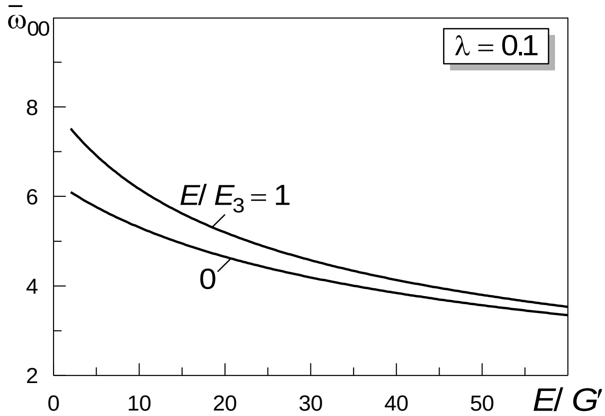


Рис. 3

Далі в розділі розглянуто видовжену композитну циліндричну панель товщини $2h$ з радіусом серединної поверхні R, кутом розхилу $2\varphi_0$ (рис. 4). Рівняння руху за лінійних коливань такого тонкостінного елемента є наслідком системи (9):

$$\frac{\partial N}{\partial y} + \frac{1}{R} Q = 2\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{1}{R} N = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - Q = \frac{2}{3} \rho h^3 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2}. \quad (15)$$

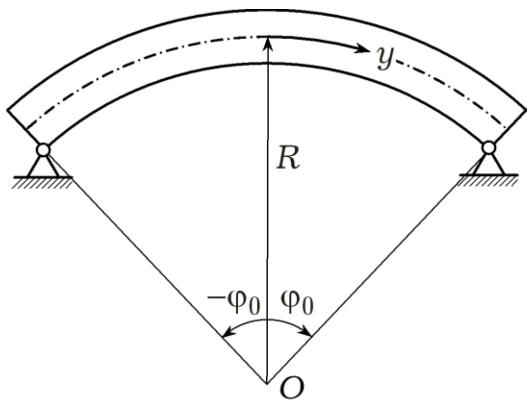


Рис. 4

Співвідношення пружності та деформаційні в даному випадку мають відповідно вигляд

$$N = \bar{B}\, \varepsilon_1^0, \quad M = \bar{D}\, \varepsilon_1^1, \quad Q = \Lambda\, \varepsilon_{13}^0, \quad (16)$$

$$\varepsilon_1^0 = \frac{\partial u}{\partial y} + w\ /\ R\ , \quad \varepsilon_1^1 = \frac{\partial \gamma}{\partial y}\ , \quad \varepsilon_{13}^0 = \gamma + \frac{\partial w}{\partial y} - u\ /\ R\ . \tag{17}$$

У рівностях (15) – (17) прийнято позначення:

$y = R\,\varphi$, φ – кутова координата на серединній поверхні панелі; N – розтягуюче (стискаюче) зусилля вздовж кутової координати; M – згинний момент; Q – перерізуюче зусилля; u – переміщення точок серединної поверхні вздовж тангенціальної координати y (рис. 1); γ – кут повороту нормального до серединної поверхні елемента перед деформуванням; w – переміщення точок серединної поверхні вздовж радіальної координати; $\bar{B} = 2Eh\,(1+\alpha)/\,(1-\nu^2)$ – узагальнена жорсткість панелі на розтяг; $\bar{D} = h^2\bar{B}/\,3$ – узагальнена згинна жорсткість панелі; $\Lambda = 2k'hG'$ – зсувна жорсткість панелі; $\alpha = (1+\nu)(\nu')^2/(\,1-\nu-2\nu\nu')\ (E\ /\ E')$; E, ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона в серединній та еквідистантних до неї поверхнях; E', ν' –ті ж величини в площинах, перпендикулярних до серединної поверхні; G – трансверсальний модуль зсуву; ρ – густина матеріалу панелі; $k' = 14/\,15$.

Граничні умови на видовжених торцях панелі $y = \pm b_0 = \pm R\varphi_0$ у випадку їх шарнірного закріплення на нижній лицевій поверхні (рис. 4) мають вигляд

$$N(\pm b_0) = 0\,, \quad M(\pm b_0) = 0\,, \quad w(\pm b_0) = 0\,. \tag{18}$$

Нехтуючи в третьому рівнянні (15) інерцією нормального елемента отримаємо систему розв'язувальних рівнянь задачі про малі коливання розглянутої панелі

$$\gamma^{IV} + 1/\,R^2\ \gamma^{II} = 3(2\ddot{w} - \ddot{\gamma} - \ddot{\gamma}^{II}\,/\,æ^2)/(c_1^2h^2)\,,$$

$$\gamma^{IV} - 1/\,R^2\ \gamma^{II} - 6(\gamma^{II} - \gamma^{IV}\,/\,æ^2 + w^{III} + 1/\,R\ w)/\,h^2 =$$

$$= 3(\ddot{\gamma}^{II}\,/\,æ^2 - \ddot{\gamma})/(c_1^2h^2)\,. \tag{19}$$

У рівняннях (19) $c_1 = \sqrt{\bar{B}/2\rho h}$ – швидкість поширення хвиль вздовж кільцевої координати, $æ^2 = \Lambda\,/\,\bar{D}$.

Для задоволення граничних умов (18) розв'язок системи (19) шукаємо у вигляді

$$w = \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n \cos\lambda_n y\right)e^{i\omega t}\,, \quad \gamma = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \sin\lambda_n y\right)e^{i\omega t}\,, \tag{20}$$

де $\lambda_n = k_n / R$, $k_n = \dfrac{2n+1}{2}\pi / \varphi_0$, ω – шукана частота коливань.

Підстановка (20) в (19) дає змогу отримати вираз

$$\overline{\omega}_n = \varepsilon a_n / \sqrt{(1-\nu^2)}\,, \tag{21}$$

де

$$a_n^2 = (1+k_n^2)\left[1+\alpha+\eta_n^2+\sqrt{(1+\alpha)^2+\eta_n^4+(1+\alpha)\,\eta_n^2\,\overline{k}_n}\right]/\,2\,,$$

$$\eta_n^2 = (k_n^2\,\varepsilon^2/\,3)/[\,1/(\,1+\alpha)+\beta_n^2\,/\,\delta^2],\quad \beta_n^2 = k_n^2\,[\,\varepsilon^2(E\,/\,G')/\,k']\,,$$

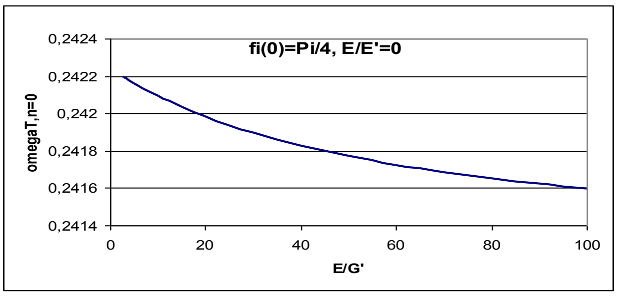
$$\delta^2 = 3(1-\nu^2)\,,\quad \overline{k}_n = 2(6/\,k_n^2 - 1/\,k_n^4 - 1)/(\,1+1/\,k_n^2)^2\,,\quad \varepsilon = h/\,R\,.$$

Числові розрахунки за формулою (21) виконані для циліндричної панелі з кутом розхилу $2\varphi_0 = \pi/\,2$. У таблиці 1 наведені значення безрозмірних власних частот $\overline{\omega}_n$ для $n = 0,1,2$ при $h/R = 0{,}1$ та $\nu = 0{,}375$. Верхній рядок таблиці відповідає значенням за відсутності трансверсального стиснення ($E\,/\,E' = 0$), а нижній – при однакових модулях Юнга в радіальному та кільцевому напрямках ($E\,/\,E' = 1$). Відмічається суттєве збільшення значень власних частот, а відповідно і підвищення жорсткості циліндричної панелі, при $E\,/\,E' = 1$ в порівнянні з випадком, коли $E\,/\,E' = 0$.

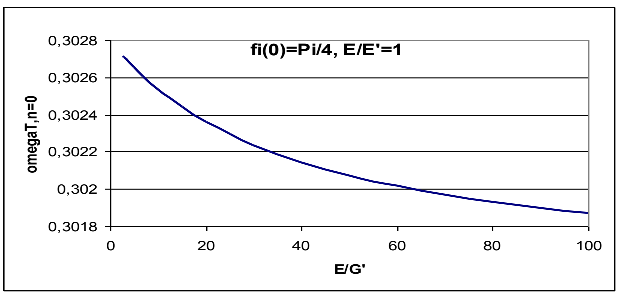
Таблиця 1

$E\,/\,E'$ \ $\overline{\omega}_n$	$\overline{\omega}_0$	$\overline{\omega}_1$	$\overline{\omega}_2$
0	**0.242196**	**0.659325**	**1.087975**
1	**0.302707**	**0.823562**	**1.358710**

На рис. 5 наведено залежність основної частоти $\overline{\omega}_0$ від параметра податливості до трансверсального зсуву $E/\,G'$, де а) відповідає значенню $E\,/\,E' = 0$, а б) – значенню $E\,/\,E' = 1$.



а)



б)

Рис. 5

Як видно з графіків, збільшення параметра E / G', а відповідно зменшення трансверсальної зсувної жорсткості розглянутої панелі, приводить до зниження значень її власних частот коливань.

У **четвертому розділі** розглянуті вільні геометрично нелінійні поперечні коливання податливої до трансверсальних деформацій зсуву та стиснення композитних пластин-смуги.

Розглядаємо пластину, один з розмірів якої значно перевищує інший розмір. Тоді функції, що описують її геометрично нелінійні коливання є залежними лише від однієї просторової координати $x = x_1$ в серединній площині. Для їх визначення отримано нелінійну систему диференціальних рівнянь, яка є наслідком співвідношень(1) – (7):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} - æ_1^2\left(\gamma + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + æ_2^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{22}$$

де $c_1 = \sqrt{\bar{B}/2\rho h}$ швидкості поширення поздовжніх хвиль у пластині; $æ_1^2 = \Lambda/\bar{D}$; $æ_2^2 = æ_1^2 h^2/3$; $\bar{B} = \dfrac{2Eh}{1-\nu^2}(1+\alpha)$; $\bar{D} = \dfrac{h^2}{3}\bar{B}$; $\Lambda = 2k'hG'$;

$\alpha = \dfrac{(1+\nu)(\nu')^2}{1-\nu-2\nu\nu'}\dfrac{E}{E'}$, $k' = 14/15$.

Тут E, ν – модуль Юнґа та коефіцієнт Пуассона в серединній та еквідистантних їй площинах; E', ν' – ті ж величини в площинах, перпендикулярних до серединної площини; G' – трансверсальний модуль зсуву.

Розмістимо початок координати x посередині між перпендикулярними до неї сторонами пластини, розташованими на віддалі $2a$ одна від одної. Тоді у разі жорсткого защемлення цих сторін крайові умови матимуть вигляд

$$u(\pm a, t) = 0; \qquad w(\pm a, t) = 0; \qquad \gamma(\pm a, t) = 0. \tag{23}$$

Для відшукання основної частоти вільних геометрично нелінійних поперечних коливань розглянутої пластини невідомі функції в (22) вибираємо так, щоб задовольнялись крайові умови (23)

$$w = W(t)\cos^2\lambda x; \qquad \gamma = Y(t)\sin 2\lambda x; \qquad u = U(t)\sin 4\lambda x, \quad \lambda = \pi/2a.$$

Для визначення безрозмірного прогину $\xi(t) = W(t)/2h$ в центрі пластини із системи (22) при нехтуванні інерцією нормального елемента отримано нелінійне інтегро-диференціальне рівняння

$$\ddot{\xi}(t) + \omega_0^2\xi(t) + \frac{\omega_0^2}{2}K\xi(t)\left\{\xi^2(t) - \left[\xi^2(0)\cos\omega_u t + \omega_u\int_0^t \xi^2(t)\sin\omega_u(t-\tau)d\tau\right]\right\} = 0, \tag{24}$$

де $\omega_0 = c_2\lambda^2 \big/ \sqrt{æ_1^2 + \lambda^2}$ – основна частота лінійних вільних поперечних коливань пластини, $\omega_u = 2\lambda c_1$ – основна частота лінійних поздовжніх вільних коливань.

Задавши коливний процес у вигляді $\xi = A\cos\omega t$, де A - безрозмірна амплітуда, ω – частота коливань, та провівши за запропонованою А.С. Вольміром схемою для випадку класичної нелінійної теорії інтегрування рівності (24) по повному періоду коливань $T = 2\pi/\omega$, отримаємо залежність

$$\omega^2 = \omega_0^2\left[1 + \frac{3}{4}KA^2\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\frac{\omega}{\pi}R\right)\right], \tag{25}$$

де

$$R = \frac{\pi}{\omega} + \frac{1}{1-4p^2}\frac{\pi}{2\omega} - \frac{1}{\omega_u}\frac{4p^2\left(1-2p^2\right)}{\left(1-4p^2\right)^2}\sin\frac{2\pi}{p}, \qquad p = \omega/\omega_u. \tag{26}$$

$$K = K_c(1+\beta), \; \beta = \frac{\pi^2}{12}(h/a)^2\frac{1}{k'}(E/G')\frac{1+\alpha}{1-\nu^2}, \; K_c = 3/4. \tag{27}$$

Можна показати, що для відомих реальних матеріалів при $h/a \leq 0{,}1$ для величини p^2 має місце оцінка

$$p^2 = O((h/a)^2).$$

Нехтування в (26) величиною p^2 дозволяє записати формулу

$$\omega^2 = \omega_0^2\,(1 + \frac{3}{4}KA),$$

яка виражає залежність між основною частотою ω геометрично нелінійних поперечних коливань жорстко защемленої по видовжених краях пластини-смуги та їх амплітудою A. Ця залежність аналогічна до отриманої А.С. Вольміром при застосуванні класичної теорії. Якщо у виразі для K зробимо граничний перехід по параметру податливості до трансверсального зсуву, то отримаємо

$$\lim_{E/G' \to 0} K\,(E/G') = K_c = 3/4$$

результат, котрий відповідає класичній теорії.

У літературі відомий аналогічний результат залежності між основною частотою та амплітудою вільних геометрично нелінійних коливань розглянутої пластини-смуги за шарнірного закріплення країв $x = \pm a$. В цьому випадку $K = K_c(1+\beta)$ при $K_c = 3$. В роботі показано, що при $(h/a)^2 << 1$ основна частота при жорсткому защемленні країв в 2.31 разів більше, ніж при шарнірному закріпленні.

Для безрозмірної амплітуди $\eta = U(t)/2h$ генерованих поздовжніх коливань отримано вираз

$$\eta(t) = \frac{\pi A^2}{16}\left(\frac{h}{a}\right)^2\left[1 + \cos\omega_u t + \frac{1}{1-4\left(\omega/\omega_u\right)}\left(\cos 2\omega t - \cos\omega_u t\right)\right].$$

Цей коливний процес складається з вимушених коливань з частотою 2ω, на які накладаються коливання з більш високою власною частотою лінійних коливань ω_u.

Зсувні коливання відбуваються синхронно з поперечними з амплітудою

$$Y(t)=\frac{3\pi}{K}\frac{h}{a}A\cos\omega t.$$

На рис. 6 – 8 в координатах $\mu=\mu_1$, A будуємо скелетні криві, які ілюструють залежності між безрозмірними частотами μ_1 і μ_2 та безрозмірною амплітудою A. Причому для використання однієї координатної сітки маємо

$$\mu_2=\eta\,\mu_1.$$

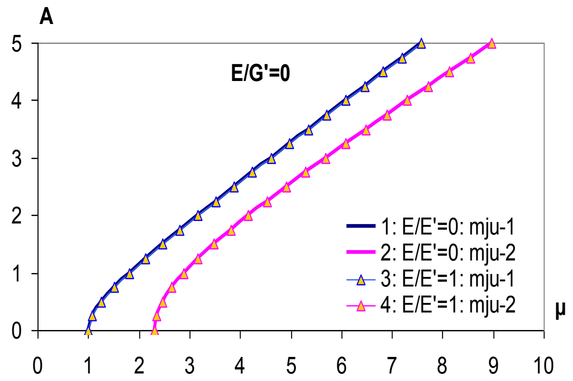


Рис. 1

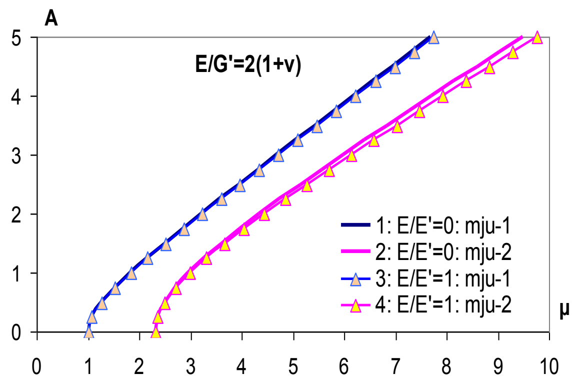
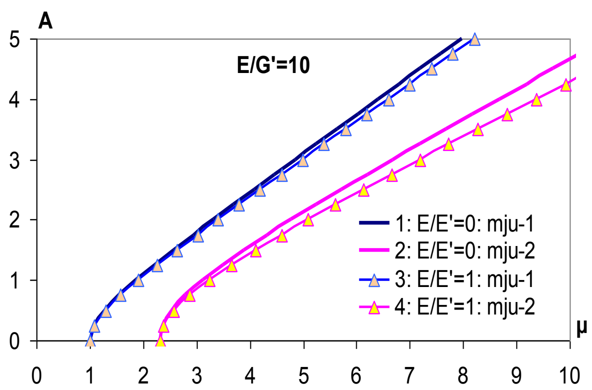
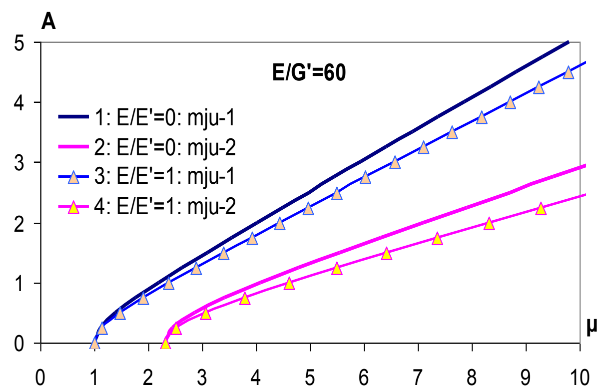


Рис. 2



а)



б)

Рис. 3

При значенні $h/a=0.1$, $\nu=\nu'=0.375$ по скелетних кривих, зображених на вказаних рисунках (товста лінія відповідає шарнірному закріпленню, а тонка лінія – жорсткому защемленню країв) спостерігається значний вплив типу закріплення країв і параметра податливості E/G' на кількісні значення μ_1 і μ_2 при $1\le A\le 5$ у порівнянні із класичними результатами при $E/G'=0$.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено наукове завдання – на основі варіанту уточненої теорії оболонок розроблено математичні моделі лінійних та геометрично нелінійних вільних коливань податливих до трансверсальних зсуву та стиснення ортотропних пластин та видовжених циліндричних панелей і отримано аналітичні вирази для спектрів частот їх вільних лінійних коливань. Проведено аналіз впливу параметра трансверсального зсуву та врахування податливості поперечному стисненню на значення власних частот. Отримано аналогічні до класичних залежності між амплітудою та основною частотою вільних геометрично нелінійних коливань композитної пластини-смуги та досліджено вплив на них умов закріплення видовжених країв.

При цьому отримані наступні результати:

1. На основі співвідношень варіанту уточненої теорії оболонок виведено систему диференціальних рівнянь в частинних похідних в переміщеннях, що описує вільні лінійні поперечні коливання прямокутних ортотропних пластин. Причому, податливість до трансверсального зсуву враховується явно, а до поперечного стиснення – неявно шляхом поправок до жорсткісних характеристик, що містять трансверсальні пружні сталі матеріалу.

2. Розроблено методику аналітичного визначення спектру власних частот шарнірно закріплених по контуру прямокутних ортотропних пластин. Показано, що зниження трансверсальної зсувної жорсткості приводить до зменшення, а врахування податливості до поперечного стиснення – до збільшення значень власних частот.

3. На основі запропонованого вище підходу до співвідношень уточненої теорії динамічного деформування циліндричних оболонок, яка враховує податливість матеріалу до трансверсального зсуву та неявно – до стиснення, отримано нову розв'язувальну систему диференціальних рівнянь, що описує вільні лінійні коливання видовжених композитних циліндричних панелей. У випадку шарнірного закріплення видовжених країв панелі на нижній лицевій поверхні отримано в замкненому вигляді вираз для спектру її власних частот. Це дозволило встановити, що врахування податливості до поперечного стиснення може привести до близько 25% – ого збільшення значень власних частот.

4. Виведено систему нелінійних диференціальних рівнянь, що описує процес геометрично нелінійних поперечних коливань композитних пластин-смуг, з якої для відшукання їх амплітуди отримано нове нелінійне інтегро-диференціальне рівняння. Застосування до цього рівняння методики А.С. Вольміра, запропонованої для випадку класичної теорії оболонок і пластин, дозволило отримати залежність між основною частотою та амплітудою поперечних коливань.

5. Встановлено, що врахування генерованих поздовжніх і зсувних хвильових процесів значно ускладнює зв'язок між частотою та амплітудою поперечних коливань. Однак, при певних границях зміни пружних характеристик матеріалу пластини та її параметра тонкостінності можна отримати залежність, яка є аналогічна до класичної. Для матеріалів зі значними поперечними деформаціями та поперечним стисненням характер скелетних кривих значно відрізняється від аналогічних для ізотропних матеріалів.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ ВІДОБРАЖЕНИЙ У ПУБЛІКАЦІЯХ:

1. Пакош В.С. Вплив граничних умов на амплітудно-частотні залежності при нелінійних коливаннях композитних пластин / В.С. Пакош, О.Ф. Лесик // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 94–98.
2. Marchuk M. Influence of Pliability to Transversal Deformations of Shear and Compression on Correlation Frequency from Amplitude for Nonlinear Oscillations of Composite Plates / M. Marchuk, V. Pakosh, O. Lesyk, I. Hurayewska // Vibrations in Physical Systems. – 2006. – Vol. XXII. – P. 251–256.
3. Пакош В.С. Поперечні коливання податливих до зсуву та стиску прямокутних композитних пластин / В.С. Пакош, О.Ф. Лесик, М.М. Хом’як // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2006. – Вип. 4. – С. 170–174.
4. Марчук М.В. Уточнені рівняння геометрично нелінійного деформування податливих до трансверсальних зсуву та стиснення композитних пластин / М.В. Марчук, В.С. Пакош, О.Ф. Лесик // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2007. – Вип. 5. – С. 134–143.
5. Лесик О.Ф. Власні коливання композитних видовжених циліндричних панелей / О.Ф. Лесик, М.В. Марчук, В.С. Пакош // Машинознавство. – 2009. – № 3 (141). – С. 37–39.
6. Пакош В. Власні поперечні нелінійні коливання ортотропних композитних пластин / В. Пакош, О. Лесик, І. Гураєвська // Сучасні проблеми механіки і математики: В 3-х т. – Львів, 2008. – Т. 2. – С. 166–168.
7. Марчук М. В. Нелинейные поперечные собственные колебания ортотропных композитных пластин / М. В. Марчук, В. С. Пакош, О. Ф. Лесык // Актуальные проблемы нелинейной механики оболочек. – Казань; Изд-во Казанск. гос. ун-та. 2008. – С. 96–97.
8. Лесик Оксана. Вільні коливання податливих до трансверсальних зсув та стиснення видовжених композитних циліндричних панелей / Оксана Лесик, Михайло Марчук, Віра Пакош, Федір Якімов // Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки. – Львів, 2009. – С. 146–149.
9. Марчук М. Амплітудно-частотні залежності за нелінійних коливань податливих трансверсальним зсуву та стисненню пластин / М. Марчук, В. Пакош, О. Лесик, Г. Крук // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів, 2006. – Т. II. – С. 132–135.
10. Марчук Михайло. Динамічне деформування прямокутних шаруватих пластин, податливих на зсув і стиснення / Михайло Марчук, Віра Пакош, Оксана Лесик // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: Львів, 2003. – С. 91–92.

11. Марчук М.В. Вплив податливості трансверсальним деформаціям зсуву та стиснення на амплітудно-частотну залежність при нелінійних коливаннях пластин / М.В. Марчук, І.Є. Гураєвська, О.Ф. Лесик, В.С. Пакош // Динаміка, міцність і надійність с/г машин. – Тернопіль: ТДТУ, 2004. – С. 174–180.

12. Марчук М. Нелінійна динаміка та власні поперечні коливання ортотропних композитних пластин / М. Марчук, В. Пакош, О. Лесик // Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Праці конференції. – Львів: КІНПАТРІ ЛТД. – 2008. – С. 121–123.

13. Лесик О. Власні коливання композитних видовжених циліндричних панелей / О. Лесик, М. Марчук, В. Пакош // Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: Матеріали доповідей. – Львів: КІНПАТРІ ЛТД. – 2009. – С. 47–48.

14. Марчук М. Нелінійні поперечні коливання композитних пластин / М. Марчук, В. Пакош, О. Лесик // Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: Тези доповідей. – Львів: КІНПАТРІ ЛТД. – 2007. – С. 69.

Анотація. Лесик О. Ф. Лінійні та геометрично нелінійні коливання податливих до трансверсальних зсуву та стиснення ортотропних пластин і циліндричних панелей. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, 2010.