Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний економічний університет

М.М.Касянчук   І.Р.Паздрій   І.З.Якименко

ФІЗИКА

Частина II

Електрика і магнетизм

Тернопіль 2017 р.

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я7
Фізика (частина II). Навчальний посібник /Авт.: Касянчук М.М., Паздрій І.Р., Якименко І.З. – Тернопіль: ФОП Шпак, 70 с.

Навчальний посібник написаний відповідно до навчальної програми курсу «Фізика» для студентів спеціальностей «Комп'ютерна інженерія», «Програмна інженерія», «Комп'ютерні науки», «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», «Кібербезпека».

Рецензенти:
Дідух Л.Д. – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри фізики Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя;
Теслюк В.М. – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформаційних систем і технологій Національного університету «Львівська політехніка»;
Мохун С.В. – кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри фізики та методики її викладання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка.

Рекомендовано Вченою Радою Тернопільського національного економічного університету, протокол №3 від 15 грудня 2017 року.

3 ЕЛЕКТРИКА І МАГНЕТИЗМ

3.1 Електростатика

3.1.1 Електричний заряд. Закон збереження електричного заряду.

Мислитель Фалес Мілетський за шість століть до нашої ери звернув увагу на спостереження ткачів за здатністю янтарних човників притягувати легкі тіла. Від грецького слова "електрон" – янтар придворним лікарем англійської королеви Єлизавети У. Гільбертом введений у 1600р., термін "електрика".

С. Грей у 1792р. поділив тіла на провідники і непровідники електрики, а пізніше показав, що однойменні електричні заряди відштовхуються, а різнойменні – притягуються.

При електризації тіл тертям одночасно електризуються обидва тіла, причому одне з них дістає позитивний заряд, а друге – негативний. Позитивний заряд виникає наприклад, на склі, натертому шкірою, а негативний – на янтарі натертому шкірою.

Позитивний заряд першого тіла завжди точно дорівнює негативному заряду другого тіла, якщо до електризації обидва тіла не були заряджені. Це положення відоме під назвою ***закону збереження електричного заряду***: електричні заряди не виникають та не зникають, вони можуть лише передаватись від одного тіла до іншого або переміщуватися всередині даного тіла. В ізольованій системі алгебраїчна сума електричних зарядів залишається незмінною.

З цього закону випливає, що в будь-якій електронейтральній речовині є заряди обох знаків до того ж в однакових кількостях. Внаслідок дотикання двох тіл при терті частина зарядів переходить від одного тіла до іншого. Рівність суми позитивних і негативних зарядів порушується і вони заряджаються різнойменно. Наелектризувати тіла можна не лише тертям, але й помістивши поблизу них електрично заряджене тіло (*електризація через вплив*). При електризації тіла в наслідок впливу в ньому порушується рівномірний розподіл зарядів. Заряди перерозподіляються так, що в одній частині тіла виникає надлишок позитивних зарядів, а в іншій негативних.

На основі дослідів було встановлено, що електричний заряд будь-якого тіла складається з цілого числа елементарних зарядів, що дорівнює $1{,}6\times10^{-19}$ *Кл.*

$$q = \pm n \cdot e, \quad \text{де} \quad n = 1, 2, 3...$$

Носієм елементарного заряду є електрон, масою $9{,}1\times10^{-31}$ *кг*. Найменша стабільна частинка, що має найменший електричний позитивний заряд – протон, маса $1{,}67\times10^{-27}$ *кг*.

Всі тіла поділяються на провідники і діелектрики. ***Провідником*** називається тіло, що містить вільні електричні заряди, які можуть рухатися по всьому об'єму. В металах провідність зумовлена лише рухом електронів. Якщо провідником є газ чи рідина, то в них рухаються як позитивні так і негативні частинки: позитивно та негативно заряджені іони й електрони.

Діелектриком є будь-яке середовище (газ, рідина або тверде тіло), в якому відсутні вільні електричні заряди. Зовнішнє електричне поле спричиняє в них поляризацію атомів, молекул або іонів, сумарне електричне поле яких є оберненим полем поляризації.

3.1.2 Закон Кулона

Ш. Кулон в 1785 р. з допомогою крутильних терезів встановив, що сила взаємодії F між двома невеликими зарядженими металевими кульками обернено пропорційна квадрату відстані між ними і залежить від величини їх зарядів q_1 та q_2:

$$F = k\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2}.$$

Закон Кулона справедливий лише для взаємодії точкових електричних зарядів. ***Точковим*** називається заряд, який зосереджений на тілі, лінійними розмірами можна знехтувати порівняно з відстанню до інших заряджених тіл, з якими він взаємодіє. Крім цього, закон Кулона описує силу взаємодії між нерухомими електричними зарядами, тобто цей закон електростатичний.

Закон Кулона твердить, що сила електричної взаємодії між двома точковими електричними зарядами прямо пропорційна до добутку величини цих зарядів, обернено пропорційна до квадрату відстані між ними і напрямлена вздовж прямої, що з'єднує ці заряди. Сила такої взаємодії називається кулонівською силою та відповідає відштовхуванню у випадку однойменних зарядів, та притягуванню у випадку різнойменних зарядів.

Закон Кулона можна записати у векторній формі. Якщо $\vec{r}_{12}$ – радіус-вектор, що з'єднує заряд q_1 із зарядом q_2 (рисунок 3.1) і $|\vec{r}_{12}| = r$, тоді

$$\vec{F}_{12} = -k\frac{q_1q_2}{r^3}\vec{r}_{12}, \quad \vec{F}_{21} = k\frac{q_1q_2}{r^3}\vec{r}_{12}.$$

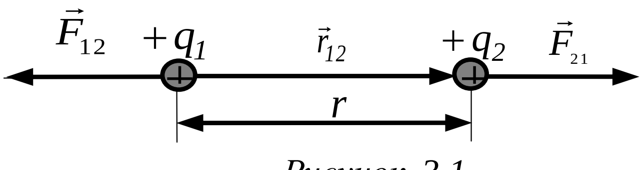


Рисунок 3.1

Кулон вивчав взаємодії між зарядами, що перебували в повітрі. Наступні експериментальні дослідження показали, що при інших однакових умовах сила електричної взаємодії між двома точковими зарядами залежить від властивостей середовища, в якому ці заряди перебувають. Вплив середовища на силу електростатичної взаємодії між зарядами в законі Кулона враховує коефіцієнт k, який також залежить від вибору одиниць вимірювання величин, які входять у формулу закону Кулона.

У системі СІ для зарядів у вакуумі коефіцієнт k у формулі закону Кулона записується

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Тоді закон Кулона запишеться наступним чином:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2}. \qquad (3.1)$$

Величина $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{Кл^2}{Н \cdot м^2}$ – електрична стала, (діелектрична проникність вакууму), а звідси $k = 9 \cdot 10^9\,\frac{Н \cdot м^2}{Кл^2}$.

3.1.3 Електростатичне поле

Простір навколо електричного заряду, характеризується певними фізичними властивостями. Так, на довільний заряд, внесений в цей простір, діють кулонівські сили. А якщо в просторі діють інші сили, то вважають, що існує силове поле, в даному випадку електричне.

Електричне поле – це специфічний вид матерії, який існує навколо електричних зарядів і за допомогою якого передається електрична взаємодія.

Якщо електричне поле створюється нерухомими електричними зарядами, то таке поле називається ***електростатичним***.

Для виявлення і експериментального дослідження електростатичного поля використовується ***пробний точковий заряд*** $q_{пр}$. Це одиничний позитивний заряд, який не бере участі у створенні поля і не спотворює досліджуване поле, тобто не спричинює перерозподілу зарядів, які утворюють поле. Якщо в поле, що створюється зарядом q помістити пробний заряд $q_{пр}$, то на нього діє сила $\vec{F}$, яка, згідно закону Кулона, відрізняється в різних точках поля та пропорційна до величини $q_{пр}$. Тому ця сила не може бути характеристикою самого поля. Але відношення $\frac{\vec{F}}{q_{пр}} = const$ залишається величиною постійною для будь-якої точки поля і тому може служити силовою характеристикою поля.

Векторну величину, що дорівнює відношенню сили, з якою поле діє на позитивний точковий заряд, поміщений в дану точку поля, до величини цього заряду називають ***напруженістю електричного поля***.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \qquad (3.2)$$

Напруженість електричного поля чисельно дорівнює силі, що діє на одиничний позитивний пробний заряд в даній точці поля.

Величина напруженості електростатичного поля точкового заряду у вакуумі дорівнює

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}. \qquad (3.3)$$

Множник 4π показує сферичну симетрію електростатичного поля точкового заряду, оскільки величина 4π числово дорівнює повному тілесному куту в стерадіанах.

Напрям вектора напруженості збігається з напрямом сили, що діє на позитивний заряд, поміщений в дану точку поля (рисунок 3.2).

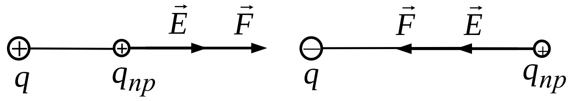


Рисунок 3.2

З формули 3.2 бачимо, що у системі СІ одиниця напруженості електричного поля *1 Н/Кл* – це напруженість такого поля, яке діє з силою *1 Н* на точковий заряд *1 Кл*.

Електростатичне поле однозначно визначене, якщо відомий вектор напруженості в кожній його точці. Це завдання можна розв’язати, аналогічно виражаючи залежність напруженості поля від координат у вигляді формул або графічно.

Для графічного зображення використовують силові лінії (лінії напруженості). ***Лінії напруженості*** – це криві, дотичні до яких у кожній точці збігаються з напрямом вектора напруженості поля (рисунок 3.3).

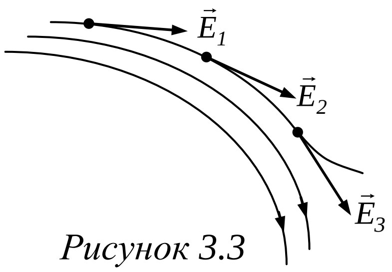


Рисунок 3.3

Умовно прийнято, що поле, створене точковим позитивним зарядом, зображають прямими, які радіально виходять з цього заряду (рисунок 3.4,б). Для зображення поля, створеного негативним зарядом, використовують прямі, які радіально входять у заряд (рисунок 3.4,а). Лінії напруженості електростатичного поля ніколи не перетинаються. Ці лінії проводять з такою густиною, щоб кількість ліній, які пронизують одиничну площу, перпендикулярну до вектора напруженості, числово дорівнювала величині напруженості електричного поля в місці розміщення площини.

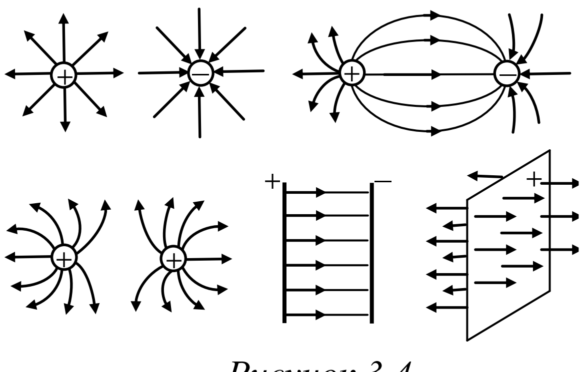


Рисунок 3.4

Електричне поле, у всіх точках якого величина і напрям вектора напруженості однакові, називається ***однорідним***. Воно утворюється, паралельними, нескінченно великими, зарядженими площинами. Однорідне поле зображують паралельними лініями напруженості однакової густини.

Якщо розглянути поле створене системою точкових нерухомих зарядів, то результуюча сила, яка діятиме на пробний заряд, дорівнюватиме векторній сумі сил, з якими окремі заряди діяли б на пробний. Врахувавши (3.2) можна сказати, що напруженість поля системи точкових зарядів дорівнює векторній сумі напруженостей полів, які створював би кожний із зарядів системи зокрема:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \,. \tag{3.4}$$

Цю властивість називають принципом незалежності дії електричних полів, або ***принципом суперпозиції полів***. Принцип суперпозиції дає можливість обчислювати напруженість поля будь-якої системи зарядів. Подумки поділяючи, наприклад, заряджене тіло скінченних розмірів на точкові заряди, знаходимо складові напруженості в певній точці, створені окремими елементами зарядженого тіла. Потім, згідно з принципом суперпозицій, визначаємо результуючу напруженість.

Нерухомі електричні заряди розміщуються в просторі або дискретно в окремих точках, або неперервно – вздовж якоїсь лінії, на поверхні якого-небудь тіла або в якомусь об'ємі. Якщо заряд неперервно розподілений вздовж лінії, то можна ввести ***лінійну густину електричних зарядів***

$$\tau = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl},$$

де Δq - заряд ділянки лінії завдовжки Δl.

Неперервний розподіл заряду по якійсь поверхні характеризується ***поверхневою густиною зарядів***

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS},$$

де Δq - заряд ділянки поверхні площею ΔS.

Якщо заряд Δq неперервно розподілений у певному об'ємі ΔV, то введемо ***об'ємну густину заряді***

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}.$$

<u>Приклад.</u> Дві кульки невеликого діаметру підвішені в одній точці на шовкових нитках так, що вони доторкаються одна до одної. Після того як кульки зарядили, вони відштовхнулись одна від одної і їх центри розійшлися на відстань *5см*. Визначити заряди цих кульок, якщо маса кожної з них *0,1 г.*, а довжина ниток *25 см*.

На відхилені кульки діють: сила тяжіння $\vec{P} = m\vec{g}$ та електростатична сила, яка за законом Кулона дорівнює $F = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$.

З рисунку видно, що $\dfrac{r/2}{l} = \sin\alpha$, а $\dfrac{F}{mg} = tg\alpha$.

При відносно малих кутах $\sin\alpha \approx tg\alpha$.

Звідси $F = \dfrac{mg \cdot r}{2l}$.

$$\frac{mg \cdot r}{2l} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}; \quad q^2 = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \cdot mg \cdot r^3}{2l};$$

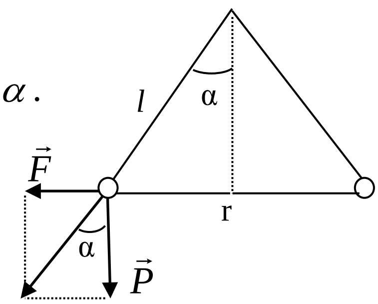
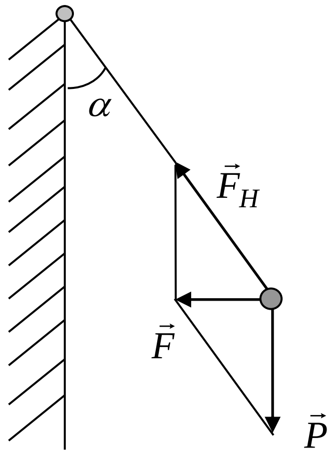


Рисунок до прикладу

$$q = r\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 \cdot mg \cdot r}{l}} \approx 5.2 \cdot 10^{-9}\ Кл.$$

<u>Приклад.</u> Велика вертикальна пластина рівномірно заряджена з поверхневою густиною заряду $5 \cdot 10^{-4}$*Кл/м*^{2}. На прикріпленій до пластини нитці підвішена кулька масою *1 г*, яка має заряд того самого знаку що і пластина. Знайти заряд кульки, якщо нитка утворює з вертикаллю кут *30*°.

Рівнодійна двох сил $\vec{F}_H$ і сили тяжіння $\vec{P}$ зрівноважується електростатичною силою відштовхування від пластини $\vec{F}$.



З рисунка видно $F = P \cdot tg\alpha = mg \cdot tg\alpha$.

Сила відштовхування чисельно дорівнює – $F = E \cdot q$.

$$E = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}; \quad F = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} q.$$

З рівності модулів сил отримуємо:

$$mg \cdot tg\alpha = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} q; \quad q = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 \cdot mg \cdot tg\alpha}{\sigma} \approx 2 \cdot 10^{-9}\, Кл.$$

Рисунок до прикладу

3.1.4 Теорема Остроградського - Гауса

Заданий розподіл у просторі і величину електричних зарядів використовують для вирішення основного завдання електростатики – знаходження величини і напряму вектора напруженості електричного поля в кожній його точці. Одним з методів розрахунку полів є використання теореми Остроградського-Ґаусса.

Нехай в однорідному електричному полі вибраний довільний елемент площини dS. Одиничний вектор $\vec{n}$ нормалі до площини складає з вектором $\vec{E}$ кут α (рисунок 3.5). ***Потоком вектора напруженості*** будемо називати величину

$$d\Phi_E = EdS\cos\alpha \quad \text{або} \quad d\Phi_E = E_n dS = \left(\vec{E}, d\vec{S}\right),$$

де E_n – проекція вектора $\vec{E}$ на напрямок вектора нормалі, а вектор $d\vec{S} = dS\vec{n}$.

Повний потік вектора напруженості через довільну поверхню S буде

$$\Phi_E = \int_S E_n dS = \int_S E\cos\alpha\, dS. \qquad (3.5)$$

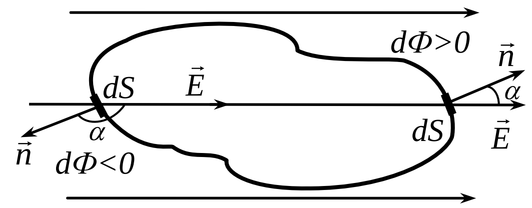


Рисунок 3.5

Знак потоку залежить від вибору напрямку нормалі. Для замкнених поверхонь нормаль, яка виходить назовні, приймається за додатну. Тоді там, де вектор $\vec{E}$ напрямлений назовні, E_n та Φ_E додатні, а коли $\vec{E}$ входить в середину поверхні, E_n та Φ_E – від'ємні.

Для замкнених поверхонь

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right). \qquad (3.6)$$

Припустимо спочатку, що електричне поле створюється у вакуумі одним точковим зарядом $+q$. Навколо нього вибрана довільна замкнена поверхня S (рисунок 3.6).

Лінії напруженості виходять з цієї поверхні. Вектор напруженості $\vec{E}$ та нормаль $\vec{n}$ до довільного елементу цієї поверхні dS, утворюють кут α. Якщо спроектувати елемент поверхні dS на поверхню радіуса r з центром в місці знаходження заряду q, то

$$dS_n = dS\cos\alpha.$$

Елементарний потік

$$d\Phi_E = E\cos\alpha\, dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dS_n =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} r^2 d\theta = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\theta\,,$$

а $d\theta$ - тілесний кут, під яким елементарну площадку dS видно з точкового заряду q.

Провівши інтегрування по куту, отримаємо

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \int_0^{4\pi} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\theta = \frac{q}{\varepsilon_0}\,.$$

Якщо всередині замкненої поверхні буде негативний заряд q, то кут між нормаллю і вектором $\vec{E}$ буде тупий (лінії напруженості входять всередину замкненої поверхні). Отже, $\cos\alpha < 0$. Тоді $d\Phi_E < 0$. Це означає, що потік через замкнену поверхню $\Phi_E < 0$.

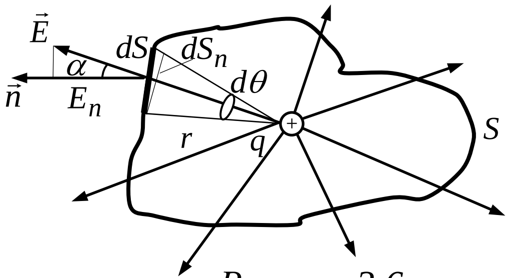


Рисунок 3.6

Нехай всередині замкненої поверхні S буде N позитивних і негативних зарядів (рисунок 3.7).

За принципом суперпозиції сумарна напруженість електростатичного $\vec{E}$ поля дорівнюватиме сумі напруженостей $\vec{E}_i$ полів створених кожним зарядом зокрема, тобто

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i\,.$$

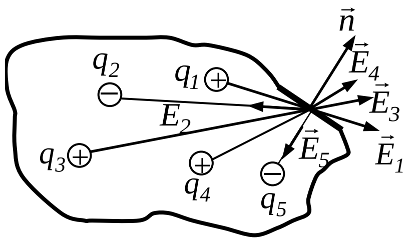


Рисунок 3.7

Тому проекція вектора $\vec{E}$ на напрям нормалі до елемента площини dS дорівнює алгебраїчній сумі проекцій всіх векторів $\vec{E}_i$ на цей напрям:

$$E_n = \sum_{i=1}^{N} E_{in}\,.$$

Потік вектора напруженості результуючого поля через довільну замкнену поверхню S, що охоплює заряди $q_1,\ q_2, \ldots q_n$, дорівнює

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S \left(\sum_{i=1}^{n} E_{in} \right) dS = \sum_{i=1}^{n} \oint_S E_{in} dS\,.$$

Оскільки

$$\oint_S E_{in} dS = \frac{q_i}{\varepsilon_0}\,,$$

то

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i\,. \qquad (3.7)$$

Отже, потік вектора напруженості електростатичного поля у вакуумі через довільну замкнену поверхню, яка охоплює електричні заряди, дорівнює алгебраїчній сумі цих зарядів, поділеній на електричну сталу ε_0.

Це твердження називається ***теоремою Остроградського-Ґаусса.***

3.1.5 Застосування теореми Остроградського-Ґаусса до розрахунку електричних полів

За допомогою теореми Остроградського-Ґаусса в окремих випадках набагато простіше, ніж за формулами для напруженості $\vec{E}$ точкового заряду та принципу суперпозиції, знаходити напруженість електричних полів.
Розглянемо декілька прикладів.

3.1.5.1 Напруженість електростатичного поля нескінченної однорідно зарядженої пластини

Нехай площина P заряджена рівномірно з поверхневою густиною заряду $+\sigma$ (рисунок 3.8). Для визначення напруженості поля у будь-якій точці A проведемо через цю точку і симетричну їй точку B дві площини, які паралельні до площини P. Побудуємо нескінченно вузький циліндр, основи якого dS проходять через точки A і B, а його твірна паралельна до ліній напруженості поля. З рисунка видно, що потік вектора напруженості через замкнену поверхню циліндра дорівнює сумі потоків через основи циліндра, тому що потік через бічну поверхню дорівнює нулю (лінії напруженості ковзають вздовж бічної поверхні). Оскільки напрямки векторів $\vec{E}_1$ та $\vec{E}_2$ збігаються з напрямками нормалей, то потоки через основи dS будуть більші від нуля і числово рівні, оскільки площини P_1 та P_2 знаходяться на однаковій віддалі $\left(\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}\right)$. Отже, потік вектора напруженості через замкнену поверхню циліндра дорівнює:

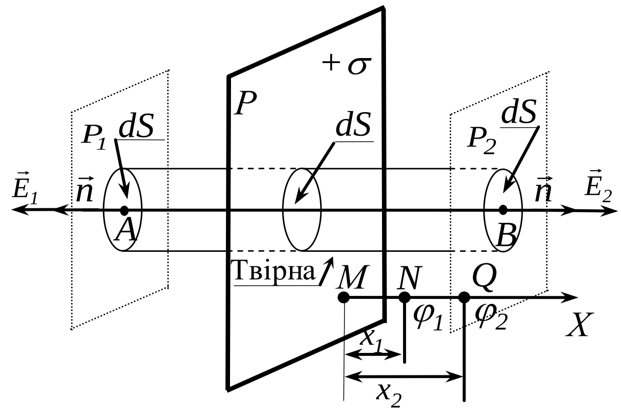


Рисунок 3.8

$$d\Phi_E = E_1 dS + E_2 dS = 2EdS.$$

Згідно з теоремою Остроградського-Гаусса

$$d\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dS.$$

Порівнюючи ці два вирази, отримуємо

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{3.8}$$

Оскільки напруженість поля E не залежить від довжини циліндра, то електричне поле рівномірно зарядженої площини однорідне.

3.1.5.2 Напруженість електростатичного поля між двома паралельними нескінченними різнойменно зарядженими площинами

Нехай маємо дві нескінченні, різнойменно заряджені площини, але з однаковими поверхневими густинами зарядів $+\sigma$ та $-\sigma$ (рисунок 3.9).

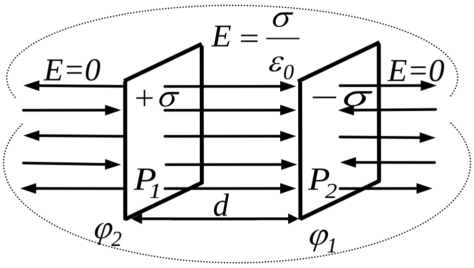


Рисунок 3.9

Зліва від площини P_1 та справа від площини P_2 напруженості поля взаємно знищуються, оскільки вони напрямлені в протилежні сторони.

Між площинами напруженості полів мають однакові напрямки і тому тут результуюча напруженість E дорівнює сумі напруженостей E_1 та E_2, створених обома площинами:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{3.9}$$

Електричне поле двох різнойменно заряджених площин локалізоване в об’ємі між цими площинами і є однорідним.

3.1.5.3 Напруженість електростатичного поля нескінченно довгого рівномірно зарядженого циліндра

Розглянемо циліндр радіуса R і довжиною L, на якому знаходиться заряд q, який рівномірно розподілений на його поверхні вздовж всієї довжини L (рисунок 3.10). Лінійна густина заряду $\tau = \frac{q}{L}$. Якщо відстань r від осі циліндра до точки M значно менша за довжину L зарядженого циліндра $(r << L)$, то циліндр з достатньою точністю можна вважати нескінченно довгим.

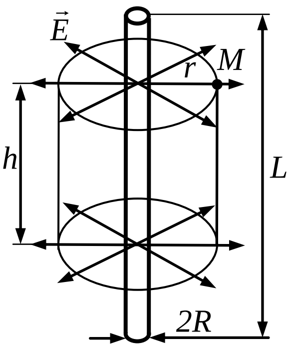


Рисунок 3.10

Виділимо довільну ділянку циліндра висотою h і охопимо її допоміжною поверхнею у вигляді циліндра радіуса r. Ця поверхня міститиме заряд q', який дорівнює:

$$q' = \tau\, h.$$

Оскільки лінії вектора напруженості $\vec{E}$ нормальні до поверхні зарядженого тіла в кожній його точці, то потік Φ_E пронизує лише бічну поверхню допоміжного циліндра.

Отже,

$$E = \frac{\Phi_E}{S} = \frac{q'}{\varepsilon_0 S} = \frac{q'}{\varepsilon_0 2\pi r h} = \frac{\tau h}{\varepsilon_0 2\pi r h}. \tag{3.10}$$

Звідси

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}. \tag{3.11}$$

3.1.5.4 Напруженість електростатичного поля зарядженої сфери

Якщо на поверхні сфери радіуса R рівномірно розподілений заряд q (рисунок 3.11), то поверхнева густина заряду дорівнює:

$$\sigma = \frac{q}{S} = \frac{q}{4\pi R^2}.$$

Розглянемо всередині сфери деяку точку M на відстані r від її центра. З

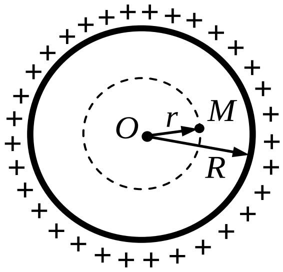


Рисунок 3.11

центра O проведемо допоміжну поверхню теж у вигляді сфери радіуса r. За теоремою Остроградського-Ґаусса потік ліній напруженості Φ_E крізь цю поверхню дорівнюватиме

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Оскільки всередині допоміжної поверхні радіуса $r < R$ немає зарядів, тобто $q = 0$ і $\Phi_E = 0$, то напруженість поля $E = \dfrac{\Phi_E}{4\pi r^2}$ також дорівнює нулю:

$$E_{r<R} = 0.$$

Всередині зарядженої сфери електричного поля немає.

Для точок, які лежать зовні біля самої поверхні сфери, можна вважати, що $r = R$. Тоді допоміжна поверхня – сфера радіуса r охоплює заряджену сферу. Заряд q міститься всередині допоміжної поверхні і створює повний потік вектора напруженості:

$$\Phi_E = ES = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi R^2\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi r^2\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Тоді

$$E = \frac{\Phi_E}{4\pi r^2} = \frac{4\pi r^2\sigma}{4\pi r^2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad (3.12)$$

Для точок, що знаходяться на значній віддалі від поверхні зарядженої сфери $(r > R)$, маємо

$$E = \frac{\Phi_E}{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{1}{4\pi r^2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}. \qquad (3.13)$$

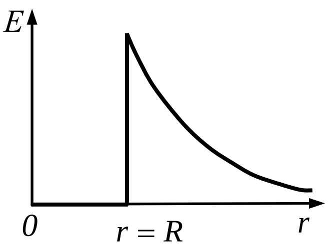


Рисунок 3.12

Графік залежності $E = f(r)$ напруженості електричного поля E зарядженої сфери від відстані r між її центром і точкою, в якій визначають напруженість, подано на рисунку 3.12.

3.1.5.5 Напруженість електростатичного поля зарядженої кулі

Якщо куля радіуса R (рисунок 3.13) має рівномірно розподілений заряд q, то об’ємна густина заряду

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

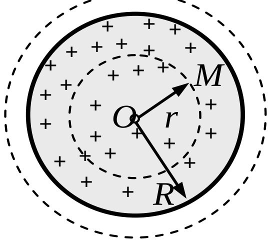


Рисунок 3.13

Розглянемо точку M всередині кулі $(r < R)$. Допоміжна сферична поверхня, проведена з центра кулі O радіуса r, містить заряд

$$q' = \rho V' = \rho\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Тільки цей заряд q' створює потік вектора напруженості Φ_E крізь поверхню допоміжної сфери площею $S = 4\pi r^2$.

Отже,

$$\Phi_E = ES = \frac{q'}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}.$$

Звідси

$$E = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3\rho}{\varepsilon_0 4\pi r^2} = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}. \qquad (3.14)$$

У точці, що лежить поза кулею на відстані r від її центра $(r > R)$, напруженість обчислюється за формулою напруженості поля точкового заряду $q = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$, що розміщений в центрі кулі.

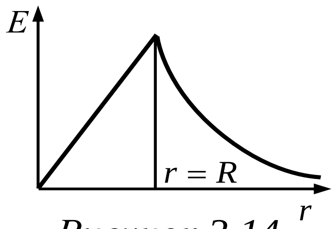


Рисунок 3.14

На рисунку 3.14 наведено графік залежності *E* від *r* для рівномірно зарядженої кулі.

3.1.6 Робота в електростатичному полі

Розглянемо однорідне електричне поле утворене двома зарядженими нескінченними паралельними площинами. Практично можна вважати однорідним електричне поле між скінченими паралельними площинами, якщо розміри їх значно більші, ніж відстань між ними. Нехай у цьому полі переміщується позитивний заряд *q*.

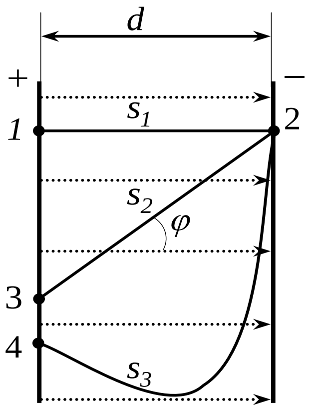


Рисунок 3.15

Проаналізуємо три випадки (рисунок 3.15).

Нехай поле переміщує цей заряд з точки *1* в точку *2*. Сили поля в цьому випадку виконуватимуть роботу

$$A_{12} = F\cdot S_1 = qE\cdot d$$

Якщо поле переміщує заряд з точки 3 в точку 2, то робота дорівнюватиме:

$$A_{32} = F\cdot S_2\cos\varphi = qE\cdot d$$

Тепер обчислимо роботу поля з переміщення електричного заряду з точки 4 в точку 2. Розіб'ємо криву S_3 на велику кількість ділянок, кожну з яких можна з великою точністю прийняти за пряму. Нехай таких ділянок буде *n*. Тоді

$$A = \sum_{i=1}^{n} Fs_i\cos\alpha_i = F\sum_{i=1}^{n} d_i = Fd = qE\cdot d \qquad (3.15)$$

Оскільки поле однорідне, то сила *F* залишається сталою для всіх ділянок.

З наведених прикладів можна зробити висновок, що робота електростатичного поля не залежить від шляху: вона для трьох випадків однакова, хоч траєкторія переміщення електричного заряду різна.

Проаналізуємо рух електричного заряду в електростатичному полі створеному нерухомим точковим зарядом у вакуумі.

Обчислимо роботу сил поля, створеного точковим зарядом *q*, яка виконується при переміщенні точкового заряду q_0 з точки 1, що знаходиться на відстані r_1, від джерела поля, в точку 2 – на відстань r_2 від нього (рисунок 3.16). Елемент роботи dA з переміщення заряду на нескінченно малому шляху dS дорівнюватиме:

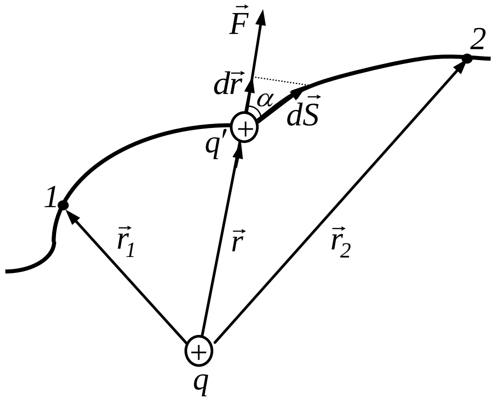


Рисунок 3.16

$$dA = F \cdot dS \cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}dS\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}qq_0\frac{dr}{r^2}.$$

Тоді вся робота при переміщенні заряду q_0 з точки1 в точку 2 буде дорівнювати:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{qq_0}{r_1} - \frac{qq_0}{r_2}\right).$$

Звідси видно, що ця робота не залежить від форми шляху,а визначається лише початковим *1* і кінцевим *2* положенням заряду. Отже, ***електростатичне поле*** точкового заряду ***є потенціальним***, а електростатичні сили – консервативними.

Оскільки робота консервативних сил виконується за рахунок зменшення потенціальної енергії, то

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r_2} = W_1 - W_2.$$

Звідси, потенціальна енергія заряду q_0 в полі заряду q у вакуумі дорівнює:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r} + C.$$

Потенціальна енергія заряду q_0 на нескінченно великій відстані від заряду q рівною нулю. При $r \to \infty$ $W=0$ і $C=0$. Тому потенціальна енергія заряду q_0, який перебуває у вакуумі на відстані r від точкового заряду q, дорівнює

$$W = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

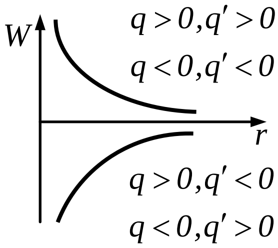


Рисунок 3.17

Якщо заряди однойменні, то потенціальна енергія їхньої взаємодії (відштовхування) додатна і зростає при зближенні цих зарядів (рисунок 3.17). У випадку взаємного притягання різнойменних зарядів потенціальна енергія їхньої взаємодії від'ємна і зменшується при наближенні одного із зарядів до іншого.

Потенціальна енергія W заряду q_0, що перебуває в полі точкових зарядів q_1, q_2, $\dots q_n$, дорівнює сумі його потенціальних енергій W у полях, що створюються кожним зарядом зокрема:

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i = q_0\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i},$$

де r_i - відстань від заряду q_i до заряду q_0.

Величина $\varphi = \dfrac{W}{q_0}$ є однакова для всіх зарядів в даній точці поля і називається потенціалом поля.

Потенціалом φ будь-якої точки електростатичного поля називають фізичну величину, яка чисельно дорівнює потенціальній енергії одиничного позитивного заряду, поміщеного в дану точку поля.

Потенціал поля, створеного одним точковим зарядом q у вакуумі, дорівнює:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \qquad (3.17)$$

Роботу, яку виконують електростатичні сили при переміщенні заряду q_0 від точки *1* до точки *2* електростатичного поля, можна записати так:

$$A = W_1 - W_2 = q_0(\varphi_1 - \varphi_2),$$

де φ_1 та φ_2 - потенціали електростатичного поля в точках *1* та *2*.

Якщо з точки з потенціалом φ_1 заряд q_0 віддаляється в нескінченність $(\varphi_2 = 0)$, то робота сили поля буде дорівнювати $A_\infty = q_0\varphi_1$.

Звідси $$\varphi_1 = \frac{A_\infty}{q_0}.$$

Потенціал даної точки електростатичного поля – це така фізична величина, яка чисельно дорівнює роботі, яку виконують зовнішні сили (проти сил електростатичного поля) при переміщенні одиничного позитивного заряду з нескінченності в дану точку поля.

Потенціал поля, яке створюється системою зарядів, дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів, створених кожним із зарядів зокрема:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}.$$

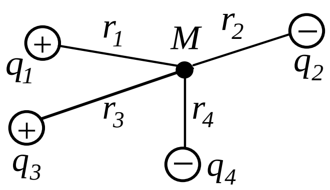


Рисунок 3.18

Наприклад, потенціал поля в точці *M* (рисунок 3.18), яке створене зарядами q_1, q_2, q_3, q_4 дорівнює

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \frac{q_4}{r_4}\right).$$

Одиниця потенціалу – ***вольт***. *1В* - це потенціал такої точки поля, в якій заряд величиною *1 Кл* володіє потенціальною енергією в *1 Дж*.

Часто користуються позасистемною одиницею роботи і енергії, яка називається ***електронвольтом*** (*еВ*). Один електронвольт дорівнює роботі, яка виконується при переміщенні заряду, що дорівнює заряду електрона, між двома точками поля з різницею потенціалів у 1 вольт. Заряд електрона дорівнює $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, тоді *1 еВ* $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *Кл* • *1 В* $= 1{,}6 \cdot 10^{-9}$ *Дж* $= 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ *ерг.*

Електричне поле можна описати або за допомогою векторної величини $\vec{E}$, або за допомогою скалярної величини φ. Очевидно, що між цими величинами повинен існувати зв'язок.

Нехай в електростатичному полі знаходиться заряд q. Робота при переміщенні цього заряду вздовж осі *OX* між двома нескінченно близькими точками дорівнює:

$$dA = Fdx = qE_x dx.$$

З іншого боку, елементарна робота при переміщенні заряду q в електростатичному полі виражається через потенціали цього поля:

$$dA = q(\varphi_1 - \varphi_2) = -q(\varphi_2 - \varphi_1) = -qd\varphi.$$

Тоді, прирівнявши елементарні роботи, отримуємо:

$$E_x dx = -d\varphi, \quad E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Знак „ – ” означає, що під дією сил електричного поля додатній заряд переміщується в бік зменшення потенціалу.

Аналогічні міркування можна поширити і на напрямки переміщень вздовж осей *OY* і *OZ:*

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Отже, ми знайшли E_x E_y та E_z – компоненти вектора напруженості *E*:

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}.$$

Це рівняння можна переписати так:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}.$$

У векторному аналізі ***градієнтом скалярної величини*** φ називається така векторна величина, для якої справедливий запис:

$$grad\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}.$$

Отже,

$$\vec{E} = -grad\varphi.$$

Знак „ – ” вказує на те, що вектор $\vec{E}$ напруженості поля напрямлений в бік найшвидшого зменшення потенціалу. Напруженість в якій-небудь точці електростатичного поля дорівнює градієнту потенціалу в цій точці, взятому з оберненим знаком.

Знаючи потенціал φ в кожній точці поля, за формулою $\vec{E} = -grad\varphi$ можемо обчислити напруженість в кожній точці поля.

Можна розв’язати і обернену задачу, тобто знаючи напруженість поля в кожній точці поля, можна знайти різницю потенціалів між двома довільними точками.

Робота при переміщені заряду з точки *1* в *2* дорівнює:

$$A_{12} = \int_1^2 \left(\vec{F}, d\vec{l}\right) = \int_1^2 q\vec{E}d\vec{l},$$

але, з іншого боку,

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Звідси

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \left(\vec{E}, d\vec{l}\right).$$

Інтеграл можна брати вздовж довільної лінії, яка з’єднує точки *1* та *2*, оскільки електростатичне поле є консервативне.

При обході по замкненому контуру заряд потрапляє в кінцеву точку поля, яка збігається з початковою і $\varphi_2 = \varphi_1$, отже

$$\oint_L \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = 0.$$

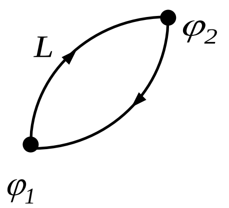


Рисунок 3.19

Цей інтеграл називають ***циркуляцією*** вектора напруженості вздовж замкненого контуру (рисунок 3.19). Циркуляція вектора напруженості електростатичного поля вздовж замкненого контуру дорівнює нулю.

Векторне поле $\vec{E}$ називається потенціальним, якщо циркуляція вектора $\vec{E}$ вздовж довільного замкненого контуру дорівнює нулю.

Геометричне місце точок з однаковим потенціалом називається ***еквіпотенціальною поверхнею.*** Для еквіпотенціальних поверхонь:

$$\varphi(x,y,z)=const.$$

При переміщенні по еквіпотенціальній поверхні на відрізок dS потенціал не змінюється, а, отже, і робота

$$A_{12}=q(\varphi_1-\varphi_2)=\int_1^2 q(\vec{E},d\vec{S})=q\int_1^2 EdS\cos\alpha=0,$$

де α кут між векторами $\vec{E}$ та $d\vec{S}$.

Звідси

$$E\cdot dS\cos\alpha=0.$$

Оскільки $E\neq 0$; $dl\neq 0$, то $\cos\alpha=0$. Кут між $\vec{E}$ та $d\vec{S}$ дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

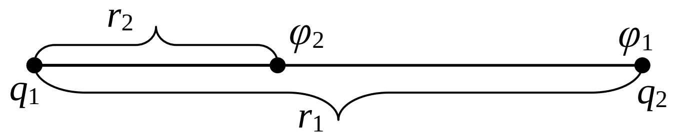
Вектор $\vec{E}$ напруженості електричного поля в кожній точці напрямлений перпендикулярно до еквіпотенціальної поверхні.

Еквіпотенціальні поверхні точкового заряду – це сферичні оболонки навколо нього.

<u>Приклад.</u> Два заряди *4 нКл* і *6 нКл*, знаходяться на відстані *80 см* один від одного. Яку роботу треба виконати, щоб зблизити їх до відстані *20 см*? Навколишнім середовищем є повітря.

$q_1=4$ *нКл*
$q_2=6$ *нКл*
$r_1=80$ *см*
$r_2=20$ *см*
$\varepsilon_0=8,854\cdot10^{-12}$ *Ф/м*
$\varepsilon=1$

$A-?$



Припускаємо, що заряд q_1 нерухомий, а заряд q_2 переміщується.

Тоді $A=q_2(\varphi_2-\varphi_1)$,

де φ_1 – потенціал точки, де був заряд q_2, φ_2 – потенціал тієї точки, в яку перемістили заряд. Але $\varphi_1=\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1}$; $\varphi_2=\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2}$.

Тоді $A=q_2\left(\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2}-\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1}\right)=\dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\dfrac{1}{r_2}-\dfrac{1}{r_1}\right)=-8,09\cdot10^{-9}$ *(Дж).*

Знак мінус показує, що робота виконана зовнішніми силами проти сил електростатичного поля, в результаті чого потенціальна енергія його збільшилась.

3.1.7 Електроємність відокремленого провідника. Конденсатори

Відокремленим називається провідник, який знаходиться настільки далеко від інших тіл, що впливом їх електричних полів можна знехтувати.

Якщо надати відокремленому провіднику, який знаходиться в однорідному, ізотропному середовищі з відносною діелектричною проникністю ε деякий заряд q, то цей заряд розподілиться на поверхні провідника з різною поверхневою густиною σ. Характер розподілу зарядів залежить лише від форми провідника. Кожна нова порція зарядів, які надають провіднику, розподіляються на його поверхні подібно до попередньої. Тому поверхнева густина зарядів σ в кожній точці поверхні провідника пропорційна його заряду q:

$$\sigma = k\,q\,,$$

де $k = f(x,y,z)$ - функція координат точки, що залежить від форми і розмірів провідника.

Використовуючи принцип суперпозиції електростатичних полів, знайдемо потенціал зарядженого відокремленого провідника. Для цього поділимо поверхню S провідника на нескінченно малі елементи dS, які мають точковий заряд σdS. Інтегруючи по всій замкнутій поверхні S провідника вираз для потенціалу $d\varphi$ точкового заряду, отримуємо

$$\varphi = \oint_S \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\oint_S \frac{kdS}{r}\,.$$

де r – відстань від малого елемента dS провідника до якої-небудь фіксованої точки на поверхні провідника, в якій визначається потенціал φ. Вибір цієї точки довільний, оскільки поверхня провідника еквіпотенціальна. Інтеграл залежить лише від форми і розмірів провідника і тому потенціал φ відокремленого провідника прямо пропорційний його заряду q, тобто

$$\varphi = \frac{q}{C}, \tag{3.18}$$

де $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{1}{\oint_S \frac{kdS}{r}}$ - електрична ємність.

Електроємність відокремленого провідника чисельно дорівнює електричному заряду, який треба надати цьому провіднику, щоб потенціал змінився на одиницю.

Одиниця електричної ємності – фарада:

1 фарада – це ємність такого провідника, потенціал якого змінюється на *1 В* при наданні йому заряду в *1 Кл*.

Оскільки потенціал відокремленої кулі радіусом R, яка має заряд q дорівнює

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R},$$

то ємність кулі

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R. \tag{3.19}$$

1 фарада – це ємність провідника у формі кулі, радіус якої

$$R = \frac{C}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\cdot 10^6\,км\,; \quad \frac{R}{R_{землі}} \approx 1406\,.$$

Якщо порахувати електроємність Землі, вважаючи її провідною кулею радіуса 6400 км, то вона дорівнюватиме *711 мкФ*.

На практиці використовують і інші одиниці електроємності:

$1Ф = 9\cdot 10^{11}$ см; 1 *мкФ* = 10^{-6} *Ф*; 1 *пФ* = 10^{-12} *Ф*.

На практиці необхідні пристрої, які мають здатність при малих розмірах і невеликих відносно навколишніх тіл потенціалах нагромаджувати значні за величиною заряди. Ці пристрої – ***конденсатори***.

Конденсатор складається з двох провідників, які називають обкладками, розділених тонким шаром діелектрика. Щоби на ємність конденсатора не впливали навколишні тіла, провідникам надають таку форму, щоб поле, яке створюється зарядами, було зосереджено у вузькому проміжку між обкладками конденсатора.

Оскільки поле зосереджене всередині конденсатора, то лінії напруженості починаються на одній обкладці і закінчуються на іншій і тому вільні заряди, що виникають на різних обкладках, є однаковими за модулем різнойменними зарядами.

Ємність конденсатора – фізична величина, що чисельно дорівнює відношенню величини заряду q, нагромадженого у конденсаторі, до різниці потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$ між його обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}. \qquad (3.20)$$

Залежно від форми обкладок конденсатори поділяються на плоскі, циліндричні і сферичні.

3.1.7.1 Плоский конденсатор

Якщо обкладки конденсатора мають форму паралельних між собою пластин, то його називають плоским (рисунок 3.20). Геометричні розміри пластин достатньо великі порівняно з відстанню між ними *d*, тому електричне поле між пластинами можна вважати еквівалентним полю між двома нескінченними площинами, які заряджені різнойменно. Крім того, відстань *d* повинна бути настільки малою, щоб порушення однорідності поля поблизу його країв можна було не брати до уваги.

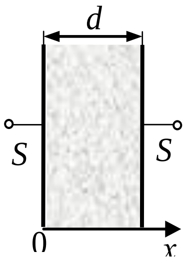


Рисунок 3.20

Напруженість електричного поля і різниця потенціалів між обкладками конденсатора в цьому випадку дорівнюють (3.9):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

Знайдемо різницю потенціалів між площинами:

$$d\varphi = -Edx.$$

Проінтегрувавши це рівняння по *x* від *x=0* до *x=d*, отримаємо:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma d}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S} d,$$

де ε – відносна діелектрична проникність середовища, що заповнює простір між пластинами, σ – поверхнева густина заряду обкладок конденсатора, *S* – площа пластин конденсатора.

Отже, ємність плоского конденсатора:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}. \qquad (3.21)$$

3.1.7.2 **Циліндричний конденсатор.**

Циліндричний конденсатор утворюють дві металеві трубки різних

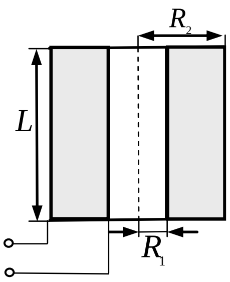


Рисунок 3.21

радіусів, вставлені одна в одну коаксіально, тобто так, що їх осі збігаються, і розділені шаром діелектрика (рисунок 3.21). Поза конденсатором поля, створені внутрішньою і зовнішньою обкладками, взаємно знищуються. Результуюче електричне поле між обкладками циліндричного конденсатора створює лише заряд внутрішньої циліндричної поверхні радіусом R_1. Заряд зовнішньої циліндричної поверхні електричного поля всередині конденсатора не створює (як відомо, всередині провідника електричне поле від заряду на цьому провіднику дорівнює нулю).

Якщо довжина L обкладок циліндричного конденсатора набагато більша, ніж відстань між ними (R_2-R_1), то розсіюванням поля поблизу країв обкладок можна знехтувати. Тоді електричне поле між коаксіальними циліндричними обкладками можна обчислювати за формулою напруженості електричного поля однорідно зарядженої циліндричної поверхні (3.11):

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Різниця потенціалів між обкладками циліндричного конденсатора дорівнюватиме:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\frac{R_2}{R_1} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon L}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

З визначення електричної ємності конденсатора (3.20) знаходимо ємність циліндричного конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon L}{\ln\frac{R_2}{R_1}}. \quad (3.22)$$

Якщо шар діелектрика $d = R_2 - R_1$ достатньо тонкий, то

$$\ln\frac{R_2}{R_1} = \ln\frac{R_1 + d}{R_1} = \ln\left(1 + \frac{d}{R_1}\right) \approx \frac{d}{R_1}$$

і

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 L R_1}{d}.$$

Але $2\pi R_1 L = S$ площа обкладки циліндричного конденсатора. У результаті

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}.$$

Коли обкладки циліндричного конденсатора розділені дуже тонким шаром діелектрика, його електроємність з достатньою точністю можна обчислити за формою плоского конденсатора.

3.1.7.3 Сферичний конденсатор

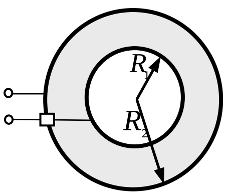


Рисунок 3.22

Обкладки такого конденсатора – це дві концентричні провідні сфери з радіусами R_1 і R_2, розділені тонким шаром діелектрика завтовшки d (рисунок 3.22) і $d = R_1 - R_2$. Поля поза конденсатором, створені внутрішньою та зовнішньою обкладками, взаємно знищуються. Поле між обкладками створюється зарядом q

кулі радіусом R_1, а заряд $-q$ зовнішньої кулі всередині цієї кулі не створює електричного поля. Різниця потенціалів між обкладками конденсатора дорівнює

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

.

Тоді електроємність сферичного конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \qquad (3.23)$$

Якщо товщина шару діелектрика *d* мала, то можна вважати $R_2 \approx R_1$. Тоді

$$C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1^2}{d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 4\pi r_1^2}{d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

де $S = 4\pi R_1^2$ - площа обкладки конденсатора.

Коли сферичний конденсатор має дуже тонкий шар діелектрика, його електроємність можна обчислювати за формулою ємності плоского конденсатора.

3.1.8 Паралельне та послідовне з'єднання конденсаторів.

На практиці доводиться з'єднувати конденсатори в батареї. Щоб отримати велику електроємність, кілька конденсаторів з'єднують в батарею так, щоб всі позитивно заряджені обкладки мали один спільний електрод, а заряджені негативно – інший (рисунок 3.23). Таке з'єднання називається ***паралельним***. При цьому кілька конденсаторів немовби замінюють одним, у якого площа обкладок дорівнює сумі площ обкладок складових конденсаторів.

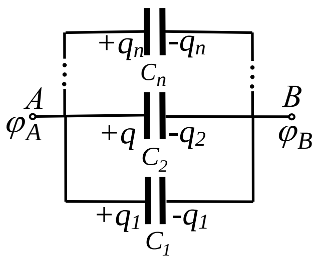


Рисунок 3.23

Різниця потенціалів між обкладками всіх конденсаторів C_1, C_2,…, C_n, незалежно від ємності, однакова і дорівнює різниці потенціалів $\varphi_A - \varphi_B$. При цьому на кожному з них містяться заряди:

$$q_1 = C_1(\varphi_A - \varphi_B),\ q_2 = C_2(\varphi_A - \varphi_B),\ \ldots,\ q_n = C_n(\varphi_A - \varphi_B).$$

Заряд всієї батареї розподіляється між обкладками конденсатора так, що

$$q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n,$$

або

$$q = (C_1 + C_2 + \ldots + C_n)(\varphi_A - \varphi_B).$$

З іншої сторони, заряд *q* батареї можна виразити через її електроємність $C_{пар}$ та різницю потенціалів, а саме

$$q = C_{пар}(\varphi_A - \varphi_B).$$

Прирівнюючи два вирази для заряду *q*, отримуємо

$$C_{пар} = C_1 + C_2 + \ldots + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i. \qquad (3.24)$$

Якщо батарея складається з n однакових паралельно з'єднаних конденсаторів ємністю C кожен, то її електроємність

$$C_{пар} = n \cdot C \,.$$

При ***послідовному з'єднанні*** конденсаторів негативно заряджену обкладку першого конденсатора з'єднують з позитивно зарядженою обкладкою другого і т.д. (рисунок 3.24).

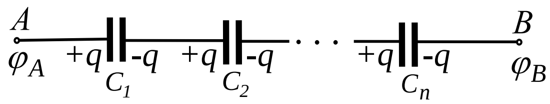


Рисунок 3.24

Якщо на затискачах батареї створити різницю потенціалів $\varphi_A - \varphi_B$, то до такої різниці потенціалів зарядяться тільки крайні обкладки першого і останнього конденсатора, причому

$$\varphi_A - \varphi_B = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + \ldots + (\varphi_{n-1} - \varphi_n).$$

Провідник, що з'єднує негативно заряджену обкладку першого та позитивно заряджену обкладку другого конденсатора, можна розглядати разом з обкладками як одне провідне тіло. Під дією створеного поля вільні заряди цього тіла перерозподіляються так, що на одній обкладці з'являється негативний заряд $-q$, а на інший – позитивний $+q$(внаслідок явища електростатичної індукції). Тому можна зробити висновок, що заряди на всіх послідовно з'єднаних конденсаторах, незалежно від їх ємності, однакові і дорівнюють заряду всієї батареї, тобто

$$q = q_1 = q_2 = \ldots = q_n \,.$$

Ємність батареї послідовно з'єднаних конденсаторів

$$C_{пос} = \frac{q}{\varphi_A - \varphi_B}\,,$$

звідки

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{q}{C_{пос}}\,.$$

Для першого конденсатора $\varphi_1 - \varphi_2 = \dfrac{q}{C_1}$, для другого $\varphi_2 - \varphi_3 = \dfrac{q}{C_2}$ і т.д. Тоді

$$\frac{q}{C_{пос}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \ldots + \frac{q}{C_n}\,.$$

Після скорочення на q отримуємо формулу для обчислення електроємності батареї послідовно з'єднаних конденсаторів:

$$\frac{1}{C_{пос}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}\,. \qquad (3.25)$$

Якщо послідовно з'єднано n однакових конденсаторів з ємністю C кожен, то

$$C_{пос} = \frac{C}{n}\,.$$

3.1.9 Енергія електростатичного поля. Густина енергії

Щоб зарядити будь-який провідник, треба здійснити певну роботу проти кулонівських сил відштовхування між однойменними електричними зарядами. Ця робота йде на збільшення електричної енергії зарядженого провідника.

Нехай ми маємо заряджений провідник, електроємність, заряд і потенціал якого відповідно $C,\ q,\ \varphi$. Для збільшення заряду провідника на dq потрібно виконати роботу, що виконується проти сил електростатичного поля при перенесенні заряду dq із нескінченності на провідник,

$$dA = \varphi dq .$$

Щоб зарядити провідник від нульового заряду до q, треба виконати роботу

$$A = \int_0^q \varphi dq = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2} . \tag{3.26}$$

Вираз $\dfrac{C\varphi^2}{2}$ називають ***власною енергією*** зарядженого тіла. Тобто, ***енергія зарядженого провідника*** чисельно дорівнює тій роботі, яку треба виконати, щоб зарядити цей провідник:

$$W_E = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C} . \tag{3.27}$$

Із зарядом провідника пов’язане електростатичне поле. Тому це співвідношення виражає енергію електростатичного поля.

Визначимо енергію електричного поля плоского конденсатора. Під час зарядження конденсатора витрачається робота із перенесення електричних зарядів з однієї обкладки на іншу. Енергію зарядженого конденсатора визначають за формулою:

$$W_E = \frac{C(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2} = \frac{q(\varphi_1 - \varphi_2)}{2} = \frac{q^2}{2C} ,$$

де $\varphi_1 - \varphi_2$ – різниця потенціалів між обкладками конденсатора.

Енергію зарядженого конденсатора можна визначити через величини, які характеризують електричне поле в проміжку між обкладками плоского конденсатора. Для цього у формулу $W_E = \dfrac{C(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2}$ підставимо значення для C і $\varphi_1 - \varphi_2$:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} ,\ \Delta\varphi = Ed .$$

Тоді

$$W_E = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 S E^2 d = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V , \tag{3.28}$$

де $V=Sd$ – об’єм простору між обкладками конденсатора.

Отже, енергія конденсатора виражається через величину, яка характеризує електростатичне поле – напруженість поля $\vec{E}$.

Вважається, що енергія, подібно до речовини, розподілена у просторі з ***об’ємною густиною***. Неважко визначити об’ємну густину енергії однорідного електричного поля:

$$\omega_E = \frac{W_E}{V} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}. \qquad (3.29)$$

Для неоднорідних електричних полів формула $W_e = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 V$ незастосовна, бо $E \neq const$, а вираз для ω_E визначає об'ємну густину енергії в кожній точці будь-якого електричного поля.

У випадку неоднорідного електричного поля енергія dW_E нескінченно малого об'єму dV поля дорівнює

$$dW_E == \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV.$$

Інтегруючи по всьому об'єму поля, знаходимо повну енергію W_E електростатичного поля:

$$W_E = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 \int_V E^2 dV. \qquad (3.30)$$

Приклад. Конденсатор ємністю 60 мкФ підключено до джерела напруги 1000 В. Не від'єднуючи його від джерела, відстань між пластинами конденсатора збільшили вдвічі. Яку при цьому було виконано роботу?

C=60·10^{-6} Ф
U=10^3 В
d_2=d_1

A - ?

Робота визначається за зміною енергії електричного поля конденсатора, пов'язаної із зміною ємності конденсатора за незмінної прикладеної напруги.

$$A = W_2 - W_1 = \frac{U^2}{2}(C_2 - C_1).$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d_1};\; C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d_2};\; \frac{C_1}{C_2} = \frac{d_2}{d_1},$$

Звідси $C_2 = \dfrac{C_1}{2}$.

Тоді

$$A = \frac{U^2}{2}\left(\frac{C_1}{2} - C_1\right) = \left|\frac{C_1 U^2}{4}\right|;\; A = \frac{C_1 U^2}{4}.$$

$$A = \frac{60 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6}{4} = 15 \,(Дж).$$

3.2 Постійний електричний струм. Закони постійного струму

Якщо в провіднику створити постійне електричне поле, то носії зарядів почнуть рухатись упорядковано: носії позитивних зарядів у напрямі поля, негативні – у протилежний бік.

Упорядкований рух зарядів називають ***електричним струмом***. Розрізняють ***струм провідності*** і ***конвекційний струм***. Струм провідності зумовлюється напрямленим переміщенням заряджених частинок (електронів, іонів) всередині нерухомого провідника (твердого, рідкого або газоподібного) при наявності в ньому електричного поля. Проте впорядкований рух електричних зарядів можна здійснити й іншим способом, а саме:

переміщенням у просторі зарядженого макроскопічного тіла (провідника або діелектрика). Такий струм називається *конвекційним.*

Електричний струм характеризують ***силою струму*** – скалярною величиною, що дорівнює кількості заряду, яка проходить через поперечний переріз провідника за одиницю часу:

$$I = \frac{dq}{dt},$$

де dq – електричний заряд, що проходить через поперечний переріз провідника за нескінченно малий проміжок часу dt.

Якщо сила струму та його напрям з часом не змінюються, то струм називається ***постійним.*** Для постійного струму

$$dq = Idt, \quad q = I\int_0^t dt\,, I = \frac{q}{t}\,.$$

Одиниця сили струму в СІ — ***ампер*** *(А)* — визначається на основі електромагнітної взаємодії двох паралельних прямолінійних провідників, по яких проходить постійний струм.

Для характеристики розподілу струму по поперечному перетину провідника введена ***густина струму*** $\vec{j}$ – векторна величина, яка напрямлена вздовж протікання струму і чисельно дорівнює силі струму, що проходить через одиницю площі поперечного перерізу провідника перпендикулярного до напряму струму. Розділивши силу струму dI , що тече через цю площину, на $dS_\perp$, отримаємо модуль густини струму:

$$j = \frac{I}{S} = \frac{dI}{dS_\perp}\ .$$

За напрям протікання струму прийнято напрям руху позитивних зарядів.

Якщо вектор густини струму відомий, то можна обчислити силу струму, що протікає через будь-яку уявну поверхню S . Для цього потрібно розбити S на елементарні площини $d\vec{S}$. З попереднього співвідношення струм dI через площадку $dS_\perp$ дорівнює

$$dI = jdS_\perp = jdS\cos\varphi = \vec{j}d\vec{S}\ ,$$

де φ – кут між перпендикуляром до площини $dS_\perp$ та напрямком вектора $\vec{j}$. Просумувавши струми через всі елементарні площини, отримаємо силу струму, що тече через поверхню S :

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Отже, сила струму дорівнює потоку вектора густини струму через задану поверхню.

Для виникнення та існування струму провідності необхідні такі умови:

1) наявність в даному середовищі електричних зарядів, які б мали можливість у ньому рухатись. Такими зарядами у випадку металевих провідників є вільні електрони, в напівпровідниках — електрони і «дірки», в електролітах — позитивні і негативні іони, в газах — переважно позитивні іони і електрони;

2) наявність у даному середовищі електричного поля, яке виконувало б роботу з переміщення зарядів, тобто повинна мати місце різниця потенціалів

між двома точками провідника. Для того щоб струм був тривалим, енергію електричного поля потрібно поповнювати, тобто підтримувати різницю потенціалів на кінцях провідника. Для цього до кінців провідника приєднують – спеціальний пристрій — джерело струму. Щоб стум був постійним, треба, щоб в кожній частині провідника заряди не накопичувались і не зникали. Тобто, для існування неперервного електричного струму треба створити замкнене електричне коло.

Електричним колом називається сукупність джерел струму, споживачів електричної енергії, вимірювальних і регулювальних пристроїв, вимикачів та інших елементів, з’єднаних провідниками. Найпростіше електричне коло складається з провідника, кінці якого під’єднано до джерела струму(рисунок 3.25).

В такому електричному колі струм проходитиме по зовнішній його частині — провіднику і внутрішній — джерелу струму. Джерело постійного струму має два полюси: позитивний і негативний. При розімкненому зовнішньому колі на негативному полюсі джерела струму буде надлишок електронів, на позитивному — їх не вистачатиме. Зрозуміло, що таке розділення зарядів у межах джерела струму відбувається під дією сил, що мають некулонівську природу, оскільки під впливом кулонівської сили різнойменні заряди притягуються. Ці додаткові сили неелектричного походження, що діють у межах джерела струму, називаються ***сторонніми***. Природа сторонніх сил може бути хімічною (гальванічні елементи, акумулятори), тепловою (термоелементи) тощо.

Робота з переміщення електричного заряду на ділянці кола 1-2, в якій є ЕРС, виконується силами електричного поля і сторонніми силами, тобто

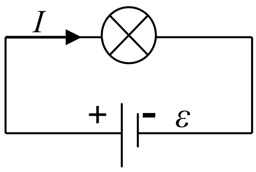


Рисунок 3.25

$$A = A_{ел} + A_{стор}.$$

Підставляючи значення для роботи, отримаємо, що результуюча робота дорівнює:

$$A_{12} = q\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} + q\int_1^2 \vec{E}_{стор.}\cdot d\vec{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\varepsilon .$$

Величина $\varepsilon = \int_1^2 \vec{E}_{стор}\cdot d\vec{l} = \dfrac{A_{стор}}{q}$ - це робота, яку виконують сторонні сили при переміщенні одиничного позитивного заряду всередині джерела. Ця величина називається ***електрорушійною силою*** (ЕРС), що діє в колі.

Величина, що визначається сумарною роботою сторонніх сил і сил електричного поля при переміщенні одиничного позитивного заряду на ділянці кола, називається ***напругою***, або спадом напруги на цій ділянці кола:

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon . \qquad (3.31)$$

Якщо на ділянці кола не прикладена ЕРС, то напруга на кінцях ділянки дорівнюватиме різниці потенціалів

$$U = (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Така ділянка кола називається ***однорідною***.

3.2.1 Закон Ома для однорідної ділянки кола постійного струму

У 1826р. німецький фізик Г. Ом дослідно встановив, що сила струму в однорідному металевому провіднику прямо пропорційна напрузі на кінцях провідника і обернено пропорційна до опору цього провідника:

$$I = \frac{U}{R} \tag{3.32}$$

Це співвідношення називається ***законом Ома для однорідної ділянки кола*** в інтегральній формі. Користуючись ним, можна отримати одиницю опору. В СІ опір провідника вимірюється в *омах. Ом – опір такого провідника, в якому виникає сила струму в один ампер, коли різниця потенціалів на його кінцях дорівнює один вольт.*

Дослід показує, що опір провідника залежить від його геометричних розмірів, матеріалу, зовнішніх умов (особливо температури). Згідно з експериментальними дослідженнями Ома опір однорідного провідника прямо пропорційний до його довжині і обернено пропорційний до площі поперечного перерізу:

$$R = \rho \frac{l}{S}. \tag{3.33}$$

Коефіцієнт пропорційності ρ, що характеризує матеріал, з якого виготовлено провідник, називають ***питомим опором*** речовини провідника.

Для вимірювання питомого опору провідників на практиці користуються позасистемними одиницями. Наприклад, одиницею питомого опору в СІ є Ом·м. Крім того, для вимірювання ρ провідникових матеріалів, крім одиниці СІ, часто використовують позасистемну одиницю Ом·мм^2/м, оскільки площу поперечного перерізу провідника S вимірюють у квадратних міліметрах (*мм*^{2}), а довжину провідника l – у метрах (*м*):

1 Ом·м = 10^6 *Ом·мм*^{2}*/м.*

Діапазон значень ρ металевих провідників за нормальної температури 300 К становить від 0,016 мкОм·м для срібла і до 10 мкОм·м для деяких резистивних сплавів, тобто він охоплює всього три порядки.

Питомий опір, а тому і опір провідника, залежить від температури. В загальному випадку така залежність досить складна. Проте у металевих провідниках для невисоких температур можна користуватись наближеними формулами:

$$\rho = \rho_0(1+\alpha t); \quad R = R_0(1+\alpha t).$$

Тут ρ_0 і R_0 — відповідно питомий опір при 0°С; t — температура в градусах Цельсія; α — температурний коефіцієнт опору. При точних розрахунках треба враховувати залежність α від температури.

Обернена величина до електричного опору називається ***електричною провідністю*** провідника, тобто

$$G = \frac{1}{R}.$$

Одиниця електропровідності – сименс (См).

При досить низьких температурах, близьких до абсолютного нуля (0,5—8К), опір деяких металів (алюміній, цинк, свинець та ін.), а також керамічних матеріалів, стрибкоподібно зменшується майже до нуля. Таке явище називають ***надпровідністю***.

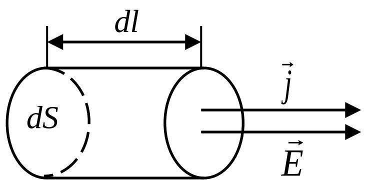


Рисунок 3.26

У формулу для закону Ома (3.32), в якому протікає електричний струм, уявно виділимо елементарний циліндричний об'єм з твірними, які паралельні векторам $\vec{j}$ і $\vec{E}$ (рисунок 3.26).

Опір такого циліндра дорівнює $R = \rho \dfrac{dl}{dS}$.

Через поперечний переріз циліндра проходить струм силою $dI = jdS$. Спад напруги на цьому циліндрі дорівнює $dU = Edl$. Підставивши значення цих величин у формулу закону Ома для однорідної ділянки кола в інтегральній формі, отримуємо:

$$jdS = \frac{1}{\rho}\frac{dS}{dl}Edl, \; j = \frac{1}{\rho}E.$$

Вектори $\vec{j}$ і $\vec{E}$ співпадають за напрямом, тому можна записати

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}, \tag{3.34}$$

де σ — називається ***питомою електричною провідністю*** речовини (обернена величина до ρ).

Це запис закону Ома для однорідної ділянки кола ***в диференціальній формі***.

Питома провідність σ провідників виражається в одиницях, обернених до одиниць ρ– См/м.

3.2.2 Закон Ома для неоднорідної ділянки кола постійного струму

Розглянемо неоднорідну ділянку кола, тобто ділянку, на якій діє ЕРС. На носії електричного струму діють як сили з боку електростатичного поля так і сторонні сили. Спад напруги на цій ділянці кола, що визначається сумарною роботою сил, дорівнює (3.31):

$$U = \frac{A_{12}}{q} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon.$$

Враховуючи (3.32), можна записати

$$IR = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon.$$

Звідси

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon}{R}. \tag{3.35}$$

Це співвідношення називається ***законом Ома для неоднорідної ділянки*** кола.

ЕРС ε є величиною алгебраїчною і вважається додатною $\varepsilon>0$, якщо вона сприяє рухові позитивних носіїв заряду в напрямі 1-2 (рисунок 3.27).

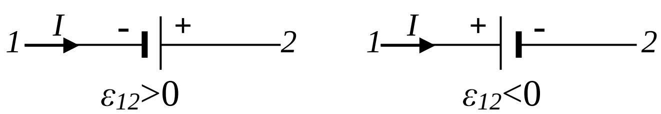


Рисунок 3.27

Якщо ж ЕРС перешкоджає рухові позитивних носіїв у цьому напрямі, то вона вважається від'ємною.

Для замкненого кола $\varphi_1=\varphi_2$. Тоді закон Ома запишеться

$$I = \frac{\varepsilon}{R},$$

де ε – алгебраїчна сума всіх ЕРС, що діють у цьому колі, R – загальний опір кола.

Якщо розглянути замкнене електричне коло постійного струму, що містить джерело струму, електрорушійна сила і внутрішній опір якого відповідно ε і r, то математичний запис ***закону Ома*** матиме вигляд:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}, \tag{3.36}$$

де $R+r$ – повний опір кола.

<u>Приклад.</u> Коли опір навантаження, підключеного до батареї, збільшити у n разів, напруга на навантаженні збільшилась від U_1 до U_2. Знайти ЕРС батареї.

$R_2=nR$,
U_1, U_2

ε-?

Для значень сили струму в першому і другому випадках запишемо:

$$I_1 = \frac{U_1}{R}, \quad I_2 = \frac{U_2}{nR}.$$

Відповідно, закон Ома для неоднорідної ділянки у кожному випадку має вигляд:

$$\frac{U_1 r}{R} = \varepsilon - U_1; \quad \frac{U_2 r}{nR} = \varepsilon - U_2.$$

Звідси знаходимо:

$$\varepsilon(nU_1 - U_2) = U_1 U_2 (n-1); \quad \varepsilon = \frac{U_1 U_2 (n-1)}{nU_1 - U_2}.$$

<u>Приклад.</u> Не враховуючи опір провідників, визначити внутрішній опір джерела струму, якщо при замиканні його на зовнішній опір R_1=1 Ом напруга на затискачах джерела U_1=2 В, а при замиканні на опір R_2=2 Ом напруга на затискачах джерела U_2=2,4 В.

R_1=1 Ом
U_1=2 В
R_2=2 Ом
U_2=2,4 В

---

r - ?

Е.р.с джерела в обидвох випадках однакова і дорівнює:

$$\varepsilon = U_1 + I_1 r; \quad \varepsilon = U_2 + I_2 r.$$

Значення сили струму для двох випадків згідно із закону Ома $I_1 = \frac{U_1}{R_1}$; $I_2 = \frac{U_2}{R_2}$ підставимо у вихідні рівняння.

Розв'язавши систему рівнянь відносно внутрішнього опору, знаходимо:

$$r = \frac{U_2 - U_1}{\left(\frac{U_1}{R_1} - \frac{U_2}{R_2}\right)}; \quad r = \frac{2{,}4 - 2}{\left(\frac{2}{1} - \frac{2{,}4}{2}\right)} = 0{,}5\,(Ом).$$

3.2.3 Потужність струму. Закон Джоуля-Ленца

При впорядкованому русі носіїв електричного заряду в провіднику електричне поле виконує роботу.

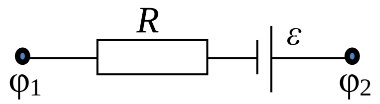


Рисунок 3.28

Розглянемо довільну неоднорідну ділянку кола постійного струму з різницею потенціалів на її кінцях $\varphi_1 - \varphi_2$, в якій діють сторонні сили, що характеризуються ЕРС ε (рисунок 3.28).

За час t через поперечний переріз провідника проходить заряд $q = I \cdot t$. Це рівносильно тому, що цей заряд переноситься за час t із одного кінця провідника в інший. Спад напруги на цій ділянці кола визначається сумарною роботою електричних та сторонніх сил і згідно (3.31) дорівнює:

$$U = \frac{A_{12}}{q} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon$$

Звідси $\qquad A_{12} = U \cdot q = U \cdot I \cdot t.$

Розділивши роботу A на час t, за який вона виконується, отримаємо потужність, що розвивається струмом на розглянутій ділянці кола:

$$P = \frac{A_{12}}{t} = U \cdot I \,. \qquad (3.7)$$

Ця потужність може витрачатися на здійснення розглянутою ділянкою кола роботи над зовнішніми тілами (для цього ділянка повинна переміщуватись у просторі), на протікання хімічних реакцій і, нарешті, на нагрівання цієї ділянки кола.

У випадку нерухомого провідника і відсутності хімічних перетворень в ньому, робота струму витрачається на збільшення внутрішньої енергії провідника. Проходження струму через провідник у цьому випадку супроводжується його нагріванням. Кількість теплоти, що виділяється в провіднику при проходженні струму, можна обчислити за формулою:

$$Q = A_{12} = U \cdot I \cdot t \,. \qquad (3.38)$$

Це співвідношення було встановлено експериментально Джоулем і, незалежно від нього, Ленцем і має назву ***закон Джоуля-Ленца***. Тобто, *кількість теплоти Q, яка виділяється на певній ділянці провідника, прямо пропорційна напрузі на його кінцях U, силі струму I, що проходить через провідник і часу проходження струму t*.

За законом Ома $U = I \cdot R$. Тому, зробивши заміну в попередньому співвідношенні, отримуємо

$$Q = U \cdot I \cdot t = I^2 R \cdot t = \frac{U^2 t}{R} \,.$$

Якщо з часом сила струму змінюється, то кількість теплоти, що виділяється за певний проміжок часу, обчислюється за формулою

$$Q = \int_0^t i^2(t) R dt \,. \qquad (3.39)$$

Цей висновок називається ***закон Джоуля-Ленца в інтегральній формі***.

Це співвідношення визначає кількість теплоти, яка виділяється в усьому провіднику. Перейдемо до виразу, що характеризує виділення тепла в одиничному об’ємі провідника. Виділимо в провіднику елементарний об'єм у вигляді циліндра (див. рисунок 3.26). Відповідно до закону Джоуля – Ленца за час dt у цьому об'ємі виділиться кількість теплоти

$$dQ = I^2 R dt.$$

Оскільки $R = \rho \dfrac{dl}{dS}$, а $I = jdS$, то

$$dQ = (j \cdot dS)^2 \rho \frac{dl}{dS} dt = \rho \cdot j^2 dV \cdot dt. \qquad (3.40)$$

Тут $dV = dS \cdot dl$ – величина елементарного об'єму.

Розділивши (3.40) на об’єм dV та час dt, знайдемо кількість тепла, що виділяється в одиниці об’єму за одиницю часу. Цю величину називають ***питомою тепловою потужністю струму***.

$$Q_{пит} = \rho \cdot j^2. \qquad (3.41)$$

Це є ***диференціальна форма*** запису закону Джоуля-Ленца.

3.2.4 Правила Кірхгофа. Розрахунок електричних лінійних кіл постійного струму

Поряд із законом Ома для розрахунку електричних кіл використовують два правила Кірхгофа. Перше правило стосується вузлів електричного кола, а друге – його контурів.

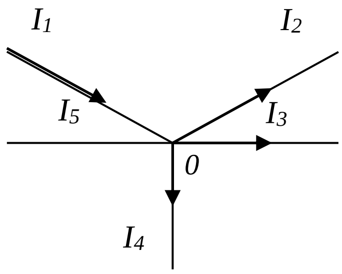


Рисунок 3.29

Вузлом називається точка в якій сходяться не менше трьох струмів.

Перше правило Кірхгофа для вузла: алгебраїчна сума величин всіх струмів в кожній вузловій точці електричного кола дорівнює 0.

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0. \qquad (3.42)$$

Струми, які входять у вузол вважають додатними, а ті, що виходять – від’ємними. Для вузлової точки *O* (рисунок 3.29), в якій сходяться струми I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, перше правило Кірхгофа запишеться

$$I_1 + I_5 - I_3 - I_4 - I_2 = 0,$$

або

$$I_1 + I_5 = I_3 + I_4 + I_2.$$

Сума величин всіх струмів, які входять у вузлову точку дорівнює сумі струмів, які виходять з цієї точки.

Друге правило Кірхгофа: у будь-якому довільно вибраному замкненому контурі розгалуженого елементарного кола, алгебраїчна сума добутків величин струмів на опори відповідних ділянок контуру дорівнює алгебраїчній сумі електрорушійних сил, що діють у цьому контурі.

Сума має зміст алгебраїчної тому, що знаки їх членів залежать від напряму вибраного обходу. Додатними будуть ті струми, які збігаються з напрямом обходу, а від’ємними, які напрямлені протилежно. Додатними будуть ті електрорушійні сили власний струм яких збігається за напрямом обходу, тобто ті які в напрямі обходу будуть зорієнтовані від негативного до позитивного полюса.

У розгалуженому електричному колі виберемо замкнений контур, наприклад А-Б-С (рисунок 3.30). Виберемо напрямок обходу (на рисунку показаний за годинниковою стрілкою) і застосуємо до кожної з ділянок контура закон Ома:

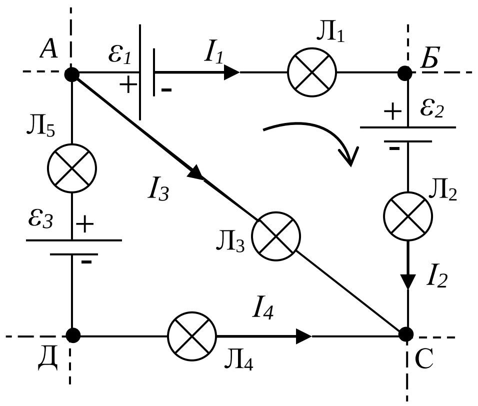


Рисунок 3.30

$$I_1 \cdot R_1 = \varphi_A - \varphi_B + \varepsilon_1$$

$$I_2 \cdot R_2 = \varphi_B - \varphi_C + \varepsilon_2$$

$$I_3 \cdot R_3 = \varphi_C - \varphi_A$$

$$I_1R_1 + I_2R_2 - I_3R_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i$$

де I_i – сила струму на *і-й* ділянці; R_i – активний опір *і-ї* ділянки; ε_i – ЕРС джерел струму на *і-й* ділянці, *n* – кількість ділянок у вибраному контурі; *m* – кількість джерел струму у вибраному контурі.

3.2.5 Еквівалентна заміна послідовного та паралельного з’єднань резисторів

Наприкінці розглянемо еквівалентну заміну послідовного та паралельного з’єднань резисторів.

На рисунку 3.31 *n* опорів з’єднані послідовно. Нехай струм *I* напрямлений за годинниковою стрілкою. Згідно з другим правилом Кірхгофа

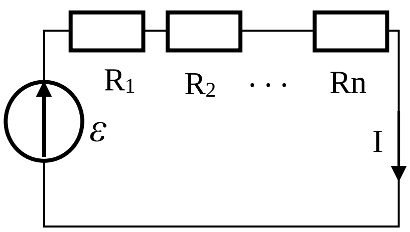


Рисунок 3.31

$$R_1 \cdot I + R_2 \cdot I + \ldots + R_n \cdot I = \varepsilon$$

або

$$(R_1 + R_2 + \ldots + R_k) \cdot I = \varepsilon, \quad \text{або} \quad R_{екв} \cdot I = \varepsilon.$$

Таким чином, опір, еквівалентний послідовному з’єднанню резисторів

$$R_{екв} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n.$$

Отже, при послідовному з’єднанні опори додаються. Якщо опори однакові, тобто

$$R_1 = R_2 = \ldots = R_n = R, \quad \text{то} \quad R_{екв} = n \cdot R.$$

На рисунку 3.32 *n* опорів з’єднані паралельно. Струм I_x у деякому опорі R_x за законом Ома дорівнює E/R_x. Загальний струм I від джерела

$$I = \frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{\varepsilon}{R_2} + \cdots + \frac{\varepsilon}{R_n} = \varepsilon\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}\right).$$

Еквівалентний паралельному з’єднанню опір дорівнює:

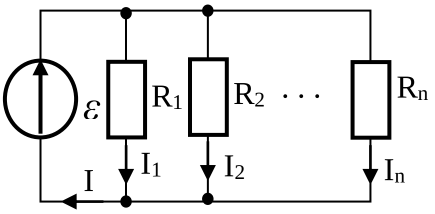


Рисунок 3.32

$$R_{екв} = \frac{\varepsilon}{I} = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2 + \ldots + 1/R_n}.$$

Таким чином, еквівалентний опір є оберненою величиною до суми зворотних величин опорів окремих резисторів. У випадку паралельного з’єднання двох опорів

$$R_{екв} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Величина, обернена до опору, називається *електричною провідністю* $G=R^{-1}$. Вимірюється у *Сименсах: См=Ом*$^{-1}$.

Таким чином,

$$G_{екв} = \frac{I}{\varepsilon} = \frac{1}{\mathrm{R_{екв}}} = G_1 + G_2 + \ldots + G_n.$$

у випадку однакових опорів

$$G_{екв} = n \cdot g.$$

3.3 Електропровідність

3.3.1. Електропровідність металів

Основною властивістю будь-якої речовини стосовно електричного поля є перенесення електричного заряду – електропровідність. Це – здатність матеріалу проводити електричний струм під впливом постійної (яка не змінюється у часі) електричної напруги. Якщо речовина знаходиться в електричному полі з напруженістю E, В/м, то наявні у речовині вільні носії заряду під дією сили

$$\vec{F} = q\vec{E},$$

отримують прискорення. q – заряд частинки,. У металах це заряд електрона: $q = e$. Прискорення зарядів напрямлене у бік вектора $\vec{E}$ – для носіїв, що мають позитивний заряд $+q$ (наприклад, додатні іони або електронні дірки), або в зворотному напрямку – для носіїв з негативним зарядом $-q$.

Виниклий при цьому упорядкований рух електричних зарядів (на відміну від їх хаотичного теплового руху) являє собою електричний струм у речовині. Для електронної провідності ($q = e$), коли у речовині існують вільні носії заряду тільки одного виду, густина струму j, тобто електричний заряд, що протікає за одиницю часу через одиницю площі, перпендикулярної до вектора $\vec{E}$, дорівнює:

$$j = Ne\upsilon, \tag{3.43}$$

де N, *м*$^{-3}$, – кількість вільних носіїв заряду (концентрація носіїв) в одиниці об'єму речовини; υ, *м/с* – середня швидкість упорядкованого руху носіїв, що виник під дією електричного поля (дрейфова швидкість). Ця швидкість пропорційна напруженості поля Е:

$$\upsilon = uE, \tag{3.44}$$

де u – коефіцієнт пропорційності, названий рухливістю носіїв заряду, *м*^{2}*/(В·с)*.

З урахуванням виразу (3.44), рівняння (3.43) можна переписати у вигляді

$$j = \sigma E, \tag{3.45}$$

де σ – питома електрична провідність.

Рівняння (3.45) є диференціальною формою запису закону Ома. Питома провідність (чи питомий опір) визначає густину струму в речовині за заданої напруженості електричного поля, тобто кількісно характеризує явище електропровідності – електричного перенесення заряду.

Параметри *σ* або *1/ρ* визначають також розсіювання (втрати) електричної енергії в речовині. Відповідно до диференціальної форми закону Джоуля–Ленца густина виділеної теплової енергії *p, Вт/м3* (енергія, що перетворюється в теплоту за одиницю часу і в одиниці об'єму речовини), дорівнює

$$p = E2/\rho = \sigma \cdot E2. \tag{3.46}$$

Від формул (3.45) і (3.46) можна перейти до формул для провідності G, опору R і потужності P, що виділяється у фізичному тілі будь-яких розмірів і форми, виготовленому з відповідного матеріалу.

$$P = U^2 \cdot G = U^2/R. \tag{3.47}$$

3.3.2 Струми у рідинах

Як ми з'ясували, метали мають електронну провідність і на механізм їхньої електропровідності не впливає агрегатний стан речовини. Розплави металів, у тому числі й ртуті, зберігають електронний тип провідності. Вода та багато інших неметалічних рідин у звичайних умовах є хорошими діелектриками. Однак навіть найменші домішки до води ряду речовин, таких як солі металів, кислоти або луги, приводять до виникнення електропровідності. Ця електропровідність має іонний характер. Речовини і розчини, що мають іонний механізм провідності, називають ***електролітами***, або *провідниками другого роду*. Розплави солей також є електролітами. Процес іонної електропровідності супроводжується масоперенесенням.

Механізм розпаду у воді молекул на іони неорганічних речовин (дисоціація) показаний на рисунку 3.33:

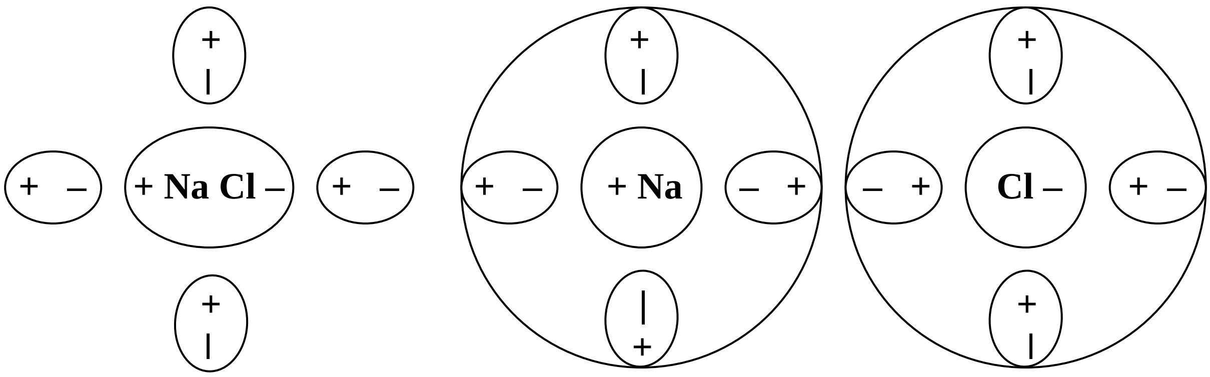


Рисунок 3.33

Вода має аномально високу діелектричну проникність ($\varepsilon = 81$). Відповідно у воді зменшується сила кулонівської взаємодії, яка зв'язує, наприклад у молекулі солі, атом металу з кислотним залишком. Молекули води (полярний діелектрик) являють собою диполі, які орієнтуються поблизу молекули солі, одночасно беручи участь у тепловому хаотичному русі. Ослаблені зв'язки розриваються і молекула солі розпадається на позитивний іон металу і негативний іон кислотного залишку, які виявляються оточеними орієнтованими диполями молекул води. Формується так званий *сольват* – іон, оточений соль ватною оболонкою. Таким чином, при русі в розчині іон відчуває активний в'язкий опір середовища.

3.3.2.1 Закон Ома для електролітів.

Якщо до електродів, опущених у електроліт, прикласти різницю потенціалів, виникне струм, зумовлений напрямленим рухом іонів. Сила в'язкого тертя пропорційна до швидкості руху частинки:

$$\vec{F}_T = -k_0 \vec{u},$$

де k_0 – коефіцієнт опору. У таких умовах має відбуватися рівномірний рух носіїв, оскільки сила в'язкого тертя швидко зрівноважує кулонівську силу:

$$\vec{F}_T + \vec{F_e} = 0,$$

$$q\vec{E} - k_0 \vec{u} = 0,$$

$$\vec{u} = \frac{q}{k_0}\vec{E} = b\vec{E},$$

де q – заряд іона. Величину b називають ***рухливістю іона***. Для носіїв різного знаку вона, як правило, різна і залежить від властивостей розчинника і температури. Густина струму визначається рухом носіїв обох знаків:

$$\vec{j} = \vec{j}_+ + \vec{j}_-,$$

$$\vec{j} = n_+ q_+ \vec{u}_+ + n_- q_- \vec{u}_-,$$

$$\vec{j} = (n_+ q_+ b_+ + n_- q_- b_-) \cdot \vec{E}.$$

Якщо концентрація n і валентність z іонів різного знаку однакові, маємо

$$\vec{j} = \alpha nez\left(b_+ + b_-\right) \cdot \vec{E},$$

де α – ступінь дисоціації молекул на іони.

Останній вираз називають ***законом Ома для електролітів***.

3.3.2.2 Закони Фарадея.

Процеси масоперенесення, що супроводжуються електропровідністю електролітів, уперше в 1833 р. описав видатний англійський фізик М. Фарадей (1791-1867). Він сформулював два закони електролізу.

Перший закон. Маса речовини, яка виділяється на електроді при проходженні через електроліт постійного струму, прямо пропорційна кількості електрики, що пройшла через електроліт:

$$m = kq = kIt,$$

де k – електрохімічний еквівалент речовини.

*Другий закон**.** Електрохімічні еквіваленти елементів прямо пропорційні їх хімічним еквівалентам x:*

$$k = const \cdot x, \qquad \text{де } x = \frac{M}{z}.$$

Величина, обернена до універсальної константи, називається ***числом Фарадея*** $F - eN_A = 96485{,}309(70)$ Кл/моль.

Об'єднуючи перший і другий закони Фарадея, отримаємо

$$m = \frac{1}{F}\frac{M}{z} \cdot q = \frac{1}{F}\frac{M}{z} It. \qquad (3.48)$$

3.3.3 Електропровідність напівпровідників

До напівпровідників належать ті матеріали які займають проміжне місце між провідниками і діелектриками. Якщо в металах носіями електричного струму є електрони, то в напівпровідниках носіями є як електрони так і дірки. Процес утворення дірок називається ***генерація***, а приєднання діркою електрона є – ***рекомбінація***. Напівпровідники в яких носіями є дірки називаються ***напівпровідники з дірковою провідністю*** або напівпровідники p-типу і напівпровідники n-типу. Якщо в напівпровідниках з електронною провідністю додати напівпровідники з дірковою провідністю, то елемент провідності буде називатися ***власною***, а діркова – ***домішковою провідністю***. Власна провідність є завжди набагато вищою від концентрації домішкових носіїв. Домішки які віддають електрони називаються ***донорами***, а ті домішки, які приєднують електрони називаються ***акцепторами***. Межу розподілу двох напівпровідників p- і n-типу називають ***електронно-дірковим переходом*** або p-n перехід. Якщо до p-n переходу прикласти зовнішню напругу, то через p-n перехід буде протікати електричний струм. Струм викликаний зовнішнім електричним полем отримав назву ***дрейфовий струм***, а струм викликаний дифузією носіїв заряду називається ***дифузійним струмом***.

Величина струму залежить від полярності прикладеної напруги.

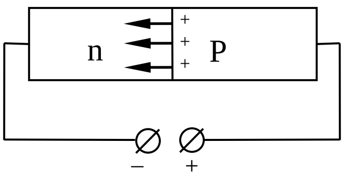


Рисунок 3.34

В цьому випадку (рисунок 3.34) зовнішнє електричне поле буде напрямлене назустріч власному електричному полю P-n переходу. Таке ввімкнення називається прямим. Основні носії заряду наближаються до контакту компенсуючи заряд домішок. Частина носіїв, що мають найбільшу енергію, зможуть подолати потенціальний бар’єр і перейти через P-n перехід. Це призведе до порушення рівноваги між дрейфовим та дифузійним струмом.

$$I = I_{дифуз.} = I_{дрейф.}$$

Дифузійна складова струму стає більшою від дрейфової і струм починає зростати. Цей струм називається ***прямим***.

При збільшенні прямої напруги, прямий струм через p-n перехід може знову зростати до великих значень, тому що він зумовлений рухом основних носіїв заряду, а концентрація їх в обох областях досить велика.

Ввімкнення (рисунок 3.35) називається зворотнім, і струм, який буде протікати, також зворотній.

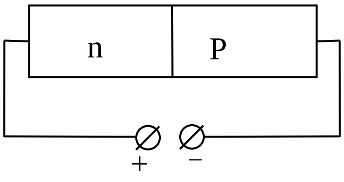


Рисунок 3.35

При такому ввімкненні електричне поле зовнішньої напруги буде співпадати з полем n-P переходу. Під дією електричного поля основні носії будуть відтягуватись від приконтактних шарів напівпровідника. Ширина переходу буде зростати. При малому ввімкненні вирішальну роль має дрейфовий струм. Дрейфовий струм має невелике значення, тому що він зумовлений рухом неосновних носіїв.

$$I_{зв.} = I_{др.} - I_{диф.}$$

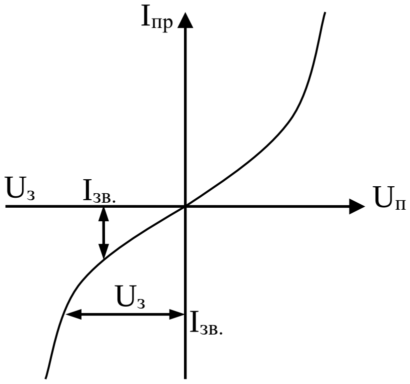


Рисунок 3.36

Оскільки, дрейфовий струм є досить малий, тому зворотній струм переходу буде малий. Важливою характеристикою p-n переходу є його вольт-амперна характеристика (рисунок 3.36).

Вольт-амперна характеристика - залежність струму через p-n перехід від величини та полярності прикладеної напруги. Аналітичним виразом, який описує цю вольт-амперну характеристику буде:

$$I = I_0 (l^{\frac{eU}{kT}} - 1) \tag{3.49}$$

I_0 - максимальний зворотній струм;

U - прикладена зовнішня напруга;

k - стала Больцмана;

T - температура.

З вольт-амперної характеристики випливає, що при додатній прямій напрузі струм зростає. При збільшенні зворотної напруги струм стає близьким до зворотного струму насичення.

При дальшому збільшенні зворотної напруги відбувається різне зростання струму. Після того проходить так званий пробій.

Існує:

- електричний пробій;
- тепловий пробій.

Аналіз вольт-амперної характеристики P-n переходу дозволяє розглядати його, як нелінійний елемент, опір якого змінюється в залежності від величини та полярності прикладеної напруги. При збільшенні прямої напруги опір p-n переходу зменшується. Із зміною полярності і величини прикладеної напруги, опір p-n переходу зростає.

Нелінійні властивості p-n переходу лежать в основі роботи напівпровідникових приладів, які використовуються для випрямлення струму, перетворення частоти і т.д. Найбільше використовуються діоди, стабілітрони, транзистори, тиристори і т.д.

3.4 Магнітні явища

3.4.1 Магнітне поле та його характеристики

Магнітне поле встановлене дослідним шляхом. Подібного до того як навколо електричного заряду існує електростатичне поле так і навколо провідника зі струмом або навколо постійного магніту виникає силове поле, яке називається ***магнітним***. Назву пов'язують з орієнтацією магнітної стрілки під дією поля провідника, в якому тече струм (рисунок 3.37).

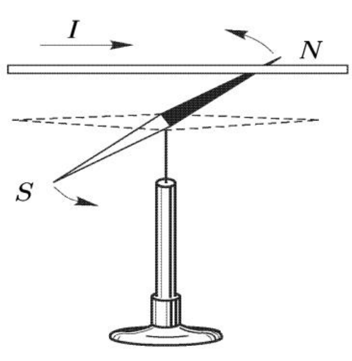


Рисунок 3.37

В 1820 році датський фізик Х. Ерстед виявив, що магнітна стрілка, яка розташована паралельно прямолінійному провіднику, при пропусканні через нього постійного струму *I*, орієнтується перпендикулярно до провідника. При зміні напряму струму стрілка повертається на 180°. Те ж саме відбувалося, коли стрілка розташовувалася над провідником.

Важливою особливістю магнітного поля є те, що воно діє тільки на електричні заряди, які рухаються в цьому полі. Дія магнітного поля на струм різна і залежить від форми провідника, розташування провідника, напряму протікання струму.

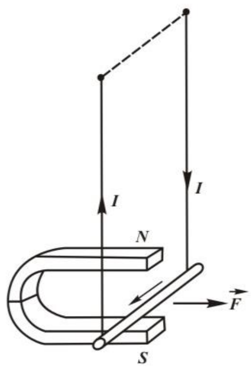


Рисунок 3.38

Щоб охарактеризувати магнітне поле необхідно розглянути його дію на певний струм.

Якщо провідник зі струмом помістити між полюсами підковоподібного магніту, то він або втягуватиметься, або виштовхуватиметься з нього залежно від напряму струму (рисунок 3.38). Якщо струм I у провіднику проходить перпендикулярно до площини рисунка «до нас» (такий струм позначають кружком із крапкою в його центрі), то провідник переміщається вправо (рисунок 3.39*а*). Якщо струм I проходить в протилежному напрямку (такий струм позначають кружком із хрестиком у середині нього), то провідник рухається вліво (рисунок 3.39*б*).

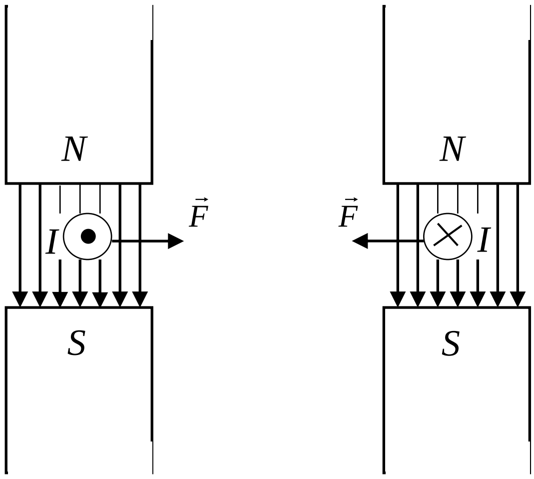


Рисунок 3.39

Дію магнітного поля на провідники зі струмом дослідив А. Ампер. З дослідів Ампера випливає, що на провідник зі струмом, який розміщений в магнітному поле, діє сила, яка пропорційна струмові в провіднику і довжині провідника. Величина сили також залежить від орієнтації провідника в магнітному полі. Виявляється, що відношення максимальної сили, що діє на провідник зі струмом, до добутку сили струму на довжину провідника, для даної точки поля залишається сталим. Це відношення приймають за силову характеристику магнітного поля, і називають ***індукцією магнітного поля*** в даній точці.

Магнітна індукція ($\vec{B}$) – це векторна фізична величина, яка є силовою характеристикою магнітного поля і чисельно дорівнює відношенню максимального значення сили , що діє на провідник зі струмом, до добутку сили струму I в ньому на довжину провідника l:

$$\vec{B} = \frac{\vec{F}_{\max}}{I \cdot l}.$$

Узагальнивши експериментальні дані стосовно дослідження дії магнітного поля на різні провідники із струмом, Ампер встановив, що сила $d\vec{F}$**,** яка діє на невеликий провідник довжиною dl зі струмом I, що знаходиться у магнітному полі**,** прямо пропорційна силі струму I в провіднику та векторному добутку магнітної індукції $\vec{B}$ на елемент довжини $d\vec{l}$:

$$d\vec{F} = k \cdot I \cdot \left[\vec{B} \times d\vec{\ell}\right]. \qquad (3.50)$$

Тут $\vec{B}$ – вектор індукції магнітного поля; вектор $d\vec{l}$ спрямований за напрямом електричного струму; k – коефіцієнт пропорційності, який у системі СІ дорівнює одиниці.

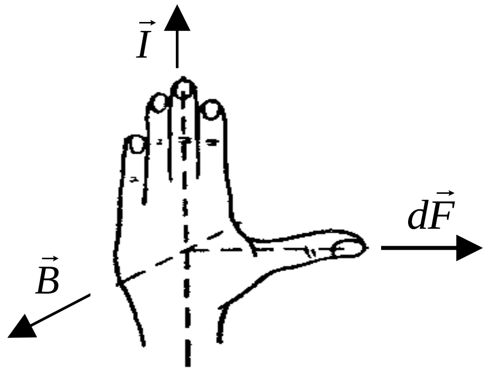


Рисунок 3.40

Співвідношення (3.50) називають ***законом Ампера***. Силу (***сила Ампера***), що діє на провідник визначеної довжини, знаходимо з (3.50) шляхом інтегрування по всій довжині провідника.

$$F = \int_l d\vec{F} = \int_l Idl \times B$$

Для визначення напрямку вектора сили $d\vec{F}$ зручно використовувати ***правило лівої руки*** (рисунок 3.40): якщо ліву долоню розмістити так, щоб витягнуті пальці показували напрям струму I , а лінії індукції магнітного поля $\vec{B}$ входили в долоню, то відхилений великий палець покаже напрям дії сили $d\vec{F}$ що діє на провідник.

Відомо, що $\left|\vec{B} \times d\vec{l}\right| = \left|\vec{B}\right| \cdot \left|d\vec{l}\right| \cdot \sin(\vec{B}, d\vec{l})$. Тоді

$$dF = I \cdot B \cdot dl \cdot \sin(\vec{B}, d\vec{l})$$

Якщо вектори $Id\vec{l}$ та $\vec{B}$ паралельні, то сила дорівнює нулю. Якщо елемент провідника dl зі струмом I є перпендикулярним до напряму магнітного поля $\sin(\vec{B}, d\vec{l}) = 1$, то сила буде максимальною, тобто

$$dF = I \cdot B \cdot dl \cdot \sin(\vec{B}, d\vec{l}) = I \cdot B \cdot dl$$

Індукція магнітного поля вимірюється в теслах: *Тл= Н/(А·м)*

[F]=[I·B·l]= А·Тл·м= А·В·с/м²·м= Дж/м =Н

Для магнітного поля, як і для електричного, виконується ***принцип суперпозиції:*** індукція магнітного поля, яке створюється декількома струмами, дорівнює векторній сумі індукцій магнітних полів, що окремо створюються кожним струмом.

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i .$$

Окрім вектора магнітної індукції для характеристики магнітного поля використовують також величину $\vec{H}$, яку називають ***напруженістю магнітного поля***. Для однорідного ізотропного середовища вектор магнітної індукції і вектор напруженості магнітного поля пов'язані між собою співвідношенням:

$$\vec{B} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H},$$

де μ – відносна магнітна проникність середовища;

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1.2566 \times 10^{-6}$ *Тл·м/А* – магнітна стала (магнітна проникність вакууму);

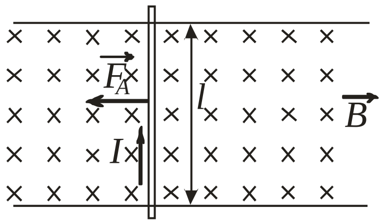
H – напруженість магнітного поля.

Магнітна проникність середовища μ – це фізична величина, яка показує, у скільки разів магнітна індукція поля в даному середовищі відрізняється від магнітної індукції поля у вакуумі.

Напруженість магнітного поля $\vec{H}$ – це векторна величина, яка є кількісною характеристикою магнітного поля.

<u>Приклад.</u> На паралельні горизонтальні рейки подано напругу і по провіднику *l* (див. рисунок) тече струм *1 А*. Під дією магнітного поля провідник рухається з прискоренням *2 м/с²*. Знайти індукцію магнітного поля, якщо площа поперечного перерізу провідника дорівнює *1 мм²*, а густина матеріалу провідника *2500 кг/м³*. Тертя не враховувати.

I=1 A
a=2м/с²
s=1 мм²
ρ=2500 кг/м³
B - ?



Якщо провідник *l* зі струмом *I* перпендикулярний до напряму магнітного поля $\vec{B}$, то сила Ампера буде дорівнювати $\vec{F} = I \cdot \vec{B} \cdot l$.

Під дією сили Ампера, провідник отримує прискорення у напрямку дії цієї сили: $ma = F_A$; $ma = IBl$,
де

$$m = \rho V = \rho l s .$$

Тоді

$$\rho l s a = IBl .$$

Звідси $B = \dfrac{\rho s a}{I}$; $B = \dfrac{2500 \cdot 1 \cdot 2}{1} = 5000\ (\text{Тл})$.

3.4.2 Закон Біо – Савара – Лапласа

Французькі вчені Біо й Савар провели дослідження магнітних полів, що створюються струмами, які проходять по тонких провідниках різної форми. Лаплас проаналізував експериментальні дані, отримані Біо й Саваром, і встановив залежність, яка отримала назву закону Біо-Савара-Лапласа.

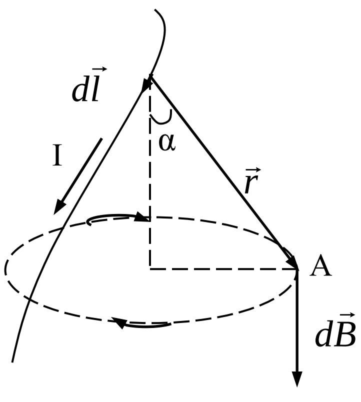


Рисунок 3.41

Закон Б-С-Л для провідника зі струмом *I*, елемент якого *dl* в деякій точці породжує магнітне поле індукцією $d\vec{B}$ записується у вигляді:

$$d\vec{B} = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I\left[d\vec{\ell} \times \vec{r}\right]}{4\pi \cdot r^3},$$

де $d\vec{l}$ - вектор, по модулю дорівнює довжині *dl* і співпадає за напрямом зі струмом *I*;
$\vec{r}$ - радіус-вектор, проведений з елемента провідника *dl* в точку визначення $d\vec{B}$; *r* – модуль вектора $\vec{r}$.

Напрям $d\vec{B}$ перпендикулярний до $d\vec{l}$ і $\vec{r}$ (рисунок 3.41). Цей напрям можна знайти за правилом правого гвинта: напрям обертання головки гвинта дає напрям $d\vec{B}$, якщо поступальний рух гвинта відповідає напряму струму в елементі провідника. Модуль вектора $d\vec{B}$ визначається із співвідношення:

$$dB = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I \cdot dl}{4\pi \cdot r^2} \cdot \sin\alpha$$

Розрахунок характеристик магнітних полів $\vec{B}$, $\vec{H}$ за цими формулами є досить складним. Коли струм має певну симетрію, то закон Біо-Савара-Лапласа разом із принципом суперпозиції набагато спрощує розрахунок конкретних магнітних полів.

3.4.3 Магнітне поле провідника зі струмом

а) ***магнітне поле прямолінійного, безмежно довгого, тонкого провідника зі струмом***

Розіб'ємо весь провідник на елементарні довжини dl (рисунок 3.42). У довільній т. А, віддаленій від осі провідника на R, вектори магнітної індукції $d\vec{B}$ усіх елементів струму $d\vec{l}$ мають однакові напрями (перпендикулярно до площини рисунку, правило правого свердлика). Тому векторну суму $d\vec{B}$ можна замінити сумою їх модулів. Із рисунку, вважаючи кут α досить малим та використавши властивості границь, маємо:

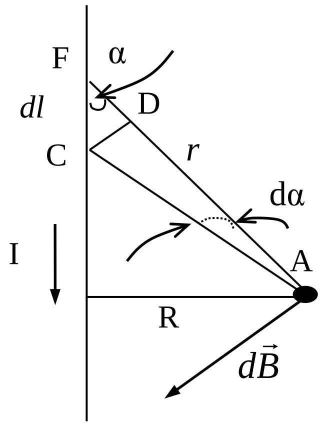


Рисунок 3.42

$$r = \frac{R}{\sin\alpha}; \quad dl = \frac{r\,d\alpha}{\sin\alpha}. \; dl = \frac{R}{\sin\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{\sin\alpha}.$$

(Радіус дуги DC, внаслідок того що dl досить мале, дорівнює r і кут FDC по цій причині можна вважати прямим).

Підставивши ці вирази у формулу закону Б-С-Л, отримаємо:

$$dB = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R}\sin\alpha\, d\alpha. \quad B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha \cdot d\alpha = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right).$$

Для всіх елементів прямолінійного провідника кут α змінюється від 0 до π. $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi; \cos 0 = 1, \cos\pi = -1$. Звідси, магнітна індукція поля прямолінійного провідника зі струмом дорівнює:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R}.$$

б) ***магнітне поле в центрі колового провідника зі струмом***.

Якщо розбити провідник на елементи, то всі елементи створюють в центрі магнітне поле, вектор індукції якого напрямлений вздовж перпендикуляра. Тому векторну суму $d\vec{B}$ можна замінити сумою їх модулів. Оскільки всі елементи $d\vec{l}$ перпендикулярні до радіус-вектора ($\sin\alpha = 1$), а відстань до них від центра однакова і дорівнює R, то можна записати:

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi R^2} I\,dl.$$

Тоді:
$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2}\oint dl = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2} 2\pi R = \mu\mu_0 \frac{I}{2R}.$$

Магнітна індукція поля в центрі колового провідника, який має один виток зі струмом, дорівнює:

$$B = \mu\mu_0 \frac{I}{2R}. \tag{3.51}$$

Якщо ж маємо ***соленоїд*** – циліндричну котушку, що складається з великої кількості витків, які утворюють гвинтову лінію, то магнітна індукція буде дорівнювати:

$$B = \mu\mu_0 nI, \tag{3.52}$$

де $n = \dfrac{N}{l}$ - кількість витків на одиницю довжини.

3.4.4 Сила Лоренца

Магнітне поле діє не тільки на провідники із струмом, але і на окремі заряджені частинки, що рухаються в магнітному полі. Сила $\vec{F}_Л$, що діє на електричний заряд, який рухається у магнітному полі, називається ***силою Лоренца***. Сила Лоренца розраховується за формулою:

$$\vec{F}_Л = q \cdot \vec{\upsilon} \times \vec{B} \tag{3.53}$$

Модуль сили Лоренца дорівнює:

$$F_Л = q \cdot \upsilon \cdot B \cdot \sin\alpha,$$

де q – заряд частинки;

B – індукція магнітного поля, в якому рухається заряд;

υ – швидкість заряду;

α – кут між векторами $\vec{\upsilon}$ і $\vec{B}$.

Напрям сили Лоренца визначається за правилом векторного добутку. На практиці можна використовувати правило лівої руки (див. рисунок 3.40), при цьому треба враховувати знак заряду. Для негативних частинок напрям сили змінюється на протилежний.

Взаємні розташування векторів $\vec{\upsilon}$, $\vec{B}$ і $\vec{F}_Л$ для позитивного і негативного зарядів показані на рисунку 3.43.

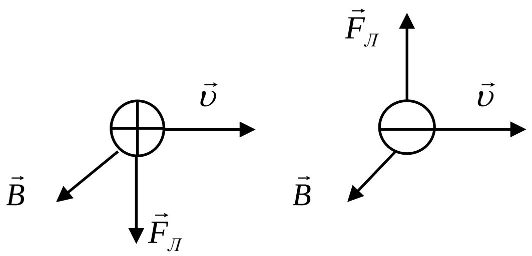


Рисунок 3.43

За допомогою сили Лоренца можна дати ще одне визначення ***магнітної індукції***: модуль вектора магнітної індукції в даній точці поля дорівнює максимальній силі Лоренца, що діє на одиничний позитивний заряд, який в даній точці рухається з одиничною швидкістю:

$$B = \frac{F_Л}{q\upsilon}.$$

Сила Лоренца напрямлена завжди перпендикулярно до швидкості руху зарядженої частинки і надає їй доцентрове прискорення. Не змінюючи модуля швидкості, а лише змінюючи її напрям, сила Лоренца не виконує роботи і кінетична енергія зарядженої частинки за умов руху в магнітному полі не змінюється.

Розглянемо окремі випадки.

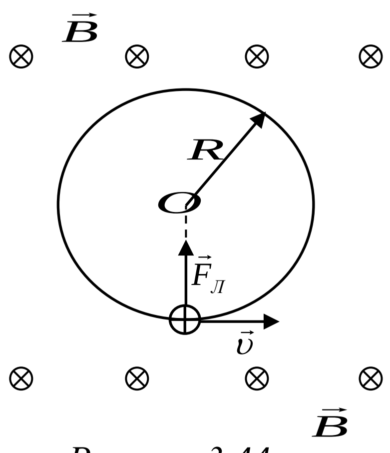


Рисунок 3.44

1. Заряджена частинка влітає в однорідне магнітне поле перпендикулярно до ліній магнітної індукції. Під дією сили Лоренца заряджена частинка буде рухатися по колу сталого радіусу R (рисунок 3.44).

$$F_Л = q\cdot\upsilon\cdot B\cdot\sin\alpha\,.$$

Оскільки $\vec{\upsilon}\perp\vec{B}$, тому $sin\alpha = 1$.

$$F_Л = q\cdot\upsilon\cdot B\,. \qquad (3.54)$$

За другим законом Ньютона

$$F = m\cdot a_n\,, \qquad (3.55)$$

а нормальне (доцентрове) прискорення:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}\,.$$

Тому, прирівнявши (3.52) (353) та підставивши a_n, отримуємо

$$q\cdot\upsilon\cdot B = m\frac{\upsilon^2}{R}\,.$$

З цього співвідношення радіус дорівнює:

$$R = \frac{m\upsilon}{qB}\,. \qquad (3.56)$$

Період обертання:

$$T = \frac{l}{\upsilon} = \frac{2\pi\cdot R}{\upsilon} = \frac{2\pi}{\upsilon}\frac{m\upsilon}{qB}\,,$$

де $l=2\pi R$ – довжина кола.

Звідси

$$T = \frac{2\pi m}{qB}\,. \qquad (3.57)$$

2. Заряджена частинка влітає в однорідне магнітне поле під кутом α до ліній магнітної індукції.

Розкладемо швидкість $\vec{\upsilon}$ зарядженої частинки на дві складові (рисунок 3.45): $\vec{\upsilon}_{\parallel}$ – паралельну до вектора $\vec{B}$ і $\vec{\upsilon}_{\perp}$ – перпендикулярну до вектора $\vec{B}$.

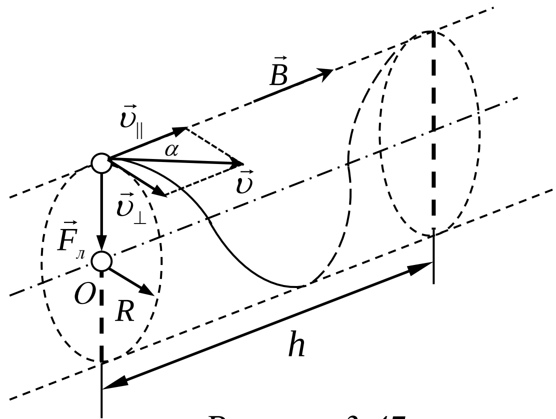


Рисунок 3.45

Швидкість в магнітному полі не змінюється і забезпечує переміщення зарядженої частинки уздовж силової лінії. Швидкість в результаті дії сили Лоренца змінюватиметься тільки за напрямом. Рух частинки можна розглядати як складання двох рухів: рівномірного обертання по колу з швидкістю $\vec{\upsilon}_{\perp}$ і рівномірного переміщення уздовж поля з швидкістю $\vec{\upsilon}_{\parallel}$. У результаті частинка буде рухатися по гвинтовій лінії.

На основі (3.56)

$$R = \frac{m\upsilon_{\perp}}{qB} = \frac{m\upsilon \sin\alpha}{qB}.$$

Крок h гвинтової лінії (відстань між сусідніми витками)

$$h = \upsilon_{\parallel} \cdot T.$$

Підставивши з (3.57) співвідношення для періоду, отримуємо:

$$h = \frac{2\pi m \cdot \upsilon \cos\alpha}{qB}. \tag{3.58}$$

Якщо на електричний заряд, що рухається, окрім магнітного поля діє і електричне поле, то результуюча сила, прикладена до заряду, дорівнюватиме векторній сумі сили $\vec{F}_E = q \cdot \vec{E}$ і сили Лоренца:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q \cdot \vec{\upsilon} \times \vec{B}$$

Останній вираз також називають ***силою Лоренца***, іноді – узагальненою силою Лоренца.

Приклад. В однорідне магнітне поле з індукцією *0,01 Тл* перпендикулярно до ліній індукції влітає протон з кінетичною енергією $12 \cdot 10^{-16}$ *Дж*. Який радіус траєкторії руху протона?

B= 0,01 Тл — Сила Лоренца, що діє на протон $F_Л = q \cdot \upsilon \cdot B$.

$E_K = 12 \cdot 10^{-16}$ *Дж* — З рівняння для кінетичної енергії протона $E_K = \frac{m\upsilon^2}{2}$

$q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *Кл* — знаходимо: $\upsilon = \sqrt{\frac{2E_K}{m}}$.

$m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ *кг* — Сила Лоренца зрівноважується доцентровою силою:

$$q \cdot \upsilon \cdot B = \frac{m\upsilon^2}{R}$$

R - ? — Радіус дорівнює $R = \frac{\sqrt{2E_К / m}}{qB}$.

$$R = \frac{\sqrt{2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-16} \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}}}{0{,}01 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 62{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ (м)}.$$

3.4.5 Явище електромагнітної індукції

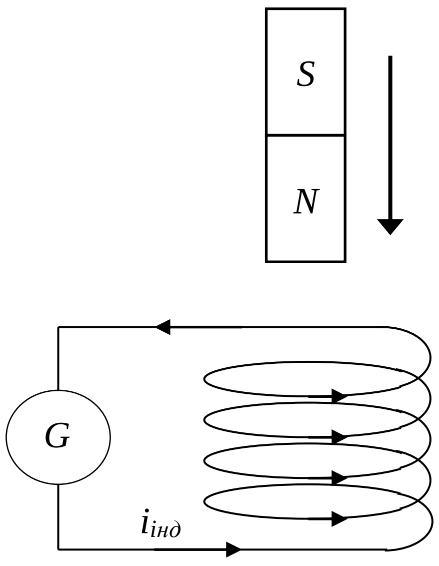


Рисунок 3.46

Досліди Ерстеда і Ампера показали, що навкруги провідників із струмом виникає магнітне поле. М. Фарадей висунув зворотну ідею: під дією змінного магнітного поля, в замкнутому провіднику повинен виникати електричний струм. Для доказу цієї ідеї Фарадей провів ряд дослідів. Один з них полягає в наступному (рисунок 3.46).
Якщо продовгастий магніт переміщувати вздовж осі котушки, то під’єднаний до неї гальванометр G реєструє появу струму. Напрям струму залежить від того, яким полюсом напрямлений магніт до котушки, а також від напряму його руху. Такий

самий результат виходив, якщо магніт залишався нерухомим, а котушку надівали на магніт або знімали з нього. Це явище отримало назву ***електромагнітної індукції***, а електричний струм, що виникає при цьому, – ***індукційним***.

Електромагнітної індукцією називається явище виникнення електрорушійної сили в провідному контурі при будь-якій зміні магнітного потоку, що пронизує цей контур.

Відомо, що електричний струм у замкненому колі може виникнути тільки під дією сторонніх сил. Отже, в замкненому контурі, що знаходиться у змінному магнітному полі, з'являються сторонні сили, які індуковані змінним магнітним полем. Енергетичною мірою сторонніх сил, як відомо, є електрорушійна сила (ЕРС), або у випадку, що розглядається, ***ЕРС електромагнітної індукції*** ε_i.

Подальші дослідження індукційного струму в контурах різної форми й розмірів показали, що ЕРС електромагнітної індукції в контурі пропорційна швидкості зміни магнітного потоку через поверхню, обмежену цим контуром:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (3.59)$$

Це співвідношення називається ***законом Фарадея*** для електромагнітної індукції.

ЕРС електромагнітної індукції не залежить від того, чим саме викликана зміна магнітного потоку: деформацією контуру, його переміщенням у магнітному полі або зміною самого магнітного поля.

Знак «–» в законі Фарадея обумовлений ***правилом Ленца***: при будь-якій зміні магнітного потоку через поверхню, яка обмежена замкненим контуром, в останньому виникає індукційний струм такого напрямку, що його магнітне поле протидіє зміні магнітного потоку.

При цьому слід взяти до уваги, що вектор нормалі до поверхні, яка обмежена контуром, та напрям обходу цього контуру пов’язані між собою правилом правого гвинта.

Так, при наближенні магніту до котушки, яка замкнена на гальванометр, (див. рисунок 3.40) в ній наводиться індукційний струм, що своєю магнітною дією перешкоджає наближенню магніту й пов'язаному з цим зростанню магнітного потоку через витки котушки. При віддаленні магніту від котушки в ній наводиться струм протилежного напрямку, що своєю магнітною дією також перешкоджає руху магніту. Легко перевірити, що усередині котушки вектори магнітної індукції поля магніту й поля індукційного струму в першому випадку спрямовані в протилежні боки, а в другому – в один й той самий бік.

Якщо розглянути контур, що складається не з одного витка, а з N витків, наприклад, соленоїд, то загальна ЕРС, яка індукується у такому контурі, буде дорівнювати сумі ЕРС індукованих у кожному з витків зокрема:

$$\varepsilon_i = -\sum \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(\sum \Phi)}{dt}.$$

Величину $\Psi = \sum \Phi$ називають ***повним магнітним потоком*** або ***потоком зчеплення***.

Його вимірюють у тих самих одиницях, що й магнітний потік Ф, тобто у веберах (*1 Вб=1 Тл·1 м*^{2}).

Якщо потік, що пронизує кожний з витків, однаковий, то

$$\Psi = N \cdot \Phi$$

ЕРС, яка індукується в такому контурі, визначається за формулою:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt} . \qquad (3.60)$$

3.4.6 Самоіндукція. Індуктивність.

Самоіндукція − це явище виникнення електрорушійної сили в провідному контурі при зміні електричного струму, що протікає в ньому. Самоіндукція є окремим випадком електромагнітної індукції. При зміні струму в контурі змінюється потік магнітної індукції через поверхню, обмежену цим контуром. В результаті цього в ньому збуджується ЕРС самоіндукції. При збільшенні в колі сили струму ЕРС самоіндукції перешкоджає його зростанню, а при зменшенні струму – його убуванню. Можна сказати, що самоіндукція подібна явищу інерції в механіці. З експерименту виходить, що величина ЕРС самоіндукції пропорційна швидкості зміни сили струму і величині, званою індуктивністю.

Електричний струм, якій тече в провідному контурі, створює в навколишньому просторі магнітне поле. Повний магнітний потік Ψ, що пронизує контур (зчеплений з ним), буде прямо пропорційний до струму:

$$\Psi = L \cdot I . \qquad (3.61)$$

Коефіцієнт пропорційності L між повним магнітним потоком і силою струму називається індуктивністю контуру або коефіцієнтом самоіндукції контуру. ***Індуктивність*** (L) − це скалярна фізична величина, що характеризує магнітні властивості електричного кола і дорівнює відношенню повного магнітного потоку, до сили струму, який тече в контур і створює цей потік:

$$L = \frac{\Psi}{I} .$$

Пропорційність потоку Ψ силі струму I має місце тільки в тому випадку, коли магнітна проникність μ середовища, яким оточений контур, не залежить від напруженості поля H, тобто за умови відсутності феромагнетиків. У протилежному разі μ є складною функцією від I, і залежність Ψ від I також буде складною оскільки $B = \mu\mu_0 H$. Однак формулу (3.61) поширюють і на цей випадок, вважаючи індуктивність L функцією від I. При незмінній силі струму повний потік може змінюватися також за рахунок зміни форми й розмірів контуру.

Таким чином, індуктивність залежить від геометрії контуру (тобто від його форми й розмірів), а також від магнітних властивостей (від μ) середовища навколо контуру. Якщо контур жорсткий і поблизу нього відсутні феромагнітні тіла, індуктивність є сталою величиною.

Одиницею індуктивності є генрі (Гн) – індуктивність такого провідника, у якому при силі струму 1 А виникає зчеплений з ним повний магнітний потік 1Вб. (1 Гн=1 Вб/(1 А)).

3.4.6.1 Індуктивність соленоїда

Розглянемо соленоїд такої довжини, щоб його можна було вважати нескінченним. При проходженні через нього струму I всередині соленоїда збуджується однорідне поле з індукцією $B = \mu\mu_0 nI$ (див. магнітне поле соленоїда). Потік через кожний з витків дорівнює $\Phi = BS$, а повний магнітний потік, який зчеплений із соленоїдом, рівний

$$\Psi = N \cdot \Phi = N \cdot BlS = \mu\mu_0 N^2 lSI \,, \qquad (3.62)$$

де l – довжина соленоїда;
S – площа поперечного перерізу;
N – кількість витків на одиницю довжини (добуток Nl дає повне число витків соленоїда).

Із порівняння співвідношень (3.61) і (3.62) отримуємо вираз для визначення індуктивності досить довгого соленоїда:

$$L = \mu\mu_0 N^2 lS = \mu\mu_0 N^2 V \,,$$

де $V = lS$ – об'єм соленоїда.

Із останнього співвідношення випливає, що індуктивність соленоїда без феромагнітного осердя пропорційна до квадрату густини намотування витків.

Зміни сили струму в контурі супроводжуються виникненням електрорушійної сили самоіндукції , яка, згідно (3.60), визначається формулою

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(L \cdot I)}{dt} = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt} \right).$$

Якщо при змінах сили струму індуктивність залишається сталою (що можливо тільки за умови відсутності феромагнетиків), вираз для ЕРС самоіндукції спрощується до:

$$\varepsilon_i = -L\frac{dI}{dt} \,. \qquad (3.63)$$

Знак мінус у цій формулі обумовлений правилом Ленца, відповідно до якого індукційний струм спрямований так, щоб протидіяти причині, яка його викликає. Останнє співвідношення дає можливість визначити індуктивність як коефіцієнт пропорційності між швидкістю зміни сили струму в контурі і ЕРС самоіндукції, що виникає внаслідок цього. Проте, таке визначення справедливе лише у разі, коли $L = const$.

3.5 Змінний електричний струм

3.5.1 Принцип дії генератора змінного струму

Одним з найважливіших застосувань явища електромагнітної індукції є перетворення механічної енергії в електричну.

Розглянемо рамку, що складається з N витків, яка обертається в магнітному полі ($\vec{B} = const$) зі сталою кутовою швидкістю ω (рисунок 3.47). Повний магнітний потік, що пронизує рамку, у будь-який момент часу визначається співвідношенням:

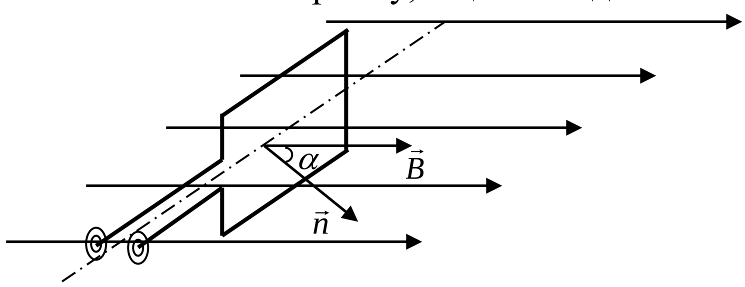


Рисунок 3.47

$$\Psi = N \cdot S \cdot B\cos\alpha ,$$

де S − площа рамки;

α − кут між векторами нормалі $\vec{n}$ та магнітної індукції $\vec{B}$.

При рівномірному обертанні $\alpha = \omega t$.

При обертанні рамки в ній індукується ЕРС, що згідно закону Фарадея (див. формулу 3.60), дорівнює:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(NSB\cos\omega t)}{dt} = NSB\omega\sin\omega t .$$

ЕРС електромагнітної індукції в рамці змінюється за законом синуса (гармонічна величина). Тому $N{\cdot}S{\cdot}B\omega$ можна розглядати як амплітудне значення змінної величини ЕРС.

$$\varepsilon_i = E_0 \sin \omega t .$$

Виникнення ЕРС індукції в рамці, яка обертається в магнітному полі, лягло в основу створення генераторів змінного струму. Якщо кінці рамки приєднати до двох мідних кілець, що обертаються разом з нею і дотичні до двох нерухомих вугільних щіток, а до щіток приєднати електричне коло, то в колі потече змінний струм *і,* який змінюється за законом ЕРС.

За законом Ома:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{E_0}{R}\sin \omega t = I_0 \sin \omega t ,$$

де i – миттєве значення струму (значення струму в даний момент часу);

I_0 – амплітудне значення струму.

3.5.2 Характеристики змінного струму

Змінним струмом називають струм, який змінюється з часом. Зазвичай змінним називають струм, який змінюється за величиною і напрямом. Один із двох можливих напрямів струму приймають за додатній, інший – за від’ємний. Струм рахується означений, коли відома його залежність від часу $i = f(t)$ та вказаний його додатній напрям.

Змінний струм, що змінюється за законом синуса, називається ***синусоїдним***. Миттєве значення синусоїдного струму визначається:

$$i = I_0 \sin(\omega t + \varphi) ,$$

I_0 – амплітуда сили струму;

аргумент синуса $\omega t + \varphi$ – фаза, φ – початкова фаза;

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ – швидкість зміни фази: циклічна частота.

Беручи до уваги $1/T=\nu$, можна записати $\omega = 2\pi\nu$.

Якщо характеризувати графік залежності струму від часу, то на протязі першої половини періоду струм додатній (i>0), тобто він змінюється за величиною. На протязі другої половини періоду – струм від’ємний, Це означає, що дійсний напрям струму змінився.

На сьогодні вся електрична енергія виробляється у вигляді енергії змінного струму. Постійний струм, необхідний в різних галузях промисловості, отримується шляхом випрямлення змінного струму. В генераторах змінного струму отримують синусоїдний струм, при цьому синусоїдними будуть і електрорушійна сила, і напруга.

$$e = E_0 \sin(\omega t + \varphi), \qquad u = U_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

На рисунку 3.48 для *t=0* величина сили струму дорівнює нулю. У цьому випадку крива проходить через початок координат. При *t=t₁* величина сили струму визначається фазним кутом ωt_1, а при $t=t_2$ – фазним кутом ωt_2, тобто

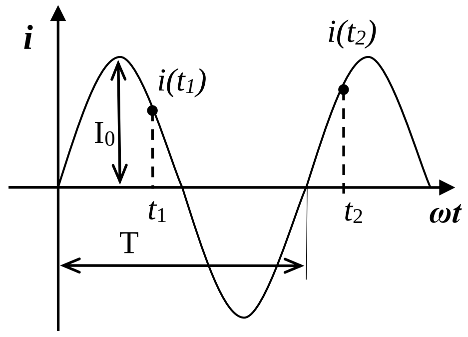


Рисунок 3.48

$$i_1 = I_0 \sin(\omega t_1 + \varphi), \qquad i_2 = I_0 \sin(\omega t_2 + \varphi).$$

Синусоїди змінного струму можуть не проходити через початок координат і при $t = 0$ можуть мати певне значення. Щоб описати такі криві рівняннями, в аргумент синуса вводять, так звану, початкову фазу φ, яка показує величину струму в початковий момент часу *t=0*. Початкова фаза може бути як додатною, так і від'ємною. Тому, в загальному, можна записати

$$i = I_0 \sin(\omega t \pm \varphi).$$

Отже, кожна електрична величина, яка змінюється за законом sin, характеризується амплітудою, фазою і кутовою (циклічною) частотою. Якщо є дві такі величини однакової частоти, з однаковими фазами і будь-якими амплітудами, то про них говорять, що вони збігаються за фазою. Якщо ж вони досягають максимальних та нульових значень неодночасно, то вони зсунуті за фазою одна відносно одної. Синусоїдну електричну величину, амплітудне або нульове значення якої настає раніше, називають *випереджаючою*, а ту, в якої ті ж самі значення настають пізніше, – *відстаючою* за фазою. Різницю початкових фазових кутів двох синусоїдних величин тієї самої частоти називають *кутом зсуву фаз*, або зсувом фаз: $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

Розраховуючи електричні кола змінного струму, часто доводиться додавати ЕРС, струми, або напруги. Це можна зробити аналітично і графічно. Останній спосіб простіший і наочніший. Наприклад, потрібно додати дві ЕРС (рисунок 3.49)

$$\varepsilon_1 = E_{01} \sin(\omega t + \varphi_1) \qquad \varepsilon_2 = E_{02} \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Амплітуду результуючої величини ЕРС знаходимо за формулою:

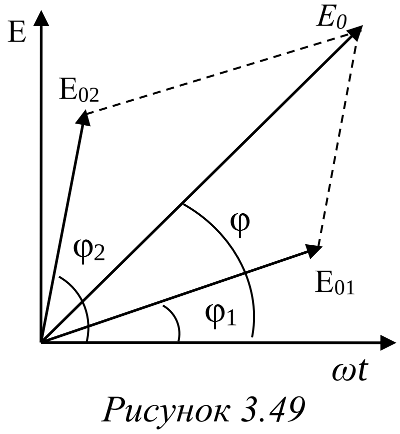


Рисунок 3.49

$$E_0 = \sqrt{E_{01}{}^2 + E_{02}{}^2 + 2E_{01}{}^2 E_{02}{}^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

де $\varphi_1 - \varphi_2$ – різниця фаз, а початкову її фазу – із виразу:

$$\varphi = arctg\,\frac{E_{01}\sin\varphi_1 + E_{02}\sin\varphi_2}{E_{01}\cos\varphi_1 + E_{02}\cos\varphi_2}.$$

Векторні діаграми частіше зображують не амплітудними, а діючими значеннями, які пропорційні амплітудним значенням.

3.5.2.1 Діючі значення електричних синусоїдних величин

Якщо в коло змінного струму ввімкнути споживач електроенергії опором *R*, то за нескінченно малий проміжок часу *dt* споживана енергія дорівнюватиме:

$$dW = u \cdot i \cdot dt,$$

де *u* та *i* - миттєві значення напруги та струму.

Оскільки $u=iR$, то $dW=i^2Rdt$.

Проінтегрувавши останній вираз від 0 до T, знайдемо споживану енергію за період:

$$W = \int_0^T i^2 R dt.$$

Підставивши значення миттєвого струму $i = I_0 \sin \omega t$, матимемо:

$$W = I_0 R \int_0^T \sin^2 \omega t \, dt.$$

Відомо, що $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\omega t$, тоді $W = \frac{I_0^2 R}{2}\left(\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2\omega t dt\right)$.

Другий інтеграл дорівнює нулю, тому отримуємо:

$$W = \frac{I_0^2 RT}{2}.$$

Якщо цей самий споживач з таким самим опором *R* увімкнути в електричне коло постійного струму, то можна підібрати такий постійний струм *I*, який за цей самий час *T* виділить на споживачі таку саму кількість енергії, що і змінний, а саме

$$W = I^2 \cdot R \cdot T.$$

Прирівнявши ці енергії, отримаємо:

$$I^2 RT = \frac{I_0^2 RT}{2}, \quad \text{звідки} \quad I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0{,}707 I_0.$$

Отже, ***діючим (ефективним) значенням*** змінного струму називається такий постійний за величиною струм, який при однаковому опорі кола за той самий час виділить таку саму кількість енергії, що й змінний струм.

Відповідно діючі значення напруги та ЕРС дорівнюють:

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = 0{,}707 U_0 \quad E = \frac{E_0}{\sqrt{2}} = 0{,}707 E_0$$

Більшість систем електровимірювальних пристроїв, які використовуються для вимірювання періодичних напруг і струмів, показують діючі значення цих величин. Крім діючих значень в електроніці розглядають також і *середні* значення струмів, напруг та ЕРС. Для синусоїдних величин середнє значення за весь період дорівнює нулю, тому їх середнє значення визначають за півперіод:

$$I_{cp} = \frac{2}{\pi} I_0 = 0{,}637 I_0, \quad U_{cp} = \frac{2}{\pi} U_0 = 0{,}637 U_0, \quad E_{cp} = \frac{2}{\pi} E_0 = 0{,}637 E_0.$$

3.5.3 Активний опір в колі змінного струму

а) напруга та струм кола

Якщо припустити, що електричне коло (рисунок 3.50) складається тільки з опору R і на затискачах діє прикладена синусоїдна напруга $u = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$, то за законом Ома в опорі буде протікати струм:

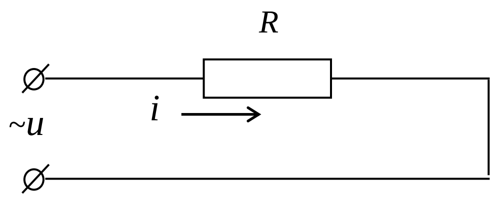


Рисунок 3.50

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_0 \sin(\omega t + \varphi)}{R} \; ; \qquad I_0 = \frac{U_0}{R};$$

$$i = I_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

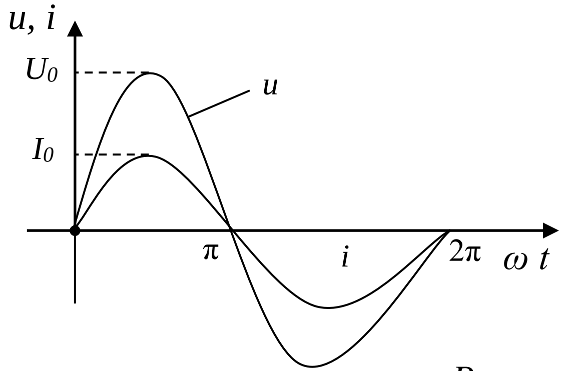
де I_0 – амплітудне значення струму.

Якщо амплітудні значення поділити на $\sqrt{2}$, то отримаємо:

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}\,R} = \frac{U}{R}.$$

Таким чином, закон Ома для електричного кола з опором R може бути записаний для миттєвих значень, амплітудних і діючих значень напруги та струму.

Напруга і струм мають однакову початкову фазу, іншими словами: вони співпадають за фазою. В кожний момент часу миттєві значення струму та напруги пропорційні один одному (рисунок 3.51).



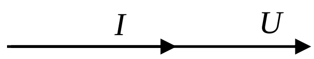


Рисунок 3.51

б) потужність кола

Добуток миттєвих значень струму та напруги називається ***миттєвою потужністю:*** $p = u \cdot i$.

Підставимо $u = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$ та $i = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ отримаємо:

$$p = U_0 I_0 \sin^2(\omega t + \varphi).$$

Перейшовши до ефективних значень струму і напруги та середнього значення за період потужності можна записати, що

$$P = U \cdot I = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

Середню за період потужність прийнято називати ***активною потужністю***, а опір, в якому електрична енергія незворотньо перетворюється в теплову називається ***активним опором***.

3.5.4 Індуктивність в колі змінного струму

а) напруга та струм кола

Розглянемо електричне коло в якому є тільки індуктивність, наприклад котушка індуктивності (рисунок 3.52). Якщо через котушку індуктивності буде протікати синусоїдний струм $i = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$, то навколо її витків виникне змінне магнітне поле, а в котушці – електрорушійна сила самоіндукції:

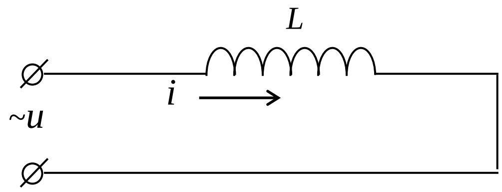


Рисунок 3.52

$$e_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}.$$

Якщо підставити значення струму, то формула перепишеться:

$$e_L = -L\frac{di}{dt} = -\omega L I_0 \cos(\omega t + \varphi) = E_0 \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}), \qquad |-\cos\omega t = \sin(\omega t - \pi/2)|$$

де $E_0 = \omega L I_0$ – амплітуда ЕРС самоіндукції.

Так як опір кола *R=0*, то за другим правилом Кірхгофа сума напруги на затискачах коло та ЕРС самоіндукції дорівнює нулю: $u + e_L = 0$.

Звідси $u = -e_L = L\dfrac{di}{dt} = \omega L I_0 \cos(\omega t + \varphi) = U_0 \sin(\omega t + \varphi + \dfrac{\pi}{2})$.

Таким чином, прикладена до кола напруга викликає в ньому струм, що в кожний момент часу індукує електрорушійну силу самоіндукції рівну за величиною і протилежну за знаком, тобто зрівноважуючу напругу.

Напруга випереджає струм за фазою на $\dfrac{\pi}{2}$, тобто на ¼ періоду (рисунок 3.53).

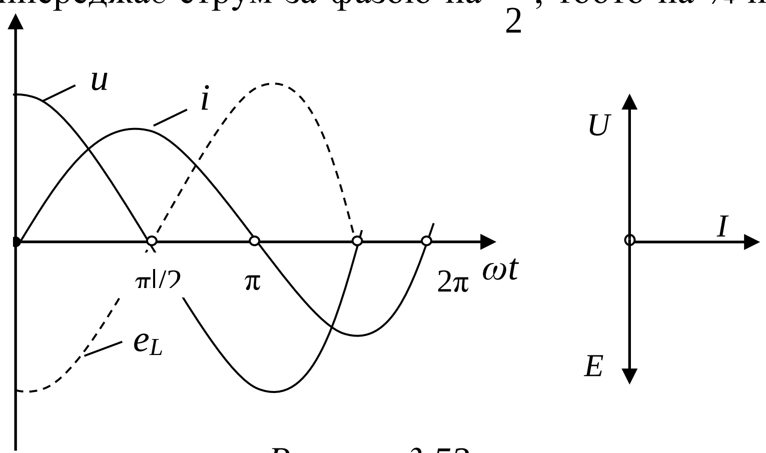


Рисунок 3.53

З останнього рівняння випливає, що $U_0 = \omega L I_0$, та $I_0 = \dfrac{U_0}{\omega L}$.

Це ***закон Ома*** для амплітудних значень.

Поділивши амплітудні значення на $\sqrt{2}$ матимемо співвідношення між діючими значеннями струму та напруги:

$$U = \omega L I\,; \qquad I = \frac{U}{\omega L}.$$

Необхідно зауважити, що е.р.с самоіндукції називається ***реактивною ЕРС***, а напругу , яка зрівноважує цю ЕРС – ***реактивною напругою***.

Отже, для амплітудного і діючого значень струму (але тільки не для миттєвого), що тече в котушці індуктивності справджується співвідношення, аналогічне до закону Ома.

У знаменнику останнього виразу величину ωL називають ***реактивним (індуктивним)*** опором і позначають X_L (вимірюється в Омах).

$$X_L = \omega L = 2\pi \nu L.$$

Індуктивний опір пропорційний індуктивності котушки і частоті струму: із підвищенням частоти індуктивний опір зростає. Постійному струмові (ν=0) індуктивність опору не чинить.

б) потужність і енергія

Миттєве значення потужності на індуктивності дорівнює:

$$u\,i = U_0 \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) I_0 \sin(\omega t + \varphi) = U_0 I_0 \cos(\omega t + \varphi)\sin(\omega t + \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} U_0 I_0 \sin(2\omega t + \varphi)$$

Перейшовши до діючих значень, матимемо:

$$Q_L = U I \sin(2\omega t + \varphi)$$

Q_L - реактивна потужність.

Для $\sin(2\omega t+\varphi)=1$ реактивну потужність можна визначити через величину сили струму:

$$Q_L = UI = \omega LI \cdot I = \omega LI^2 = X_L I^2.$$

Одиниця вимірювання реактивної потужності – вольт-ампер реактивний (ВАр), або кіловольт-ампер реактивний (кВАр).

Величину енергії, зосередженої в котушці індуктивності, можна знайти за формулою: $$W_L = \frac{LI_0^2}{2}.$$

Тобто, максимальна енергія, яка зосереджується в котушці при змінному струмі, пропорційна квадрату амплітудного значення струму.

3.5.5 Ємність в колі змінного струму

а) напруга та струм в колі

Розглянемо електричне коло в якому є тільки ємність і протікає синусоїдний струм $i = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ (рисунок 3.54).

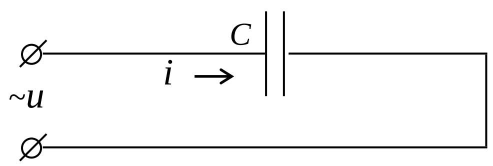


Рисунок 3.54

За нескінченно короткий проміжок часу dt напруга на конденсаторі зміниться на du_c, а заряд на dq.

$$dq = C\,du_c.$$

Але кількість заряду, що проходить через провідник за одиницю часу, є струм. Тому

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad dq = i\,dt, \quad du_c = \frac{1}{C} i\,dt, \quad u_c = \frac{1}{C}\int i\,dt.$$

$$u_c = \frac{1}{C}\int I_0 \sin(\omega t + \varphi)\,dt = -\frac{1}{\omega C} I_0 \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{\omega C} I_0 \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) =$$

$$U_0 \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

Напруга на конденсаторі відстає від струму на π/2, або на ¼ періоду (рисунок 3.55) . Напругу на конденсаторі називають реактивною.

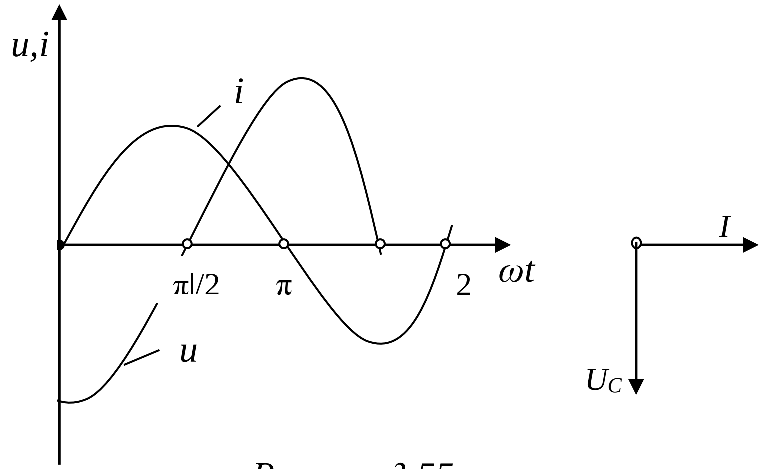


Рисунок 3.55

У даній формулі $U_0 = \dfrac{1}{\omega C} I_0$, а для діючих значень $U_C = \dfrac{1}{\omega C} I$.

Величина $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ називається ***реактивно-ємнісним*** опором, або просто ємнісним (вимірюється в Омах).

Оскільки ємнісний опір дорівнює

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C},$$

тобто обернено пропорційний частоті струму, то для струмів високих частот він має мале значення, для постійного струму нескінченно велике.

Постійний струм (ν=0) через конденсатор протікати не може.

б) потужність і енергія

$$Q_C = U_C I = \frac{1}{\omega C} I \cdot I = X_C I^2;\ W_C = \frac{U_0^2}{2C}.$$

3.5.6 Послідовне з’єднання активного опору, індуктивності та ємності в колі змінного струму

Якщо в коло змінного струму $i = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ послідовно ввімкнути активний (R), індуктивний (X_L) і ємнісний (X_C) опори (рисунок 3.56), то на цих опорах матимемо відповідно спади напруг U_a, U_L, U_C .

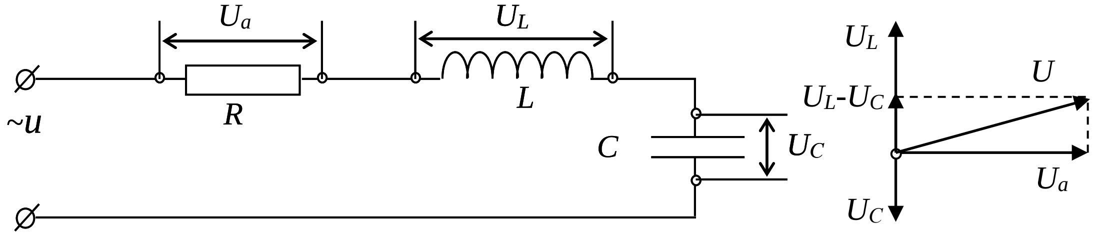


Рисунок 3.56

За другим правилом Кірхгофа можна записати: $u + e_L = iR + u_c$.

Оскільки $u_L = -e_L$; $u_a = iR$, то $u = u_a + u_c + u_L$, тобто миттєве значення прикладеної напруги в будь-який момент часу дорівнює алгебраїчній сумі спадів напруг на ділянках кола. На підставі цього можна записати рівняння напруг:

$$U_0 \sin(\omega t+\varphi) = U_{0a} \sin(\omega t+\varphi) + U_{0C} \sin(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2}) + U_{0L} \sin(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}).$$

Амплітуда результуючої напруги дорівнює векторній сумі амплітудних значень спадів напруг на ділянках кола $\vec{U}_0 = \vec{U}_{0a} + \vec{U}_{0C} + \vec{U}_{0L}$,и або для діючих значень $\vec{U} = \vec{U}_a + \vec{U}_C + \vec{U}_L$.

Для випадку $X_L>X_C$ з векторної діаграми випливає, що

$$U = \sqrt{U_a^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{(IR)^2 + (I X_L - I X_C)^2} = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

Звідси
$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}.$$

Це співвідношення відображає ***закон Ома*** для кола змінного струму з послідовним з'єднанням *R, L, C* елементів.

а) резонанс напруг

Особливо цікавим є момент коли $X_L = X_C$. Тоді $U_L = U_C$.

Таке явище називається ***резонанс напруг***. При резонансі напруг у колі буде найбільший струм, тому що загальний опір кола буде найменшим і дорівнюватиме активному опору. При відхилені від резонансної умови струм в колі буде зменшуватися, тому що до активного опору буде додаватися реактивний опір.

Резонанс напруг можна досягти змінивши одну з таких трьох величин: індуктивність, ємність або частоту. Частоту, при якій настає резонанс при певних L і C, можна знайти з умови $X_L = X_C$.

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}; \quad 2\pi\nu L = \frac{1}{2\pi\nu C}. \quad 4\pi^2\nu^2 L C = 1. \quad \nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Частота ν_0 – називається ***резонансною*** (власною) частотою електричного кола. Резонанс напруг наступає, коли резонансна частота кола співпадає з частотою мережі (вимушені коливання). При резонансній частоті в колі протікатиме максимальний струм.

б)потужність при резонансі напруг

З рівняння загальної потужності $S = \sqrt{P^2 + (Q_L - Q_C)^2}$ отримуємо:

$$S = \sqrt{(I^2 R)^2 + (I^2 X_L - I^2 X_C)^2} = I^2\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

При резонансі $X_L = X_C$, то $S = I^2 R = P$.

Отже, загальна потужність при резонансі напруг дорівнює активній потужності. Кут φ між струмом та прикладеною напругою дорівнює нулю, а коефіцієнт потужності cos φ =1.

3.5.7 Паралельне з'єднання споживачів.

а) резонанс струмів

При паралельному з'єднанні споживачів (рисунок 3.57), відповідно до першого закону Кірхгофа, діюче значення загального струму дорівнює сумі струмів окремих віток $I = I_1 + I_2$. Так як у вітках різного роду навантаження мають різні значення, то попередній вираз потрібно записати у векторній формі

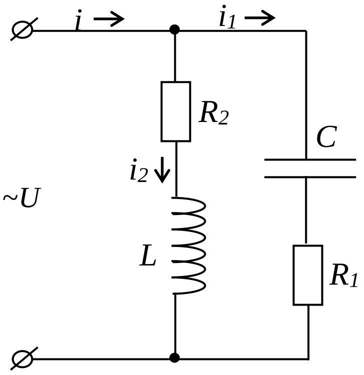


Рисунок 3.57

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 \,.$$

Побудуємо векторну діаграму для цих струмів. У векторній діаграмі за опорну вісь вибираємо вісь напруги *U*. Миттєве значення сили струму

$$i = \mathrm{I}_0 \sin\left(\omega \mathrm{t} + \varphi\right).$$

З векторної діаграми слідує, що

$$I = \sqrt{(I_{a1} + I_{a2})^2 + (I_C - I_L)^2} = \sqrt{I_a{}^2 + (I_C - I_L)^2} \,.$$

Якщо підібрати індуктивний X_L та ємнісний X_C опори так, щоб індуктивний струм у колі дорівнював за значенням ємнісному $I_C = I_L$, тобто вектор струму $\vec{I}$ збігався за фазою з вектором напруги $\vec{U}$, то настає резонанс струмів.

$$I_C = U_0 \omega C \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), I_L = \left(\frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\right) \sin\left(\omega t - \varphi_L\right).$$

Явище встановлення мінімального значення сили струму в нерозгалуженій частині кола при паралельному з’єднанні елементів називається ***паралельним резонансом*** або резонансом струмів. Опір паралельної вітки стає дуже великим а при R=0 прямує до нескінченності.

б)потужність при резонансі струмів

Потужність електричного кола $S = UI$ є повною потужністю, що виділяється на активному та реактивному опорах.

Активна складова потужності $P = UI_{\mathrm{a}}$, а відношення активної складової до значення повної потужності дорівнює коефіцієнту потужності:

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} \,.$$

3.5.8 Коливальний контур

Коливальним контуром називається електричне коло, яке складається з послідовно з’єднаних конденсатора ємністю С, котушки індуктивністю L і активного опору R. В ідеалізованому електричному колі $R \to 0$. Тоді коливальний контур складатиметься з *C* і *L* (рисунок 3.58).

Коливання в контурі можна викликати, надавши обкладкам конденсатора деякий початковий заряд. Якщо замкнути ключ в положення 1, на обладках конденсатора виникнуть два різнойменні заряди +*q* і –*q* (конденсатор зарядиться). Між ними виникне електричне поле, енергія якого

$$W_{ел} = \frac{q^2}{2C} \,. \qquad (3.64)$$

Якщо потім відключити джерело напруги і замкнути конденсатор на індуктивність (ключ в положенні 2), то конденсатор почне розряджатися. в контурі потече електричний струм. В результаті цього енергія електричного поля зменшуватиметься, проте виникне магнітне поле з енергією

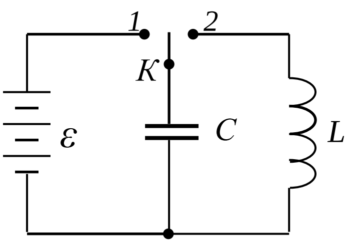


Рисунок 3.58

$$W_{маг} = \frac{LI^2}{2}, \qquad (3.65):$$

яка зростатиме.

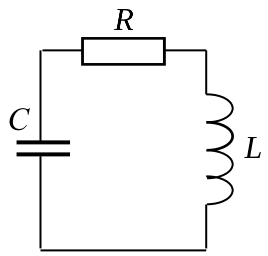


Рисунок 3.59

Оскільки активний опір ідеалізованого коливального контура $R=0$, тому енергія не витрачається на нагрівання проводів і залишається величиною сталою.

$$W_{ел} + W_{маг} = const,$$

або
$$\frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = const.$$

Продеференціювавши останнє рівняння за часом, та розділивши кожен член його на L, отримаємо

$$I\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}q\frac{dq}{dt} = 0$$

Оскільки за визначенням $I = \frac{dq}{dt}$, то $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$.

На підставі цього можна записати:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Якщо ввести позначення $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, рівняння можна привести до вигляду:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \qquad (3.66)$$

Розв’язком цього рівняння є:

$$q = Q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \qquad (3.67)$$

де Q_0 – максимальне (амплітудне) значення заряду.

Таким чином, заряд на обкладках конденсатора змінюється за гармонічним законом. Період коливань у коливальному контурі можна визначити за формулою, яка називається ***формулою Томсона***:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Напруга на конденсаторі відрізняється від заряду множником 1/С (нагадаємо, що за визначенням $C=q/U$):

$$U = \frac{q}{C} = \frac{Q_0}{C}\cos(\omega_0 t + \varphi) = U_0\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

де $U_0 = \frac{Q_0}{C}$ – амплітудне значення напруги.

Диференціюючи функцію (3.67) по часу, отримаємо формулу для сили струму:

$$I = -\omega Q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_0\cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Таким чином, сила струму випереджає за фазою напругу на конденсаторі на $\pi/2$.

В коливальному контурі відбуваються коливання заряду, різниці потенціалів та струму, що протікає в колі.

Будь-який реальний коливальний контур має активний опір ($R \neq 0$) (рисунок 3.59). Енергія, яка накопичена в контурі, витрачається в цьому опорі на нагрівання, тому вільні коливання загасають. Отримаємо диференціальне рівняння загасаючих коливань, використовуючи закон збереження енергії.

Втрати енергії дорівнюють кількості теплоти, що виділяється на активному опорі:

$$-d(W_{ел}+W_{маг})=\delta Q\,. \qquad (3.68)$$

Знак “–“ перед диференціалом означає, що енергія зменшується.

Згідно (3.64) і (3.65):

$$W_{ел}=\frac{q^2}{2C}; \qquad W_{маг}=\frac{LI^2}{2}.$$

За законом Джоуля-Ленца:

$$\delta Q=I^2Rdt\,.$$

Дані співвідношення підставимо в (3.68).

$$-\left(\frac{1}{2C}2qdq+\frac{L}{2}2IdI\right)=I^2Rdt\,.$$

Розділивши останнє співвідношення на добуток Ldt і врахувавши, що $I=\frac{dq}{dt}$, а $\frac{dI}{dt}=\frac{d^2q}{dt^2}$, отримаємо диференціальне рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{LC}q=0\,.$$

Якщо ввести позначення $\beta=\frac{R}{2L}$ та $\omega_0^2=\frac{1}{LC}$, то диференціальне рівняння можна записати у вигляді:

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\beta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2q=0\,.$$

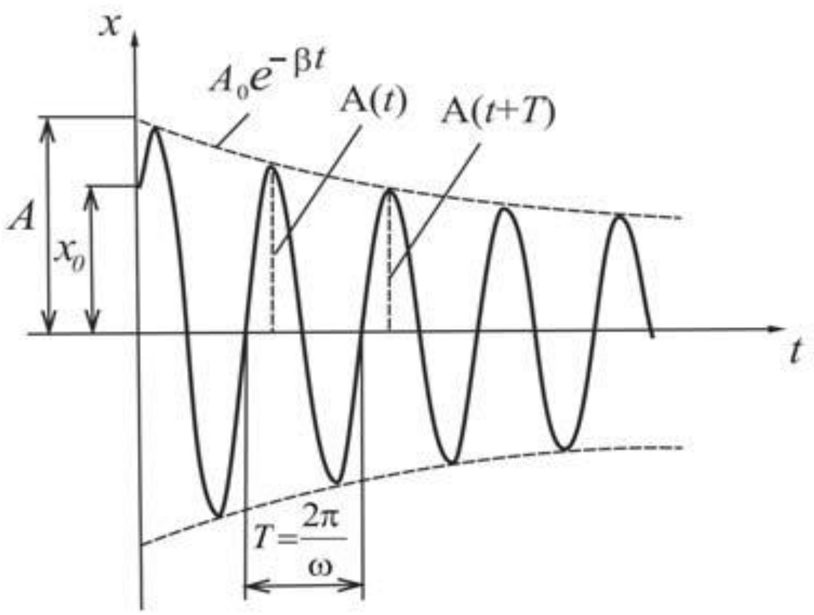


Рисунок 3.60

3.6 Трансформатор

3.6.1 Будова і принцип дії однофазного трансформатора.

Трансформатор – статичний електромагнітний пристрій для перетворення змінного струму однієї напруги у змінний струм іншої напруги при незмінній частоті.

Принцип роботи трансформатора ґрунтується на явищі електромагнітної індукції. Щоб показати принцип роботи трансформатора, розглянемо будову та принцип роботи однофазного двообмоткового трансформатора (рисунок 3.61).

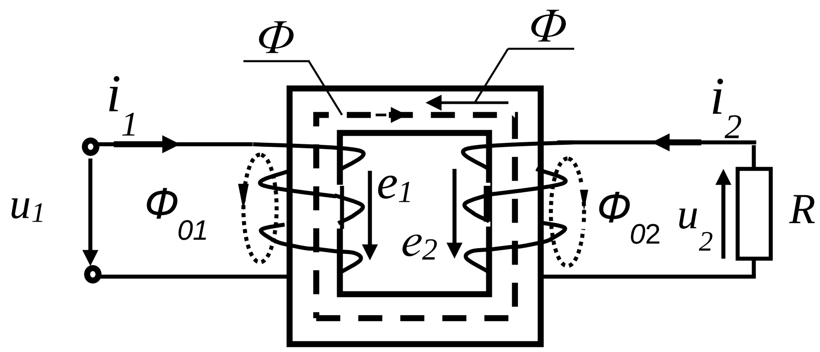


Рисунок 3.61

Основні частини трансформатора — магнітопровід та обмотки.

Магнітопровід **-** це замкнуте феромагнітне осердя трансформатора, на якому розміщені електрично незв'язані обмотки. Основне призначення магнітопроводу – підсилення магнітного зв'язку між обмотками трансформатора, тобто зменшення магнітного опору контуру, крізь який проходить магнітний потік. Частину магнітопроводу, на якій розміщені обмотки називають *стержнем,* а без обмотки – *якорем*.

Обмотка – це провід, обмотаний навколо стержня магнітопроводу для створення магнітного поля під дією струму, що протікатиме в обмотці, або для зворотного явища (електромагнітної індукції). Обмотка, до якої підводиться електрична енергія, називається *первинною*, а обмотка, від якої відводиться електрична енергія, – *вторинною*. Вторинних обмоток може бути декілька.

Всі величини, що відносяться до первинної обмотки, прийнято позначати індексом (1), а величини, що відносяться до вторинної обмотки мають індекс (2).

Слід пам'ятати, що *трансформатор не є джерелом електроенергії*.

При вмиканні первинної обмотки трансформатора до мережі змінного струму з напругою U_1 у ній протікатиме струм I_1, який збуджує в магнітопроводі змінний магнітний потік $Ф$. Замикаючись по магнітопроводу, змінний магнітний потік пронизує витки обмоток та індукує в первинній обмотці е.р.с. e_1, а у вторинній обмотці – е.р.с. e_2.

Якщо до вторинної обмотки під'єднати навантаження, то в ньому протікатиме електричний струм I_2.

Отже, у трансформаторі електрична енергія первинного кола з параметрами U_1, I_1 та частотою v перетворюється в електричну енергію змінного струму з параметрами U_2, I_2 та частотою v.

Якщо вторинна обмотка трансформатора розімкнута, то режим роботи називається *холостим ходом* трансформатора.

Окрім основного магнітного потоку у трансформаторі існують ще змінні магнітні потоки розсіювання Φ_{01} та Φ_{02}, які замикаються навколо витків первинної та вторинної обмоток в основному через повітря. Магнітні лінії потоків розсіювання зчеплені тільки з витками своєї обмотки і не беруть участі у передачі енергії з первинного кола до вторинного. У кожній з обмоток вони індукують е.р.с. e_1 та e_2 відповідно. Змінні е.р.с. e_1 і e_2 залежать від кількості витків в обмотках та швидкості зміни магнітного потоку:

$$e_1 = -n_1 \frac{d\Phi}{\mathrm{dt}}; \qquad \mathrm{e}_2 = -n_2 \frac{d\Phi}{dt},$$

де n_1 n_2 – кількість витків у первинній та вторинній обмотках.

Оскільки е.р.с. в обидвох обмотках створюються одним і тим самим магнітним потоком при синусоїдальній напрузі, то діючі значення е.р.с. E_1 і E_2 залежатимуть від частоти струму, кількості витків обмотки та магнітного потоку:

$$E_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \nu n_1 \Phi; \qquad \mathrm{E}_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \nu n_2 \Phi.$$

Поділивши значення е.р.с. первинного і вторинного кіл, отримаємо співвідношення для визначення ***коефіцієнта трансформації***:

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{n_1}{n_2} = k.$$

Отже, коефіцієнт трансформації – це відношення е.р.с. обох обмоток або відношення кількості витків цих обмоток.

У трансформаторі відбувається подвійне перетворення електричної енергії. Спочатку електрична енергія мережі у первинній обмотці перетворюється в енергію магнітного поля і по осерді передається у вторинну обмотку. У вторинній обмотці енергія магнітного поля перетворюється в електричну і передається у навантажування.

У трансформаторі існують втрати потужності: втрати в міді та втрати в сталі. Втрати в міді зумовлені активним опором обмоток трансформатора. Втрати в сталі зумовлені вихровими струмами, що виникають в магнітопроводі. Вони призводять до нагрівання магнітопроводу.

Якщо не враховувати втрати активної та реактивної потужності в трансформаторах, то можна вважати, що

$$U_1 I_1 = U_2 I_2.$$

При цьому $U_1 \approx E_1$, $U_2 \approx E_2$.

Вираз для коефіцієнта трансформації можна переписати у вигляді

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{n_1}{n_2} = k.$$

ЗАДАЧІ
до розділу електрика і магнетизм

1. Електрична взаємодія заряджених тіл.Закон Кулона.

1. Довести, що коли дві однакові металеві кульки, заряджені однойменно нерівними зарядами, доторкнути одну до одної, а потім розвести на ту саму відстань, то сила взаємодії обов'язково збільшиться, причому тим дужче, чим більше різняться між собою заряди.

2. Два точкових заряди, які знаходяться в повітрі ($\varepsilon=1$) на віддалі *20 см* один від одного, взаємодіють з деякою силою. На якій віддалі треба помістити ці заряди в маслі, щоб отримати ту ж силу взаємодії.

3. У вершинах правильного шестикутника, сторона якого дорівнює а, розташували один за одним заряди $+q$, $+q$, $+q$, $-q$, $-q$, $-q$. Визначити силу, що діє на заряд +q, який міститься в центрі шестикутника.

4. Заряди $+Q$, $-Q$, $+q$ містяться у вершинах правильного трикутника із стороною а. Яка сила діє на заряд $+q$?

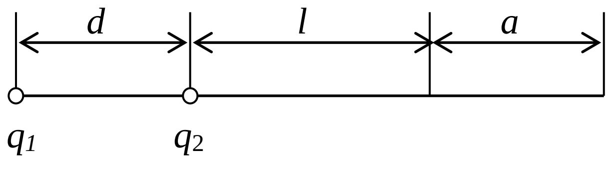
5. Чотири позитивних точкових заряди по *7 нКл* кожний розміщені у вершинах квадрата. Сила, яка діє з боку трьох зарядів на четвертий, дорівнює *20 мкН*. Знайти довжину сторони квадрата.

2. Напруженість електричного поля.

1. В основі рівностороннього трикутника зі стороною a розташовано заряди $+q$ і $-q$. Визначити напруженість поля в центрі трикутника.
2. Три однакових заряди по *10 нКл* розміщені у вершинах прямокутного трикутника з катетами *30 см* і *40 см*. Знайти напруженість електричного поля у точці перетину гіпотенузи з перпендикуляром, опущеним на неї з вершини прямокутного трикутника.
3. Чотири однойменних заряди q розміщені у вершинах квадрата зі стороною a. Якою буде напруженість поля на відстані $2a$ від центра квадрата: на продовженні діагоналі; на прямій, яка проходить через центр квадрата і паралельна сторонам?
4. Визначити напруженість електричного поля, створеного двома точковими зарядами, в точці, яка знаходиться на відстані *50 см* від першого заряду і *70 см* від другого, якщо $q_1=50$ *нКл*, $q_2=-10$ *нКл*. Відстань між зарядами *40 см*.
5. Два заряди, один з яких за модулем у *4* рази більший від другого розташували на відстані a один від одного. В якій точці поля напруженість дорівнює нулю, якщо: заряди однойменні; заряди різнойменні?

3.Робота сил електростатичного поля

1. Яку роботу треба виконати для того, щоб перемістити заряд q з точки А в точку В в полі двох точкових зарядів q_1 і q_2?



2. Відстань між точковими зарядами *6,6 нКл* і *13,2 нКл*, які знаходяться у гасі,

40 см. Яку роботу треба виконати, щоб зблизити їх до відстані *25 см*?

3. У двох вершинах правильного трикутника розміщені однакові заряди q. Яку роботу треба виконати, щоб перемістити заряд q_0 з нескінченності у третю вершину трикутника?
4. Нескінченно довга заряджена нитка з лінійною густиною заряду *10 нКл/м* знаходиться на відстані *6 см* від точкового заряду *50 нКл*. Під дією сил електричного поля відстань між ними зменшилася у два рази. Визначити роботу сил поля по переміщенню заряду.
5. На відстані *0,5 м* від поверхні відокремленої металевої кулі радіусом *10 см* з поверхневою густиною заряду *50 мкКл/м*^{2} знаходиться заряд q. Щоб наблизити його на відстань *10 см* від поверхні кулі, необхідно виконати роботу *1,5 Дж*. Знайти величину заряду.

4. Електроємність, конденсатори.

1. Простір між обкладками плоского конденсатора заповнено двома шарами діелектриків: скла товщиною *1 см* і парафіну товщиною *2 см*. Різниця потенціалів між обкладками *3000 В*. Визначити напруженість поля і падіння потенціалу в кожному з шарів.
2. Між пластини зарядженого плоского конденсатора ввели діелектрик з діелектричною проникливістю ε так, що він повністю заповнив об’єм між половинами площ пластин. У скільки разів змінилися ємність конденсатора, заряд на пластинах та напруга між ними?
3. Два послідовно з’єднаних конденсатори ємностями C_1*=2 мкф* і C_2*=4 мкф* приєднані до джерела постійної напруги U*=120 В*. Визначити напругу на кожному конденсаторові.
4. Два однакових конденсатори з’єднано послідовно і приєднано до джерела ЕРС. У скільки разів зміниться різниця потенціалів на одному з конденсаторів, якщо другий занурити у рідину з діелектричною проникністю *2*?
5. Два кондесатори ємностями C_1 і C_2 з’єднані послідовно. Яку максимальну напругу можна подати на таку батарею, якщо кожен з конденсаторів витримує напругу відповідно U_1 і U_2.

5. Постійний електричний струм, густина струму. Опір провідника. Закон Ома для ділянки кола.

1. Який заряд пройде по провіднику, якщо сила струму рівномірно зменшується від *5 А* до нуля протягом *10 с*?
2. Сила струму в провіднику змінюється з часом за законом $I=3+2t+0{,}5t^2$ (*А*). Який заряд пройде через поперечний переріз провідника за час від t_1*=2 с* до t_2*=6 с*? При якій силі постійного струму через поперечний переріз провідника пройде такий самий заряд протягом такого самого проміжку часу?
3. Визначити густину струму в залізному провіднику довжиною *10 м*, якщо провідник знаходиться під напругою *6 В*?
4. Яку напругу можна прикласти до котушки, що має *1000* витків мідного дроту з середнім діаметром витків *6 см*, коли допустима густина струму *2 А/мм*^{2}.

5. Яку напругу можна прикласти до котушки, що має *1000* витків мідного дроту з середнім діаметром витків *6 см*, коли допустима густина струму *2 А/мм*^{2}.
6. Є котушка мідного дроту з площею поперечного перерізу *0,1 мм*^{2}. Маса всього дроту *0,3 кг*. Визначити опір дроту.

6. Послідовне та паралельне з’єднання провідників

1. З провідника опором *10 Ом* зроблено кільце. Де треба приєднати підвідні провідники, щоб опір кільця дорівнював *1 Ом*?
2. Джерело з напругою *U* живить групу *N* послідовно з’єднаних резисторів *R*. У скільки разів зміниться струм на ділянці та струм у кожному з опорів, якщо їх з’єднати паралельно?
3. Опір одного з двох послідовно ввімкнених провідників у *n* разів більший, ніж опір другого. У скільки разів зміниться сила струму в колі та на кожному опорі, якщо їх з’єднати паралельно?
4. Визначити опір, якщо амперметр показує струм *5 А*, а вольтметр з внутрішнім опором *2550 Ом*, приєднаний до кінців опору, — напругу *100 В*.
5. Є джерело струму напругою *6 В*, реостат опором *30 Ом* і дві лампочки, на яких написано: *3,5 В, 0,35 А* і *2,5 В, 0,5 А*. Як скласти коло, щоб лампочки працювали в нормальному режимі?
6. Електричну лампочку опором *240 Ом*, розраховану на напругу *120 В*, треба живити від мережі напругою *220 В*. Як і якої довжини слід ввімкнути ніхромовий провідник перерізом *0,55 мм*^{2} для нормальної роботи лампочки?
7. Коло складається з трьох послідовно з’єднаних провідників, приєднаних до джерела з напругою *24 В*. Опір першого провідника *4 Ом*, другого – *6 Ом*, напруга на кінцях третього провідника – *4 В*. Визначити силу струму в колі, опір третього провідника і напругу на кінцях першого та другого провідників.
8. Чотири провідники, опори яких *1, 2, 3* і *4 Ом*, з’єднані так, що загальний опір кола дорівнює *1 Ом*. Визначити силу струму у провіднику з опором *2 Ом*, якщо у провіднику з опором *3 Ом*, сила струму становить *3 А*.

7. Закон Ома для повного кола.

1. Від генератора, що має *ЕРС 250 В* і внутрішній опір *0,1 Ом*, необхідно протягти до споживача двопровідну лінію завдовжки *100 м*. Яку масу алюмінію треба витратити на виготовлення підвідних проводів, якщо споживач має потужність *22 кВт* і розрахований на напругу *220 В*?
2. Гальванічний елемент на зовнішній опір *4 Ом* дає струм *0,2 А*. Якщо ж зовнішній опір *7 Ом*, то елемент дає струм *0,14 А*. Який струм елемента, коли його замкнути накоротко?
3. У провіднику опором *2 Ом*, приєднаному до елемента з ЕРС *1,1 В*, проходить струм *0,5 А*. Яка сила струму під час короткого замикання елемента?
4. Джерело струму з внутрішнім опором *r* і ЕРС *E* замкнуто на три, послідовно з’єднані, резистори опором *3r* кожний. У скільки разів зміняться сила струму в колі, напруга на затискачах джерела і корисна потужність, якщо резистори з’єднати паралельно?

5. Джерело постійного струму замикають двома послідовно з'єднаними опорами r_1 і r_2. Якщо вольтметр приєднати до опору r_1, то він показує *6 В*, якщо до r_2 – він покаже *4 В*, а якщо до джерела – *12 В*. Знайти спад напруги на опорах r_1 і r_2. Внутрішнім опором джерела знехтувати.
6. Коло складається з акумулятора з внутрішнім опором r і навантаження опором R. Вольтметр, ввімкнений послідовно і паралельно з опором R, показує одну і ту саму величину напруги. Знайти опір вольтметра.

8. Змінний струм, закон Ома для змінного струму.

1. В коло змінного струму напругою *220 В* ввімкнені послідовно ємність C, активний опір R та індуктивність L. Знайти спад напруги на опорі, якщо відомо, що спад напруги на конденсаторі $U_C=2U_R$, а на індуктивності $U_L=3U_R$.
2. В коло змінного струму напругою *220 В* і частотою *50 Гц* ввімкнені послідовно ємність *35,4 мкФ*, активний опір *100 Ом* та індуктивність *0,7 Гн*. Знайти силу струму в колі та та спад напруги на ємності, активному опорі та індуктивності.
3. Конденсатор ємністю *1 мкФ* і реостат з активним опором *3 кОм* ввімкнені паралельно в коло змінного струму частотою *50 Гц*. Індуктивністю реостата нехтуємо. Знайти повний опір кола.
4. Конденсатор та електрична лампочка з'єднані послідовно і ввімкнені в коло змінного струму напругою *440 В* та *50 Гц*. Яку ємність повинен мати конденсатор, щоб через лампочку проходив струм *0,5 А* і напруга на ній була *110 В*?
5. У послідовному коливальному контурі з параметрами $C=0,1$ *мкФ*, $L=0,001$ *Гн*, $R=10$ *Ом* діє зовнішня ЕРС амплітудою *10 В*. Яка частота цієї ЕРС, якщо амплітуда сили струму *1 А*?

9. Послідовний та паралельний резонанс. Трансформатор

1. Послідовний коливальний контур має параметри $C=400$ *пкФ*, $L=0,82$ *Гн*, $R=60$ *Ом*. Амплітуда ЕРС генератора *0,1 В*. Визначити резонансну частоту, спади напруг на конденсаторі і котушці при резонансі.
2. Послідовний коливальний контур має параметри $C=5$ *мкФ*, $L=0,1$ *Гн*, $R=10$ *Ом*. На яких двох частотах амплітуда вимушених коливань дорівнює половині амплітуди при резонансі?
3. У паралельному контурі, що складається з конденсатора ємністю *1 нФ* і котушки індуктивністю *1 мкГн* та активним опором *100 Ом*, діє резонансна напруга амплітудою *5 В*. Визначити резонансну частоту, сили струму у вітках та загальну силу струму.
4. Паралельний контур з конденсатором ємністю *24 пФ* має резонансну частоту *14,4 МГц*. Добротність контура *76*. Яка амплітуда сили струму до розгалуження, якщо амплітуда напруги на контурі при резонансі *12 В*?
5. Трансформатор підвищує напругу від *220* до *660 В* і містить у первинній обмотці *840* витків. Який коефіцієнт трансформації? Скільки витків міститься у вторинній обмотці?
6. Вторинна обмотка трансформатора, що має *100* витків, пронизується

магнітним потоком, який змінюється з часом за законом $\Phi=0,01cos311t$. Написати формулу, що виражає залежність ЕРС вторинної обмотки від часу, і визначити діюче значення ЕРС.

7. Трансформатор з коефіцієнтом трансформації *10* ввімкнули в мережу з напругою *220 В*. Яка напруга на виході трансформатора, якщо опір вторинної обмотки *0,2 Ом*, а опір корисного навантаження *2 Ом*?
8. Первинна обмотка трансформатора з коефіцієнтом трансформації *0,1* увімкнена в коло з напругою *110 В*. У вторинній обмотці, опір якої *2,5 Ом,* тече струм *2 А*. Визначити напругу на затискачах вторинної обмотки трансформатора. Втратами у колі первинної обмотки знехтувати.
9. Автотрансформатор, що має у первинній та вторинній обмотках відповідно $n_1=2000$ і $n_2=1000$ витків, ввімкнений у мережу напругою *220 В.* У коло вторинної обмотки ввімкнено споживач опором *50 Ом.* Визначити струм у вторинній обмотці, струм у витках n_1 - n_2 і струм у мережі живлення, якщо к.к.д. автотрансформатора *96%.*
10. Показати, що для ідеального трансформатора із коротко замкнутою вторинною обмоткою буде справедливе співвідношення $I_1/ I_2= N_1/ N_2$, де I_1 та I_2 – струми в обмотках, а N_1 і N_2 – число витків обмоток.