АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису
УДК 517.927

МАРТИНЮК ОЛЕСЯ МИРОНІВНА

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗЛІЧЕННИХ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

01.01.02 - диференціальні рівняння

ДИСЕРТАЦІЯ
на здобуття вченого ступеня кандидата
фізико-математичних наук

НАУКОВИЙ КЕРІВНИК :
доктор фізико-математичних
наук **М.Й.РОНТО**

Київ - 1993

ЗМІСТ

ВСТУП

Теорія нелінійних коливань і загального вигляду періодичних крайових задач і сьогодні залишається одним із розділів якісної теорії диференціальних рівнянь та прикладної математики, які найбільш інтенсивно розвиваються. Це викликано, з одного боку, запитами практики [6,56,82,100],а з іншого-необхідністю подальшого розвитку різних питань теоретичного характеру [13,19,101]. Аналіз наукової літератури показує, що на перших порах більше уваги приділялося дослідженню періодичних розв'язків лінійних та нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, тобто вивченню періодичних крайових задач. В теорії періодичних розв'язків широко розроблені різні методи,пов'язані з дослідженням існування та єдиності розв'язку, його стійкості,а також з наближеними методами побудови розв'язків. В теорії коливань та нелінійній механіці найбільші успіхи досягнуті в області асимптотичних методів, методів малого параметру, методів усереднення. Ці результати викладені у фундаментальних працях М.М.Крилова, М.М.Боголюбова [32], М.М.Боголюбова,Ю.О.Митропольського [7], Ю.О.Митропольського [51], А.М.Самойленка [75],М.М.Боголюбова, Ю.О.Митропольського, А.М.Самойленко [8], Ю.О.Митропольського, Б.І.Мосеєнкова [53], Ю.О.Митропольського,Д.І.Мартинюка [52],М.П.Єругіна [23], Дж.Хейла [96], М.І.Шкіля, О.М.Вороного, В.М.Лейфура [98], А.А.Мартинюка [42], М.М.Моїсеєва [55], С.О.Ломова [37], А.Б.Васильєвої, В.Ф.Бутузова [14], Я.В.Бикова, Д.Ризікулова [10].

Значну роль в розвитку так званих конструктивних методів дослідження періодичних та квазіперіодичних розв'язків нелінійних звичайних диференціальних рівнянь відіграли широко відомі праці Є.О.Гребенікова, Ю.О.Рябова [17,18], Д.К.Ліка, Ю.О.Рябова [36], Є.О.Гребенікова [15], Є.О.Гребенікова, С.В.Миронова, М.Н.Кіоса [16].

Паралельно з періодичними крайовими задачами широко розвиваються різні методи дослідження лінійних і нелінійних неперіодичних крайових задач, зокрема, двоточкові, багатоточкові, задачі з локальними крайовими умовами, з умовами на нескінченності. В теорії крайових задач розвиваються конструктивні методи, які дозволяють вивчати питання існування та єдиності розв'язків, будувати наближені розв'язки, оцінювати похибки. До сьогоднішнього часу теорія лінійних та нелінійних крайових задач володіє достатньо розвинутим арсеналом різноманітних методів. Методи, що використовуються в теорії крайових задач,в тому числі і періодичних, умовно можна розбити на 4 основних групи:

1) аналітичні;
2) функціонально - аналітичні;
3) чисельні;
4) чисельно - аналітичні.

Очевидно, що методи кожної з цих груп мають свої переваги і недоліки. Але загальноприйнято, що аналітичні та функціонально-аналітичні методи використовуються в основному для вивчення якісних питань існування, єдиності, неперервної залежності розв'язків від параметрів. Чисельні методи використовуються для безпосереднього знаходження розв'язків, виходячи з їх існування. Слід відмітити, що остання група методів, тобто чисельно - аналітичні, є достатньо універсарльними і вони можуть використовуватися для одночасного дослідження існування розв'язків та їх наближеної побудови.

Методи теорії крайових задач в різних випадках вивчалися і розвивалися в працях М.А.Красносельського [31], Г.М.Вайнікко [11],Н.В.Азбелєва, В.П.Максимова [4], Н.В.Азбелєва, Л.Ф.Рахматуліної [5], А.А.Абрамова, В.Б.Андреєва [1],І.Т.Кігурадзе [28], А.І.Перова [59], Т.А.Чантурія [97], І.Т.Кігурадзе, В.Л.Шехтера [29], І.Тауфера [88], А.Ю.Лучки [38-40], Ю.А.Клокова [30], Н.І.Васильєва, Ю.А.Клокова [13], В.К.Дзядика [21], Н.С.Курпеля, Б.А.Шувара [33], В.Н.Лаптинського [34], А.Я.Лепіна, Л.А.Лепіна [35], В.В.Гудкова, Ю.А.Клокова, А.Я.Лепіна, В.Д.Пономарьова [19], О.А.Бойчука [9] та багатьох інших авторів.

Відмітимо, що можливість конструктивного дослідження розв'язків крайових задач істотньо залежить як від вигляду,порядку, розмірності нелінійного диференціального рівняння, що розв'язується, від умов типу неперервності, карадеодорі, що накладаються на праві частини, так і від типу заданих крайових умов - від їх лінійності, нелінійності, періодичності, двоточковості, багатоточковості, локальності, скінченності чи нескінченності. Ще однією важливою обставиною,яка визначає складність аналізу крайових задач, є розмірність, тобто чи є невідомі функції, які входять в рівняння та крайові умови, елементами скінченномірного чи нескінченномірного простору.

Очевидно, що найбільші успіхи як в теорії періодичних розв'язків, так і загального вигляду крайових задач досягнуті при вивченні скінченномірних задач.

Але при цьому ряд практичних питань з різних областей математики і математичної фізики потребують розгляду та вивчення нескінченномірних, а зліченних систем звичайних диференціальних рівнянь, що підпорядковані крайовим умовам певного вигляду.

Такі системи з'являються при вивченні коливань стержнів, балок, коли для аналізу відповідних математичних моделей у вигляді лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних застосовується метод поділу змінних Фур'є.

В теорії зліченних систем диференціальних рівнянь намітились два основних напрямки. В першому з них розглядаються нескінченномірні системи диференціальних рівнянь в абстрактних функціональних чи банахових просторах (див., наприклад, монографію Ю.Л.Далецького,М.Г.Крейна [20]), в другому безпосередньо вивчаються зліченні системи диференціальних рівнянь, досліджуються аналоги питань, які вже розглянуті для скінченномірних звичайних диференціальних рівнянь.

Систематичне дослідження нескінченномірних систем диференціальних рівнянь почалося після роботи А.Н.Тихонова [93], в якій вивчалась однозначність розв'язку задачі Коші для нескінченномірної системи звичайних диференціальних рівнянь нормального вигляду. Ці дослідження розвинуті в працях І.Т.Персидського [60-63], В.Х.Харасахала [95], Л.А.Єрмолаєва [22], де встановлені теореми існування та єдиності розв'язку зліченних систем диференціальних рівнянь, а також розглядаються питання їх стійкості за Ляпуновим.

В роботах О.А.Жаутикова [25, 26] розглядалася близькість розв'язків зліченної системи по відношенню до розв'язків так званої "вкороченої" системи,яка утворювалася із заданої зліченної системи прирівнюванням до нуля всіх невідомих функцій, починаючи з деякого номера. Тут же проаналізовані зліченні системи з параметром: досліджена неперервна залежність розв'язків від параметрів, вивчалося питання існування періодичних розв'язків, аналітично залежних від параметра.

Результати, що відносяться до теорії нескінченномірних систем, вперше були систематично викладені в монографіях К.Г.Валеєва, О.А.Жаутикова [12] і К.П.Персидського [60].

Такі якісні аспекти, як застосування методу функцій Гріна задачі про інваріантні тори і дослідження тороїдальних многовидів зліченних систем диференціальних рівнянь розглянуті в роботах А.М.Самойленка, Ю.В.Теплинського, Н.С.Циганівського [86].

Загальні результати в теорії збурення як гладких, так і недиференційованих інваріантних тороїдальних многовидів одержані в роботах А.М.Самойленка [68-70], які далі розвивалися в роботах Ю.В.Теплинського [89-91], П.І.Авдіюка [2,3], Ю.В.Теплинського, П.І.Авдіюка [92]. Питання приведення диференціальних рівнянь з імпульсами в просторі обмежених числових послідовностей розглядалися в роботах А.М.Самойленка, Ю.В.Теплинського [84], А.М.Самойленка, Ю.В.Теплинського, В.Є.Лучика [85].

Дослідженню питань існування та властивостей гладких інваріантних торів зліченних систем диференціально-різницевих рівнянь присвячені роботи Д.І.Мартинюка, В.І.Кравця, Б.Х.Жабусінової [43], а також дисертаційна робота Б.Х.Жабусінової [24].

Аналіз літератури показує, що для зліченних систем найбільше розвинуті якісні методи дослідження розв'язків задачі Коші, питань зведення, властивостей інваріантних торів.

Ясно, що теоретична та практична цінність полягає у вивченні зліченних систем загального вигляду крайових задач, в тому числі і періодичних. При цьому доцільно розвивати такі методи, які б дали можливість встановити існування розв'язків, а також і практично будувати розв'язки зліченних систем звичайних диференціальних рівнянь. Хорошу перспективу в цьому напрямку відіграє група чисельно аналітичних методів, зокрема, чисельно-аналітичний метод послідовних наближень А.М.Самойленка [73-74]. Багато розробок цього методу за останні роки в роботах А.М.Самойленка, М.И.Ронто [81-83], Ю.О.Митропольського, А.М.Самойленка, Д.І.Мартинюка [54], А.М.Самойленка, Б.П.Ткача [87], А.М.Самойленка, М.О.Перестюка [78], М.О.Перестюка [58], А.М.Самойленка, Ле Ліонг Тая [76], М.И.Ронто [64-66], А.М.Самойленка, М.О.Перестюка, С.І.Трофимчука [79], А.М.Самойленка, В.А.Ронто [80], О.Д.Нуржанова [57], Ю.Д.Шлапака [99], А.М.Самойленка, Х.Овездурдиєва [77], С.В.Мартинюка [50], О.П.Трофимчук [94] підтвердили його універсальність для різноманітних задач звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь вищих порядків, рівнянь із запізненням, злічених систем першого порядку, рівнянь з імпульсною дією, рівнянь в частинних похідних, рівнянь з двоточковими та загального вигляду крайовими умовами.

Метою дисертаційної роботи є узагальнення чисельно-аналітичного методу послідовних наближень для дослідження періодичних розв'язків систем нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку та розв'язків двоточкових крайових задач для злічених систем диференціальних рівнянь нормального вигляду, а також дослідження близькості розв'язків зліченної та вкороченої систем.

Дисертація складається із вступу, трьох глав, висновків та списку літератури.

Перша глава, що включає в себе §§1-5, присвячена узагальненню та поширенню чисельно-аналітичного методу послідовних наближень на дослідження періодичних розв'язків злічених систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку вигляду

$$\ddot{x} = f(t,x,\dot{x}), \qquad (0.1)$$

підпорядковану періодичним крайовим умовам

$$x(0) = x(T), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T). \qquad (0.2)$$

Тут $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ – точка простору $\mathfrak{M}$ обмеженої числової послідовності з нормою $\|x\| = \sup\limits_n |x_n|$, $f(t,x) = (f_1(t,x), \ldots, f_n(t,x), \ldots)$ – неперервна, періодична по t з періодом T функція.

Права частина рівняння (0.1) визначена в області

$$(t,x,\dot{x}) \in (-\infty,\infty) \times D_1 \times D_2, \qquad (0.3)$$

де D_1, D_2 – обмежені, замкнені множини з $\mathfrak{M}$.

В області (0.3) функція $f(t,x,\dot{x})$ обмежена зліченним вектором $M = (M_1,\ldots,M_n,\ldots) \in \mathfrak{M}$ та задовольняє умові Ліпшіца із зліченними матрицями K_1, K_2 з невід'ємними елементами

$$|f(t,x,y)| \leq M,$$

$$|f(t,x',y') - f(t,x'',y'')| \leq K_1|x'-x''| + K_2|y'-y''|, \qquad (0.4)$$

$$t \in (-\infty,\infty), \quad x',x'' \in D_1, \quad y',y'' \in D_2,$$

де $|f(t,x,y)| = (|f_1(t,x,y)|,\ldots,|f_n(t,x,y)|,\ldots)$ і нерівності між нескінченними векторами в (0.4) розуміємо покомпонентно, а також додатковим умовам:

1) множина D_β точок $x_0 = (x_{01},x_{02},\ldots,x_{0n},\ldots) \in \mathfrak{M}$, що розміщені в області D_1 разом із своїм $\beta = \frac{T^2}{4}M$ -околом, непорожня, і, крім цього, множина D_γ, утворена $\gamma = \frac{5}{6}TM$-околом нульового вектора простору $\mathfrak{M}$, лежить в області D_2;

$$D_\beta \neq 0 \ , \quad D_\gamma \subset D_2 ; \qquad (0.5)$$

2) оператор, утворений матрицею

$$Q_o = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{4} K_1 & \frac{T^2}{4} K_2 \\ \frac{5}{6} T K_1 & \frac{5}{6} T K_2 \end{bmatrix} ,$$

є цілком регулярним, тобто

$$\| Q_o \| \leqslant g_o < 1 . \qquad (0.6)$$

В §1 вводяться лінійні оператори L, S, L^2 вигляду

$$Lf(t) = \int_0^t (f(s) - Sf(t))ds, \qquad Sf(t) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt,$$

$$L^2 f(t) = \int_0^t \left[\int_0^t (f(s) - Sf(t))ds - S\left(\int_0^t (f(s) - Sf(t))ds \right) \right] dt .$$

З їх допомогою будується послідовність T періодичних функцій $x_m(t, x_o)$, які задовольняють періодичні крайові умови (0.2) при довільному значенні параметра $x_o \in D_\beta$.

$$x_m(t, x_o) = x_o + L^2 f(t, x_{m-1}(t, x_o), \dot{x}_{m-1}(t, x_o)), \qquad (0.7)$$

$$m = 1, 2, \ldots \quad , \quad x_o(t, x_o) = x_o \in D_\beta \ ,$$

Доведена рівномірна збіжність послідовності функцій (0.7) до граничної фунції $x^*(t, x_o)$, яка буде розв'язком збуреної по відношенню до (0.1),(0.2) деякої T -періодичної крайової задачі.

Має місце наступне твердження.

ТЕОРЕМА 1. Нехай права частина $f(t,x,y)$ зліченної системи диференціальних рівнянь визначена, неперервна, періодична по t з періодом T в області (0.3) та приймає значення в просторі $\mathfrak{M}$, а також виконуються умови (0.4)-(0.6).

Тоді послідовність функцій $x_m(t,x_0)$ вигляду (0.7), яка залежить від x_0 як від параметра та задовольняє періодичні крайові умови (0.2), рівномірно збігається при $m\to\infty$ разом з своєю похідною $\dot{x}_m(t,x_0)$ відносно області

$$(t,x_0)\in[0,T]\times D_\beta$$

відповідно до граничних функцій $x^*(t,x_0)$, $\dot{x}^*(t,x_0)$

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t,x_0) = x^*(t,x_0), \quad \lim_{m\to\infty} \dot{x}_m(t,x_0) = \dot{x}^*(t,x_0).$$

При цьому $x^*(t,x_0)$, що задовольняє при $t=0$ початкові умови

$$x(0) = x^*(0,x_0) = x_0,$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}^*(0,x_0) = -S(Lf(t,x^*(t,x_0),\dot{x}^*(t,x_0)))$$

і одночасно T-періодичні крайові умови (0.2), є розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = x_0+L^2f(t,x(t),\dot{x}(t)),$$

тобто розв'язком крайової задачі

$$\ddot{x} = f(t,x,\dot{x}) - S(f(t,x^*(t,x_0),\dot{x}^*(t,x_0))), \quad x(0) = x(T) = x_0,$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}(T) = - S(Lf(t,x^*(t,x_0),\dot{x}^*(t,x_0))).$$

Крім цього, справедливі наступні оцінки похибок

$$\|x_m(t,x_0)-x^*(t,x_0)\| \leqslant \frac{T^2}{4}\frac{q^m}{1-q}\|M\|,$$

$$\|\dot{x}_m(t,x_0)-\dot{x}^*(t,x_0)\| \leqslant \frac{5}{6}\,T\,\frac{q^m}{1-q}\|M\|, \quad m=1,2,\ldots,$$

де

$$\|x(t)\| = \sup_n \max_{t\in[0,T]} |x_n(t)|, \quad \|Q\| = \left\|\frac{T^2}{4}K_1 + \frac{5}{6}TK_2\right\| < 1.$$

В §2 встановлено, що гранична функція $x^*(t,x_0)$ послідовності (0.7) буде розв'язком T - періодичної крайової задачі (0.1), (0.2) тоді і тільки тоді, коли $x_0 \in D_\beta$ буде коренем визначального рівняння

$$\Delta(x_0) = S(f(t,\ x^*(t,x_0),\ \dot{x}^*(t,x_0))). \qquad (0.8)$$

Тут же вивчається спеціальна задача управління, яка дозволяє побудувати збурене рівняння по відношенню до рівняння (0.1), для якого розв'язок деякої задачі Коші буде в той же час T періодичним розв'язком побудованого рівняння.

В §3 вводиться у розгляд наближене визначальне рівняння вигляду

$$\Delta_m(x_0) = S(f(t,\ x_m(t,x_0),\ \dot{x}_m(t,x_0))),$$

яке відрізняється від точного визначального рівняння (0.8) тим, що замість $x^*(t,x_0)$ в ньому фігурує наближення $x_m(t,x_0)$, яке на практиці завжди можна побудувати.

Доведено твердження, яке дає достатні умови існування T-періодичного розв'язку рівняння (0.1).

ТЕОРЕМА 2. Нехай система (0.1), яка задана в області

(0.3), підпорядкована умовам (0.4)-(0.6) і наступним припущенням:

1) для деякого цілого m відображення

$$\Delta_m : \Delta_m = \Delta_m(x_o) = S(f(t, x_m(t,x_o), \dot{x}_m(t,x_o)))$$

області $\mathbf{D}_\beta$ в область $\Delta_m(\mathbf{D}_\beta)$ має точку x_o, таку що

$$\Delta_m(x^o) = 0;$$

2) існує замкнена, обмежена область $\mathbf{D}_3$, яка належить $\mathbf{D}_\beta$, що містить точку x^o і така, що оператор Δ_m топологічно відображає $\mathbf{D}_3$ на $\Delta_m\mathbf{D}_3$;

3) на границі Γ_{D_3} області $\mathbf{D}_3$ виконується нерівність

$$\inf_{x\in\Gamma_{D_3}} \|\Delta_m(x_o)\| \geqslant \frac{q^m}{1-q} \left\| \frac{T^2}{6} K_1 + \frac{2T}{3} K_2 \right\| \|M\| .$$

Тоді система (0.1) має періодичний з періодом T розв'язок $x=x(t)$, для якого $x(0)\in\mathbf{D}_3$.

В §4 знайдені необхідні умови для існування розв'язку T-періодичної крайової задачі (0.1), (0.2), а саме умови, необхідні для того, щоб деяка підобласть області $\mathbf{D}_\beta$ містила точку x_o^*, яка при t=0 визначає початкове значення $x^*(0) = x_o^*$ точного розв'язку $x^*(t)$ заданої періодичної задачі. При цьому точне початкове значення для похідної в точці t=0 задається формулою

$$\dot{x}(0) = S(Lf(t,x^*(0,x_o^*),\dot{x}^*(0,x_o^*)).$$

Тут же викладено чисельний алгоритм наближеного знаходження початкової точки періодичного розв'язку.

В §5 міститься приклад, на якому ілюструються основні теоретичні положення. Розглядається злічення нелінійна система другого порядку з періодом T=π. Побудовано в аналітичному вигляді перші наближення за коренями наближеного визначального рівняння $\Delta_0(x_0)=0$, чисельно знайдено наближене початкове значення n-періодичного розв'язку.

У другій главі вивчається двоточкова крайова задача для зліченної системи диференціальних рівнянь нормального вигляду першого порядку, а саме

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad (0.9)$$

$$\mathbf{A}x(0) + \mathbf{C}x(T) = d, \quad \det\mathbf{C}\neq 0, \qquad (0.10)$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots)$ – точки простору $\mathfrak{M}$ обмеженої числової послідовності з нормою $\|x\|=\sup\limits_n|x_n|$, $\|d\|=\sup\limits_n|d_n|$, функція $f(t,x)=(f_1(t,x),\ldots,f_n(t,x),\ldots)$ – неперервна по t в області

$$(t, x) \in (0, T)\times\mathbf{D}, \qquad (0.11)$$

яка приймає значення в просторі $\mathfrak{M}$, $\mathbf{D}$ – обмежена, замкнена множина з $\mathfrak{M}$. Матриці $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ – зліченні, причому для $\mathbf{C}$ існує обернена матриця $\mathbf{C}^{-1}$.

Припустимо, що права частина рівняння (0.9) задовольняє умову обмеженості зліченним вектором $\mathbf{M} = (M_1, \ldots, M_n, \ldots)$, $M_i>0$ і умову Ліпшіца із зліченною матрицею $\mathbf{K}$ з невід'ємними елементами

$$|f(t,x,y)| \leqslant \mathbf{M},$$

$$|f(t,x') - f(t,x'')| \leqslant \mathbf{K}|x'-x''|, \qquad (0.12)$$

$$t \in (0,T),\ x',x'' \in \mathbf{D},$$

де $|f(t,x)| = (|f_1(t,x)|, \ldots, |f_n(t,x)|, \ldots)$ і нерівності між нескінченномірними векторами в (0.12) розуміємо покомпонентно.

Серед двоточкових крайових задач (0.9), (0.10) виділимо клас таких, для яких параметри **M**, **K**, T, **A**, **C**, d, а також область визначення (0.11) задовольняють деякі додаткові умови, а саме:

1) множина $\mathbf{D}_\beta$ точок $x_o = (x_{o1}, x_{o2}, \dots, x_{on}, \dots) \in \mathfrak{M}$, що містяться в області **D** разом із своїм β-околом, де $\beta = \frac{T}{2}\mathbf{M} + \beta_1$, $\beta_1 = |\mathbf{C}^{-1}d - (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{E})x_o|$, непорожня:

$$\mathbf{D}_\beta \neq 0 \; ; \tag{0.13}$$

2) оператор, утворений матрицею .

$$\mathbf{Q} = \frac{T}{\pi}\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1n} & \dots \\ K_{21} & \dots & K_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & \dots & K_{nn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

є цілком регулярним, тобто

$$\|\mathbf{Q}\| \leq g < 1. \tag{0.14}$$

В §6 вводиться у розгляд послідовність функцій $x_m(t, x_o)$, яка залежить від зліченного параметру $x_o = (x_{o1}, \dots, x_{on}, \dots)$ вигляду

$$x_m(t,x_o) = x_o + Lf(t, x_{m-1}(t,x_o)) + \frac{t}{T}\left[\mathbf{C}^{-1}d - (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{E})x_o\right]. \tag{0.15}$$

Встановлена рівномірна збіжність цієї послідовності в нормі простору обмежених числових послідовностей $\mathfrak{M}$ до граничної функції $x^*(t, x_o)$.

Доведено, що функція $x^*(t, x_o)$ буде одночасно розв'язком "збуреної" задачі Коші

$$\dot{x} = f(t,x) + \Delta(x_0),$$

$$x(0) = x_0$$

і збуреної крайової задачі

$$\dot{x} = f(t,x) + \Delta(x_0),$$

$$Ax(0) + Cx(T) = d,$$

де збурена функція

$$\Delta(x_0)=\frac{1}{T}\left[C^{-1}d - (C^{-1}A + E)x_0\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(t,\ x^*(t,x_0))dt. \qquad (0.16)$$

Оцінено відхилення $x^*(t,x_0)$ від $x_m(t,x_0)$ для всіх $m=1,2,\ldots$

В §7 розглянуто зв'зок розв'зуваності заданої крайової задачі (0.9),(0.10) з існуванням нулів визначальної функції $\Delta(x_0)$ вигляду (0.16). Необхідні і достатні умови того, щоб гранична функція послідовності (0.15) була розв'язком заданої крайової задачі (0.9), (0.10), дає наступне твердження.

ТЕОРЕМА 3. Нехай права частина $f(t,x)$ системи (0.9) визначена, неперервна в області (0.11) і виконуються умови (0.12) - (0.14). Тоді для того, щоб розв'язок $x = x^*(t)$ задачі Коші

$$\dot{x} = f(t,\ x),$$

$$x(0) = x_0$$

був і розв'язком крайової задачі (0.9), (0.10), необхідно і достатньо, щоб початкове значення x_0 було розв'язком визначального рівняння

$$\Delta(x_o) = \frac{1}{T}\left[C^{-1}d - (C^{-1}A + E)x_o\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(t,x^*(t,x_o))dt = 0. \quad (0.17)$$

Крім цього, в даному випадку $x^*(t)=x^*(t,x_o)$ і при всіх $m=1, 2, 3, \ldots$ для відхилення точного розв'язку $x = x^*(t) = x^*(t,x_o)$ крайової задачі (0.9), (0.10) від її наближеного розв'язку $x_m(t,x_o)$ вигляду (0.15) має місце нерівність

$$\|x^*(t,x_o) - x_m(t,x_o)\| \leqslant \frac{T\pi}{6}\left\{\frac{q^m}{1-q}\|M\| + \|K\|\frac{q^{m-1}}{1-q}\|\beta_1\|\right\}.$$

В §8 розв'язуваність крайової задачі (0.9), (0.10) досліджується за коренями наближеного визначального рівняння вигляду

$$\Delta_m(x_o) = \frac{1}{T}\left[C^{-1}d - (C^{-1}A + E)x_o\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x_m(t,x_o))dt.$$

Знайдено достатні умови існування розв'язку крайової задачі (0.9), (0.10).

В наступному параграфі задані необхідні умови того, щоб деяка підобласть області визначення правої частини містила точку x_o^*, яка при $t=0$ задає початкове значення $x^*(0) = x_o^*$ точного розв'язку $x^*(t)$ крайової задачі (0.9), (0.10).

Має місце твердження.

ТЕОРЕМА 4. Припустимо, що крайова задача (0.9),(0.10) задовольняє умови (0.12)-(0.14).

Тоді для того, щоб деяка область $D_1 \subset D_\beta$ містила точку $x_o = x_o^*$, яка визначає при $t=0$ початкове значення $x^*(0)=x_o$ розв'язку $x=x^*(t)$ крайової задачі (0.9), (0.10), необхідно, щоб для всіх m і довільного $\bar{x}_o \in D_1$ виконувалася нерівність

$$\| \Delta_m(\bar{x}_0) \| \leqslant \sup_{x_0 \in D_1} \left\{ \frac{1}{T} \| C^{-1}A+E \| \, \| x_0 - x_0 \| + \right.$$

$$+ \| K(E-Q)^{-1} [E+(C^{-1}A+E)] \| \| x_0 - x_0 \| +$$

$$\left. + \frac{\pi^2}{9} \| Q^{m+1}(E-Q)^{-1}M + KQ^m(E-Q)^{-1}\beta_1(\bar{x}_0) \| \right\}.$$

В третю главу включені результати, які досліджують зв'язок розв'язку зліченної системи диференціальних рівнянь з розв'язком відповідної їй вкороченої системи.

Спочатку в §10 близькість розв'язків зліченної

$$\begin{gathered} \dot{x} = f(t,x) + \Delta(x_0), \\ x(0) = x \end{gathered} \tag{0.18}$$

і вкороченої

$$\begin{gathered} v = f^1(t,v+0) + \Delta^1(y_0+0), \\ v(0) = y_0 \end{gathered} \tag{0.19}$$

систем досліджується для збуреної задачі Коші у випадку системи диференціальних рівнянь нормального вигляду. Тут $f^1(t,v+0) = P_n f(t,v+0) = (f_1(t,v+0),\ldots,f_n(t,v+0),0,0,0,\ldots)$, де P_n – проектор, який нескінченному вектору $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ ставить у відповідність вектор

$$P_n x = (x_1,\ldots,x_n,0,0,0,\ldots).$$

Зауважимо, що функція $f(t,x)$ задовольняє введену у розгляд К.П.Персидським посилену умову Коші відносно змінних

$(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$.

Попередньо доводиться аналог леми Гронуолла - Беллмана для системи двох рівнянь.

ТЕОРЕМА 5. Нехай права частина $f(t,x)$ зліченної системи диференціальних рівнянь (0.18) в області $(t,x)\in[0,+\infty]\times D$ і функція $\Delta(x_0)$ в області $x_0\in D_0$ задовольняють умову Ліпшіца

$$\|f^1(t,y_1+z_1)-f^1(t,y_2+z_2)\| \leqslant K_{1n}\|y_1-y_2\| + K_{2n}\|z_1-z_2\|,$$

$$\|f^2(t,y_1+z_1)-f^2(t,y_2+z_2)\| \leqslant K_{3n}\|y_1-y_2\| + K_{4n}\|z_1-z_2\|,$$

$$\|\Delta^1(y_0^1+z_0^1) - \Delta^1(y_0^2+z_0^2)\| \leqslant L_{1n}\|y_0^1-y_0^2\| + L_{2n}\|z_0^1-z_0^2\|,$$

і при $n\to\infty$, $K_{2n}\to 0$, $L_{2n}\to 0$, тобто функції $f(t,x)$ і $\Delta(x_0)$ задовольняють посилену умову Коші.

Тоді для довільного розв'язку рівняння (0.18) з початковим значенням $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, \ldots)$, таким, що $\|z_0\| = \|(0, \ldots, 0, x_{0n+1}, x_{0n+2}, \ldots)\| \to 0$ при $n\to\infty$, для відхилення розв'язку $y(t)$ зліченної системи

$$\frac{dy}{dt} = f^1(t,y+z) + \Delta^1(y_0+z_0),$$

$$\frac{dz}{dt} = f^2(t,y+z) + \Delta^2(y_0+z_0),$$

від розв'язку $v(t)$ вкороченої системи (0.19) має місце оцінка

$$\|y(t)-v(t)\| \leqslant \frac{(\varphi_2(t)\lambda_2-\varphi_1(t)\lambda_1)\|z_o\|K_{2n}}{\lambda_2-\lambda_1} + \frac{\varphi_2(t)-\varphi_1(t)}{\lambda_2-\lambda_1}\,q_nK_{2n} +$$

$$+\frac{\varphi_1(t)(\lambda_2-K_{1n})-\varphi_2(t)(\lambda_1-K_{1n})}{\lambda_2-\lambda_1}\,L_{2n}\|z_o\|,$$

де

$$\bar{q}_n = q_n + \gamma_n,\quad \|f^2(t,v(t)+0\| \leqslant q_n,\quad \|\Delta^2(y_o+z_o)\| \leqslant \gamma_n,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{K_{1n} + K_{2n} \pm \sqrt{(K_{1n}-K_{4n})^2 + 4\,K_{2n}\,K_{3n}}}{2},$$

і при $n \to \infty$ виконується граничне співвідношення

$$\|y(t) - v(t)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

В наступному параграфі розглядається зв'язок розв'язку зліченної крайової задачі (0.9), (0.10) з розв'язком вкороченої крайової задачі.

Основні результати дисертаційної роботи доповідалися на семінарі відділу звичайних диференціальних рівнянь Інституту математики АН України (керівник - член-кореспондент АН України А.М.Самойленко), на школах-семінарах: "Нелінійні еволюційні рівняння в прикладних задачах" (16-25 вересня 1990 року, Кабардино - Балкарський державний університет, с. Приельбрусся), "Розривні динамічні системи" (17-20 вересня 1991 року, Ужгородський державний університет), "Нелінійні задачі математичної фізики та їх застосування" (2-9 жовтня 1991 року, Самаркандський державний університет ім. А.Навої), "Нелінійні задачі математичної фізики та їх застосування" (5-12 жовтня 1992 року, будинок творчості вчених, с.Кацивелі, Крим).

Вважаю своїм приємним обов'язком висловити подяку науковому керівнику доктору фізико-математичних наук Миколі Йосиповичу Ронто за постановку задач, постійну увагу, цінні поради і зауваження.

ГЛАВА I. ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДЛЯ ЗЛІЧЕННИХ ПЕРІОДИЧНИХ СИСТЕМ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Існує цілий ряд задач, які приводять до розгляду диференціальних систем, що залежать від зліченного числа змінних. Дана глава присвячена узагальненню і поширенню чисельно-аналітичного методу послідовних наближень для дослідження періодичних розв'язків таких систем. В ній, зокрема, розглянуто питання збіжності послідовних наближень і їх відповідних похідних, введення адитивного зліченного керуючого параметра, точного та наближеного визначаючого рівняння. За допомогою конкретного прикладу продемонстровано правомірність застосування розробленої методики на практиці.

§ 1. ВИБІР ВИДУ ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ, ЇХ РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ

Розглянемо зліченну систему диференціальних рівнянь другого порядку

$$\ddot{x}=f(t,x,\dot{x}), \qquad (1.1.1)$$

де $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$ - точка простору $\mathfrak{M}$ обмеженої числової послідовності з нормою $\|x\| = \sup_n |x_n|$, $f(t,x) = (f_1(t,x), \ldots, f_n(t,x),\ldots)$ - неперервна, періодична по t з періодом T в області

$$(t,x,\dot{x})\in(-\infty,\infty)\times D_1\times D_2 \qquad (1.1.2)$$

функція, що приймає значення в просторі $\mathfrak{M}$, D_1, D_2 - обмежені, замкнені множини з $\mathfrak{M}$.

Ставиться задача знаходження T - періодичного розв'язку (1.1.1), тобто розв'язку T-періодичної крайової задачі (1.1.1), що задовольняє періодичні крайові умови

$$x(0)=x(T), \quad \dot{x}(0)=\dot{x}(T). \qquad (1.1.3)$$

Під T-періодичним розв'язком системи (1.1.1) будемо розуміти зліченну вектор-функцію $x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t),\ldots)$, визначену при $t\in(-\infty,\infty)$, яка приймає значення в просторі $\mathfrak{M}$, двічі неперервно диференційовану, що задовольняє рівняння (1.1.1) та умови (1.1.3).

Припустимо також,що в області (1.1.2) функція $f(t,x,\dot{x})$ системи (1.1.1) задовольняє умову обмеженості зліченним вектором $M = (M_1,\ldots,M_n,\ldots)\in\mathfrak{M}$ та умову Ліпшица із зліченними матрицями K_1, K_2 з невід'ємними елементами

$$|f(t,x,y)| \leqslant M,$$

$$|f(t,x',y')-f(t,x'',y'')| \leqslant K_1|x'-x''|+K_2|y'-y''|, \qquad (1.1.4)$$

$$t\in(-\infty,\infty), \quad x',x''\in D_1, \quad y',y''\in D_2,$$

де $|f(t,x,y)| = (|f_1(t,x,y)|,\ldots,|f_n(t,x,y)|,\ldots)$ і нерівності між нескінченими векторами в (1.1.4) розуміємо покомпонентно.

Відомо[27], що деяка нескінченна матриця $K = \{K_{ij}, i,j=1,$

2,3,...,n,...) утворює лінійний оператор **K** в просторі $\mathfrak{M}$, коли

$$\sup_{i} \sum_{j=1}^{\infty} |K_{ij}| < \infty.$$

При цьому норму оператора **K** можна визначити як

$$\|K\| = \sup_{i} \sum_{j=1}^{\infty} |K_{ij}| < \infty$$

і оператор **K** буде цілком регулярним, якщо

$$\|K\|<1 \ .$$

Серед періодичних крайових задач (1.1.1), (1.1.3) виділимо клас таких, для яких параметри **M**, K_1, K_2, T, а також область визначення (1.1.2) задовольняють деякі додаткові умови , а саме:

1) множина D_β точок $x_0=(x_{01},x_{02},...,x_{0n},...)\in\mathfrak{M}$, які розміщені в області D_1 разом із своїм $\beta = \frac{T^2}{4}M$ -околом, непорожня, і, крім цього, множина D_γ, утворена $\gamma = \frac{5}{6}TM$-околом нульового вектора простору $\mathfrak{M}$, лежить в області D_2:

$$D_\beta \neq 0 \ , \quad D_\gamma \subset D_2; \tag{1.1.5}$$

2) оператор, утворений матрицею

$$Q_0 = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{4}K_1 & \frac{T^2}{4}K_2 \\ \frac{5}{6}TK_1 & \frac{5}{6}TK_2 \end{bmatrix},$$

є цілком регулярним, тобто

$$\|Q_0\| \leqslant g_0 < 1. \tag{1.1.6}$$

Для задачі (1.1.1), (1.1.3), що розглядається, побудуємо послідовність зліченних функцій $\{x_m(t,x_o)=(x_{m1}(t,x_o),x_{m2}(t,x_o), x_{m3}(t,x_o),\ldots,x_{mn}(t,x_o),\ldots)\}$, які залежать від $x_o = (x_{o1}, x_{o2}, x_{o3},\ldots,x_{on},\ldots)$ як від параметра та таких, що задовольняють умови (1.1.3) для всіх m при довільних значеннях $x_o \in D_\beta$. Крім цього, з'ясуємо зв'язок граничної функції цієї послідовності з періодичним розв'язком задачі (1.1.1), (1.1.3).

В подальшому нам знадобиться лінійний оператор L, який діє на неперервну при $t\in[0,T]$ зліченну вектор-функцію $f(t) = (f_1(t), f_2(t),\ldots,f(t)_n,\ldots)$ за формулою

$$Lf(t) = \int_0^t (f(s)-Sf(t))ds, \qquad (1.1.7)$$

де S-оператор інтегрального середнього

$$Sf(t) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt. \qquad (1.1.8)$$

Якщо оператором L подіяти на функцію (1.1.7), то одержимо

$$L(Lf(t)) = L^2f(t) = \int_0^t [Lf(t)-S(Lf(t))]dt = \int_0^t\Big[\int_0^t (f(s)-Sf(t))ds-$$

$$-S\Big[\int_0^t (f(s)-Sf(t))ds\Big]\Big]dt \; . \qquad (1.1.9)$$

Із (1.1.7)-(1.1.9) випливають властивості операторів S,L,L^2:

$$\frac{d}{dt}Lf(t) = f(t)-Sf(t), \qquad \frac{d}{dt}L^2f(t) = Lf(t)-S(Lf(t)), \qquad (1.1.10)$$

$$\begin{gathered} S^2f(t)=Sf(t), \\ \int_0^T Sf(t)dt = S\left(\int_0^T f(t)dt\right) = \int_0^T f(t)dt, \end{gathered} \qquad (1.1.11)$$

$$Lf(t)_{t=T} = \int_0^T\left[f(t)-\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt\right]dt = Lf(t)_{t=0} = 0, \qquad (1.1.12)$$

$$\begin{gathered} L^2f(t)_{t=T} = L^2f(t)_{t=0} = 0, \\ S(Lf(t))_{t=0} = S(Lf(t))_{t=T} = 0. \end{gathered} \qquad (1.1.13)$$

Очевидно, що якщо f(t)-періодична з періодом T функція, то функції Lf(t) і $L^2f(t)$, обчислені згідно (1.1.7), (1.1.9),також будуть періодичними функціями з періодом T.

Згідно леми 3.1 [83], яка має місце і у випадку зліченновимірної вектор - функції f(t), одержуємо

$$|Lf(t)| \leqslant \alpha_1(t)\cdot|f(t)|_0^{C}, \qquad (1.1.14)$$

де

$$\begin{gathered} |f(t)|_0 = \left(\sup_{t\in[0,T]}|f_1(t)|,\dots,\sup_{t\in[0,T]}|f_n(t)|,\dots\right), \\ \alpha_1(t) = 2t\left(1-\frac{t}{T}\right) \leqslant \frac{T}{2}. \end{gathered} \qquad (1.1.15)$$

Далі, внаслідок (1.1.9), (1.1.14), (1.1.15) для всіх $t\in[0,T]$

$$|L^2f(t)| \leqslant \alpha_1(t)|Lf(t)|_0 \leqslant \frac{T}{2}\alpha_1(t)|f(t)|_0 \leqslant \frac{T^2}{4}|f(t)|_0. \quad (1.1.16$$

Розглянемо послідовність функцій

$$x_m(t,x_0) = x_0+L^2f(t,x_{m-1}(t,x_0),\dot{x}_{m-1}(t,x_0))+p_2t^2+p_1t, \quad (1.1.17)$$

$$m = 1,2,\ldots \quad , \quad x_0(t,x_0) = x_0\in D_\beta \ ,$$

$$x_m(t,x_0) = (x_{m1}(t,x_0),\ldots,x_{mn}(t,x_0),\ldots),$$

де x_0, p_2, p_1 – параметри, що належать простору $\mathfrak{M}$.

Виберемо параметри p_1 і p_2 таким чином, щоб функції вигляду (1.1.17) задовольняли періодичні крайові умови (1.1.3) для всіх $m = 1,2,\ldots$ при довільному значенні $x_0\in D_\beta$.

Враховуючи (1.1.10), з (1.1.17) маємо

$$\dot{x}_m(t,x_0) = Lf(t,x_{m-1}(t,x_0),\dot{x}_{m-1}(t,x_0)) -$$

$$- S(Lf(t,x_{m-1}(t,x_0),\dot{x}_{m-1}(t,x_0))) + 2p_2t + p_1. \quad (1.1.18)$$

Підставляючи (1.1.17), (1.1.18) в періодичні крайові умови (1.1.3) та приймаючи до уваги рівності (1.1.12), (1.1.13), для визначення p_1 і p_2, одержуєм нескінченномірну зліченну систему алгебраїчних рівнянь

$$x_0 = x_0+p_2T^2+p_1T,$$

$$p_1 = 2p_2T+p_1.$$

Звідси знаходимо, що

$$p_1 = p_2 = 0.$$

Це означає, що всі члени послідовності функцій

$$x_m(t,x_0) = x_0+L^2f(t,x_{m-1}(t,x_0),\dot{x}_{m-1}(t,x_0)),$$
$$m = 1,2,\ldots \quad , \quad x_0(t,x_0)=x_0\in D \quad , \tag{1.1.19}$$

що залежать від x_0 як від параметра, задовольняють періодичні крайові умови (1.1.3) при довільних x_0.

Має місце таке твердження про збіжність послідовних наближень $x_m(t,x_0)$ вигляду (1.1.19).

ТЕОРЕМА 1.1.1. Нехай права частина $f(t,x,y)$ зліченної системи диференціальних рівнянь визначена, неперервна, періодична по t з періодом T в області (1.1.2) та приймає значення в просторі $\mathfrak{M}$, а також виконуються умови (1.1.4)-(1.1.6).

Тоді послідовність функцій $x_m(t,x_0)$ вигляду (1.1.19), яка залежить від x_0 як від параметра та задовольняє періодичні крайові умови (1.1.3), рівномірно збігається при $m\to\infty$ разом з своєю похідною $\dot{x}_m(t,x_0)$ відносно області

$$(t,x_0)\in[0,T]\times D_\beta \tag{1.1.20}$$

відповідно до граничних функцій $x^*(t,x_0)$, $\dot{x}^*(t,x_0)$

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t,x_0) = x^*(t,x_0), \quad \lim_{m\to\infty} \dot{x}_m(t,x_0) = \dot{x}^*(t,x_0). \tag{1.1.21}$$

При цьому $x^*(t,x_0)$, що задовольняє при $t=0$ початкові умови

$$x(0) = x^*(0,x_0) = x_0,$$
$$\dot{x}(0) = \dot{x}^*(0,x_0) = -S(Lf(t,x^*(t,x_0),\dot{x}^*(t,x_0))) \tag{1.1.22}$$

і одночасно T - періодичні крайові умови (1.1.3), є розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = x_0 + L^2 f(t,x(t),\dot{x}(t)), \qquad (1.1.23)$$

тобто розв'язком крайової задачі

$$\ddot{x} = f(t,x,\dot{x}) - S(f(t,x^*(t,x_0),\dot{x}^*(t,x_0))), \quad x(0) = x(T) = x_0,$$

$$(1.1.24)$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}(T) = -S(Lf(t,x^*(t,x_0),\dot{x}^*(t,x_0))).$$

Крім цього, справедливі такі оцінки похибок

$$\|x_m(t,x_0) - x^*(t,x_0)\| \leqslant \frac{T^2}{4}\frac{Q^m}{1-q}\|M\|,$$

$$(1.1.25)$$

$$\|\dot{x}_m(t,x_0) - \dot{x}^*(t,x_0)\| \leqslant \frac{5}{6}\,T\,\frac{Q^m}{1-q}\|M\|, \quad m=1,2,\ldots,$$

де

$$\|x(t)\| = \sup_{n}\max_{t\in[0,T]}|x_n(t)|, \quad \|Q\| = \left\|\frac{T^2}{4}K_1 + \frac{5}{6}TK_2\right\| < 1. \quad (1.1.26)$$

ДОВЕДЕННЯ. Спочатку покажемо, що якщо $x_0 \in D_\beta$, то всі функції $x_m(t,x_0) \in D_1$, а $\dot{x}_m(t,x_0) \in D_2$ при $t \in [0,T]$.

Вважаючи в (1.1.19) $m=0$, на основі нерівності (1.1.16) та умови обмеженості (1.1.4) маємо

$$x_1(t,x_0) - x_0 = L^2 f(t,x_0,0),$$

$$|x_1(t,x_0) - x_0| \leqslant \frac{T^2}{4}M. \qquad (1.1.26)$$

Диференціюючи (1.1.19), з врахуванням (1.1.10), приходимо до послідовності

$$\dot{x}_m(t,x_o) = Lf(t,x_{m-1}(t,x_o),\dot{x}_{m-1}(t,x_o)) -$$

$$- S(Lf(t,x_{m-1}(t,x_o),\dot{x}_{m-1}(t,x_o))), \qquad (1.1.27)$$

$$m = 1,2,\ldots\ ,\ x_o(t,x_o) = x_o.$$

Із (1.1.27) при $m=0$ внаслідок (1.1.4), (1.1.14) та враховуючи, що

$$\int_0^T \alpha_1(t)dt = \frac{T^2}{3},$$

одержуємо

$$|\dot{x}_1(t,x_o)| \leqslant \alpha_1(t)M + \frac{1}{T}\int_0^T \alpha_1(t)dtM \leqslant \frac{5}{6}\ TM. \qquad (1.1.28)$$

Якщо врахувати припущення (1.1.5), то нерівності (1.1.26) та (1.1.28) дозволяють зробити висновок,що $x_1(t,x_o)\in D_1$,а $\dot{x}_1(t,x_o)\in D_2$, як тільки $x_o\in D_\beta$.

Методом математичної індукції можна встановити, що для всіх $m = 1,\ 2,\ \ldots,\ t\in[0,T]$ та довільного $x_o\in D_\beta$ дійсно всі функції $x_m(t,x_o)$ вигляду (1.1.19) належать області D_1, а похідні $\dot{x}_m(t,x_o)$, що знаходяться за формулою (1.1.27), не виходять з області D_2:

$$x_m(t,x_o)\in D_1,\quad \dot{x}_m(t,x_o)\in D_2,\quad m = 1,2,\ldots;\quad x_o\in D_\beta.$$

Приступаючи до доведення збіжності послідовності (1.1.19), оцінимо різниці

$$x_2(t,x_0)-x_1(t,x_0), \qquad \dot{x}_2(t,x_0)-\dot{x}_1(t,x_0).$$

На основі (1.1.19), (1.1.27) з врахуванням (1.1.16), (1.1.14) і умови Ліпшіца (1.1.4), одержуємо

$$|x_2(t,x_0)-x_1(t,x_0)| \leqslant |L^2[f(t,x_1(t,x_0),\dot{x}_1(t,x_0))-f(t,x_0,0)]| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{T}{2}\alpha_1(t)[K_1|x_1(t,x_0)-x_0|_0 + K_2|\dot{x}_1(t,x_0)|_0], \qquad (1.1.29)$$

$$|\dot{x}_2(t,x_0)-\dot{x}_1(t,x_0)| \leqslant |L[f(t,x_1(t,x_0),\dot{x}_1(t,x_0))-f(t,x_0,0)]| +$$

$$+ S|L[f(t,x_1(t,x_0),\dot{x}_1(t,x_0)) - f(t,x_0,0)]| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\alpha_1(t)+\frac{T}{3}\right][K_1|x_1(t,x_0)-x_0|_0 + K_2|\dot{x}_1(t,x_0)|_0]. \qquad (1.1.30)$$

Приймаючи до уваги (1.1.26),(1.1.28), із співвідношень (1.1.29), (1.1.30) одержуємо відповідно :

$$|x_2(t,x_0)-x_1(t,x_0)| \leqslant \frac{T}{2}\alpha_1(t)QM,$$
$$|\dot{x}_2(t,x_0)-\dot{x}_1(t,x_0)| \leqslant \left[\alpha_1(t)+\frac{T}{3}\right]QM, \qquad (1.1.31)$$

де $Q = \frac{T^2}{4}K_1 + \frac{5}{6}TK_2$.

На основі (1.1.31) методом математичної індукції можна довести, що для довільного номера $m\geqslant1$ справедливі наступні нерівності

$$|x_{m+1}(t,x_0)-x_m(t,x_0)| \leqslant \frac{T}{2}\alpha_1(t)Q^mM, \qquad (1.1.32)$$

$$|\dot{x}_{m+1}(t,x_0)-\dot{x}_m(t,x_0)| \leqslant \left[\alpha_1(t)+\frac{T}{3}\right]Q^m M. \qquad (1.1.33)$$

Оскільки

$$|x_{m+j}(t,x_o)-x_m(t,x_o)| \leqslant |x_{m+j}(t,x_o)-x_{m+j-1}(t,x_o)| +$$

$$|x_{m+j-1}(t,x_o)-x_{m+j-2}(t,x_o)| +\ldots+ |x_{m+1}(t,x_o)-x_m(t,x_o)|,$$

то, враховуючи (1.1.32)

$$|x_{m+j}(t,x_o)-x_m(t,x_o)| \leqslant \frac{T}{2}\alpha_1(t)Q^m\left[\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\right]M. \qquad (1.1.34)$$

Аналогічним чином внаслідок (1.1.33) знаходимо

$$|\dot{x}_{m+j}(t,x_o)-\dot{x}_m(t,x_o)| \leqslant \left[\alpha_1(t)+\frac{T}{3}\right]Q^m\left[\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\right]M. \qquad (1.1.35)$$

Перейшовши у співвідношеннях (1.1.34), (1.1.35) до оцінок за нормою, одержуємо

$$\|x_{m+j}(t,x_o)-x_m(t,x_o)\| \leqslant \frac{T^2}{4}\|Q\|^m\left\|\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\right\|\|M\|,$$

(1.1.36

$$\|\dot{x}_{m+j}(t,x_o)-\dot{x}_m(t,x_o)\| \leqslant \frac{5}{6}T\|Q\|^m\left\|\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\right\|\|M\|.$$

Оскільки на основі (1.1.6)

$$\|Q_o\| = \max\left[\sup_i \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{T^2}{4}K_{1ij}+\frac{T^2}{4}K_{2ij}\right),\ \sup_i \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}TK_{1ij}+\frac{5}{6}TK_{2ij}\right)\right] < 1,$$

то легко побачити, що

$$\|Q\| = \sup_{i} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{T^2}{4}K_{1ij}+\frac{5}{6}TK_{2ij}\right) = q \leq q_o \leq 1, \qquad (1.1.37)$$

тобто оператор, утворений матрицею $Q = \frac{T^2}{4}K_1 + \frac{5}{6}TK_2$, є цілком регулярним. Отже, враховуючи (1.1.37), з (1.1.36) випливає, що при $m\to\infty$ відносно області (1.1.20) дійсно має місце збіжність (1.1.21). Приймаючи до уваги, що всі функції $x_m(t,x_o)$, $\dot{x}_m(t,x_o)$ послідовностей (1.1.19),(1.1.27) задовольняють періодичні крайові умови (1.1.3), легко зробити висновок про те, що граничні функції (1.1.21) також задовольняють їх.

При прямуванні $j\to\infty$ з (1.1.36) для всіх m=1,2,... одержуємо потрібні оцінки (1.1.25).

Якщо в рівняннях (1.1.19), (1.1.27) перейти до границі при $m\to\infty$ і врахувати співвідношення (1.1.11)-(1.1.13), (1.1.21), то можна перевірити, що гранична функція $x^*(t,x_o)$ задовольняє рівняння (1.1.23) і початкові умови (1.1.22),звідки на основі рівностей (1.1.10) випливає, що $x^*(t,x_o)$ - розв'язок крайової задачі (1.1.24).

З (1.1.24) видно, що будь - який розв'язок $x^*(t,x_o) = \lim_{m\to\infty} x_m(t,x_o)$ цієї задачі, для якого

$$S(f(t,x^*(t,x_o),\dot{x}^*(t,x_o)) = 0,$$

буде в той же час і розв'язком вихідного рівняння (1.1.1), що задовольняє крайові умови (1.1.3), і до того ж таким, що його початкове значення задається згідно (1.1.22).

§ 2. ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ГРАНИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

У праву частину розглядуваної системи зліченних диференціальних рівнянь (1.1.1) завжди можна адитивно ввести додатковий зліченний керуючий параметр μ та вибрати початкове значення похідної y_0 таким, що при довільному значенні $x_0 \in D_\beta$ розв'язок задачі Коші

$$\ddot{x} = f(t,\ x,\ \dot{x}) + \mu, \qquad \mu = (\mu_1,\ \mu_2,\ \dots,\ \mu_n,\ \dots), \tag{1.2.1}$$

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = y_0 \tag{1.2.2}$$

буде задовольняти і періодичні крайові умови (1.1.3).

Т Е О Р Е М А 1.2.1. Якщо виконуються умови теореми 1.1.1, то для довільної точки $x_0 \in D_\beta$ знайдуться такі єдині значення зліченного керуючого параметра

$$\mu = -S[f(t,\ x^*(t,x_0),\ \dot{x}^*(t,x_0))] \tag{1.2.3}$$

та початкової швидкості

$$y_0 = -S[Lf(t,\ x^*(t,x_0),\ \dot{x}^*(t,x_0))], \tag{1.2.4}$$

де $x^*(t,x_0)$, $\dot{x}^*(t,x_0)$ обчислюються згідно (1.1.21), що розв'язок $x(t) = x^*(t,x_0) = \lim\limits_{m\to\infty} x_m(t,x_0)$ початкової задачі (1.2.1), (1.2.2) буде задовольняти періодичні крайові умови (1.1.3).

Д О В Е Д Е Н Н Я. На основі теореми 1.1.1 переконуємося, що функція $x(t)=x^*(t,x_0)$ є розв'язком крайової задачи (1.1.24). Цим самим знайдені значення параметра μ вигляду (1.2.3) і початкової швидкості y_0 вигляду (1.2.4), при яких функція $x(t) = {}$ $=x^*(t,x_0)=\lim\limits_{m\to\infty} x_m(t,x_0)$ буде розв'язком крайової задачі (1.2.1), (1.2.2) при крайових умовах (1.1.3).

Покажемо, що існують такі два значення μ', μ'', $\mu' \neq \mu''$, що розв'язки $x(t,x_0,\mu')$ і $x(t,x_0,\mu'')$ задачі Коші (1.2.1), (1.2.2) відповідно при $\mu = \mu'$, $\mu = \mu''$ задовольняють періодичні крайові умови (1.1.3), тобто будуть розв'язком рівняння (1.1.23). Тоді

$$|x(t,x_0,\mu'') - x(t,x_0,\mu')| = |L^2(f(t,\ x(t,x_0,\mu''),\ \dot{x}(t,x_0,\mu'')) - $$
$$- f(t,\ x(t,x_0,\mu'),\ \dot{x}(t,x_0,\mu')))|,$$
$$(1.2.5)$$
$$|\dot{x}(t,x_0,\mu'') - \dot{x}(t,x_0,\mu')| = |L[f(t,\ x(t,x_0,\mu''),$$
$$\dot{x}(t,x_0,\mu'')) - f(t,\ x(t,x_0,\mu'),\ \dot{x}(t,x_0,\mu'))] - SL[f(t,$$
$$x(t,x_0,\mu''),\dot{x}(t,x_0,\mu'')) - f(t,\ x(t,x_0,\mu'),\ \dot{x}(t,x_0,\mu'))]|.$$

Аналогично до встановлення оцінок (1.1.29)-(1.1.31) з тотожностей (1.2.5) одержуємо

$$|x(t,x_0,\mu'') - x(t,x_0,\mu')| \leqslant \frac{T}{2}\,\alpha_1(t)[K_1|x(t,x_0,\mu'')-x(t,x_0,\mu')| +$$
$$+ K_2|\dot{x}(t,x_0,\mu'') - \dot{x}(t,x_0,\mu')|],$$
$$(1.2.6)$$
$$|\dot{x}(t,x_0,\mu'') - \dot{x}(t,x_0,\mu')| \leqslant \left(\alpha_1(t) + \frac{T}{3}\right)[K_1|x(t,x_0,\mu'') -$$
$$- x(t,x_0,\mu')| + K_2|\dot{x}(t,x_0,\mu'') - \dot{x}(t,x_0,\mu')|].$$

Позначимо через $z(t,x_0,\mu',\mu'')$ вектор

$$z(t,x_0,\mu',\mu'') = \begin{bmatrix} |x(t,x_0,\mu'') - x(t,x_0,\mu')| \\ |x(t,x_0,\mu'') - x(t,x_0,\mu')| \end{bmatrix}.$$

Тоді з (1.2.6) маємо

$$z(t,x_0,\mu',\mu'') \leqslant Q_0(t) z_0(t,x_0,\mu',\mu''), \tag{1.2.7}$$

де

$$Q_0(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1(t)\,\frac{T}{2}\,K_1 & \alpha_1(t)\,\frac{T}{2}\,K_2 \\ (\alpha_1(t) + \frac{T}{3})\,K_1 & (\alpha_1(t) + \frac{T}{3})\,K_2 \end{bmatrix}, \tag{1.2.8}$$

$$z_0(t,x_0,\mu',\mu'') = \begin{bmatrix} |x(t,x_0,\mu'') - x(t,x_0,\mu')|_0 \\ |x(t,x_0,\mu'') - x(t,x_0,\mu')|_0 \end{bmatrix},$$

$$|y(t,x_0,\mu)|_0 = \left\{\sup_t |y_1(t,x_0,\mu)|, \ \ldots, \ \sup_t |y_n(t,x_0,\mu)|, \ \ldots \right\}.$$

Оскільки матриця $Q_0(t)$ вигляду (1.2.8) мажорується матрицею Q_0, яка фігурує в (1.1.6), то ітеруючи (1.2.7), знаходимо

$$z_0(t,x_0,\mu',\mu'') \leqslant Q_0^m z_0(t,x_0,\mu',\mu''). \tag{1.2.9}$$

Внаслідок умови (1.1.6) $\lim\limits_{m\to\infty} Q_0^m = 0$. Тому, здійснюючи перехід в (1.2.9) до границі при $m\to\infty$, переконуємся, що одержане при цьому співвідношення можливе лише при

$$z_0(t,x_0,\mu',\mu'') = 0,$$

тобто при

$$x(t,x_0,\mu'') = x(t,x_0,\mu'),$$
$$\dot{x}(t,x_0,\mu'') = \dot{x}(t,x_0,\mu'),$$
$$\mu' = \mu''.$$

Протиріччя з припущенням про відмінність параметрів μ' і μ'' закінчує доведення теореми.

НАСЛІДОК 1. В якості наближеного значення керуючого параметра (1.2.3) та початкової швидкості (1.2.4) можна прийняти відповідно

$$\mu_m = -S[f(t,\ x_m(t,x_0),\ \dot{x}_m(t,x_0))],$$

$$y_0^{(m)} = -S[Lf(t,\ x_m(t,x_0),\ \dot{x}_m(t,x_0))].$$

При цьому в нормі простору $\mathfrak{M}$ справедливі оцінки

$$\|\mu - \mu_m\| \leqslant \left\| \frac{T^2}{6} K_1 + \frac{2T}{3} K_2 \right\| \frac{q^m}{1-q} \|M\|,$$

$$\|y_0 - y_0^{(m)}\| \leqslant \frac{1}{2} \left\| \frac{T^2}{6} K_1 + \frac{2T}{3} K_2 \right\| \frac{q^m}{1-q} \|M\|.$$

ДОВЕДЕННЯ. Справедливість останніх нерівностей безпосередньо випливає з (1.1.7), (1.1.8) з врахуванням умови Ліпшіца (1.1.4) і нерівностей (1.1.14), (1.1.34) - (1.1.36), (1.1.25).

Знайдемо необхідні та достатні умови, при яких гранична функція послідовності $x_m(t,x_0)$ вигляду (1.1.19) співпадає з розв'язком вихідної крайової задачі (1.1.1), (1.1.3).

ТЕОРЕМА 1.2.2. Нехай виконані умови теореми 1.1.1.

Тоді розв'язок $x = x^*(t)$ задачі Коші

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}), \quad x(0) = x_0, \qquad (1.2.10)$$

$$\dot{x}(0) = -S(Lf(t, x^*(t,x_0), \dot{x}^*(t,x_0))) = y_0,$$

де $x^*(t,x_0)$ - гранична функція (1.1.21), співпадає з періодичним розв'язком крайової задачі (1.1.1), (1.1.3) тоді і тільки тоді, коли початкове значення x_0 є розв'язком визначального рівняння

$$\Delta(x_0) = 0 = S(f(t, x^*(t,x_0), \dot{x}^*(t,x_0))), \qquad (1.2.11)$$

При цьому

$$x^*(t) = x^*(t, x_0), \qquad (1.2.12)$$

і при всіх $m = 1, 2, \ldots$ для відхилення точного T -періодичного розв'язку $x = x^*(t) = x^*(t, x_0)$ злічennoї системи (1.1.1) від її наближеного T - періодичного розв'язку $x_m(t, x_0)$ вигляду (1.1.19), а також для відповідних похідних справедливі оцінки

$$\|x^*(t) - x_m(t,x_0)\| \leqslant \frac{T^2}{4} \frac{q^m}{1-q} \|M\| ,$$

$$(1.2.13)$$

$$\|\dot{x}^*(t) - \dot{x}_m(t,x_0)\| \leqslant \frac{5}{6} T \frac{q^m}{1-q} \|M\|,$$

$$m = 1, 2, 3, \ldots$$

ДОВЕДЕННЯ. Для встановлення достатності умови (1.2.11) врахуємо, що $x^*(t, x_0)$ є T - періодичним розв'язком (1.1.23), що проходить при $t=0$ через точку x_0. Але (1.1.23) еквівалентно

$$\dot{x} = Lf(t, x, \dot{x}) - S(Lf(t, x, \dot{x})),$$

$$\dot{x}(0) = - S(Lf(t, x, \dot{x})), \qquad (1.2.14)$$

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}) - Sf(t, x, \dot{x}), \qquad x(0) = \dot{x}_0.$$

Якщо виконується умова (1.2.11), то з (1.2.14) одержуємо, що $x^*(t, x_0)$ буде також розв'язком задачі Коші (1.2.10). З єдиності її розв'язку випливає справедливість (1.2.12).

Необхідність умови (1.2.11) випливає з таких міркувань. Якщо $x = x^*(t)$ - розв'язок періодичної крайової задачі (1.1.1), (1.1.3), що задовольняє початкові умови (1.2.10), то розв'язок $x = x(t, \mu)$ задачі Коші (1.2.1), (1.2.2) буде задовольняти періодичні крайові умови (1.1.3) тоді, коли значення параметра μ, обчислене по (1.2.3), рівне нулю.

На основі теореми 1.2.1 розв'язок задачі Коші (1.2.1), (1.2.2) буде також і розв'язком періодичної крайової задачі (1.1.1),(1.1.3) тільки при єдиних значеннях параметра μ вигляду (1.2.3) і початкової швидкості (1.2.4). Таке значення параметра ми вже вказали при $\mu = \Delta(x_0) = 0$ і при цьому виконується рівність (1.2.12), з якої, використовуючи (1.1.25), одержуємо оцінки (1.2.13).

Виходячи з доведених тверджень, маємо такий чисельно-аналітичний алгоритм знаходження T- періодичних розв'язків зліченної системи диференціальних рівнянь другого порядку:

1) розглядаючи $x_0 \in D_\beta$, як параметр, за рекурентним співвідношенням (1.1.19) будуємо послідовність функцій $x_m(t,x_0)$;

2) знаходимо граничну функцію $x^*(t,x_0)$ цієї послідовності;

3) складаємо визначальне рівняння $\Delta(x_0)=0$ вигляду (1.2.11) і знаходимо яким-небудь чисельним методом його розв'язок $x_0=x_0^*$;

4) за ітераційною формулою (1.1.19) будуємо послідовність функцій $x_m(t,x_0^*)$;

5) гранична функція $x^*(t,x_0^*)$ буде точним розв'язком періодичної крайової задачі (1.1.1), (1.1.3), а за наближений розв'язок можна вибрати функцію $x_m(t,x_0^*)$.

Легко помітити, що основна складність в реалізації розглянутого чисельно-аналітичного методу полягає в здійсненні другого пункту, тобто в знаходженні в аналітичному вигляді граничної функції.

Покажемо, яким чином можна встановити існування точного періодичного розв'язку задачі (1.1.1), (1.1.3) за властивостями m-го наближення $x_m(t,x_0^*)$, а не за граничною функцією $x^*(t,x_0^*)$.

§3. ДОСТАТНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

Поряд з точним визначальним рівнянням вигляду (1.2.11) введемо у розгляд і наближене визначальне рівняння вигляду

$$\Delta_m(x_0) = S(f(t,\ x_m(t,x_0),\ \dot{x}_m(t,x_0))) = 0. \qquad (1.3.1)$$

ЛЕМА 1.3.1. При всіх $x_m \in D_\beta$ для визначального рівняння (1.2.11) і наближеного визначального рівняння вигляду (1.3.1) в нормі простору $\mathfrak{M}$ справедлива оцінка

$$\|\Delta(x_0) - \Delta_m(x_0)\| \leqslant \left\| \frac{T^2}{6} K_1 + \frac{2T}{3} K_2 \right\| \frac{q^m}{1-q} \|M\|. \qquad (1.3.2)$$

ДОВЕДЕННЯ. За означенням

$$\Delta(x_0) - \Delta_m(x_0) = S[f(t,\ x^*(t,x_0),\ \dot{x}^*(t,x_0)) \ -$$

$$- f(t, x_m(t,x_0), \dot{x}_m(t,x_0))].$$

З врахуванням умови Ліпшіца (1.1.4) та нерівностей (1.1.34), (1.1.35) з останньої нерівності одержуємо

$$|\Delta(x_0) - \Delta_m(x_0)| \leqslant S[K_1|x^*(t,x_0) - x_m(t,x_0)| + K_2|\dot{x}^*(t,x_0) -$$

$$- \dot{x}_m(t,x_0)|] \leqslant \left[\frac{T}{2} K_1 S(\alpha_1(t)) + K_2 S\left(\alpha_1(t) + \frac{T}{3}\right)\right] Q^m (E - Q)^{-1} M,$$

або

$$\| \Delta(x_0) - \Delta_m(x_0) \| \leqslant \left\| \frac{T^2}{6} K_1 + \frac{2T}{3} K_2 \right\| \frac{q^m}{1-q} \|M\| ,$$

звідки випливає оцінка (1.3.2).

Для встановлення розв'язку T-періодичної крайової задачі (1.1.1), (1.1.3) нам знадобиться наступне твердження.

ЛЕММА 1.3.2.[54]. Нехай D - замкнена, обмежена область простору $\mathfrak{R}$, A_0 і A_1 - неперервні відображення D в $\mathfrak{R}$, причому

$$\| Ax - A_1 x \| \leqslant \varepsilon.$$

Тоді, якщо A_0 - топологічне відображення, то область AD містить множину $A_0 D \setminus \Pi(\varepsilon)$, що складається з точок області $A_0 D$, які входять в $A_0 D$ разом із своїм ε-околом.

На питання про існування T-періодичних розв'язків зліченної системи диференціальних рівнянь другого порядку (1.1.1) дає відповідь наступна теорема.

ТЕОРЕМА 1.3.1. Нехай система (1.1.1), яка задана в області (1.1.2), задовольняє умови (1.1.4) - (1.1.6) та наступні припущення:

1) для деякого цілого m відображення

$$\Delta_m : \Delta_m = \Delta_m(x_o) = \overline{f(t,\ x_m(t,x_o),\ \dot{x}_m(t,x_o))} \qquad (1.3.3)$$

області $\mathbf{D}_\beta$ в область $\Delta_m(\mathbf{D}_\beta)$ має слабку точку $x_o = x^o$

$$\Delta_m(x^o) = 0; \qquad (1.3.4)$$

2) існує замкнена, обмежена область $\mathbf{D}_3$, яка належить $\mathbf{D}_\beta$, що містить точку x^o і така, що оператор Δ_m топологічно відображає $\mathbf{D}_3$ на $\Delta_m \mathbf{D}_3$;

3) на границі Γ_{D_3} області $\mathbf{D}_3$ виконується нерівність

$$\inf_{x \in \Gamma_{D_3}} \|\Delta_m(x)\| \geqslant \frac{q^m}{1-q} \left\| \frac{T^2}{6} \mathbf{K}_1 + \frac{2T}{3} \mathbf{K}_2 \right\| \|\mathbf{M}\| . \qquad (1.3.5)$$

Тоді система (1.1.1) має періодичний з періодом T розв'язок $x = x(t)$, для якого $x(0) \in \mathbf{D}_3$.

Доведення. Враховуючи оцінку (1.3.2) та лему 2 [83],

помічаємо, що множина $\Delta_m \mathbf{D}_3 \setminus \Pi \left[\frac{q^m}{1-q} \left\| \frac{T^2}{6} \mathbf{K}_1 + \frac{2T}{3} \mathbf{K}_2 \right\| \|\mathbf{M}\| \right]$ міститься

в $\Delta \mathbf{D}_3$. Якщо ця множина містить початок системи координат $\Delta = (\Delta^1, \ldots, \Delta^n, \ldots)$, то і множина $\Delta \mathbf{D}_3$ містить його. Цього достатньо, щоб система (1.1.1) мала періодичний по t з періодом T розв'язок.

Для доведення теореми достатньо довести співвідношення

$$0 \in \Delta_m D_3 \setminus \Pi \left[\frac{q^m}{1-q} \left\| \frac{T^2}{6} \mathbf{K}_1 + \frac{2T}{3} \mathbf{K}_2 \right\| \|\mathbf{M}\| \right].$$

Оскільки відображення $\Delta_m(x)$ – топологічне, то $\Delta_m \mathbf{D}_3$-область і границя $\Gamma_{\Delta_m D_3}$ області $\Delta_m \mathbf{D}_3$ є образом границі Γ_{D_3} області $\mathbf{D}_3$

$$\Gamma_{\Delta_m D_3} = \Delta_m \Gamma_{D_3} . \qquad (1.3.6)$$

З умови 1) теореми видно, що множина $\Delta_m \mathbf{D}_3$ містить нульову точку системи $\Delta = (\Delta^1, \ldots, \Delta^n, \ldots)$. Ця точка належить множині $\Delta D_3 \setminus \Pi(r)$, якщо всі точки z границі $\Gamma_{\Delta_m D_3}$ множини $\Delta_m \mathbf{D}_3$ знаходяться від неї на віддалі, не меншій за r. З цього слідує, що нуль належить множині

$$\Delta_m D_3 \setminus \Pi\left[\frac{q^m}{1-q} \left\| \frac{T^2}{6} \mathbf{K}_1 + \frac{2T}{3} \mathbf{K}_2 \right\| \|\mathbf{M}\| \right]$$

при

$$\inf_{z \in \Gamma_{D_3}} \|z\| \geqslant \frac{q^m}{1-q} \left\| \frac{T^2}{6} \mathbf{K}_1 + \frac{2T}{3} \mathbf{K}_2 \right\| \|\mathbf{M}\| . \qquad (1.3.7)$$

Внаслідок рівності (1.3.6) справедливе співвідношення

$$z = \Delta_m(x)\big|_{x \in \Gamma_{D_3}} , \qquad (1.3.8)$$

з врахуванням якого нерівність (1.3.7) приймає вигляд

$$\inf_{x \in \Gamma_{D_3}} \|\Delta_m(x)\| \geqslant \frac{q^m}{1-q} \left\| \frac{T^2}{6} \mathbf{K}_1 + \frac{2T}{3} \mathbf{K}_2 \right\| \|\mathbf{M}\| . \qquad (1.3.9)$$

Із сказаного випливає, що при виконанні нерівності (1.3.9) система (1.1.1) має періодичний з періодом T розв'язок, що і потрібно було довести.

§4. НЕОБХІДНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

Розглянемо необхідні умови для знаходження розв'язку задачі (1.1.1), (1.1.3), а саме умови, необхідні для того, щоб деяка підобласть області D_β містила точку x_0^*, яка при $t=0$ визначає початкове значення

$$x^*(0) = x_0^* \tag{1.4.1}$$

точного розв'язку $x^*(t)$ періодичної задачі (1.1.1), (1.1.3).

Необхідні умови сформульовані в такій теоремі.

ТЕОРЕМА 1.4.1. Припустим, що задача (1.1.1),(1.1.3), задовольняє умови (1.1.4)-(1.1.6).

Тоді для того, щоб деяка область $D_4 \subset D_\beta$ містила точку $x_0 = x_0^*$, яка при $t=0$ визначає початкове значення $x^*(0)=x_0$ періодичного розв'язку $x=x^*(t)$ задачі (1.1.1), (1.1.3), необхідно, щоб для всіх m і довільного $\bar{x}_0 \in D_4$ виконувалася нерівність

$$\|\Delta_m(\bar{x}_0)\| \le \sup_{x_0 \in D_4} \left[\left(1 + \frac{q}{1-q}\right) \|K_1\| \, \|\bar{x}_0 - x_0\| + \right.$$

$$\left. + \left\| \frac{T^2}{6} K_1 + \frac{2T}{3} K_2 \right\| \frac{q}{1-q} \|M\| \right]. \tag{1.4.2}$$

Перш ніж довести теорему 1.4.1, наведемо допоміжні твердження:

1) лему, що оцінює близькість граничних функцій $x^*(t,x_0')$ і $x^*(t,x_0'')$ для точок $x_0', x_0'' \in D_\beta$;

2) теорему про неперервну залежність визначальної вектор-

функції $\Delta(x_o)$ вигляду (1.2.11) від x_o.

ЛЕМА 1.4.1. Нехай для задачі (1.1.1),(1.1.3) мають місце умови (1.1.4) - (1.1.6). Тоді для довільних точок $x_o', x_o'' \in D_\beta$ для відхилень граничних функцій $x^*(t,x_o')$ і $x^*(t,x_o'')$ послідовностей $x_m(t,x_o')$ і $x_m(t,x_o'')$ вигляду (1.1.19) і їх похідних $\dot{x}_m(t,x_o')$ та $\dot{x}_m(t,x_o'')$ вигляду (1.1.27) справедливі нерівності

$$|x^*(t,x_o')-x^*(t,x_o'')| \leqslant \left[E + (E - Q)^{-1} \frac{T^2}{4} K_1 \right] |x_o'-x_o''|, \quad (1.4.3)$$

$$|\dot{x}^*(t,x_o')-\dot{x}^*(t,x_o'')| \leqslant (E - Q)^{-1} \frac{5T}{6} K_1 \; |x_o'-x_o''|. \quad (1.4.4)$$

ДОВЕДЕННЯ. Безпосередньо з (1.1.19), враховуючи (1.1.16), випливає

$$|x_1(t,x_o')-x_1(t,x_o'')| \leqslant |x_o'-x_o''| + \left| L^2\left[f(t,x_o',0)-f(t,x_o'',0)\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant |x_o'-x_o''| + \frac{T^2}{4} \left|f(t,x_o',0)-f(t,x_o'',0)\right| \leqslant |x_o'-x_o''| +$$

$$+ \frac{T^2}{4} K_1 \; |x_o'-x_o''| \leqslant \left[E + \frac{T^2}{4} K_1 \right] \; |x_o'-x_o''|.$$

Для похідної з (1.1.27) випливає

$$|\dot{x}_1(t,x_o')-\dot{x}_1(t,x_o'')| \leqslant \left| L\left[f(t,x_o',0)-f(t,x_o'',0)\right]\right| +$$

$$+ S\left| L\left[f(t,x_o',0)-f(t,x_o'',0)\right]\right| \leqslant \alpha_1(t) K_1 |x_o'-x_o''| +$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^T \alpha_1(t)K_1|x_0'-x_0''|dt \leqslant \frac{5T}{6}K_1|x_0'-x_0''|.$$

Для другого наближення, враховуючи попередні нерівності, одержуємо

$$|x_2(t,x_0')-x_2(t,x_0'')| \leqslant |x_0'-x_0''| + \left|L^2\left[f(t,\ x_1',\ \dot{x}_1')-f(t,x_1'',\dot{x}_1'')\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant |x_0'-x_0''| + \frac{T^2}{4}\left[\ K_1|x_1'-x_1''| + K_2|\dot{x}_1'-\dot{x}_1''|\ \right] \leqslant$$

$$\leqslant |x_0'-x_0''| + \frac{T^2}{4}K_1|x_0'-x_0''| + \left[\frac{T^2}{4}K_1 + \frac{5T}{6}K_2\right]\frac{T^2}{4}K_1|x_0'-x_0''| \leqslant$$

$$\leqslant \left[E + \frac{T^2}{4}K_1 + Q\frac{T^2}{4}K_1\right]|x_0'-x_0''|,$$

де $Q = \frac{T^2}{4}K_1 + \frac{5T}{6}K_2$.

Для похідної маємо

$$|\dot{x}_2(t,x_0')-\dot{x}_2(t,x_0'')| \leqslant \left|L\left[f(t,x_1',\dot{x}_1')-f(t,x_1'',\dot{x}_1'')\right]\right| +$$

$$+ S\left|L\left[f(t,x_1',\dot{x}_1')-f(t,x_1'',\dot{x}_1'')\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_1(t)\ \left[K_1|x_1'-x_1''| + K_2|\dot{x}_1'-\dot{x}_1''|\right] + \frac{1}{T}\int_0^T \alpha_1(t)\left[K_1|x_1'-x_1''| +\right.$$

$$\left. + K_2|\dot{x}_1'-\dot{x}_1''|\right]dt \leqslant \frac{5T}{6}\left[K_1 + \frac{T^2}{4} K_1\ K_1 + \frac{5T}{6} K_2\ K_1\right]|x_o'-x_o''| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{5T}{6} K_1 + Q\ \frac{5T}{6} K_1\right]|x_o'-x_o''|.$$

Методом метематичної індукції можна одержати

$$|x_m(t,x_o')-x_m(t,x_o'')| \leqslant \left[E + \sum_{i=0}^{m-1} Q^i\ \frac{T^2}{4} K_1\right]|x_o'-x_o''|, \quad (1.4.5)$$

$$|\dot{x}_m(t,x_o')- \dot{x}_m(t,x_o'')| \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} Q^i\ \frac{5T}{6} K_1\ |x_o'-x_o''|. \quad (1.4.6)$$

При $m\to\infty$ з (1.4.5) і (1.4.6) маємо

$$|x^*(t,x_o')-x^*(t,x_o'')| \leqslant \left[E + (E - Q)^{-1}\ \frac{T^2}{4} K_1\right]|x_o'-x_o''|,$$

$$|\dot{x}^*(t,x_0')-\dot{x}^*(t,x_0'')| \leqslant (E-Q)^{-1}\,\frac{5T}{6}\,K_1\,|x_0'-x_0''|,$$

що і потрібно було довести.

З нерівності (1.4.3) безпосередньо випливає, що

$$\|x_m(t,x_0')-x_m(t,x_0'')\| \leqslant \left[1+\sum_{i=0}^{m-1}\|Q^i\|\,\frac{T^2}{4}\,\|K_1\|\right]\|x_0'-x_0''\|. \quad (1.4.7)$$

ТЕОРЕМА 1.4.2. Якщо задача (1.1.1),(1.1.3) задовольняє умови (1.1.4)-(1.1.6), то визначальна вектор - функція $\Delta(x_0)$ вигляду (1.2.11) визначена, неперервна в області D_β та для всіх значень $x_0', x_0'' \in D_\beta$ має місце оцінка

$$|\Delta(x_0')-\Delta(x_0'')| \leqslant \left[E+Q(E-Q)^{-1}\right]K_1\,|x_0'-x_0''|. \quad (1.4.8)$$

ДОВЕДЕННЯ. Для всіх точок $x_0 \in D_\beta$ існує границя рівномірно збіжної послідовності функцій (1.1.19), яка теж буде неперервною функцією. Тому при зміні x_0 в області D_β функція $\Delta(x_0)$ також неперервна і обмежена.

Із (1.2.11), враховуючи умову Ліпшіца і оцінки (1.4.3) та (1.4.4), одержуємо

$$|\Delta(x_0')-\Delta(x_0'')| \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T\Big|f(t,x^*(t,x_0'),\dot{x}^*(t,x_0') -$$

$$- f(t,x^*(t,x_0''),\dot{x}^*(t,x_0''))\Big|dt \leqslant \Big\{ K_1 + K_1(E - Q)^{-1}\frac{T^2}{4} K_1 +$$

$$+ K_2 \frac{5T}{6} (E - Q)^{-1} K_1 \Big\} |x_0' - x_0''| \leqslant \Big[E + Q(E - Q)^{-1}\Big] K_1 |x_0' - x_0''|,$$

тобто нерівність (1.4.8) дійсно виконується.

Одержавши необхідні допоміжні твердження, переходимо до доведення теореми 1.4.1.

Доведення теореми 1.4.1. Нехай в точці $x_0 = x_0^*$ визначальна функція $\Delta(x_0)$ виду (1.2.11) пертворюється в нуль

$$\Delta(x_0^*) = 0.$$

Звідси внаслідок теореми 1.2.2 випливає, що початкове значення розв'язку задачі (1.1.1), (1.1.3) визначається згідно (1.4.1).

У випадку теореми 1.4.2 покладемо $x_0' = \bar{x}_0$, $x_0'' = x_0^*$. Тоді з (1.4.8) одержуємо

$$|\Delta(\bar{x}_0)| \leqslant \Big[E + Q(E-Q)^{-1}\Big] K_1 |\bar{x}_0 - x_0^*|. \qquad (1.4.9)$$

Але на основі нерівності (1.3.2) в точці $x_0 = \bar{x}_0$

$$|\Delta(\bar{x}_0) - \Delta_m(\bar{x}_0)| \leqslant \left[\frac{T^2}{6} K_1 + \frac{2T}{3} K_2 \right] Q^m (E - Q)^{-1} M,$$

тобто

$$|\Delta_m(\bar{x}_0)| \leqslant |\Delta(\bar{x}_0)| + \left[\frac{T^2}{6} K_1 + \frac{2T}{3} K_2 \right] Q^m(E - Q)^{-1}M. \quad (1.4.10)$$

Враховуючи (1.4.9), нерівність (1.4.10) записуємо таким чином

$$|\Delta_m(\bar{x}_0)| \leqslant \left[E + Q(E-Q)^{-1} \right] K_1 \ |\bar{x}_0 - x_0^*| + \left[\frac{T^2}{6} K_1 + \frac{2T}{3} K_2 \right] \times$$

$$\times\, Q^m(E - Q)^{-1}M \leqslant \sup_{\bar{x}_0 \in D_4} \left[\left[E + Q(E-Q)^{-1} \right] K_1 \ |\bar{x}_0 - x_0^*| + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{T^2}{6} K_1 + \frac{2T}{3} K_2 \right] Q^m(E - Q)^{-1}M \right].$$

Тоді

$$\|\Delta_m(x_0)\| \leqslant \sup_{\bar{x}_0 \in D_4} \left[\left[1 + q(1-q)^{-1} \right] \|K_1\| \, \|\bar{x}_0 - x_0\| + \right.$$

$$\left. + \left\| \frac{T^2}{6} K_1 + \frac{2T}{3} K_2 \right\| \frac{q^m}{1-q} \|M\| \right].$$

А тепер вкажемо алгоритм наближеного відшукання початкового значення (1.4.1) періодичного розв'язку задачі (1.1.1),(1.1.3). Для цього представимо множину D_β, яка задається згідно (1.1.5), як об'єднання скінченної кількості підмножин D_i

$$D_\beta = \bigcup_{i=1}^{N} D_i .$$

У кожній D_i довільно вибираємо точку $x_o^i \in D_i$ та для деякого номера m обчислюємо за (1.1.19) послідовні наближення $x_m(t, x_o^i)$, а за (1.3.1) – $\Delta_m(x_o^i)$.

Після цього на основі (1.4.2) виключаються ті підмножини D_i, для яких для деякої довільної точки x_o^i виконується протилежна нерівність

$$\| \Delta_m(x_o^i) \| > \sup_{x_o^i \in D_i} \Big[\Big[1 + q(1-q)^{-1} \Big] \| K_1 \| \; \| x_o - x_o^i \| +$$

$$+ \Big\| \frac{T^2}{6} K_1 + \frac{2T}{3} K_2 \Big\| \; \frac{q^m}{1-q} \| M \| \Big],$$

оскільки за теоремою 1.4.1 такі підмножини D_i не містять точку x_o^*, яка задає по (1.4.1) початкове значення розв'язку періодичної задачі (1.1.1), (1.1.3).

Ті D_i, що залишилися, утворюють множину M_m^i, яка при i, $m \to \infty$ прямує до множини $M(x_o^*)$ задачі (1.1.1), (1.1.3). Довільну точку $x_o = \tilde{x}_o \in M_m^i$ можна прийняти за наближене значення точки $x_o = x_o^*$.

При цьому має місце оцінка

$$|\tilde{x}_o - x_o^*| \leq \sup_{x_o \in M_m^i} |\tilde{x}_o - x_o| , \qquad (1.4.11)$$

і природньо за наближений розв'язок задачі (1.1.1),(1.1.3) прийняти функцію $x_m(t,\tilde{x}_0)$, яка обчислюється за формулою (1.1.19).

Оцінимо відхилення точного розв'язку $x^*(t,x_0^*)$ від наближеного розв'язку $x_m(t,\tilde{x}_0)$.

ЛЕМА 1.4.2. Якщо для задачі (1.1.1), (1.1.3) виконані умови (1.1.4)-(1.1.6) і x_0^* -періодичний розв'язок визначального рівняння (1.2.11), а $\tilde{x}_0$ -довільна точка з множини M_m^1, яка задовольняє умову (1.4.11), то для відхилення точного розв'язку $x^*(t,x_0^*)$ від наближеного $x_m(t,\tilde{x}_0)$, знайденого за (1.1.19), справедлива нерівність

$$\|x^*(t,x_0^*)-x_m(t,\tilde{x}_0)\| \leqslant \sup_{\tilde{x}_0\in M_m^1}\left[\frac{T^2}{4}\frac{q}{1-q}\|M\| + \right.$$

$$\left. + \left[1 + (1-q)^{-1}\frac{T^2}{4}K_1\|\right]\|x_0^*-\tilde{x}_0\|\right]. \qquad (1.4.12)$$

ДОВЕДЕННЯ. Використаємо очевидне співвідношення

$$\|x^*(t,x_0^*)-x_m(t,\tilde{x}_0)\| \leqslant \|x^*(t,x_0^*)-x_m(t,x_0^*)\| +$$

$$+ \|x_m(t,x_0^*)-x_m(t,\tilde{x}_0)\|. \qquad (1.4.13)$$

Перший доданок правої частини (1.4.13) оцінимо згідно (1.1.25)

$$\|x^*(t,x_0^*)-x_m(t,x_0^*)\| \leqslant \frac{T^2}{4}\frac{q^m}{1-q}\|M\|, \qquad (1.4.14)$$

а другий - згідно (1.4.7)

$$\|x_m(t,x_o^*)-x_m(t,\tilde{x}_o)\| \leqslant \left[1+\sum_{i=0}^{m-1}\|Q^i\|\frac{T^2}{4}\|K_1\|\right]\|x_o^*-\tilde{x}_o\| \leqslant$$

$$\leqslant \left[1+(1-q)^{-1}\frac{T^2}{4}\|K_1\|\right]\|x_o^*-\tilde{x}_o\|. \qquad (1.4.15)$$

Таким чином, враховуючи (1.4.11), (1.4.14), (1.4.15), з (1.4.13) одержуємо

$$|x^*(t,x_o^*)-x_m(t,\tilde{x}_o)| \leqslant \frac{T^2}{4}\frac{q^m}{1-q}\|M\|+\left[1+(1-q)^{-1}\frac{T^2}{4}\|K_1\|\right]\|x_o^*-\tilde{x}_o\|$$

або

$$|x^*(t,x_o^*)-x_m(t,\tilde{x}_o)| \leqslant \sup_{\tilde{x}_o\in M_m^1}\left[\frac{T^2}{4}\frac{q^m}{1-q}\|M\| +\right.$$

$$\left.+\left[1+(1-q)^{-1}\frac{T^2}{4}\|K_1\|\right]\|x_o^*-\tilde{x}_o\|\right],$$

що й завершує доведення леми 1.4.2.

§ 5. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ НА ПРАКТИЦІ

Нехай потрібно проінтегрувати систему диференціальних рівнянь другого порядку

$$\ddot{x} = \frac{1}{5^3} x\dot{x} + Ax + f(t), \qquad (1.5.1)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{5^3} & \frac{1}{5^4} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{5^{2m-1}} & \frac{1}{5^{2m}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \qquad (1.5.2)$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} -\frac{949}{2^4 \cdot 5^4} \sin 2t - \frac{1}{2^6 \cdot 5^5} \sin 4t - \frac{1}{2^5 \cdot 5^5} \cos 2t + \frac{51}{2^4 \cdot 5^4} \\ -\frac{24949}{2^5 \cdot 5^7} \sin 2t - \frac{1}{2^8 \cdot 5^7} \sin 4t - \frac{1}{2^7 \cdot 5^7} \cos 2t + \frac{51}{2^5 \cdot 5^7} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\frac{2^3 \cdot 5^{2m+1} - 51}{2^{m+3} \cdot 5^{3m+1}} \sin 2t - \frac{1}{2^{2m+4} \cdot 5^{2m+3}} \sin 4t - \\ -\frac{1}{2^{2m+3} \cdot 5^{2m+3}} \cos 2t + \frac{51}{2^{m+3} \cdot 5^{3m+1}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{pmatrix} \quad (1.5.$$

і, таким чином, знайти періодичний роз'язок системи (1.5.1) з періодом $T=\pi$:

$$x(0) = x(T).$$

Система визначена в області

$$D_1 : |x| \leqslant \frac{4}{5}, \quad D_2 : |\dot{x}| \leqslant \frac{1}{2\cdot 5}, \quad (t,x,\dot{x})\in(-\infty,+\infty)\times D_1\times D_2. \tag{1.5.4}$$

Крім цього, права частина системи задовольняє умови (1.1.4)-(1.1.6), для яких

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{2^5\cdot 5^2\cdot 73+3}{2^6\cdot 5^5} \\ \dfrac{2^6\cdot 5^2\cdot 229+3}{2^8\cdot 5^7} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{2^{m+4}\cdot 5^2\cdot(2^{m+1}\cdot 5^{2m-4}+2^{m+2}\cdot 5+2^{m+2}+5^{m+1})+3}{2^{2m+4}\cdot 5^{2m+3}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{pmatrix},$$

$$K^1 = \begin{pmatrix} \dfrac{251}{2\cdot 5^4} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dfrac{1}{5^2} & \dfrac{11}{2\cdot 5^4} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dfrac{1}{5^{2m-2}} & \dfrac{5^{2m-5}+2}{2\cdot 5^{2m-1}} & \\ \hdotsfor{7} \end{pmatrix},$$

$$K^2 = \left(\begin{array}{ccccccc} \frac{4}{5^4} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \frac{4}{5^4} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{4}{5^4} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \right).$$

Обчислюючи норми M, K^1, K^2, одержуємо

$$\| M \| = \sup_i |M_i| = \frac{2^5 \cdot 5^2 \cdot 73 + 131}{2^6 \cdot 5^5} = \frac{74531}{2^6 \cdot 5^5} > 0 \qquad (1.5.5)$$

$$\| K^1 \| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |K^1_{ij}| = \frac{251}{2 \cdot 5^4}, \quad \| K^2 \| = \frac{4}{5^4}. \qquad (1.5.6)$$

Згідно умови (1.1.6) матриця Q_o рівна

$$Q_o = \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{4} K^1 & \frac{\pi^2}{4} K^2 \\ \frac{5\pi}{6} K^1 & \frac{5\pi}{6} K^2 \end{pmatrix},$$

а її норма дорівнює

$$\| Q_o \| = \sup_{j=1}^{2} |Q_{ij}| = \frac{5\,\pi}{6} (K^1 + K^2) = \frac{259\,\pi}{3 \cdot 2^2 \cdot 5^4} < 1 \qquad (1.5.7)$$

Не важко побачити, що у випадку умови (1.1.5) β і γ будуть такими:

$$\beta = \frac{\pi^2}{4} \| M \| = \frac{74531\pi^2}{2^8 \cdot 5^5}, \qquad \gamma = \frac{5\pi}{6} \| M \| = \frac{74531\pi}{3 \cdot 2^7 \cdot 5^4}$$

Таким чином, множина D_β точок x_o, що містяться в D_1 разом із своїм околом β, лежить в D_1, а множина D_γ лежить в області D_2, тобто виконується умова (1.1.5).

Матриця Q, яка згідно (1.1.6) рівна

$$Q = \left[\frac{\pi^2}{4} K^1 + \frac{5\pi}{6} K^2 \right],$$

буде також цілком регулярною, оскільки

$$\| Q \| = \left\| \frac{\pi^2}{4} \cdot K^1 + \frac{5 \cdot \pi}{6} K^2 \right\| \leqslant \frac{753 \cdot \pi^2 + 640 \cdot \pi}{3 \cdot 2^6 \cdot 5^4} < 1. \qquad (1.5.8)$$

Початкове значення $x_o = (x_{o1}, x_{o2}, \ldots, x_{om}, \ldots)$ знайдемо з нульового наближення визначального рівняння виду (1.3.1) при $m=0$

$$\Delta_o(x_o) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t, x_o, 0)dt = 0. \qquad (1.5.9)$$

З (1.5.9), враховуючи (1.5.1), (1.5.2), (1.5.3), одержуємо злічenну систему

$$\begin{cases} -\frac{1}{5} x_{o_1} - \frac{1}{5^2} x_{o_2} + \frac{51}{2^4 \cdot 5^4} = 0 \\ -\frac{1}{5^3} x_{o_2} - \frac{1}{5^4} x_{o_3} + \frac{51}{2^5 \cdot 5^7} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\frac{1}{5^{2m-1}} x_{o_m} - \frac{1}{5^{2m}} x_{o_{m+1}} + \frac{51}{2^{m+3} \cdot 5^{3m+1}} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}.$$

З неї знаходимо

$$\begin{cases} x_{o_2} = \dfrac{51}{2^4 \cdot 5^2} - 5 \cdot x_{o_1} \\ x_{o_3} = \dfrac{51}{2^5 \cdot 5^3} - 5 \cdot x_{o_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{o_{m+1}} = \dfrac{51}{2^{m+3} \cdot 5^{m+1}} - 5 \cdot x_{o_m} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}.$$

Згідно формули (1.1.19) перше наближення будемо шукати у вигляді

$$x_1(t,x_o) = x_o + L^2 f(t,x_o(t,x_o),\ \dot{x}_o(t,x_o)) =$$

$$= x_o + L^2 f(t,x_o(t,x_o),0).$$

Тоді покоординатно $x_1(t,x_o)$ можна записати, використовуючи співвідношення (1.5.1)-(1.5.3), у вигляді

$$x_{1_1} = x_{o_1} + L\Big[L\,\Big[\frac{1}{5}\,x_{o_1} - \frac{1}{5^2}\,x_{o_2} - \frac{2^3 \cdot 5^3 - 51}{2^4 \cdot 5^4}\sin 2t -$$

$$- \frac{1}{2^6 \cdot 5^5}\sin 4t - \frac{1}{2^5 \cdot 5^5}\cos 2t + \frac{51}{2^4 \cdot 5^4}\Big]\Big].$$

Провівши необхідні перетворення, одержимо першу координату першого наближення x_{11} в аналітичному вигляді

$$x_{1_1} = x_{o_1} + \frac{2^3 \cdot 5^3 - 51}{2^6 \cdot 5^4}\sin 2t + \frac{1}{2^{10} \cdot 5^5}\sin 4t +$$

$$+ \frac{1}{2^7 \cdot 5^5} \cos 2t - \frac{1}{2^7 \cdot 5^5} .$$

Другу координату першого наближення знаходимо з виразу

$$x_{1_2} = x_{o_2} + L^2 f_2(t, x_o, 0),$$

і тоді одержуемо

$$x_{1_2} = x_{o_2} + \frac{2^3 \cdot 5^5 - 51}{2^7 \cdot 5^7} \sin 2t + \frac{1}{2^{12} \cdot 5^7} \sin 4t +$$

$$+ \frac{1}{2^9 \cdot 5^7} \cos 2t - \frac{1}{2^9 \cdot 5^7} .$$

Аналогічно знаходимо третю координату

$$x_{1_3} = x_{o_3} + L^2 f_3(t, x_o, 0).$$

Її аналітичний вигляд такий

$$x_{1_3} = x_{o_3} + \frac{2^3 \cdot 5^7 - 51}{2^8 \cdot 5^{10}} \sin 2t + \frac{1}{2^{14} \cdot 5^9} \sin 4t +$$

$$+ \frac{1}{2^{11} \cdot 5^9} \cos 2t - \frac{1}{2^{11} \cdot 5^9} .$$

Для m-ї координати маемо:

$$x_{1_m} = x_{o_m} + \frac{2^3 \cdot 5^{2m+1} - 51}{2^{m+5} \cdot 5^{3m+1}} \sin 2t + \frac{1}{2^{2m+8} \cdot 5^{2m+3}} \sin 4t +$$

$$+ \frac{1}{2^{2m+5} \cdot 5^{2m+3}} \cos 2t - \frac{1}{2^{2m+5} \cdot 5^{2m+3}} .$$

Отже, перше наближенне має вигляд

$$x_1=\left\{\begin{array}{l} x_{o_1}+\dfrac{2^3\cdot5^3-51}{2^6\cdot5^4}\sin 2t+\dfrac{1}{2^{10}\cdot5^5}\sin 4t+\dfrac{1}{2^7\cdot5^5}\cos 2t-\dfrac{1}{2^7\cdot5^5} \\ x_{o_2}+\dfrac{2^3\cdot5^5-51}{2^7\cdot5^7}\sin 2t+\dfrac{1}{2^{12}\cdot5^7}\sin 4t+\dfrac{1}{2^9\cdot5^7}\cos 2t-\dfrac{1}{2^9\cdot5^7} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{o_m}+\dfrac{2^3\cdot5^{2m+1}-51}{2^{m+5}\cdot5^{3m+1}}\sin 2t+\dfrac{1}{2^{2m+8}\cdot5^{2m+3}}\sin 4t+\dfrac{1}{2^{2m+5}\cdot5^{2m+3}}\cos 2t\dfrac{1}{2^{2m+5}\cdot5^{2m+3}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}$$

В таблицях, які наведені нижче, вказані числові значення нульвого та першого наближень для двадцяти перших координат.

Табл.1

x_{o_1}	$2{,}5\cdot10^{-2}$	$x_{o_{11}}$	$2{,}5\cdot10^{-12}$
x_{o_2}	$2{,}5\cdot10^{-3}$	$x_{o_{12}}$	$2{,}5\cdot10^{-13}$
x_{o_3}	$2{,}5\cdot10^{-4}$	$x_{o_{13}}$	$2{,}5\cdot10^{-14}$
x_{o_4}	$2{,}5\cdot10^{-5}$	$x_{o_{14}}$	$2{,}5\cdot10^{-15}$
x_{o_5}	$2{,}5\cdot10^{-6}$	$x_{o_{15}}$	$2{,}5\cdot10^{-16}$
x_{o_6}	$2{,}5\cdot10^{-7}$	$x_{o_{16}}$	$2{,}5\cdot10^{-17}$
x_{o_7}	$2{,}5\cdot10^{-8}$	$x_{o_{17}}$	$2{,}5\cdot10^{-18}$
x_{o_8}	$2{,}5\cdot10^{-9}$	$x_{o_{18}}$	$2{,}5\cdot10^{-19}$
x_{o_9}	$2{,}5\cdot10^{-10}$	$x_{o_{19}}$	$2{,}5\cdot10^{-20}$
$x_{o_{10}}$	$2{,}5\cdot10^{-11}$	$x_{o_{20}}$	$2{,}5\cdot10^{-21}$

Табл.2

x_1 t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	Порядок
x_{1_1}	2,5	3,42390	4,20188	4,71112	4,87123	4,65693	10^{-2}
x_{1_2}	2,5	3,47156	4,28973	4,82533	4,99381	4,76857	10^{-3}
x_{1_3}	2,5	3,47347	4,29324	4,82991	4,99873	4,77305	10^{-4}
x_{1_4}	2,5	3,47354	4,29338	4,83009	4,99893	4,77323	10^{-5}
x_{1_5}	2,5	3,47355	4,29339	4,83010	4,99893	4,77324	10^{-6}
x_{1_6}	2,5	3,47355	4,29340	4,83010	4,99893	4,77324	10^{-7}
x_{1_7}	2,5	3,47355	4,29340	4,83010	4,99893	4,77324	10^{-8}
x_{1_8}	2,5	3,47355	4,29340	4,83010	4,99893	4,77324	10^{-9}
x_{1_9}	2,5	3,47355	4,29340	4,83010	4,99893	4,77324	10^{-10}
$x_{1_{10}}$	2,5	3,47355	4,29340	4,83010	4,99893	4,77324	10^{-11}
$x_{1_{11}}$	2,5	3,47355	4,29340	4,83010	4,99893	4,77324	10^{-12}
$x_{1_{12}}$	2,5	3,47355	4,29340	4,83010	4,99893	4,77324	10^{-13}
$x_{1_{13}}$	2,5	3,47355	4,29340	4,83010	4,99893	4,77324	10^{-14}
$x_{1_{14}}$	2,5	3,47355	4,29340	4,83010	4,99893	4,77324	10^{-15}
$x_{1_{15}}$	2,5	3,47355	4,29340	4,83010	4,99893	4,77324	10^{-16}
$x_{1_{16}}$	2,5	3,47355	4,29340	4,83010	4,99893	4,77324	10^{-17}
$x_{1_{17}}$	2,5	3,47355	4,29340	4,83010	4,99893	4,77324	10^{-18}
$x_{1_{18}}$	2,5	3,47355	4,29340	4,83010	4,99893	4,77324	10^{-19}
$x_{1_{19}}$	2,5	3,47355	4,29340	4,83010	4,99893	4,77324	10^{-20}
$x_{1_{20}}$	2,5	3,47355	4,29340	4,83010	4,99893	4,77324	10^{-21}

ГЛАВА 2. ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДВОТОЧКОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗЛІЧЕННОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У другій главі розглянуто можливість використання чисельно-аналітичного методу послідовних наближень для розв'язування та дослідження двоточкових задач злічених систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. У ній доведено теорему про збіжність послідовних наближень до точного розв'язку, розглянуто властивості граничної функції, вказано необхідні та достатні умови існування розв'язків. Викладення теоретичного матеріалу підкріплено на практиці з допомогою розв'язування конкретної крайової задачі.

§6. ДОВЕДЕННЯ ЗБІЖНОСТІ ПОСЛІДОВНОСТІ НАБЛИЖЕНЬ ДЛЯ ЗЛІЧЕННОЇ СИСТЕМИ НОРМАЛЬНОГО ВИДУ

Розглянемо двоточкову крайову задачу з лінійними нероздільними граничними умовами вигляду

$$\dot{x} = f(t,\ x), \qquad (2.6.1)$$

$$\mathbf{A}x(0) + \mathbf{C}x(T) = d, \qquad (2.6.2)$$

де $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots)$, $d = (d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_n,\ \ldots)$ - точки простору $\mathfrak{M}$ обмеженої числової послідовності з нормою $\|x\|=\sup_n|x_n|$, $\|d\|=\sup_n|d_n|$, функція $f(t,x)=(f_1(t,x),\ldots,f_n(t,x),\ldots)$ - неперервна по t в області

$$(t,\ x) \in (0,\ T)\times\mathbf{D}, \qquad (2.6.3)$$

яка приймає значення з простору $\mathfrak{M}$, $\mathbf{D}$ – обмежена, замкнена множина з $\mathfrak{M}$. Матриці $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ – зліченні, причому для $\mathbf{C}$ існує обернена матриця $\mathbf{C}^{-1}$.

Припустимо, що права частина рівняння (2.6.1) задовольняє умову обмеженості зліченним вектором $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_n, \dots)$, $\mathbf{M}_1 > 0$ і умову Ліпшіца із зліченною матрицею $\mathbf{K}$ з невід'ємними елементами, тобто

$$|f(t,x,y)| \leqslant \mathbf{M},$$

$$|f(t,x') - f(t,x'')| \leqslant \mathbf{K}|x'-x''|, \qquad (2.6.4)$$

$$t \in (0,T),\ x',x'' \in \mathbf{D},$$

де $|f(t,x)| = (|f_1(t,x)|, \dots, |f_n(t,x)|, \dots)$ і нерівності між нескінченномірними векторами в (2.6.4) розуміємо покомпонентно.

Серед двоточкових крайових задач (2.6.1), (2.6.2) виділимо клас таких, для яких параметри $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$, T, $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, d, а також область визначення (2.6.3) задовольняють деякі додаткові умови:

1) множина $\mathbf{D}_\beta$ точок $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}, \dots) \in \mathfrak{M}$, які містяться в області $\mathbf{D}$ разом із своїм β-околом, де $\beta = \frac{T}{2}\mathbf{M} + \beta_1$, $\beta_1 = |\mathbf{C}^{-1}d - (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{E})x_0|$, непорожня:

$$\mathbf{D}_\beta \neq 0 \; ; \qquad (2.6.5)$$

2) оператор, утворений матрицею

$$\mathbf{Q} = \frac{T}{n}\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1n} & \dots \\ K_{21} & \dots & K_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & \dots & K_{nn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

є цілком регулярним, тобто

$$\|Q\| \leqslant g < 1. \qquad (2.6.6)$$

Аналогічно до глави 1, введемо у розгляд оператор L, який діє на неперервну при $t \in [0,T]$ злічену вектор-функцію $f(t) = (f_1(t),\ldots,f_n(t),\ldots)$ за формулою

$$Lf(t) = \int_0^t (f(s)-Sf(t))ds \ , \qquad (2.6.7)$$

де S - оператор інтегрального середнього

$$Sf(t) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt. \qquad (2.6.8)$$

Згідно леми 3.1 [83]

$$|Lf(t)| = \alpha_1(t)|f(t)|_0, \qquad (2.6.9)$$

де $|f(t)|_0 = \left\{ \sup_{t\in[0,T]} f_1(t), \ \ldots, \ \sup_{t\in[0,T]} f_n(t), \ \ldots \right\}$,

$$\alpha_1(t) = 2t(1 - \frac{t}{T}) \leqslant \frac{T}{2} \ . \qquad (2.6.10)$$

Звідси випливає, що

$$|Lf(t)| \leqslant \frac{T}{2} |f(t)|_0. \qquad (2.6.11)$$

Для даної задачі (2.6.1), (2.6.2) побудуємо послідовність злічених функцій $x_m(t,x_0)=(x_{m1}(t,x_0),\ldots,x_{mn}(t,x_0),\ldots)$, які залежать від $x_0=(x_{01},\ldots,x_{0n},\ldots)$ як від параметра, задовольняють умову (2.6.2) для всіх m при довільних $x_0 \in D_\beta$, та рівномірно збігається до точного розв'язку задачі (2.6.1),(2.6.2).

Розглянемо послідовність функцій

$$x_m(t,x_0) = x_0 + \int_0^t f(t,x_{m-1}(t,x_0))dt + \alpha t, \qquad (2.6.12)$$

$$x_0(t,x_0) = x_0,$$

$$x_m(t,x_0) = (x_{m1}(t,x_0),\dots,x_{mn}(t,x_0),\dots),$$

де параметр $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)$ підберемо таким, щоб функція вигляду (2.6.7) задовольняла крайові умови (2.6.2) при довільному x_0 для всіх $m = 1, 2, \dots$.

Для знаходження α розглянемо систему алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{A}x_0 + \mathbf{C}[x_0 + \int_0^T f(t, x_{m-1}(t, x_0))dt + \alpha T] = d,$$

звідки

$$\alpha = \frac{1}{T}\left[\mathbf{C}^{-1}d - (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{E})x_0 - \int_0^T f(t, x_{m-1}(t, x_0))dt\right]. \qquad (2.6.13)$$

Отже, всі члени послідовності функцій

$$x_m(t,x_0) = x_0 + \int_0^t\left[f(t,x_{m-1}(t,x_0)) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_{m-1}(s, x_0))ds\right]dt +$$

$$+ \frac{t}{T}\left[\mathbf{C}^{-1}d - (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{E})x_0\right], \quad m=1, 2, \dots , \qquad (2.6.14)$$

які залежать від x_0 як від параметра, задовольняють крайові умови (2.6.2) при довільному x_0.

Згідно (2.6.9), вираз (2.6.14) можна переписати у вигляді

$$x_m(t,x_0)=x_0+Lf(t,x_{m-1}(t,x_0))+\frac{t}{T}\left[C^{-1}d-(C^{-1}A+E)x_0\right]. \tag{2.6.15}$$

Має місце наступне твердження про збіжність послідовних наближень $x_m(t,x_0)$ вигляду (2.6.15).

ТЕОРЕМА 2.6.1. Нехай права частина $f(t,x)$ зліченної системи диференціальних рівнянь визначена, неперервна по t, x в області (2.6.3) і приймає значення в просторі $\mathfrak{M}$, а також виконуються умови (2.6.4)-(2.6.6).

Тоді послідовність функцій $x_m(t,x_0)$ вигляду (2.6.15), які залежать від x_0 як від параметра і таких, що задовольняють крайові умови (2.6.2), рівномірно збігається при $m\to\infty$ відносно області

$$(t,x_0)\in[0,T]\times D_\beta \tag{2.6.16}$$

до граничної функції $x^*(t,x_0)$, тобто

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t,x_0)=x^*(t,x_0). \tag{2.6.17}$$

Функція $x^*(t,x_0)$, яка при $t=0$ проходить через точку $x_0\in D_\beta$ і одночасно задовольняє крайові умови (2.6.2), буде розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t)=x_0+Lf(t,x(t,x_0))+\int_0^t \frac{1}{T}\left[C^{-1}d-(C^{-1}A+E)x_0\right]dt, \tag{2.6.18}$$

тобто розв'язком крайової задачі

$$\begin{gathered}\dot{x}=f(t,x)+\Delta(x_0),\\ Ax(0)+Cx(T)=d,\end{gathered} \tag{2.6.19}$$

де $$\Delta(x_0)=\frac{1}{T}\left[\mathbf{C}^{-1}d - (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}+\mathbf{E})x_0\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(t,\ x^*(t,x_0))dt. \qquad (2.6.20)$$

Для відхилення $x^*(t,x_0)$ від $x_m(t,x_0)$ для всіх $m = 1,\ 2,\ \ldots$ має місце оцінка

$$\|x^*(t,x_0) - x_m(t,x_0)\| \leqslant \frac{Tn}{6}\left\{\frac{q^m}{1-q}\ \|\mathbf{M}\| + \|\mathbf{K}\|\ \frac{q^{m-1}}{1-q}\ \|\beta_1\|\right\}, \qquad (2.6.21)$$

де

$$\|x(t)\|=\sup_n \max_{t\in[0,T]}|x_n(t)|,\ \|\mathbf{K}\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \|K_{ij}\|,\ m = 1,\ 2,\ \ldots$$

ДОВЕДЕННЯ. Спочатку покажемо, що якщо $x_0\in\mathbf{D}_\beta$, то всі функції $x_m(t,x_0)\in\mathbf{D}$ при $t\in[0,T]$.

Поклавши в (2.6.15) $m=1$ та врахувавши (2.6.11), маємо

$$|x_1(t,\ x_0) - x_0| \leqslant \frac{T}{2}\,M + \beta_1(x_0),.$$

$$\beta_1(x_0) = |\mathbf{C}^{-1}d - (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{E})x_0|, \qquad (2.6.22)$$

тобто $x_1(t,x_0)\in\mathbf{D}$ при $x_0\in\mathbf{D}_\beta$.

Методом математичної індукції не важко встановити, що для всіх $m = 1,2,\ldots,\ t \in [0,T]$ і кожного $x_0\in\mathbf{D}_\beta$ дійсно всі функції $x_m(t,x_0)$ вигляду (2.6.15) належать області $\mathbf{D}$, тобто

$$x_m(t,x_0)\in\mathbf{D},\quad m=1,2,\ldots,\quad x_0\in\mathbf{D}_\beta.$$

Приступаючи до доведення збіжності послідовності (2.6.15), оцінимо різницю

$$x_2(t,x_0) - x_1(t,x_0).$$

На основі (2.6.15) одержуємо

$$x_2(t,x_o) - x_1(t,x_o) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t\left[f(s,\ x_1(s,x_o)) - f(s,x_o)\right]ds - \frac{t}{T}\int_t^T\left[f(s,\ x_1(s,x_o)) - f(s,x_o)\right]ds.$$

Враховуючи умову Ліпшица (2.6.4) та нерівності (2.6.10), можна зробити оцінку різниці $x_2(t,x_o) - x_1(t,x_o)$.

$$|x_2(t,\ x_o) - x_1(t,\ x_o)| \leqslant K\left[\left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t |x_1(s,x_o) - x_o|ds - \frac{t}{T}\int_t^T |x_1(s,x_o) - x_o|ds\right].$$

Згідно (2.6.22) $|x_1(t,x_o) - x_o| \leqslant \alpha_1(t)M + \beta_1(x_o)$.

Тоді

$$|x_2(t,x_o) - x_1(t,x_o)| \leqslant KM\left[\left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t \alpha_1(s)ds + \frac{t}{T}\int_t^T \alpha_1(s)ds\right] + Kt\left(1 - \frac{t}{T}\right)\beta_1(x_o) + K(T-t)\frac{t}{T}\beta_1(x_o) = K\left[\alpha_2(t)M + \alpha_1(t)\beta_1(x_o)\right],$$

де $\alpha_2(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t \alpha_1(s)ds + \frac{t}{T}\int_t^T \alpha_1(s)ds.$

Аналогично, для $|x_3(t,x_o) - x_2(t,x_o)|$ одержуємо

$$|x_3(t,x_o) - x_2(t,x_o)| \leqslant K\left[\left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t K(\alpha_2(s)M + \alpha_1(s)\beta_1(x_o))ds\ +\right.$$

$$+\frac{t}{T}\int_t^T \mathbf{K}(\alpha_2(s)M+\alpha_1(s)\beta_1(x_0))ds\Big] = \mathbf{K}^2\left[\alpha_3(t)M+\alpha_2(t)\beta_1(x_0)\right].$$

Методом математичної індукції можна довести, що для довільного номера $m\geqslant 1$ справедливі наступні нерівності

$$|x_{m+1}(t,x_0)-x_m(t,x_0)|\leqslant \mathbf{K}^m\left[\alpha_{m+1}(t)M+\alpha_m(t)\beta_1(x_0)\right], \quad (2.6.23)$$

де $\alpha_{m+1}(t) = \left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t \alpha_m(s)ds + \frac{t}{T}\int_t^T \alpha_m(s)ds.$

Згідно леми [81]

$$\alpha_{m+1}(t)\leqslant T^m q_m \tilde{\alpha}_1(t), \quad (2.6.24)$$

де $\tilde{\alpha}_1(t)\leqslant \frac{T}{3}\alpha_1(t)$, $q_m\leqslant \frac{1}{\pi^m}$, $m=1,2,\ldots$

Таким чином, враховуючи (2.6.24), нерівність (2.6.23) перепишемо у вигляді

$$|x_{m+1}(t,x_0)-x_m(t,x_0)|\leqslant \tilde{\alpha}_1(t)\Big[(\mathbf{K}T)^m q_m M +$$

$$+\mathbf{K}(\mathbf{K}T)^{m-1}q_{m-1}\beta_1(x_0)\Big],\ t\in[0,\ T],\ m=1,2,\ldots\,. \quad (2.6.25)$$

Оскільки

$$|x_{m+j}(t,x_0)-x_m(t,x_0)|\leqslant|x_{m+j}(t,x_0)-x_{m+j-1}(t,x_0)|+|x_{m+j-1}(t,x_0)-$$

$$-x_{m+j-2}(t,x_0)|+\ldots+|x_{m+1}(t,x_0)-x_m(t,x_0)|,$$

то згідно з (2.6.23) одержуємо

$$|x_{m+j}(t,x_0)-x_m(t,x_0)|\leqslant\tilde{\alpha}_1(t)\Big\{\sum_{i=0}^{j-1}q_{m+i}\,(\mathbf{K}T)^{m+i}M +$$

$$+\left[K\sum_{i=0}^{j-1} q_{m+i-1}(KT)^{m+i-1}\right]\beta_1(x_0)\Big\}. \qquad (2.6.26)$$

З останньої нерівності на основі оцінки леми 1.1.2 [82] для всіх $t\in[0,T]$ при $m+i-1\geqslant 1$ маємо

$$|x_{m+j}(t,x_0) - x_m(t,x_0)| \leqslant \tilde{\alpha}_1(t)\Big\{\sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i} M +$$

$$(2.6.27)$$

$$+\left[K\sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i-1}\right]\beta_1(x_0)\Big\} = \tilde{\alpha}_1(t)\Big\{Q^m\left[\sum_{i=0}^{j-1} Q^i\right]M + KQ^{m-1}\sum_{i=0}^{j-1} Q^i\beta_1(x_0)\Big\},$$

де $Q = \dfrac{T}{\pi}K$.

Оцінюючи (2.6.27) за нормою, одержимо

$$\|x_{m+j}(t,x_0) - x_m(t,x_0)\| \leqslant \frac{T\pi}{6}\Big\{\Big\|\sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i}\Big\|\,\|M\| +$$

$$+ \|K\|\,\Big\|\sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i-1}\Big\|\,\|\beta_1(x_0)\|. \qquad (2.6.28)$$

На основі (2.6.6) нерівність (2.6.28) перепишемо у вигляді

$$\|x_{m+j}(t,x_0) - x_m(t,x_0)\| \leqslant \frac{T\pi}{6}\Big\{\Big\|\frac{Q^m}{E-Q}\Big\|\,\|M\| +$$

$$+ \|K\|\,\Big\|\frac{Q^{m-1}}{E-Q}\Big\|\,\|\beta_1(x_0)\|\Big\}. \qquad (2.6.29)$$

Отже, на основі (2.6.29) можна зробити висновок, що при $m\to\infty$ послідовність функцій $\{x_m(t,x_0)\}$ рівномірно збігається в області $(t,x)\in(0,T)\times D_\beta$:

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t,x_0) = x^*(t,x_0).$$

Більше того, оскільки функції $x_m(t,x_o)$, $m = 1,2,\ldots$ задовольняють крайові умови (2.6.2), то легко побачити, що граничні функції $x^*(t, x_o)$ також задовольняють їх.

При $j\to\infty$ з (2.6.29) для всіх m одержуємо потрібні оцінки .

Якщо в рівності (2.6.15) перейти до границі при $m\to\infty$ і врахувати співвідношення (2.6.17),то побачимо, що гранична функція $x^*(t,x_o)$ дійсно є розв'язком інтегрального рівняння (2.6.18), яке при $t=0$ проходить через точку $x^*(0, x_o) = x_o$ і задовольняє крайові умови (2.6.2).

§ 7. ЗБУРЕНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ТА ЇЇ ЗВ'ЯЗОК З ВИХІДНОЮ

Розглянемо зв'язок розв'язуваності крайової задачі (2.6.1), (2.6.2) з існуванням нулів визначальної вектор-функції, яка залежить від $x_m(t,x_o)$, а також встановимо, як з допомогою спеціальним чином заданого керуючого параметра μ завжди можна досягти такого видозмінення правої частини диференціального рівняння (2.6.1), що розв'язок одержаного рівняння, яке при $t=0$ проходиме через деяку точку, буде в той же час задовольняти крайові умови (2.6.2).

ТЕОРЕМА 2.7.1. При виконанні умов теореми 2.6.1 для довільної точки $x_o \in \mathbf{D}_\beta$ можна вказати таке єдине значення керуючого параметра $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots)$, яке визначається за формулою

$$\mu = \frac{1}{T}\left[\mathbf{C}^{-1}d - (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{E})x_o \right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x^*(t, x_o))dt, \qquad (2.7.1)$$

де $x^*(t,x_o)$ - гранична функція послідовності (2.6.15), що розв'язок $x = x(t) = x^*(t,x) = \lim_{m\to\infty} x_m(t,x)$ системи диференціальних рівнянь з параметром в правій частині вигляду

$$\dot{x} = f(t,\ x) + \mu,$$

який приймає при $t=0$ початкове значення

$$x(0) = x_o,\quad x_o \in D_\beta, \tag{2.7.2}$$

буде в той же час задовольняти крайові умови (2.6.2), тобто буде розв'язком крайової задачі (2.7.1), (2.7.2), (2.6.2).

ДОВЕДЕННЯ. На основі теореми 2.6.1 маємо, що функція $x(t)=x^*(t,x_o)$ є розв'язком інтегрального рівняння (2.6.18), вона буде в той же час і розв'язком задачі Коші

$$\dot{x}=f(t,\ x) + \frac{1}{T}\left[\mathbf{C}^{-1}d - (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{E})x_o\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(t,x^*(t,x_o))dt, \tag{2.7.3}$$

$$x(0) = x_o, \tag{2.7.4}$$

причому таким, що задовольняє крайові умови (2.6.2). Цим ми показали, що існує таке значення параметра μ вигляду (2.7.1), при якому функція $x(t)=x^*(t,x_o)$ є розв'язком крайової задачі (2.6.1)-(2.6.3), (2.7.3), який задовольняє початкові умови (2.7.4).

Подальше доведення аналогічне до доведення теореми 1.2.1.

Знайдемо необхідні і достатні умови того, щоб гранична функція послідовності $x_m(t,x_o)$ вигляду (2.6.15) співпадала з розв'язком розглядуваної крайової задачі (2.6.1), (2.6.2).

ТЕОРЕМА 2.7.2. Нехай права частина $f(t,\ x)$ системи (2.6.1) визначена, неперервна в області (2.6.3) і виконуються умови (2.6.4)-(2.6.6). Тоді для того, щоб розв'язок $x= x^*(t)$

задачі Коші

$$\dot{x} = f(t,\ x),$$

$$x(0) = x_0,$$

де $x^*(t,x_0)$ - гранична функція (2.6.17), був і розв'язком крайової задачі (2.6.1), (2.6.2), необхідно і достатньо, щоб початкове значення x_0 було розв'язком визначального рівняння

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T}\left[C^{-1}d - (C^{-1}A + E)x_0\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(t,x^*(t,x_0))dt = 0. \quad (2.7.5)$$

Крім того, в цьому випадку $x^*(t)=x^*(t,x_0)$ і при всіх $m = 1, 2, 3, \ldots$ для відхилення точного розв'язку $x = x^*(t) = \dot{x}^*(t,\ x_0)$ крайової задачі (2.6.1), (2.6.2) від її наближеного розв'язку $x = x_m(t,x_0)$ вигляду (2.6.15) має місце нерівність (2.6.21).

Доведення. Достатність умови (2.7.5) безпосередньо слідує з того, що функція $x^*(t,\ x_0)$, яка задовольняє крайові умови (2.6.2) і проходить при $t=0$ через точку $x(0)=x_0$, є розв'язком інтегрального рівняння (2.6.18), або, що те ж саме, розв'язком задачі Коші (2.7.3), (2.7.4). З єдиності її розв'язку випливає справедливість рівності $x^*(t) = x^*(t,\ x_0)$.

Необхідність умови (2.7.5) випливає з наступних міркувань. Якщо $x=x^*(t)$ - розв'язок крайової задачі (2.6.1),(2.6.2), який проходить при $t=0$ через $x(0)=x_0$, $x_0 \in D_\beta$, тоді розв'язок $x = x(t,\ x_0,\ \Delta)$ системи $\dot{x} = f(t,x) + \Delta(x_0)$з цим же початковим значенням $x(0,\ x_0,\ \Delta) = x_0$ буде задовольняти крайові умови (2.6.2) саме при $\Delta(x_0) = 0$, оскільки в цьому випадку $x(t,x_0,\Delta=0) = x^*(t)$.

На основі теореми 2.7.1 розв'язок задачі Коші (2.7.3), (2.7.4) буде одночасно і розв'язком крайової задачі (2.6.1), (2.6.2) лише при єдиному значенні параметра μ вигляду (2.7.1). Таке значення параметра ми вже вказали при $\mu=\Delta(x_o)=0$ і при цьому виконується рівність $x^*(t) = x^*(t,x_o)$, що веде до (2.6.21).

§8. ДОСТАТНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ

Достатні умови розв'язуваності крайової задачі (2.6.1), (2.6.2) одержимо на основі властивостей послідовних наближень $x_m(t,x_o)$ вигляду (2.6.15).

Оскільки можемо знайти наближене значення $x_m(t,x_o)$ граничної функції $x^*(t,x_o)$, то для зручності введемо до розгляду наближене визначальне рівняння

$$\Delta_m(x_o) = \frac{1}{T}\left[\mathbf{C}^{-1}d - (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{E})x_o - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t,\ x_m(t,x_o))dt\right], \quad (2.8.1)$$

причому рівняння (2.8.1) відрізняється від (2.7.5) тим, що в першому з них фігурує $x^*(t,x_o)$, а в другому - $x_m(t,x_o)$.

Доведемо попередньо наступні твердження.

ЛЕМА 2.8.1. При всіх $x_o\in\mathbf{D}_\beta$ для визначальної функції $\Delta(x_o)$, $\Delta_m(x_o)$ вигляду (2.7.5), (2.8.1) по нормі простору $\mathfrak{M}$ справедлива оцінка

$$\|\Delta(x_o)-\Delta_m(x_o)\| \leqslant \frac{\pi^2}{9}\left\|\mathbf{Q}^{m+1}(\mathbf{E}-\mathbf{Q})^{-1}M + \mathbf{K}\mathbf{Q}^m(\mathbf{E}-\mathbf{Q})^{-1}\beta_1(x_o)\right\|. \quad (2.8.2)$$

ДОВЕДЕННЯ. За означенням

$$\Delta(x_o) - \Delta_m(x_o) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T\left[f(t,\ x_m(t,x_o)) - f(t,\ x^*(t,x_o))\right]dt.$$

З умови Ліпшіца (2.6.4) і нерівності (2.6.27) маємо

$$|\Delta(x_o) - \Delta_m(x_o)| \leqslant \frac{\pi^2}{9} Q^m(E-Q)^{-1}(QM + K\beta_1(x_o)),$$

або $$\| \Delta(x_o)-\Delta_m(x_o) \| \leqslant \frac{\pi^2}{9} \left\| Q^{m+1}(E-Q)^{-1}M + KQ^m(E-Q)^{-1}\beta_1(x_o) \right\|.$$

Для встановлення розв'язуваності зліченної крайової задачі (2.6.1), (2.6.2) нам потрібні будуть наступні твердження.

ТЕОРЕМА 2.8.1. Нехай права частина системи диференціальних рівнянь (2.6.1), яка задана в області (2.6.3), задовольняє умови (2.6.4)-(2.6.6) і наступні припущення:

1) для деякого цілого m відображення

$$\Delta_m : \Delta_m = \Delta_m(x_o) = S(f(t, x_m(t,x_o)))$$

області $D\setminus\frac{MT}{2}$ в область $\Delta_m(D\setminus\frac{MT}{2})$ має слабку точку $x_o = x^o$:

$$\Delta_m(x^o) = 0;$$

2) існує замкнена, обмежена область D_1, що належить $D\setminus\frac{MT}{2}$, яка містить точку x^o і така, що оператор Δ_m топологічно відображає D_1 на $\Delta_m D_1$;

3) на границі Γ_{D_1} області D_1 виконується нерівність

$$\inf_{x\in\Gamma_{D_1}} \|\Delta_m(x)\| \geqslant \frac{\pi^2}{9} \left\| Q^{m+1}(E-Q)^{-1}M + KQ^m(E-Q)^{-1}\beta_1(x_o) \right\|. \quad (2.8.3)$$

Тоді крайова задача (2.6.1), (2.6.2) має розв'язок $x=x^*(t)$, для якого початкове значення $x_o^* = x^*(0)$ належить області D_1.

ДОВЕДЕННЯ можна провести так, як і в теоремі 1.3.1.

§ 9. ВИБІР ОБЛАСТІ ПОЧАТКОВИХ ЗНАЧЕНЬ

Сформулюємо одне твердження, з якого випливають необхідні умови розв'язуваності крайової задачі (2.6.1), (2.6.2). На його основі приведемо алгоритм вибору області, серед точок якої тільки і можуть знаходитися початкові значення розв'язку крайової задачі (2.6.1), (2.6.2).

Крім того, цей результат додатково пояснює чисельно-аналітичну природу методу, а саме: послідовні наближення до шуканого розв'язку знаходяться аналітично, а їх початкові значення-з допомогою чисельних методів.

Сформулюємо лему, яка оцінює близькість граничних функцій $x^*(t,x_o')$ и $x^*(t,x_o'')$ для точок x_o', $x_o'' \in \mathbf{D}_\beta$, а також теорему про неперервну залежність визначальної вектор-функції $\Delta(x_o)$ від x_o.

Л Е М А 2.9.1. Нехай для задачі (2.6.1), (2.6.2) мають місце умови (2.6.4)-(2.6.6). Тоді для довільних точок $x_o', x_o'' \in \mathbf{D}_\beta$ для відхилення граничних функцій $x^*(t,\ x_o')$ і $x^*(t,\ x_o'')$ послідовностей $\{x_m(t,\ x_o')\}$ і $\{x_m(t,\ x_o'')\}$ вигляду (2.6.15) справедливі нерівності

$$|x^*(t,\ x_o') - x^*(t,\ x_o'')| \leqslant (E - \mathbf{Q}_1)^{-1}\ [\mathbf{E}+(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}+\mathbf{E})]\,|x_o' - x_o''|, \tag{2.9.1}$$

$$\|x^*(t,\ x_o') - x^*(t,\ x_o'')\| \leqslant \frac{1}{1-q_1}\,\|\mathbf{E}+(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}+\mathbf{E})\|\,\|x_o' - x_o''\|,$$

де $\mathbf{Q}_1 = \frac{T}{2}\,\mathbf{K}$, $\|\mathbf{Q}_1\| \leqslant q_1 < 1$.

Д О В Е Д Е Н Н Я леми аналогічне до доведення леми 1.4.1.

Т Е О Р Е М А 2.9.1. Якщо крайова задача (2.6.1), (2.6.2) задовольняє умови (2.6.4)-(2.6.6), то визначальна вектор-функція $\Delta(x_o)$ вигляду (2.7.5) визначена, неперервна в області $\mathbf{D}_\beta$ і для всіх x_o', $x_o'' \in \mathbf{D}_\beta$ має місце оцінка

$$|\Delta(x_0') - \Delta(x_0'')| \leqslant \frac{1}{T}\,(C^{-1}A+E)|x_0' - x_0''| +$$

$$+ K(E-Q_1)^{-1}[E+(C^{-1}A+E)]|x_0' - x_0''|. \qquad (2.9.2)$$

ДОВЕДЕННЯ. Для всіх $x_0 \in D_\beta$ існує границя рівномірно збіжної послідовності функцій (2.6.15), яка також буде неперервною функцією. Тому при зміні x_0 в області D_β функція $\Delta(x_0)$ також неперервна і обмежена.

З (2.7.5), враховуючи умову Ліпшіца і оцінку (2.9.1), одержимо

$$|\Delta(x_0') - \Delta(x_0'')| \leqslant \frac{1}{T}\,(C^{-1}A+E)|x_0'-x_0''| + \frac{1}{T}\int_0^T |f(t,x^*(t,\,x_0'')) -$$

$$- f(t,x^*(t,\,x_0'))|dt \leqslant \frac{1}{T}\,(C^{-1}A+E)|x_0'-x_0''| +$$

$$+ K(E-Q_1)^{-1}[E+(C^{-1}A+E)]|x_0' - x_0''|,$$

тобто нерівність (2.9.2) дійсно виконується.

Одержавши необхідні допоміжні твердження, переходимо до доведення основної теореми цього параграфа, яка дає необхідні умови розв'язуваності крайової задачі (2.6.1), (2.6.2).

ТЕОРЕМА 2.9.2. Припустимо, що крайова задача (2.6.1), (2.6.2) задовольняє умови (2.6.4)-(2.6.6).

Тоді для того, щоб деяка область $D_1 \subset D_\beta$ містила точку $x_0 = x_0^*$, яка визначає при $t=0$ початкове значення $x^*(0)=x_0$ розв'язку $x=x^*(t)$ крайової задачі (2.6.1), (2.6.2), необхідно, щоб для всіх m і довільного $\bar{x}_0 \in D_1$ виконувалася нерівність

$$\|\Delta_m(\bar{x}_0)\| \leqslant \sup_{x_0 \in D_1} \Big\{ \frac{1}{T}\,\|C^{-1}A+E\|\,\|\bar{x}_0 - x_0\| +$$

$$+ \|K(E-Q_1)^{-1}[E+(C^{-1}A+E)]\|\|\bar{x}_0 - x_0\| + \qquad (2.9.3)$$

$$+ \frac{\pi^2}{9} \|Q^{m+1}(E-Q)^{-1}M + KQ^m(E-Q)^{-1}\beta_1(\bar{x}_0)\| \Big\}.$$

ДОВЕДЕННЯ. Нехай в точці $x_0=x_0^*$ визначальна функція $\Delta(x_0)$ вигляду (2.7.5) перетворюється в нуль

$$\Delta(x_0^*) = 0. \qquad (2.9.4)$$

Отже, в силу теореми 2.7.2 початкове значення розв'язку крайової задачі (2.6.1), (2.6.2) визначається за формулою $x^*(0)=x_0^*$.

Застосуємо теорему 2.9.1 у випадку, коли $x_0' = \bar{x}_0$, $x_0'' = x_0^*$. Тоді з (2.9.2), враховуючи (2.9.4), одержимо

$$|\Delta(x_0)| \le \frac{1}{T} (C^{-1}A+E)\, |\bar{x}_0 - x_0^*| +$$

$$+ K(E-Q_1)^{-1}[E+(C^{-1}A+E)]|\bar{x}_0 - x_0^*|. \qquad (2.9.5)$$

Але на основі нерівності (2.8.2) в точці $x_0 = \bar{x}_0$

$$|\Delta_m(x_0)| \le |\Delta(x_0)| + \frac{\pi^2}{9} \Big[Q^{m+1}(E-Q)^{-1}M +$$

$$+ KQ^m(E-Q)^{-1}\beta_1(\bar{x}_0) \Big]. \qquad (2.9.6)$$

Об'єднання (2.9.5) і (2.9.6) доводить справедливість нерівності (2.9.3)

$$|\Delta_m(\bar{x}_0)| \le \frac{1}{T} (C^{-1}A+E)\, |\bar{x}_0 - x_0^*| + K(E-Q_1)^{-1}[E+(C^{-1}A+E)]\times$$

$$\times\ |\bar{x}_o - x_o^*| + \frac{\pi^2}{9}\left[\,Q^{m+1}(E-Q)^{-1}M + KQ^m(E-Q)^{-1}\beta_1(\bar{x}_o)\,\right] \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x_o \in D_1}\left\{\frac{1}{T}\,(C^{-1}A+E)\ |\bar{x}_o - x_o| + K(E-Q_1)^{-1}[E+(C^{-1}A+E)]\times\right.$$

$$\left.\times\ |\bar{x}_o - x_o| + \frac{\pi^2}{9}\left[Q^{m+1}(E-Q)^{-1}M + KQ^m(E-Q)^{-1}\beta_1(\bar{x}_o)\,\right]\right\}.$$

§ 10. ІЛЮСТРАТИВНИЙ ПРИКЛАД

Проілюструємо розроблену методику дослідження та відшукання розв'язків двоточкової крайової задачі на конкретному прикладі. Нехай на відрізку [0,1] потрібно проінтегрувати систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{2^3}\,x_1^2 + \frac{1}{2^4}\,x_2^2 - \frac{9}{2^{12}}\,[t+1]^2 + \frac{1}{2^3}\,,$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{2^5}\,x_2^2 + \frac{1}{2^6}\,x_3^2 - \frac{9}{2^{16}}\,[t+1]^2 + \frac{1}{2^4}\,, \qquad (2.10.1)$$

……………………………………………

$$\dot{x}_n = \frac{1}{2^{2n+1}}\,x_n^2 + \frac{1}{2^{2n+2}}\,x_{n+1}^2 - \frac{9}{2^{4n+8}}\,[t+1]^2 + \frac{1}{2^{n+2}}$$

……………………………………………

яка задовольняє крайові умови

$$Ax(0) + Cx(1) = d, \qquad (2.10.2)$$

де **C** - одинична матриця, а **A**, d мають такі значення

$$\text{де } \mathbf{A}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \frac{1}{2^5} \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \frac{1}{2^{2n-1}} & \frac{1}{2^{2n}} & \frac{1}{2^{2n+1}} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \quad d=\begin{pmatrix} \frac{2^6+21}{2^8} \\ \frac{2^8+21}{2^{11}} \\ \ldots \\ \frac{2^{2n+4}+21}{2^{3n+5}} \\ \ldots \end{pmatrix}.$$

Нехай дана система визначена в області **D**: $|x_1| \leqslant \frac{1}{3}$.

Не важко одержати, що для крайової задачі (2.10.1), (2.10.2) величини **M** та **K** мають такі значення:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{2^6+3\cdot 2^7-3^3}{3\cdot 2^{10}} \\ \frac{2^8+3\cdot 2^{10}-3^3}{3\cdot 2^{14}} \\ \ldots \\ \frac{2^{2n+4}+3\cdot 2^{3n+4}-3^3}{3\cdot 2^{4n+6}} \\ \ldots \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\cdot 2^2} & \frac{1}{3\cdot 2^3} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \frac{1}{3\cdot 2^4} & \frac{1}{3\cdot 2^5} & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{3\cdot 2^{2n}} & \frac{1}{3\cdot 2^{2n+1}} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

Норма ж матриці **K** визначається згідно формули:

$$\|K\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |K_{ij}| = \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} = \frac{1}{2^3} < 1.$$

Тоді матриця **Q** згідно (2.6.6) має таке значення

$$Q = \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} \frac{1}{3\cdot 2^2} & \frac{1}{3\cdot 2^3} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{3\cdot 2^4} & \frac{1}{3\cdot 2^5} & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{3\cdot 2^{2n}} & \frac{1}{3\cdot 2^{2n+1}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

норма ж матриці **Q** визначається згідно

$$\|Q\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |Q_{ij}| = \frac{1}{\pi\cdot 2^3} < 1.$$

Тоді β знаходиться за формулою (2.6.5), тобто має наступне значення

$$\beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{2^6 + 3\cdot 2^7 - 3^3}{3\cdot 2^{10}} \\ \frac{2^8 + 3\cdot 2^{10} - 3^3}{3\cdot 2^{14}} \\ \dots\dots \\ \frac{2^{2n+4} + 3\cdot 2^{3n+4} - 3^3}{3\cdot 2^{4n+6}} \\ \dots\dots \end{pmatrix} + \left\| \begin{pmatrix} \frac{2^6 + 21}{2^8} \\ \frac{2^8 + 21}{2^{11}} \\ \dots\dots \\ \frac{2^{2n+4} + 21}{2^{3n+5}} \\ \dots\dots \end{pmatrix} \right. -$$

$$-\left\|\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \frac{9}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \frac{1}{2^5} & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{2^{2n-1}+1}{2^{2n-1}} & \frac{1}{2^{2n}} & \frac{1}{2^{2n+1}} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{o1} \\ x_{o2} \\ \ldots \\ x_{on} \\ \ldots \end{pmatrix}\right\|^{m} = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \ldots \\ \beta^n \\ \ldots \end{pmatrix}.$$

Для крайової задачі (2.10.1), (2.10.2) норма β , де β – окіл точки x_o, не перевищує

$$\|\beta\| \leqslant \frac{2^6 + 3^2 \cdot 2^7 - 3^3}{3 \cdot 2^{11}} \approx 0.1935.$$

Наближене початкове значення $x_o = (x_{o_1}, x_{o_2}, \ldots, x_{o_n}, \ldots)$ знайдемо з визначального рівняння виду (2.8.1) при $m=0$

$$\Delta_o(x_o) = 0.$$

Розв'язавши систему

$$\frac{2^9+21(2^4+1)}{2^{12}} - \frac{3}{2} x_{o_1} - \frac{1}{2^2} x_{o_2} - \frac{1}{2^3} x_{o_3} - \frac{1}{2^3} x_{o_1}^2 - \frac{1}{2^4} x_{o_2}^2 = 0 ,$$

$$\frac{2^{12}+21(2^5+1)}{2^{16}} - \frac{9}{2^3} x_{o_2} - \frac{1}{2^4} x_{o_3} - \frac{1}{2^5} x_{o_4} - \frac{1}{2^5} x_{o_2}^2 - \frac{1}{2^6} x_{o_3}^2 = 0 ,$$

....

$$\frac{2^{3n+6}+21(2^{n+3}+1)}{2^{4n+8}} - \frac{2^{2n-1}+1}{2^{2n-1}} x_{o_n} - \frac{1}{2^{2n}} x_{o_{n+1}} - \frac{1}{2^{2n+1}} x_{o_{n+2}} -$$

$$- \frac{1}{2^{2n+1}} x_{o_n}^2 - \frac{1}{2^{2n+2}} x_{o_{n+1}}^2 = 0 ,$$

....

відносно невідомих x_{o_i}, $i=1,2,\dots,n,\dots$, одержимо чисельні значення нульових наближень.

Перше наближення будемо шукати згідно формули (2.6.15) при $m=1$, звідки отримуємо

$$x_{1_1}=x_{o_1}-\frac{3}{2}x_{o_1}t-\frac{1}{2^2}x_{o_2}t-\frac{1}{2^3}x_{o_3}t-\frac{3}{2^{12}}(t+1)^3+\frac{2^{10}+21(2^4+1)}{2^{12}}t+\frac{3}{2^{12}},$$

$$x_{1_2}=x_{o_2}-\frac{9}{2^3}x_{o_2}t-\frac{1}{2^4}x_{o_3}t-\frac{1}{2^5}x_{o_4}t-\frac{3}{2^{16}}(t+1)^3+\frac{2^{13}+21(2^5+1)}{2^{16}}t+\frac{3}{2^{16}},$$

....

$$x_{1_n}=x_{o_n}-\frac{2^{2n-1}+1}{2^{2n-1}}x_{o_n}t-\frac{1}{2^{2n}}x_{o_{n+1}}t-\frac{1}{2^{2n+1}}x_{o_{n+2}}t-\frac{3}{2^{4n+8}}(t+1)^3+$$

$$+\frac{2^{3n+7}+21(2^{n+3}+1)}{2^{4n+8}}t+\frac{3}{2^{4n+8}},$$

....

В таблицях, які наводяться нижче, вказані чисельні значення $x_o=(x_{o_1},\ \dots,\ x_{o_n},\ \dots)$ та $x_1=(x_{1_1},\ \dots,\ x_{1_n},\ \dots)$ для $n=20$:

Табл.3

x_{o_1}	$1.26885\cdot10^{-1}$	$x_{o_{11}}$	$1.22070\cdot10^{-4}$
x_{o_2}	$6.26616\cdot10^{-2}$	$x_{o_{12}}$	$6.10352\cdot10^{-5}$
x_{o_3}	$3.12611\cdot10^{-2}$	$x_{o_{13}}$	$3.05176\cdot10^{-5}$
x_{o_4}	$1.56257\cdot10^{-2}$	$x_{o_{14}}$	$1.52588\cdot10^{-5}$
x_{o_5}	$7.81254\cdot10^{-3}$	$x_{o_{15}}$	$7.62939\cdot10^{-6}$
x_{o_6}	$3.90625\cdot10^{-3}$	$x_{o_{16}}$	$3.81470\cdot10^{-6}$
x_{o_7}	$1.95313\cdot10^{-3}$	$x_{o_{17}}$	$1.90735\cdot10^{-6}$
x_{o_8}	$9.76563\cdot10^{-4}$	$x_{o_{18}}$	$9.53674\cdot10^{-7}$
x_{o_9}	$4.88281\cdot10^{-4}$	$x_{o_{19}}$	$4.76837\cdot10^{-7}$
$x_{o_{10}}$	$2.44141\cdot10^{-4}$	$x_{o_{20}}$	$2.38419\cdot10^{-7}$

Табл.4

x_1 \ t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	Порядок
x_{1_1}	0,79303	1,46201	2,12889	2,79330	3,45491	4,11334	10^{-1}
x_{1_2}	0,45038	0.72119	0,99188	1,26241	1,53276	1,80292	10^{-1}
x_{1_3}	2,32015	3,59598	4,87173	6,14738	7,42292	8,69833	10^{-2}
x_{1_4}	1,16887	1,79709	2,42530	3,05351	3,68171	4,30989	10^{-2}
x_{1_5}	0,58556	0,89846	1,21136	1,52426	1,83716	2,15006	10^{-2}
x_{1_6}	2,92921	4,49221	6,05521	7,61822	9,18122	10,7442	10^{-3}
x_{1_7}	1,46478	2,24609	3,02741	3,80872	4,59003	5,37135	10^{-3}
x_{1_8}	0,73241	1,12305	1,51368	1,90431	2,29495	2,68558	10^{-3}
x_{1_9}	3,66210	5,61523	7,56837	9,52150	11,4746	13,4278	10^{-4}
$x_{1_{10}}$	1,83105	2,80762	3,78418	4,76074	5,73731	6,71387	10^{-4}
$x_{1_{11}}$	0,91553	1,40381	1,89209	2,38037	2,86865	3,35693	10^{-4}
$x_{1_{12}}$	0,45776	0,70190	0,94604	1,19018	1,43433	1,67847	10^{-4}
$x_{1_{13}}$	2,28882	3,50952	4,73022	5,95093	7,17163	8,39233	10^{-5}
$x_{1_{14}}$	1,14441	1,75476	2,36511	2,97546	3,58582	4,19614	10^{-5}
$x_{1_{15}}$	0,57220	0,87738	1,18256	1,48773	1,79291	2,09808	10^{-5}
$x_{1_{16}}$	2,86102	4,38690	5,91278	7,43866	8,96434	10,4905	10^{-6}
$x_{1_{17}}$	1,43051	2,19345	2,95639	3,71933	4,48227	5,24521	10^{-6}
$x_{1_{18}}$	0,71526	1,09673	1,47819	1,85966	2,24113	2,62260	10^{-6}
$x_{1_{19}}$	3,57628	5,48363	7,39098	9,29833	11,2057	13,1130	10^{-7}
$x_{1_{20}}$	1,78814	2,74181	3,69549	4,64916	5,60284	6,55651	10^{-7}

ГЛАВА 3. ПОБУДОВА ВКОРОЧЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ ЗВ'ЯЗОК З ВІДПОВІДНИМИ ДО НИХ ЗЛІЧЕННИМИ СИСТЕМАМИ

В ряді випадків не вдається знайти розв'язок зліченної системи звичайних диференціальних рівнянь, що змушує зводити її до відподної їй вкороченої системи. Саме дослідженню близькості розв'язків таких систем присвячена дана глава. В ній розглядається зв'язок розв'язків зліченних та вкорочених систем диференціальних рівнянь для збуреної задачі Коші. Як допоміжний факт, доводиться аналог леми Гронуолла-Беллмана для системи двох інтегральних нерівностей. Одержана оцінка похибки розв'язку зліченної крайової задачі (2.6.1), (2.6.2) та відповідної їй вкороченої системи, а також оцінка для зліченної періодичної системи диференціальних рівнянь першого порядку.

§ 11. ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК РОЗВ'ЯЗКІВ ЗЛІЧЕННИХ ТА ВКОРОЧЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ОДНІЄЇ ПОЧАТКОВОЇ ЗАДАЧІ

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \Delta(x_o), \qquad (3.11.1)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ – точка простору $\mathfrak{M}$ обмеженої числової послідовності з нормою $\|x\| = \sup_n |x_n|$, $f(t,x) = (f_1(t,x), \dots, f_n(t,x), \dots)$-неперервна функція, що приймає значення в просторі $\mathfrak{M}$, визначена в області

$$(t,x) \in (-\infty, \infty) \times D, \ D \subset \mathfrak{M},$$

$\Delta(x_o) = (\Delta_1(x_o), \ldots, \Delta_n(x_o), \ldots.)$ - деяке збурення.

Злічені збурені системи диференціальних рівнянь з'являються при дослідженні чисельно-аналітичним методом послідовних наближень періодичних та двоточкових крайових задач злічених систем диференціальних рівнянь [82, 83].

Введемо у розгляд проектор $\mathbf{P}_n$, який нескінченному вектору $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ ставить у відповідність

$$\mathbf{P}_n x = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, 0, \ldots). \qquad (3.11.2)$$

Якщо позначити

$$y = \mathbf{P}_n x, \quad z = (\mathbf{E}-\mathbf{P}_n)x = (0, 0, \ldots, 0, x_{n+1}, \ldots),$$

$$f^1(t,x) = \mathbf{P}_n f(t,x) = (f_1(t,x), \ldots, f_n(t,x), 0, 0, \ldots),$$

$$f^2(t,x) = (\mathbf{E}-\mathbf{P}_n) f(t,x) = (0, 0, \ldots, 0, f_{n+1}(t,x), \ldots), \qquad (3.11.3)$$

$$\Delta^1(x_o) = \mathbf{P}_n \Delta(x_o), \qquad \Delta^2(x_o) = (\mathbf{E}-\mathbf{P}_n)\Delta(x_o),$$

то систему (3.11.1) можна записати у вигляді системи двох векторних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = f^1(t, y+z) + \Delta^1(y_o+z_o),$$

$$(3.11.4)$$

$$\frac{dz}{dt} = f^2(t, y+z) + \Delta^2(y_o+z_o),$$

Будемо розглядати розв'язок $x^*(t,x_o) = y^*(t,x_o) + z^*(t,x_o)$ системи (3.11.4), який задовольняє початкову умову

$$y(0) = y_o, \quad z(0) = z_o, \quad x_o = y_o + z_o.$$

Відомо, що функція $x^*(t,x_o)$ буде також і розв'язком системи інтегральних рівнянь

$$y(t) = y_0 + \int_0^t [f^1(\tau, y(\tau)+z(\tau)) + \Delta^1(y_0+z_0)]d\tau,$$

$$z(t) = z_0 + \int_0^t [f^2(\tau, y(\tau)+z(\tau)) + \Delta^2(y_0+z_0)]d\tau. \qquad (3.11.5)$$

Поряд із зліченною системою (3.11.4) будемо розглядати її "вкорочене" рівняння

$$\frac{dv}{dt} = f^1(t, v+0) + \Delta^1(y_0+0),$$

$$v(0) = y_0, \qquad (3.11.6)$$

де перші n компонент вектора $f^1(t, v+0)$ співпадають з першими n компонентами $f(t, v+0)$, а решта рівні 0

$$f^1(t, v+0) = (f_1(t, v+0), \ldots, f_n(t, v+0), 0, 0, \ldots).$$

Розв'язок вкороченої збуреної задачі (3.11.6) $v^*(t, y_0)$ буде розв'язком інтегрального рівняння

$$v(t) = y_0 + \int_0^t [f^1(\tau, v(\tau)+0) + \Delta^1(y_0+0)]d\tau, \qquad (3.11.7)$$

$$y_0 = P_n x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n}, 0, 0, \ldots).$$

Припустимо також, що функції $f^1(t, y+z)$, $f^2(t, y+z)$, $\Delta^1(y_0+z_0)$ задовольняють при $t \geq 0$ умови Ліпшіца вигляду

$$\| f^1(t, y_1+z_1) - f^1(t, y_2+z_2) \| \leqslant K_{1n} \| y_1 - y_2 \| + K_{2n} \| z_1 - z_2 \|,$$

$$\|f^2(t,y_1+z_1)-f^2(t,y_2+z_2)\| \leqslant K_{3n}\|y_1-y_2\| + K_{4n}\|z_1-z_2\|, \quad (3.11.8)$$

$$\|\Delta^1(y_o' +z_o') - \Delta^1(y_o''+z_o'')\| \leqslant L_{1n}\|y_o'-y_o''\| + L_{2n}\|z_o'-z_o''\|,$$

де K_{1n}, K_{2n}, K_{3n}, K_{4n}, L_{1n}, L_{2n} - додатні постійні.

ст 95

Оцінимо близькість розв'язків зліченної збуреної системи (3.11.1) і "вкороченої" системи (3.11.6). Для одержання цієї оцінки нам знадобиться аналог леми Гронуалла-Беллмана для системи двох інтегральних нерівностей [12].

Л Е М А 3.11.1. Нехай функції $w_1(t)$, $w_2(t)$ - неперервні додатні при $t\in[0,+\infty]$ і при $t\geqslant 0$ виконуються нерівності

$$w_1(t) \leqslant w_{1o} + \int_0^t [a_{11}w_1(s) + a_{12}w_2(s)]ds + b_1 t,$$

$$(3.11.9)$$

$$w_2(t) \leqslant w_{2o} + \int_0^t [a_{21}w_1(s) + a_{22}w_2(s)]ds + b_2 t,$$

де коефіцієнти a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} такі, що

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$ - невироджена матриця; b_1 та b_2-додатні постійні.

Тоді при $t \geqslant 0$ справедливі такі оцінки

$$w_1(t) \leqslant \frac{[(\varphi_1(t)\lambda_1 + 1)(\lambda_2 - a_{11})-(\varphi_2(t)\lambda_2 + 1)(\lambda_1 - a_{11})]\ w_{1o}}{\lambda_2 - \lambda_1} +$$

$$+\ \frac{(\varphi_2(t)\lambda_2-\varphi_1(t)\lambda_1)\ w_{2o}}{\lambda_2-\lambda_1}\,a_{11}+\frac{\varphi_1(t)(\lambda_2-a_{11})-\varphi_2(t)(\lambda_1-a_{11})}{\lambda_2-\lambda_1}\,b_1+$$

$$+\ \frac{\varphi_2(t)-\varphi_1(t)}{\lambda_2-\lambda_1}\,b_2a_{12}, \qquad (3.11.10)$$

$$w_2(t)\leqslant\frac{(\varphi_1(t)\lambda_1-\varphi_2(t)\lambda_2)(\lambda_1-a_{11})(\lambda_2-a_{11})}{(\lambda_2-\lambda_1)a_{12}}\,w_{o1}+$$

$$+\ \frac{(\lambda_2-a_{11})(\varphi_2(t)\lambda_2+1)-(\lambda_2-a_{11})(\varphi_1(t)\lambda_1+1)}{\lambda_2-\lambda_1}\,w_{o2}+$$

$$+\ \frac{(\lambda_1-a_{11})(\lambda_2-a_{11})(\varphi_1(t)-\varphi_2(t))}{(\lambda_2-\lambda_1)a_{12}}\,b_1+$$

$$+\ \frac{(\lambda_2-a_{11})\varphi_2(t)-(\lambda_1-a_{11})\varphi_1(t)}{\lambda_2-\lambda_1}\,b_2, \qquad (3.11.11)$$

де

$$\varphi_1(t)=\frac{e^{\lambda_1 t}-1}{\lambda_1},\quad \varphi_2(t)=\frac{e^{\lambda_2 t}-1}{\lambda_2}, \qquad (3.11.12)$$

$$\lambda_{12} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}\ a_{21}}}{2} . \qquad (3.11.13)$$

Д О В Е Д Е Н Н Я. Запишемо систему (3.11.9) в матричному вигляді

$$w(t) \leqslant \mathbf{C} + \int_0^t \mathbf{A}w(s)ds + \mathbf{B}t,$$

де

$$w(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} w_{1\circ} \\ w_{2\circ} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Нехай оператор K діє на функцію w(t) за правилом

$$Kw = \int_0^t (\mathbf{A}w(s) + \mathbf{B})ds + \mathbf{C}.$$

Тоді для w, яке задовольняє операторну нерівність

$$w \leqslant Kw,$$

існує таке $u_\circ$, що

$$w \leqslant u_\circ \qquad (3.11.14)$$

і яке є розв'язком операторного рівняння

$$Ku_\circ = u_\circ.$$

Тоді

$$u_\circ = \mathbf{C} + \int_0^t (\mathbf{A}u_\circ(s) + \mathbf{B})ds. \qquad (3.11.15)$$

Диференціюючи (3.11.14), одержуємо

$$\frac{du_\circ(t)}{dt} = \mathbf{A}u_\circ(t) + \mathbf{B}. \qquad (3.11.16)$$

Розв'язок неоднорідного рівняння (3.11.16) одержимо у вигляді суми частинного розв'язку неоднорідного і загального розв'язку однорідного рівнянь

$$u_o(t) = e^{\mathbf{A}t}\psi_o - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

Враховуючи, що

$$(Ku_o)(0) = \mathbf{C},$$

$$\mathbf{C} = \psi_o - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B},$$

$$\psi_o = \mathbf{C} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B},$$

розв'язок диференціального рівняння (3.11.16) буде мати вигляд

$$u_o(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C} + (e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{E})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

Враховуючи (3.11.14), приходимо до нерівності

$$w(t) \leqslant e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C} + (e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{E})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}. \qquad (3.11.17)$$

Представимо матрицю **A** в діагональному вигляді

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}, \qquad (3.11.18)$$

де

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо значення s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}, $\Delta = s_{11}s_{22} - s_{21}s_{12}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \end{pmatrix}.$$

Нехай $s_{11} = 1$ і $s_{12} = 1$. Тоді не важко бачити, що

$$s_{21} = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}, \quad s_{22} = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}},$$

$$\Delta = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{a_{12}}. \qquad (3.1.19)$$

З врахуванням (3.11.18) нерівність (3.11.17) можна переписати у вигляді

$$w(t) \leqslant \mathbf{S} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \mathbf{S}^{-1}\mathbf{C} + \left[\mathbf{S} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \mathbf{S}^{-1} - \mathbf{E} \right] \times$$

$$\times \mathbf{S} \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B},$$

або

$$w(t) \leqslant \mathbf{S} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \mathbf{S}^{-1}\mathbf{C} + \mathbf{S} \begin{pmatrix} \frac{e^{\lambda_1 t}-1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{e^{\lambda_2 t}-1}{\lambda_2} \end{pmatrix} \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}, \qquad (3.11.20)$$

де λ_1, λ_2 вигляду (3.11.13) - розв'язки характеристичного рівняння відповідної однорідної системи

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

тобто

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

З (3.11.20), враховуючи позначення (3.11.12), одержуємо нерівність

$$w(t) \leqslant \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(t)\lambda_1+1 & 0 \\ 0 & \varphi_2(t)\lambda_2+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{22} & -s_{12} \\ -s_{21} & s_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{o1} \\ w_{o2} \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & 0 \\ 0 & \varphi_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{22} & -s_{12} \\ -s_{21} & s_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Отже,

$$w(t) \leqslant \frac{1}{\Delta} \left[\begin{matrix} [s_{11}s_{22}(\varphi_1(t)\lambda_1+1) - s_{12}s_{21}(\varphi_2(t)\lambda_2+1)]w_{o1} + \\ [s_{21}s_{22}(\varphi_1(t)\lambda_1+1) - s_{22}s_{21}(\varphi_2(t)\lambda_2+1)]w_{o1} + \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} + [s_{12}s_{11}(\varphi_2(t)\lambda_2+1) - s_{11}s_{12}(\varphi_1(t)\lambda_1+1)]w_{o2} \\ + [s_{22}s_{11}(\varphi_2(t)\lambda_2+1) - s_{21}s_{12}(\varphi_1(t)\lambda_1+1)]w_{o2} \end{matrix} \right] +$$

$$+ \frac{1}{\Delta} \left[\begin{matrix} [s_{11}s_{22}\varphi_1(t) - s_{12}s_{21}\varphi_2(t)]b_1 + \\ [s_{21}s_{22}\varphi_1(t) - s_{22}s_{21}\varphi_2(t)]b_1 + \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} +[s_{12}s_{11}\varphi_2(t) - s_{11}s_{12}\varphi_1(t)]b_2 \\ +[s_{22}s_{11}\varphi_2(t) - s_{21}s_{12}\varphi_1(t)]b_2 \end{matrix} \right]. \qquad (3.11.20)$$

Використовуючи знайдені значення s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}, Δ вигляду (3.11.19) та записавши покомпонентно нерівність (3.11.21), приходимо до потрібних оцінок (3.11.10), (3.11.11).

Справедливе наступне твердження про близькість розв'язків початкових задач для зліченної (3.11.1) та вкороченої системи (3.11.6) диференціальних рівнянь.

ТЕОРЕМА 3.11.1. Нехай права частина $f(t,x)$ зліченної системи диференціальних рівнянь (3.11.1) в області $(t,x)\in[0,+\infty]\times$ $\times D$ і функція $\Delta(x_o)$ в області $x_o\in D_o$ задовольняють умову Ліпшіца і при $n\to\infty$, $K_{2n}\to 0$, $L_{2n}\to 0$, тобто функції $f(t,x)$ і $\Delta(x_o)$ задовольняють посилену умову Коші.

Тоді для довільного розв'язку рівняння (3.11.1) з початковим значенням $x_o = (x_{o1}, x_{o2}, \dots, x_{on}, \dots)$ таким, що $\|z_o\| = \|(0, \dots, 0, x_{on+1}, x_{on+2}, \dots,)\| \to 0$ при $n\to\infty$, для відхилення розв'язку $y(t)$ зліченної системи (3.11.4) від розв'язку $v(t)$ вкороченої системи (3.11.6) має місце оцінка

$$\|y(t)-v(t)\| \leqslant \frac{(\varphi_2(t)\lambda_2-\varphi_1(t)\lambda_1)\|z_o\|K_{2n}}{\lambda_2-\lambda_1} + \frac{\varphi_2(t)-\varphi_1(t)}{\lambda_2-\lambda_1}\bar{q}_n K_{2n} + \tag{3.11.22}$$

$$+\frac{\varphi_1(t)(\lambda_2-K_{1n})-\varphi_2(t)(\lambda_1-K_{1n})}{\lambda_2-\lambda_1} L_{2n}\|z_o\|,$$

де

$$\bar{q}_n = q_n + \gamma_n, \quad \|f^2(t,v(t)+0\| \leqslant q_n, \quad \|\Delta^2(y_o+z_o)\| \leqslant \gamma_n,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(K_{1n}+K_{4n}) \pm \sqrt{(K_{1n}-K_{4n})^2 + 4\,K_{2n}\,K_{3n}}}{2},$$

$K_{2n}\to 0$ і $L_{2n}\to 0$, тому

і при $n\to\infty$ справедливе граничне твердження

$$\|y(t)-v(t)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{3.11.23}$$

ДОВЕДЕННЯ. З рівнянь (3.11.5), (3.11.7) на основі умови Ліпшіца (3.11.8) при $t \geq 0$ приходимо до інтегральних нерівностей

$$\|y(t)-v(t)\| \leq \int_0^t [K_{1n}\|y(\tau) - v(\tau)\| + K_{2n}\|z(\tau)\| + L_{2n}\|z_o\|]d\tau, \tag{3.11.24}$$

$$\|z(t)\| \leq \|z_o\| + \int_0^t [K_{3n}\|y(\tau) - v(\tau)\| + K_{4n}\|z(\tau)\| + \bar{q}_n]d\tau.$$

Якщо застосувати оцінку (3.11.10) до інтегральних нерівностей (3.11.24), то безпосередньо одержуємо (3.11.22).

Більше цього, внаслідок виконання посиленої умови Коші з (3.11.22) випливає справедливість співвідношення (3.11.23)

§ 12. ВКОРОЧЕННЯ ДЛЯ ДВОТОЧКОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ У ВИПАДКУ ЗЛІЧЕННОЇ СИСТЕМИ НОРМАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Одержані в попередньому параграфі результати дають можливість оцінити відхилення розв'язків зліченної та вкороченої систем не тільки для початкової задачі, а й для двоточкової крайової задачі вигляду (2.6.1), (2.6.2). При цьому скористаємося тим, що згідно теореми 2.7.1 розв'язок збуреної крайової задачі (2.6.19) співпадає з розв'язком збуреної задачі Коші (2.7.3), (2.7.4). А як було встановлено в теоремі 2.7.2, при початковому значенні $x(0) = x_o^*$, де x_o^* - корінь визначального рівняння, збурена задача (2.7.3),(2.7.4) співпадає із заданою (2.6.1),(2.6.2).

Розглядаючи крайову задачу (2.6.1),(2.6.2), і надалі вважаємо,що для неї виконуються всі умови (2.6.4)-(2.6.6). Скориставшись проектором P_n вигляду (3.11.2) і введеними позначеннями (3.11.3), вихідну крайову задачу можна записати у вигляді

$$\frac{dy}{dt} = f^1(t,\ y+z),\ \frac{dz}{dt} = f^2(t,\ y+z), \qquad (3.12.1)$$
$$\mathbf{A}[y(0) + z(0)] + \mathbf{C}[y(T) + z(T)] = d.$$

В §6 ми зазначали, що $f(t,\ x)$ задовольняє умову Ліпшіца (2.6.4), яку в позначеннях (3.11.2), (3.11.3) можна записати

$$|f^1(t,y_1+z_1)-f^1(t,y_2+z_2)| \leqslant \mathbf{K}^{1n}|y_1-y_2| + \mathbf{K}^{2n}|z_1-z_2|,$$
$$\qquad (3.12.2)$$
$$|f^2(t,y_1+z_1)-f^2(t,y_2+z_2)| \leqslant \mathbf{K}^{3n}|y_1-y_2| + \mathbf{K}^{4n}|z_1-z_2|,$$

де $\mathbf{K}^{1n}$, $\mathbf{K}^{2n}$, $\mathbf{K}^{3n}$, $\mathbf{K}^{4n}$ – мінори матриці $\mathbf{K}$ вигляду (2.6.4), тобто

$$\mathbf{K}^{1n} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{2n} = \begin{bmatrix} K_{1\ n+1} & K_{1\ n+2} & \cdots & K_{1\ n+n} & \cdots \\ K_{2\ n+1} & K_{2\ n+2} & \cdots & K_{2\ n+n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n\ n+1} & K_{n\ n+2} & \cdots & K_{n\ n+n} & \cdots \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}^{3n} = \begin{bmatrix} K_{n+1\ 1} & K_{n+1\ 2} & \cdots & K_{n+1\ n} \\ K_{n+2\ 1} & K_{n+2\ 2} & \cdots & K_{n+2\ n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n+n\ 1} & K_{n+n\ 2} & \cdots & K_{n+n\ n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}^{4n} = \begin{bmatrix} K_{n+1\ n+1} & K_{n+1\ n+2} & \cdots & K_{n+1\ n+n} & \cdots \\ K_{n+2\ n+1} & K_{n+2\ n+2} & \cdots & K_{n+2\ n+n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n+n\ n+1} & K_{n+n\ n+2} & \cdots & K_{n+n\ n+n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

Крім того, при $n\to\infty$ функція $f^1(t,\ y+z)$ задовольняє посилену умову Коші, тобто $\mathbf{K}^{2n}\to 0$.

За теоремою 2.7.2 розв'зок $x = x^*(t,\ x_0)$ збуреної зліченної задачі

$$\frac{dx}{dt} = f(t,\ x) + \Delta(x_0), \quad \mathbf{A}x(0) + \mathbf{C}x(T) = d, \qquad (3.12.3)$$

де

$$\Delta(x_o) = \frac{1}{T}\,[\mathbf{C}^{-1}d - (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{E})x_o] - \frac{1}{T}\int_0^T f(t,x^*(t,x_o))dt, \qquad (3.12.4)$$

співпадає з розв'язком $x = x^*(t)$ збуреної початкової задачі

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,\ x) + \Delta(x_o), \\ x(0) &= x_o. \end{aligned} \qquad (3.12.5)$$

В позначенні (3.11.2) та (3.11.3) збурену крайову задачу (3.12.2) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f^1(t,\ y+z) + \Delta^1(y_o+z_o), \\ \frac{dz}{dt} &= f^2(t,\ y+z) + \Delta^2(y_o+z_o), \end{aligned} \qquad (3.12.6)$$

$$\mathbf{A}[y(0) + z(0)] + \mathbf{C}[y(T) + z(T)] = d,$$

де $y_o = y(0)$, $z_o = z(0)$, а $y_o + z_o = x_o = x(0)$.

Аналогічно збурену початкову задачу (3.12.5) представимо у вигляді

$$\frac{dy}{dt} = f^1(t,\ y+z) + \Delta^1(y_o+z_o), \quad \frac{dz}{dt} = f^2(t,\ y+z) + \Delta^2(y_o+z_o), \qquad (3.12.7)$$

$$y_o = y(0),\ z_o = z(0).$$

Враховуючи те, що $\Delta^1(x_o)=\mathbf{P}_n\Delta(x_o)$, де $\Delta(x_o)$-збурена функція вигляду (3.12.4), а також беручи до уваги оцінку (2.9.1), можна сказати, що функція $\Delta^1(y_o+z_o)$ задовольняє умову Ліпшіца, тобто

$$|\Delta^1(y_o^1-z_o^1) - \Delta^1(y_o^2-z_o^2)| \leqslant \mathbf{R}^{1n}|y_o^1-y_o^2| + \mathbf{R}^{2n}|z_o^1-z_o^2|. \qquad (3.12.8)$$

Матриці $\mathbf{R}^{1n}$ та $\mathbf{R}^{2n}$ мають вигляд

$$\mathbf{R}^{1n} = \mathbf{F}^{1n} + \mathbf{K}^{1n}\mathbf{L}^{1n}, \quad \mathbf{R}^{2n} = \mathbf{F}^{2n} + \mathbf{K}^{2n}\mathbf{L}^{2n},$$

де $\mathbf{K}^{1n}$,$\mathbf{K}^{2n}$-мінори матриці $\mathbf{K}$, $\mathbf{F}^{1n}$,$\mathbf{F}^{2n}$-мінори матриці $\frac{1}{T}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}+\mathbf{E})$, а $\mathbf{L}^{1n}$, $\mathbf{L}^{2n}$-мінори матриці $(\mathbf{E}-\mathbf{Q}_1)^{-1}[\mathbf{E}+(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}+\mathbf{E})]$,тобто, якщо

$$\frac{1}{T}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}+\mathbf{E})=\begin{pmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_{1i}a_{1i} & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{\infty}c_{ni}a_{1i} & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{i=1}^{\infty}c_{1i}a_{in} & \ldots & 1+\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_{ni}a_{in} & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$\mathbf{F}^{1n}=\begin{pmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_{1i}a_{1i} & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{\infty}c_{ni}a_{1i} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{i=1}^{\infty}c_{1i}a_{in} & \ldots & 1+\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_{ni}a_{in} \end{pmatrix}, \mathbf{F}^{2n}=\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{\infty}c_{n+1\ i}a_{1i} & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{\infty}c_{n+ni}a_{1i} & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{i=1}^{\infty}c_{n+1\ i}a_{in} & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{\infty}c_{n+ni}a_{in} & \ldots \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, якщо

$$(\mathbf{E}-\mathbf{Q})^{-1}[\mathbf{E}+(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}+\mathbf{E})] = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \ldots & L_{1n} & \ldots \\ L_{21} & L_{22} & \ldots & L_{2n} & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \ldots & L_{nn} & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$\mathbf{L}^{1n}=\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \ldots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \ldots & L_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \ldots & L_{nn} \end{pmatrix}, \mathbf{L}^{2n}=\begin{pmatrix} L_{1\ n+1} & L_{1\ n+2} & \ldots & L_{1\ n+n} & \ldots \\ L_{2\ n+1} & L_{2\ n+2} & \ldots & L_{2\ n+n} & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{n\ n+1} & L_{n\ n+2} & \ldots & L_{n\ n+n} & \ldots \end{pmatrix}.$$

Крім того, при $n\to\infty$ функція $\Delta^1(y_o+z_o)$ задовольняє посилену умову Коші, тобто $R^{2n} = \|R^{2n}\|\to 0$.

Введемо відповідні вкорочені задачі для зліченних систем. Для збуреної крайової задачі (3.12.6) під вкороченою будемо розуміти наступну крайову задачу

$$\frac{dv}{dt} = f^1(t,\ v+0) + \Delta^1(v+0),\ \mathbf{P}_n[\mathbf{A}v(0) + \mathbf{C}v(T)] = d^1,$$

$$d^1 = \mathbf{P}_n d = (d_1,\ \ldots, d_n,\ 0,) \tag{3.12.9}$$

а вкороченою для початкової задачі (3.12.7) є система вигляду

$$\frac{dv}{dt} = f^1(t,\ v+0) + \Delta^1(y_0+0),\qquad v(0) = y_0. \tag{3.12.10}$$

Розв'язок збуреної початкової задачі (3.12.7) є розв'язком інтегральних рівнянь

$$y(t) = y_0 + \int\limits_0^t [f^1(\tau, y(\tau)+z(\tau)) + \Delta^1(y_0+z_0)]d\tau,$$

$$z(t) = z_0 + \int\limits_0^t [f^2(\tau, y(\tau)+z(\tau)) + \Delta^2(y_0+z_0)]d\tau. \tag{3.12.11}$$

Розв'язок вкороченої збуреної задачі (3.12.10) є й розв'язком інтегрального рівняння

$$v(t) = y_0 + \int\limits_0^t [f^1(\tau, v(\tau)+0) + \Delta^1(y_0+0)]d\tau. \tag{3.12.12}$$

З рівнянь (3.12.11), (3.12.12), використовуючи умову Ліпшіца (3.12.2) для $f^1(t,y+z)$ і $f^2(t,y+z)$, а також (3.12.8) для збуреної функції $\Delta^1(y_0+z_0)$, одержуємо систему нерівностей

$$\|y(t)-v(t)\| \leqslant \int\limits_0^t [K^{1n}\|y(\tau)-v(\tau)\| + K^{2n}\|z(\tau)\|]d\tau + R^{2n}\|z_0\|t,$$

$$\|z(t)\| \leqslant \|z_0\| + \int\limits_0^t [K^{3n}\|y(\tau)-v(\tau)\| + K^{4n}\|z(\tau)\|]d\tau + \|f^2(t,v+0)\|t + \|\Delta(y_0^2+z_0)\|$$

Тоді на основі оцінки (3.11.22) для відхилення розв'язку y(t) збуреної зліченної задачі Коші (3.12.7) від розв'язку v(t) вкороченої збуреної початкової задачі (3.12.10) одержуємо

$$\|y(t)-v(t)\|\leqslant\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}(\|z_o\|+\bar{q}_n)K^{2n}+\frac{2(e^{\lambda t}-1)}{\lambda}(\lambda-K^{1n})R^{2n}\|z_o\|, \quad (3.12.13)$$

де

$$\lambda=\frac{(K^{1n}+K^{4n})+\sqrt{(K^{1n}-K^{4n})^2+4\,K^{2n}\,K^{3n}}}{2}, \quad \bar{q}_n=q_n+\gamma_n,$$

$\|f^2(t,v(t)+0\|\leqslant q_n$, $\|\Delta^2(y_o+z_o)\|\leqslant\gamma_n$, $K^{in}=\|K^{in}\|, i=\overline{1,4}$, $R^{2n}=\|R^{2n}\|$.

На основі вище сказаного і теореми 2.7.2 оцінка (3.12.13) має місце і для відхилення розв'язку $y(t)$ зліченної збуреної крайової задачі (3.12.6) від розв'язку $v(t)$ вкороченої збуреної крайової задачі (3.12.9). У випадку, коли $x_o=y_o+z_o=y_o^*+z_o^*$, де $y_o^*+z_o^*$ є розв'язком визначального рівняння $\Delta(y_o^*+z_o^*)=0$, дана оцінка має місце і для оцінки відхилення розв'язку зліченної крайової задачі (3.12.1) від розв'язку відповідної до неї вкороченої задачі

$$\frac{dv}{dt}=f^1(t,\ v(t)+0),\ \mathbf{A}^n v(0)+\mathbf{C}^n v(T)=d^1, \quad (3.12.14)$$

де $\mathbf{A}^n=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\mathbf{C}^n=\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$.

Оскільки $R^{2n}\to 0$ і $K^{2n}\to 0$ при $n\to\infty$, то

$$\|y(t)-v(t)\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0. \quad (3.12.15)$$

Таким чином, ми довели теорему:

ТЕОРЕМА 3.12.1. Нехай права частина $f(t,x)$ зліченної системи диференціальних рівнянь (3.12.1) в області $(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{D}$ і функція $\Delta(x_o)$ в області $x_o\in\mathbf{D}_o$ задовольняють умови Ліпшіца (3.12.2), (3.12.8) і при $n\to\infty$ $R^{2n}\to 0$ і $K^{2n}\to 0$.

Тоді для будь-якого розв'язку системи (3.12.1) з початковим значенням $x_o=(x_{o1},\dots,x_{on},\dots)$ таким, що $\|z_o\|=\|0,\dots,x_{on+1},\dots\|$ прямує до нуля при $n\to\infty$, для відхилення розв'язку $y(t)$ зліченної системи (3.12.1) від розв'язку $v(t)$ вкороченої системи (3.12.14) має місце оцінка (3.12.13), а при $n\to\infty$ має місце вираз (3.12.15).

З теореми 3.12.1 одержуємо аналогічну оцінку для зліченної періодичної задачі, якщо вважати $d=0$, $\mathbf{A}=\mathbf{E}$, $\mathbf{C}=-\mathbf{E}$.

НАСЛІДОК 3.12.1. Для оцінки відхилення розв'язку зліченної періодичної задачі першого порядку, для якої $f^1(t,y+z)$, $f^2(t,y+z)$ задовольняють умову Ліпшіца (3.12.2)

$$\frac{dy}{dt}=f^1(t,\ y+z),\qquad \frac{dz}{dt}=f^2(t,\ y+z),$$

$$y(0)=y(T),\ z(0)=z(T).$$

Для розв'язку вкороченої задачі

$$\frac{dv}{dt}=f^1(t,\ v+0),\qquad v(0)=v(T)$$

має місце оцінка

$$\|y(t)-v(t)\|\leqslant\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}(\|z_o\|+\|\bar{q}\|)K^{2n}+\frac{2(e^{\lambda t}-1)}{\lambda}(\lambda-K^{1n})K^{2n}S^{2n}\|z_o\|,$$

де $K^{2n}S^{2n}$ - постійна, що входить в умову Ліпшіца яку задовольняє функція $\Delta^1(y_o+z_o)$ - збурення для періодичної задачі першого порядку:

$$|\Delta^1(y_o^1+z_o^1)-\Delta^1(y_o^2+z_o^2)|\leqslant\mathbf{K}^{1n}\mathbf{S}^{1n}|y_o^1-y_o^2|+\mathbf{K}^{2n}\mathbf{S}^{2n}|z_o^1-z_o^2|,$$

$$\mathbf{K}^{2n}\mathbf{S}^{2n}=\|\mathbf{K}^{2n}\mathbf{S}^{2n}\|.$$

Крім того, при $n\to\infty$ має місце співвідношення

$$\|y(t)-v(t)\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі узагальнено чисельно - аналітичний метод послідовних наближень на дослідження розв'язків зліченних систем нелінійних диференціальних рівнянь нормального вигляду першого та другого порядків. Основні результати дисертаційного дослідження:

- узагальнено та розповсюджено чисельно-аналітичний метод послідовних наближень для дослідження розв'язків систем нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку з періодичними крайовими умовами, а також для систем звичайних диференціальних рівнянь нормального вигляду першого порядку із зліченними крайовими умовами;
- для виділених класів нелінійних диференціальних рівнянь розроблено ітераційні схеми побудови розв'язків у вигляді рівномірно збіжної до точного розв'язку послідовності функцій;
- одержано необхідні та достатні мови існування розв'язків крайових задач, що розглядаються;
- для даних крайових задач оцінено похибку наближеного розв'язку;
- оцінено відхилення розв'язку зліченної системи звичайних диференціальних рівнянь від розв'язку відповідної їй вкороченої системи для збуреної початкової задачі, а також розглянуто питання про вкорочення для двоточкової крайової задачі у випадку зліченної системи диференціальних рівнянь нормального вигляду;
- одержані в дисертаційній роботі теоретичні результати ілюструються з допомогою конкретних прикладів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Абрамов А.А., Андреев В.Е. О применении метода прогонки к нахождению периодических решений дифференциальных и разностных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики.- 1963.- 3, №2.- С. 377-38I.
2. Авдеюк П.И. О поведении решений квазилинейной счетной системы дифференциальных уравнений в окрестности инвариантного тора// Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений.- Киев : Ин-т математики АН УССР, I985.- С. 3-8.
3. Авдеюк П.И. О существовании инвариантных торов счетных систем дифференциальных уравнений // Некоторые вопросы теории асимптотических методов нелинейной механики.- Киев : Ин-т математики АН УССР, I986.- С. 4-I3.
4. Азбелев Н.В., Максимов В.П. Уравнения с запаздывающим аргументом //Дифференц. уравнения.- I982.- I8, №I2.- С. 2027-2050.
5. Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф. Функционально- дифференциальные уравнения // Там же.- I978.- I4, №5.- С. 77I- 797.
6. Беллман Р., Колаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи.- М.: Мир, I968.-I83 с.
7. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.- М. : Физматгиз, I963.- 503 с.
8. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.- Киев : Наук. думка, I969.- 247 с.
9. Бойчук А.А. Конструктивные методы анализа краевых задач. -

Киев : Наук. думка, I990.- 96 с.

10. Быков Я.В., Ризикулов Д. Периодические решения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений и их асимптотики.- Фрунзе : Илим, I986.- 28I с.

11. Вайникко Г.М. О сходимости разностного метода в задаче о периодических решениях обыкновенных дифференциальных уравнений //Журн. вычисл. математики и мат. физики.- I975.- I5, №I.- С. 87-I00.

12. Валеев К.Г., Жаутыков О.А. Бесконечные системы дифференциальных уравнений.- Алма-Ата : Наука, I974.- 4I5 с.

13. Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.- Рига : Зинатне, I978.- I89 с.

14. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.- М.:Наука, I973.- 273 с.

15. Гребеников Е.А. Математические модели в нелинейной механике.- М. : Изд-во Моск. ун-та, I983.- I02 с.

16. Гребеников Е.А., Киоса М.Н., Миронов С.В. Численно - аналитические методы исследования регулярно возмущенных многочастотных систем.- М. : Изд-во Моск. ун-та, I986.- I92 с.

17. Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем.- М. : Наука, I979.- 43I с.

18. Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Новые качественные методы в нелинейной механике.- М. : Наука, I97I.- 432 с.

19. Гудков В.В., Клоков Ю.А., Лепин А.Я., Пономарев В.Д. Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных урав-

нений .- Рига : Зинатне, I973.- I35 с.

20. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.- М. : Наука, I970.-
21. Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.- Киев : Наук. думка, I988.- 304 с.
22. Ермолаев Л.А. О равномерной устойчивости по первому приближению счетных почти линейных и нелинейных систем дифференциальных уравнений // Изв. АН КазССР. Сер.астр. и физ., матем. и мех.- I952. вып.I.- С. 88-II4.
23. Еругина Н.П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.- Минск : Изд-во АН БССР, I963.- 272 с.
24. Жабусинова Б.Х. Квазипериодические решения счетных систем дифференциально - разностных уравнений : Дис. ... канд. физ.-мат. наук.- Киев, I99I.- 98 с.
25. Жаутыков О.А. О построении интеграла линейного уравнения в частных производных первого порядка со счетным множеством независимых переменных // Уч. записки Казпединститута, сер. физика и матем.- I957, вып.8.- С. 32-4I.
26. Жаутыков О.А. О счетной системе дифференциальных уравнений, содержащей переменные параметры // Матем. сб.- I959.- 49, вып.3.- С. 3I7-330.
27. Канторович Л.В.,Акилов Г.П. Функциональный анализ.- М.: Наука, I977.- 742 с.
28. Кигурадзе И.Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.- Тбилиси : Изд-во Тбил. ун-та, I975.- 352 с.

29. Кигурадзе И.Т., Шехтер Б.Л. Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка// Современные проблемы математики. Новейшие достижения. М. : Наука, 1987.- С.105-201.

30. Клоков Ю.А. Краевые задачи с условием на бесконечности для уравнений математической физики.- Рига : Зинатне, 1963.-107 с.

31. Красносельский М.А. Функционально-аналитические методы в теории нелинейных колебаний//Тр. V Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям, 1970.- Т.I.- С. 322-331.

32. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику //Приближенные и асимптотические методы нелинейной механики.- Киев : Изд-во АН УССР, 1937.- 363 с.

33. Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применение.- Киев : Наук. думка, 1980.- 267 с.

34. Лаптинский В.Н. Некоторые приближенные методы построения периодических решений дифференциальных уравнений с запаздыванием //Изв. АН БССР. Сер.физ.-мат. наук.- 1980.- №1.- С. 30-35.

35. Лепин А.Я., Лепин Л.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.- Рига : Зинатне, 1988.- 211 с.

36. Лика Д.К., Рябов Ю.А. Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний.- Кишинев : Штиница, 1974.- 291 с.

37. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений.- М. : Наука, 1981.- 400 с.

38. Лучка А.Ю. Краевая задача для дифференциальных уравнений с

параметрами и ее решение проекционным методом // Докл. АН УССР. Сер. А.- 1989.- №9.- С. I2-I5.

39. Лучка А.Ю. Применение итерационных процессов к краевым задачам для дифференциальных уравнений с параметрами // Докл АН УССР. Сер.А.- I989.- №I0.- С. 22-27.

40. Лучка А.Ю. Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.- Киев : Наук. думка, I980.- 263 с.

41. Лучка А.Ю., Лучка Т.Ф. Возникновение и развитие прямых методов математической физики.- Киев : Наук. думка, I985.- 240 с.

42. Мартынюк А.А. Практическая устойчивость движения.- Киев : Наук. думка, I983.- 248 с.

43. Мартынюк Д.И., Кравец В.И., Жабусинова Б.Х. Об инвариантном торе счетной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // Асимптотические методы в задачах математической физики.- Киев : Ин-т математики АН УССР, I989.- С. 77-86.

44. Мартынюк О.М. О взаимосвязи решений счетных и "укороченных" систем дифференциальных уравнений для одной начальной задачи //Аналитические методы исследования нелинейных дифференциальных систем.- Киев : Ин-т математики АН Украины.- I992.- С.45-52.

45. Мартынюк О.М. О решении двухточечной краевой задачи для счетных систем //Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения.- Киев : Ин-т математики АН Украины, I992.- С.68-70.

46. Мартынюк О.М. О решении краевой задачи для счетных систем

дифференциальных уравнений //Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики - вторые Боголюбовские чтения.- Киев : Ин-т математики АН Украины, I992.- С. 96-97.

47. Мартынюк О.М. Использование численно-аналитического метода применительно к счетным системам дифференциальных уравнений //Школа-семинар "Разрывные динамические системы", Ужгород, I7-20 сент. I99I г.: Тез.докл.-Киев: О-во "Знание", I99I.- С. 39-40.

48. Мартынюк О.М. О численно-аналитическом методе для счетных периодических систем второго порядка //Нелинейные проблемы теории дифференциальных уравнений.- Киев: Ин-т математики АН УССР, I99I.- С.49-59.

49. Мартынюк О.М., Мартынюк С.В. Исследование периодических решений счетных систем дифференциальных уравнений второго порядка //Нелинейные эволюционные уравнения в прикладных задачах.- Киев: Ин-т математики АН УССР, I99I.- С. 88-90.

50. Мартынюк С.В. О нахождении решений краевой задачи обыкновенных дифференциальных уравнений // Асимптотические решения нелинейных уравнений с малым параметром.- Киев : Ин-т математики АН Украины, I99I.- С. 99-I04.

51. Митропольский Ю.А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний.- М. : Наука, I964.- 43I с.

52. Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И. Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием .- Киев : Вища шк., I979.-248 с.

53. Митропольский Ю.А., Мосеенко Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных.- Киев : Вища шк.,1976.-590 с.

54. Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Мартынюк Д.И. Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами.- Киев : Наук. думка, 1984.-214 с.

55. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы в нелинейной механике.- М. : Наука, 1981.- 400 с.

56. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений.- М.-Л.: Гостехиздат, 1947.- 450 с.

57. Нуржанов О.Д. Численно-аналитический метод исследования нелинейных периодических систем одного класса интегро- дифференциальных уравнений // Матем. физика.- 1977.-22.- С. 22-30.

58. Перестюк Н.А. Численно-аналитический метод исследования систем с импульсами // Труды семинара по мат. физике.- Киев : Ин-т математики АН УССР, вып.3, 1969.

59. Перов А.И. Вариационные методы в теории нелинейных колебаний.- Воронеж : Ин-т математики Воронеж. ун-та, 1981.- 196 с.

60. Персидский К.П. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения в нелинейных пространствах.- Алма-Ата : Наука, 1976.- 246 с.

61. Персидский К.П. Бесконечные системы дифференциальных уравнений // Изв. АН КазССР. Сер.матем. и мех.- 1956. вып.4/8/.- С. 3-II.

62. Персидский К.П. Об устойчивости решений счетной системы дифференциальных уравнений // Изв. АН КазССР. Сер.матем. и мех.- 1948.- вып.2.- С. 2-35.

63. Персидский К.П. Счетные системы дифференциальных уравнений и устойчивость их решений // Изв. АН КазССР. Сер.матем. и мех.- 1957. вып.7.- С. 52-71.

64. Ронто Н.И. Определение начальных значений решений краевых задач для дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывной частью // Докл. АН УССР. Сер. А.- 1984, №3.- С. 18-21.

65. Ронто Н.И. Сходимость метода тригонометрической коллокации для нелинейных периодических систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Укр.мат.журн.- 1983.- 35, №6.- С. 805-809.

66. Ронто Н.И. Численно-аналитический метод для краевых задач с параметром // Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики .- Тернополь,1989.- ч.2.-С.360-361.

67. Ронто Н.И., Мартынюк О.М. Исследование периодических решений счетных систем второго порядка// Укр. мат. журн. -1991.- 44, № 1.- С. 83-93.

68. Самойленко А.М. К вопросу о структуре траекторий на торе // Укр. мат. журн.- 1964.- 16, №6.- С. 769-782.

69. Самойленко А.М. Необходимые условия существования инвариантных торов линейных расширений динамических систем на торе // Дифференц. уравнения.-1980.-16, №8.- С. 1427-1437.

70. Самойленко А.М. Об экспоненциальной устойчивости инвариантного тора динамической системы // Дифференц. уравнения.- 1975.-11, №5.- С.820-834.

71. Самойленко А.М. О периодических решениях нелинейных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения.- 1967.- 3, №11.- С.

I903-I9I3.

72. Самойленко А.М. О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН УССР. Сер. матем. и мех.-I970.-34, №6.-С.I2I9-I240.

73. Самойленко А.М. Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр.мат.журн.- I965.-I7, №4.- С. I6-23.

74. Самойленко А.М. Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр.мат.журн.- I966.-I8, №2.- С. 9-I8.

75. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочасточных колебаний. Инвариантные торы.- М. : Наука, I987.- 304 с.

76. Самойленко А.М., Ле Льонг Тай Об одном методе исследования краевых задач с нелинейными краевыми условиями // Укр.мат.-журн.- I990.- 42, №7.- С. 95I-957.

77. Самойленко А.М., Овездурдыев Х. Численно-аналитический метод исследования периодических решений дифференциальных уравнений с разрывной правой частью //Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе.- Киев : Ин-т математики АН УССР, I982.- С. 7I-72.

78. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.-Киев : Вища шк., I987.- 228 с.

79. Самойленко А.М., Перестюк Н.А., Трофимчук С.И. Проблема "биения" в импульсных системах // Препринт / Ин-т математики АН УССР.- Киев, I990.- №90.II.- 46 с.

80. Самойленко А.М., Ронто В.А. О численно-аналитическом методе

решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр.мат.журн.- I98I.- 39, №3.- С. 467-475.

81. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Модификация численно-аналитического метода последовательных приближений для краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений// Укр.мат.журн.-I990. - 42, №8.- С. II07-III6.

82. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач.- Киев : Наук.думка, I986.- 224 с.

83. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений.- Киев : Вища шк., I976.- I80 с.

84. Самойленко А.М., Теплинский Ю.В. О приводимости дифференциальных систем в пространстве ограниченных числовых последовательностей // Препринт / Ин-т математики АН УССР.- Киев, I989.- №89.44.- 47 с.

85. Самойленко А.М., Теплинский Ю.В.,Лучик В.Е. Приводимость дифференциальных уравнений с импульсами в пространстве ограниченных числовых последовательностей // Докл. АН УССР. Сер.А.- I990, №5.- С. 27-3I.

86. Самойленко А.М., Теплинский Ю.В., Цыгановский Н.С. Об инвариантных торах счетных систем дифференциальных уравнений// Препринт / Ин-т матем. АН УССР.- Киев, I983.- №83.30.- 42 с.

87. Самойленко А.М., Ткач Б.П. Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными.- Киев : Наук. думка, I989.- 228 с.

88. Тауфер И. Решение граничных задач для систем линейных дифференциальных уравнений.- М. : Наука, I98I.- I44 с.

89. Теплинский Ю.В. О гладкости инвариантного многообразия линейной счетной системы дифференциальных уравнений // Мат. физика.- I978.-вып.23.- С. 32-39.

90. Теплинский Ю.В. О существовании и гладкости инвариантного тороидального многообразия нелинейной счетной системы дифференциальных уравнений // Укр.мат.журн.-I975.-27, №6.- С.847-85I.

91. Теплинский Ю.В. О существовании инвариантного тороидального многообразия счетной системы дифференциальных уравнений// Асимптотические методы исследования решений нелинейных систем дифференциальных уравнений.- Киев : Ин-т математики АН УССР, I974.- С. I64-I70.

92. Теплинский Ю.В., Авдеюк П.И. Об экспоненциальной устойчивости инвариантного тора нелинейной счетной системы дифференциальных уравнений // Укр.мат.журн.-I990.- 42, №3.- С. 40I-405.

93. Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Матем. сб.- М. : I948, 22.- С.I93-204.

94. Трофимчук Е.П. Исследование численно-аналитическим методом с улучшеной сходимостью решений краевой задачи для импульсной системы // Асимптотические методы в задачах математической физики.- Киев : Ин-т математики АН УССР, I988.- С. I52-I58.

95. Харасахал В.Х. О фундаментальных решениях счетных систем дифференциальных уравнений // Изв. АН КазССР. Сер.матем. и мех.- I950. вып.4.- С. 98-I08.

96. Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах.- М. : Мир, I966.-

367 с.

97. Чантурия Т.А. О задаче типа Кнезера для системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Мат. заметки.- I974.- I5, №6.- С. 897-906.

98. Шкиль Н.И., Вороной А.Н., Лейфура В.Н. Асимптотические методы в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях.- Киев : Вища шк., I985.- 248 с.

99. Шлапак Ю.Д. Исследование колебаний некоторых видов систем : Дис. ... канд. физ.-мат наук.- Киев.- I974.- I3I с.

100. Bailey P., Shampine Z., Waltman P. Nonlinear two point boundary value problems.- New York: Academic Press, 1968.- 171 p.

101. Cesari Z. Functional analysis and periodic solutions of nonlinear differential equations.-Contributions to Differ.Equations. New York, Y.Wiley.Sons.Inc.1963, 1, P.149-167.