

Державний комітет зв'язку та інформатизації України  
Національна академія наук України  
Державний науково-дослідний інститут інформаційної інфраструктури

**Березька Катерина Миколаївна**

УДК 621.397.3

**МОДЕЛЮВАННЯ ТА СИНТЕЗ СКЛАДНИХ  
ЗОБРАЖЕНЬ СИМЕТРИЧНОЇ СТРУКТУРИ**

*01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи*

**Автореферат дисертації  
на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук**

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Державному науково-дослідному інституті інформаційної інфраструктури Державного комітету зв'язку та інформатизації і Національній академії наук України

**Науковий керівник:** Член-кореспондент НАН України, доктор технічних наук, професор  
**Грицик Володимир Володимирович,**  
Державний науково-дослідний інститут інформаційної інфраструктури, директор

**Офіційні опоненти:** доктор технічних наук, професор  
**Сіроджа Ігор Борисович,**  
Державний аерокосмічний університет  
ім. М.Є.Жуковського «ХАІ», м.Харків, завідувач кафедри

доктор технічних наук, старший науковий співробітник  
**Яцимірський Михайло Миколайович**  
Державний університет «Львівська політехніка», доцент

**Провідна установа:** Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, відділ керуючих машин і систем

Захист відбудеться «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2000 р. о «\_\_\_» год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д **35.813.01** в Державному науково-дослідному інституті інформаційної інфраструктури (79601, м. Львів, вул. Тролейбусна, 11).

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Державного науково-дослідного інституту інформаційної інфраструктури (79601, м. Львів, вул. Тролейбусна, 11).

Автореферат розісланий «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2000 р.

*Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради  
доктор технічних наук*

**Бунь Р.А.**

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Симетрія – це фундаментальна особливість природи, яка охоплює всі форми руху і організації матерії. На протязі всієї історії людства симетрія відіграла важливу роль в мистецтві, науці та інших видах інтелектуальної діяльності. Ще в 1891 р. Є.С.Федоровим була досліджена симетрія безконечних сітчатих орнаментів, яка вичерпується 17 групами, 16 з яких були описані К.Жорданом. Подальший розвиток науки про симетрію (симетричні групи перетворень) відображений в роботах Г.Вейля, Г.М.Кокстера, В.І.Вернадського, А.В.Шубнікова та ін. В 1967 р. А.М.Заморзаєвим була запропонована теорія Р - симетрії (точніше кольорової) – одне з сучасних узагальнень в галузі науки про симетрію зображень.

Але, незважаючи на значну кількість досліджень, пов'язаних з методами моделювання, опису та синтезу складних зображень, ряд питань моделювання, генерування та архівування таких зображень вивчено недостатньо. Більше того, в розповсюджених універсальних графічних редакторах (CorelDRAW, Adobe Photoshop) відсутні функції моделювання та автоматичного генерування симетричних зображень.

Тому розробка цих питань має важливе прикладне значення з огляду дослідження та вивчення технічних систем обробки і розпізнавання зображень, вивчення живих організмів та ін. Вивчення складних зображень на основі симетрії пов'язане також з поняттям краси і гармонії сприймання зображення в мистецтві.

В роботі досліджено складні зображення на основі симетрії. Вперше розглянуто як зображення – вишивки, які наділені складною структурою, а також алфавітом елементів, що відповідають кольору. Адже в зображенні-вишивці відображена колективна народна мудрість, пронесена через віки, яка служить своєрідним показником культури українського народу. В цьому виді мистецтва втілені неперевершені класичні зразки геометричного орнаменту, в якому передано багатий рослинний та тваринний світи, краса Всесвіту.

Отже, актуальним є завдання розробки методу опису і моделювання та алгоритмів синтезу складних зображень, наділених симетричною структурою з метою моделювання та компактного зберігання їх в пам'яті ЕОМ. Ця задача має теоретичну та практичну цінність. Створення комп'ютерної системи (автоматичного редактора) дасть можливість здійснювати моделювання та економно зберігати великі масиви складних зображень-орнаментів, а також синтезувати нові зображення заданої симетричної структури. Розробка програмно-апаратної системи синтезу зображень вишивок дозволить відтворювати та досліджувати тонкі структури зображення на основі симетрії, красу і гармонію сприймання.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконана в рамках Державної науково-технічної програми 6.02.02 з пріоритетного напрямку «Перспективні інформаційні технології і системи»,

затвердженої ДКНТ України (1992 р.), наступних науково-дослідних тем: «Дослідження можливостей розробки високоефективних моделей і алгоритмів обробки і класифікації одновимірних і двовимірних сигналів із складною структурою» (номер держ. реєстрації 81041804), «Дослідження і розробка ефективних методів та засобів виявлення і класифікації сигналів та прогнозування завад» (номер держ. реєстрації 76034505), «Розробка інформаційно-аналітичної системи супроводу інтеграції України в міжнародне співтовариство» (Національне агентство з питань інформатизації при Президентові України, 1998 р.).

**Мета і задачі дослідження.** Метою дисертації є розробка методу опису та моделювання складних симетричних зображень-орнаментів а також створення на його основі редактора зображень-орнаментів. Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні задачі:

- розробити метод опису та моделювання складних зображень, наділених симетричною структурою;
- розробити мову опису структурних частин зображень-орнаментів;
- розробити алгоритми синтезу зображень-орнаментів;
- реалізувати алгоритми синтезу орнаментального зображення вишивки;
- реалізувати алгоритми редагування зображень вишивок.

**Наукова новизна одержаних результатів.**

- Розроблено метод опису та моделювання складних зображень-орнаментів.
- На основі запропонованого методу опису та моделювання складних зображень-орнаментів розроблено мову опису структурних частин зображення-орнаменту та досліджено її властивості.
- На основі рекурсивного підходу до груп перетворень зображень, розроблено математичні моделі структурних частин зображення-орнаменту.
- Запропоновано алгоритми синтезу федорівських груп перетворень зображень на основі осьових симетрій.
- Розроблено математичні моделі перетворень зображень для федорівських груп на площині та смузї в матричному вигляді, які лягли в основу синтезу алгоритмів генерування зображень-орнаментів.
- Отримано аналітичні вирази для коефіцієнтів стиснення (архівування) зображень-орнаментів, побудованих на основі запропонованого методу.

**Практичне значення отриманих результатів.** Практична цінність отриманих результатів полягає у ефективному зберіганні зображень-орнаментів.

Розроблені алгоритми опису, синтезу та відтворення зображень-орнаментів реалізовані в наступних системах:

- 1) розроблено і впроваджено редактор зображень-орнаментів, який дає можливість моделювати та автоматично генерувати симетричні зображення, ефективно зберігати та синтезувати нові складні зображення;
- 2) розроблено і впроваджено редактор вишивок, який забезпечує автоматизацію

процесу синтезу вишивки із орнаменту.

**Особистий внесок здобувача.** Усі теоретичні дослідження, розробка алгоритмічного і програмного забезпечення, основна частина практичних розробок виконані автором самостійно. В друкованих працях, опублікованих у співавторстві, автору належить метод опису складних зображень, алгебра мови опису та дослідження її властивостей [2, 3], алгоритми генерування груп перетворень зображень [5, 8, 10], участь в постановці задач, розробленні та програмуванні редакторів орнаментів і вишивок [12].

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертаційної роботи доповідалися на 4-ій українській конференції «Автоматика 97» (Черкаси, 1997), конференціях «Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях» (Львів, 1997, 1999), міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математики» (Чернівці, 1998), міжнародній науковій конференції «Розробка та застосування математичних методів у науково-технічних дослідженнях» (Львів, 1998).

**Структура і обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається з вступу, чотирьох розділів, висновків. Вона викладена на 209 сторінках і включає 127 сторінок основного тексту, перелік використаних джерел із 112 найменувань на 8 сторінках, 8 додатків на 64 сторінках, ілюструється 9 рисунками та однією таблицею.

**Публікації.** За результатами виконаних досліджень опубліковано 12 робіт, із яких 7 статей у фахових наукових виданнях, 5 – матеріали і тези конференцій, із них 6 – одноосібні публікації.

## **ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ**

**У вступі** обґрунтовано актуальність проведеної роботи, показано її зв'язок із науковими програмами, сформульовано мету, поставлено основні задачі дослідження, визначено наукову новизну та практичну цінність отриманих результатів.

**У першому розділі** показано фундаментальну роль симетрії в різних сферах життєдіяльності людини, проведено класифікацію української народної вишивки та зроблено аналіз існуючих методів аналізу та синтезу складних зображень.

В вузькому розумінні симетрія – це дзеркальне відображення відносно площини в просторі (прямої на площині), в широкому розумінні – властивість геометричної фігури, що характеризує деяку правильність її форми. Показано, що це фундаментальне поняття зустрічається в багатьох областях науки, мистецтва, а саме в математиці, фізиці, біології, хімії, техніці, кристалографії, архітектурі, образотворчому мистецтві, музиці, танцях, ювелірних роботах, вишивці, літературі, в типографському орнаменті та ін.

Проаналізовано українські народні вишивки з точки зору симетричної

структури згідно умовного етнографічного районування території. Виділено локальні відмінності між специфічними техніками виконання, типовими орнаментальними мотивами і композиціями, поширеною колірною гамою і спільні характерні риси для вишивки кожного регіону (симетрична композиційна структура). Зроблено поділ мотивів на такі види: геометричні; рослинні; рослинно-геометричні; зооморфні. Проведено аналіз структурної композиції вишивальних орнаментів. Згідно неї орнамент поділено на підорнаменти, рапорти і мінімальні рисунки. Підорнамент – це узор, що складається з ритмічно впорядкованих однакових елементів (побудований на одній групі перетворення). Підорнаменти в свою чергу діляться на рапорти. Рапортом називається мінімальна по площі область, якою можна покрити підорнамент використовуючи лише переноси. Рапорт в свою чергу ділиться ще на менші складові – мінімальний рисунок (мотив,  $D_{min}$ ). Мінімальний рисунок – це найменша частина рапорту, з допомогою якої, проводячи перетворення симетрії, будується рапорт. Орнамент, зображений на рис. 1 складається з двох підорнаментів (позначення – I і II). Рапорт I-го підорнаменту 1 (обведено вузькою штриховою лінією), мінімальний рисунок (обведено широкою штриховою лінією) – 2; рапорт II-го підорнаменту – 3, мінімальний рисунок – 4.



Рис. 1. Зразок орнаменту і його складових

Проаналізовано відомі методи представлення зображень, серед яких: прямі (матричні) – найбільш прості, але зв'язані з великими затратами на обробку відеоданих; опис зображення за допомогою коефіцієнтів ортогонального перетворення – перетворення Фур'є, Адамара (неефективно проводяться локальні операції над зображеннями); пірамідально-рекурсивні представлення – зображення описується впорядкованою послідовністю декількох зображень різного розрізнення (виникають технічні труднощі при аналізі складних зображень); синтаксичні (структурні) методи представлення, які базуються на описі зображень складених об'єктів у вигляді ієрархічної структури.

Показано, що найбільш прийнятним для опису складних симетричних зображень є структурний метод, який дозволяє описувати зображення шляхом виділення мінімального рисунку та його перетворення за допомогою симетричних груп.

У другому розділі запропоновано метод опису та моделювання складних симетричних зображень, який базується на розробленій мові опису мінімальних рисунків та алгоритмах синтезу підорнаментів (на основі синтезу груп перетворень). В роботі розглянуто зображення-вишивку, як об'єкт, наділений структурою (рис.1,2). Структурний метод опису і моделювання полягає у виділенні із складного симетричного зображення структурних складових (мінімального рисунку, рапорту,

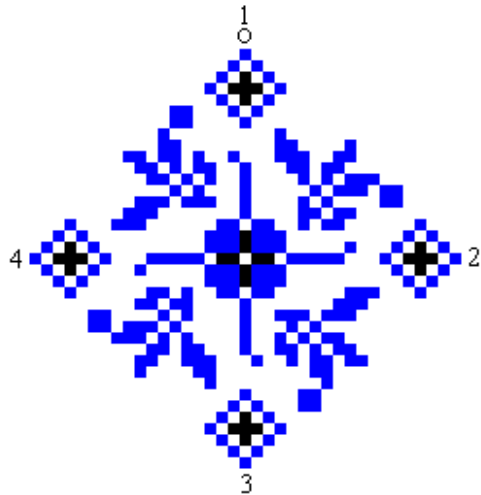


Рис. 2. Геометричний мотив

підорнаменту) та їх математичного опису. Позначивши повороти мотиву, зображеного на рис.2, у вигляді нескінченних множин:  $A=\{\text{повороти проти годинникової стрілки на } p/2 \pm 2pk, k=0,1,2,\dots\}$ ,  $B=\{\text{повороти проти годинникової стрілки на } p \pm 2pk, k=0,1,2,\dots\}$ ,  $C=\{\text{повороти проти годинникової стрілки на } 3p/2 \pm 2pk, k=0,1,2,\dots\}$ ,  $D=\{\text{повороти проти годинникової стрілки на } 2p \pm 2pk, k=0,1,2,\dots\}$ ,  $\Gamma=\{A,B,C,D\}$  і через  $a, b, c, I$  (оскільки  $I$  – одиничний елемент групи поворотів мотиву) – будь-який елемент з відповідних множин, то таблиця множення для групи поворотів  $\Gamma$  має вигляд (табл. 1). Операція суперпозиції поворотів не виводить за межі множини  $\Gamma$ . Мотив належить до циклічної групи  $C_n$ .

Таблиця 1

Таблиця множення групи поворотів  $\Gamma$

Множини	$I$	$a$	$b$	$c$
$I$	$I$	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$b$	$c$	$I$
$b$	$b$	$c$	$I$	$a$
$c$	$c$	$I$	$a$	$b$

Використовуючи груповий підхід до зображення отримано формалізований запис орнаменту, який послужив базою для розробки термальних ланцюжків.  $z(D \min)$  – орнаментне

зображення на площині, де  $z \in Z = \{p1, p2, pm, pg, cm, pmm, pmg, pgg, cmm, p4, p4m, p4g\}$ ,  $j(D \min)$  – орнаментне зображення на полосі, де  $j \in J = \{p1, p2, pm, pg, cm, pmm, pmg, pm, pmm\}$  (позначення прийняті згідно з міжнародною системою позначень плоских кристалографічних груп).

Для опису мінімального рисунку ( $D \min$ ) вишивки запропоновано наступну мову опису.

1. Кожен непохідний елемент помічено в двох різних точках – головній  $z$  і хвостовій  $x$  (рис.3,а). Причому непохідні елементи дотикаються і накладаються тільки в головних чи хвостових точках.

2. Введено бінарні операції конкатенації (з'єднання):

- операція  $a + b$  (рис.3,б – головна точка "а" дотикається до хвостової точки

"b");

- операція  $a \oplus b$  (рис.3,в – головна точка "a" співпадає з хвостовою точкою "b");

- операція  $a \times b$  (рис.3,г – хвостова точка "a" дотикається до хвостової точки "b");

- операція  $a \otimes b$  (рис.3,д – хвостова точка "a" співпадає з хвостовою точкою "b");

- операція  $a - b$  (рис.3,е – головна точка "a" дотикається до головної точки "b");

- операція  $a \ominus b$  (рис.3,є – головна точка "a" співпадає з головною точкою "b");

- операція  $a * b$  (рис.3,ж – головна точка "a" дотикається до головної точки "b" і хвостова точка "a" дотикається до хвостової точки "b").

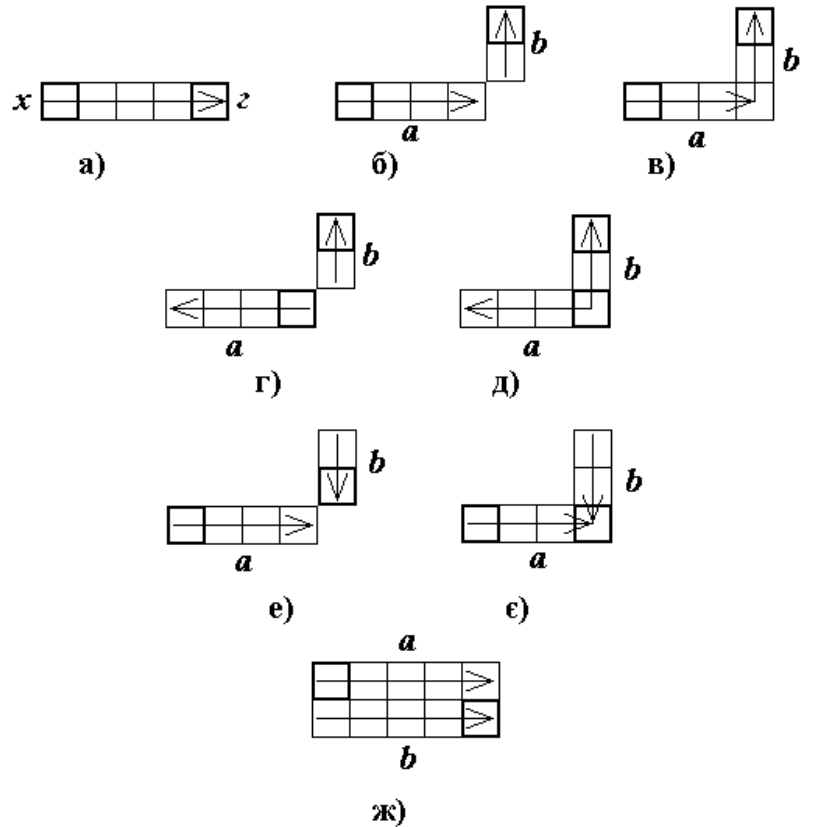


Рис. 3. Непохідний елемент і бінарні операції конкатенації

3. Введено наступну унарну операцію:

$\sim$  – визначається як переміна головної і хвостової точок.

4. Введено непохідні елементи:

а)  $a, b, c, d$  (рис. 4,а), причому  $|a|=|b|=|c|=|d|=1$ . Якщо  $a$  – ланцюжок символів, то  $a^n$  – ланцюжок, що складається з  $n$  раз побудованого ланцюжка  $a$ .

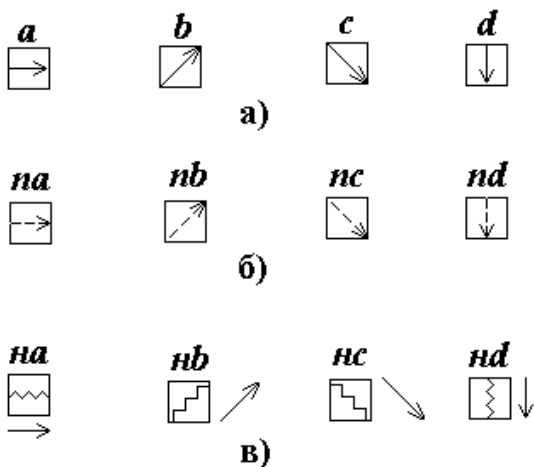


Рис.4. Непохідні елементи: а)основні; б)"порожні"; в)"несуттєві"

б) "порожні" непохідні елементи –  $ra, rb, rc, rd$  (рис. 4,б);

в) "несуттєві" непохідні елементи –  $na, nb, nc, nd$  (рис. 4,в).

ГраMATика, що породжує речення в цій мові, є безконтекстною граматикою, для якої  $V_N = \{S, SF\}$ ,

$V_T = \{a\} \cup \{+, \oplus, -, \ominus, *, \times, \otimes, (, )\}$ ,

$a$  – це будь-який непохідний елемент з вище названих,

$P : S \rightarrow a, S \rightarrow (S \& S), S \rightarrow (\sim S), S \rightarrow SF, SF \rightarrow (SF \& SF), SF \rightarrow (\sim SF), \& \rightarrow +, \& \rightarrow \oplus, \& \rightarrow -, \& \rightarrow \ominus, \& \rightarrow *, \& \rightarrow \times, \& \rightarrow \otimes.$



Як семантичну інформацію про непохідні елементи розглянуто множину ознак, яка потрібна для опису виділеного непохідного елемента. Семантична інформація про підобраз (допоміжний символ граматик) оцінюється по семантичній інформації непохідних елементів, що його складають.

Представлено семантичними функціями бінарні операції конкатенації (табл.2). Вираз ДОТ означає "дотикатися до", НАКЛ - "накладатися на".

Таблиця 2

Представлення бінарних операцій семантичними функціями

$T_s (B)$	Правило підстановки	Семантична функція
$D_1 + D_2$	$B \rightarrow D_1 + D_2$	$x(B)=x(D_1)$ $z(B)= z(D_2)$ $z(D_1)$ ДОТ $x(D_2)$
$D_1 \oplus D_2$	$B \rightarrow D_1 \oplus D_2$	$x(B)=x(D_1)$ $z(B)= z(D_2)$ $z(D_1)$ НАКЛ $x(D_2)$
$D_1 \times D_2$	$B \rightarrow D_1 \times D_2$	$x(B)=x(D_1)$ $z(B)= z(D_2)$ $x(D_1)$ ДОТ $x(D_2)$
$D_1 \otimes D_2$	$B \rightarrow D_1 \otimes D_2$	$x(B)=x(D_1)$ $z(B)= z(D_2)$ $x(D_1)$ НАКЛ $x(D_2)$
$D_1 - D_2$	$B \rightarrow D_1 - D_2$	$x(B)=x(D_1)$ $z(B)= z(D_2)$ $z(D_1)$ ДОТ $z(D_2)$
$D_1 \ominus D_2$	$B \rightarrow D_1 \ominus D_2$	$x(B)=x(D_1)$ $z(B)= z(D_2)$ $z(D_1)$ НАКЛ $z(D_2)$
$D_1 * D_2$	$B \rightarrow D_1 * D_2$	$x(B)=x(D_1)$ $z(B)= z(D_2)$ $z(D_1)$ ДОТ $z(D_2)$ $x(D_1)$ ДОТ $x(D_2)$ .

Визначено алгебру, яка складається з деякої непустої множини непохідних елементів – множина  $E$  і послідовності визначених на  $E$  операцій  $F=\{\sim, +, \oplus, -, \ominus, *, \times, \otimes\}$ .

Для даної алгебри виконуються наступні закони.

1. Комутативності – справджується для наступних операцій (але тільки для побудови, а початкова і кінцева точки не співпадають) –  $*$ ,  $\times$ ,  $\otimes$ ,  $-$ ,  $\ominus$

$$(U_1 * U_2)=( U_2 * U_1);$$

$$(U_1 \times U_2) = (U_2 \times U_1);$$

$$(U_1 - U_2) = (U_2 - U_1);$$

$$(U_1 \otimes U_2) = (U_2 \otimes U_1);$$

$$(U_1 \ominus U_2) = (U_2 \ominus U_1).$$

2. Асоціативності для операцій  $+$ ,  $\oplus$

$$((U_1 + U_2) + U_3) = (U_1 + (U_2 + U_3));$$

$$((U_1 \oplus U_2) \oplus U_3) = (U_1 \oplus (U_2 \oplus U_3)).$$

3. Інверсії  $-(\sim(\sim U)) = U$ .

4. Для операції  $\sim$  справджуються наступні рівності:

$$(\sim(U_1 + U_2)) = ((\sim U_2) + (\sim U_1));$$

$$(\sim(U_1 \oplus U_2)) = ((\sim U_2) \oplus (\sim U_1));$$

$$(\sim(U_1 * U_2)) = ((\sim U_2) * (\sim U_1));$$

$$(\sim(U_1 \times U_2)) = ((\sim U_2) - (\sim U_1));$$

$$(\sim(U_1 \otimes U_2)) = ((\sim U_2) \ominus (\sim U_1));$$

$$(\sim(U_1 - U_2)) = ((\sim U_2) \times (\sim U_1));$$

$$(\sim(U_1 \ominus U_2)) = ((\sim U_2) \otimes (\sim U_1)).$$

Запропоновано рекурсивні алгоритми побудови та моделювання зображень-орнаментів для 7-и груп на полосі ( $J = \{p1, p2, pt, pg, ct, ptt, ptg, pm, pmm\}$ ) і 12-и на площині ( $Z = \{p1, p2, pt, pg, ct, ptt, ptg, pgg, stt, p4, p4m, p4g\}$ ). За допомогою них структура зображень задається шляхом використання елементарного зображення і закону переходу на наступний рівень. Для груп перетворень на площині закон переходу на наступний рівень – це переноси в напрямку  $X$  та  $Y$ , на смугі – перенос в напрямку  $X$ . Елементарні зображення (рапорти для орнаментистів) для площини мають вигляд:

$$\text{група } p1 - D \min ;$$

$$\text{група } ptg - D \min + T(D \min ) + R (D \min + T(D \min ));$$

$$\text{група } p2 - D \min + T(D \min );$$

$$\text{група } pt - D \min + R_1(D \min );$$

$$\text{група } pgg - D \min + Q(D \min ) + P(D \min + Q(D \min ));$$

$$\text{група } pg - D \min + Q(D \min ) + P(D \min + Q(D \min ));$$

$$\text{група } stt - D \min + R_1(D \min ) + R_2(D \min + R_1(D \min ));$$

$$\text{група } ct - D \min + R (D \min );$$

$$\text{група } ptt - D \min + R_1(D \min ) + R_2(D \min + R_1(D \min ));$$

$$\text{група } p4 - D \min + S(D \min ) + S(S(D \min )) + S(S(S(D \min )));$$

$$\text{група } p4m - D \min + R (D \min ) + R_1(D \min + R (D \min )) + R_2(D \min + R (D \min )) + R_1(D \min + R (D \min ));$$

$$\text{група } p4g - D \min + R(D \min ) + S(D \min + R(D \min )) + S(S(D \min + R(D \min ))) + S(S(S(D \min + R(D \min )))),$$

де  $D \min$  – мінімальний рисунок,  $R, R_1, R_2$  – відображення,  $P, Q$  – ковзні відображення,  $X, Y$  – переноси,  $T, S$  – повороти на  $180^\circ$  та  $90^\circ$ .

Елементарні зображення для смуги мають вигляд:

$$\text{група } p1 - D \min ;$$

група  $pm$  –  $D \min + R(D \min)$ ;

група  $pg$  –  $D \min + P(D \min)$ ;

група  $p1m$  –  $D \min + R_1(D \min)$ ;

група  $p2$  –  $D \min + T(D \min)$ ;

група  $pmg$  –  $D \min + R_1(D \min) + T(D \min + R_1(D \min))$ ;

група  $pmt$  –  $D \min + R(D \min) + R_1(D \min + R(D \min))$ .

**У третьому розділі** розроблено підхід до синтезу груп перетворень через породжувальні перетворення, запропоновано алгоритми синтезу мінімального рисунку в різних базисах, спроектовано узагальнений алгоритм синтезу орнаментів.

На основі підходу до синтезу груп перетворень через породжувальні перетворення одержано наступні матриці перетворень для груп множини  $J$ , наведені в табл. 3 ( $x'$ ,  $y'$  – сторони прямокутників, що утворюють прямокутно-решітчасту сітку).

Таблиця 3

Групи смуги

Назва групи	Породжуючі перетворення в матричному вигляді		
	I	II	III
$p1$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x' & 0 & 1 \end{bmatrix}$	–	–
$pg$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ x' & 2y' & 1 \end{bmatrix}$	–	–
$p1m$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x' & 0 & 1 \end{bmatrix}$	–
$p2$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ x' & 0 & 1 \end{bmatrix}$	–
$pmg$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ x' & 0 & 1 \end{bmatrix}$	–
$pm$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x' & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	–

Продовження табл. 3

рmm	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x' & 0 & 1 \end{bmatrix}$
-----	--	--	--

Аналогічним чином отримано матриці перетворень для груп множини  $Z$ .

Оскільки операція відображення відносно осі є основним видом симетрії, а всі інші (поворот, паралельний перенос, ковзне відображення) одержуються на її основі, то проаналізовано процес синтезу груп перетворень через відображення і отримано наступні результати. Нехай  $R_1, R_2, R_3$  – відображення в гіпотенузі і катетах прямокутного рівнобедреного трикутника (рис. 5). Тоді множина груп  $Z$  представляється таким чином:

$p4m$	$R_1, R_2, R_3;$
$p4g$	$R_2, R_1 R_3;$
$p4$	$R_1 R_3, R_2 R_3;$
$ctm$	$R_1, R_3 R_1 R_3, R_2 R_3;$
$pgg$	$R_2 R_1 R_3, R_1 R_3 R_2;$
$ct$	$R_1, R_2 R_1 R_3;$
$pg$	$R_2 R_1 R_3, R_1 R_2 R_1 R_3 R_1;$
$ptg$	$R_1 R_2 R_1 R_2 R_3, R_1 R_3 R_1 R_3;$
$p2$	$R_2 R_3, R_1 R_3 R_1 R_3, R_1 R_2 R_3 R_1;$
$ptm$	$R_2, R_3, R_1 R_2 R_1, R_1 R_3 R_1;$
$pt$	$R_2, R_1 R_3 R_1, R_3 R_1 R_2 R_1;$
$p1$	$R_2 R_1 R_3 R_1, R_3 R_1 R_2 R_1.$

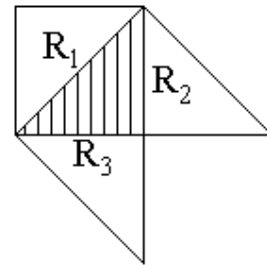


Рис.5. Породжуючі елементи груп

Аналогічно проаналізовано множину груп  $J$ .

Нехай  $R_1, R_2, R_3$  – відображення в сторонах прямокутника (рис.6). Множина груп  $J$  має наступне представлення:

$p1$	$R_1 R_3;$
$pg$	$R_1 R_3 R_2;$
$p1m$	$R_1, R_3;$
$p2$	$R_1 R_2, R_3 R_2;$
$ptg$	$R_1 R_2, R_3;$
$pt$	$R_1 R_3, R_2;$
$ptm$	$R_1, R_2, R_3.$

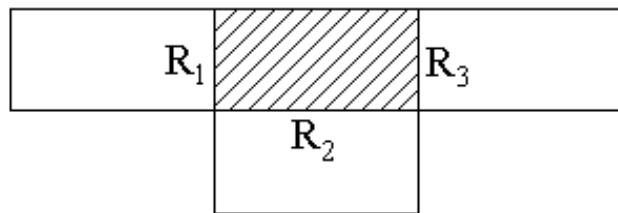


Рис.6. Породжуючі елементи груп

Показано, що внаслідок мінімізації числа операцій над непохідними елементами синтез мінімального рисунку може відбуватися в наступних базисах:  $K=\{\sim, \oplus, \otimes\}$ ,  $L=\{\sim, \oplus, \ominus\}$ ,  $M=\{\sim, \oplus\}$ . Більше того,  $K=\{\sim, \oplus, \otimes\}$ ,  $L=\{\sim, \oplus, \ominus\}$  є повними базисами, а  $M=\{\sim, \oplus\}$  є мінімальним базисом. В результаті доведено наступну теорему:

Теорема. Будь-яке зображення можна представити з допомогою множини непохідних елементів та набору операцій  $M=\{\sim, \oplus\}$ . Більше того ці операції є незалежні.

Узагальнений алгоритм синтезу орнаментів складається з наступних етапів.

### 1. Формування мінімального рисунку.

Синтез мінімального рисунку відбувається в одному випадку на основі його алгебраїчної формули опису в іншому – шляхом використання бази типових для даної орнаментальної області мінімальних рисунків. При цьому можливі два способи формування мінімального рисунку: детермінований та стохастичний. Використання детермінованого способу синтезу вимагає повного формалізованого опису мінімального рисунку. Стохастичний спосіб дозволяє шляхом використання генератора випадкових чисел із різними законами розподілу дискретних випадкових величин (Бернуллі, Пуассона, геометричного розподілу тощо) вибирати із відповідних множин (множини непохідних елементів, множина кольорів, множини довжин непохідних елементів, множини операцій над непохідними елементами) необхідний елемент з довжиною та кольором. При виборі унарної операції проходить автоматичне її виконання над сформованим ланцюжком елементів. В протилежному разі (бінарні операції) відбувається вибір другого ланцюжка елементів.

### 2. Формування груп перетворень зображень.

Формування груп перетворень здійснюється трьома способами:

- через породжуючі перетворення – переноси, відображення, повороти, ковзні відображення;
- на основі осьових симетрій;
- рекурсивним способом (як підгрупи груп переносів).

Утворення орнаменту із підорнаментів відбувається шляхом послідовного заповнення площини групами перетворень зображень, причому послідовність заповнення немає принципового значення і відбувається за рішенням людини-орнаментиста.

Приклад синтезу мінімального рисунку і групи перетворень наведено на рис.7-9. На рис. 7 мінімальний рисунок розкладено на непохідні елементи і показана конкатенація між ними. Рис. 8 демонструє мінімальний рисунок згенерований по формулі:

$$(c^2 \oplus (\sim d^3) + (\sim nd^3) + (\sim d^2) \oplus (\sim b^7) + c^4 +) \ominus ((\sim b^5) \oplus c^5) \oplus ((\sim b^2) + (\sim a) + (\sim na^2) \oplus (\sim c^4) + nd^2 + d).$$

На рис. 9 представлено орнамент, що складається з одного підорнаменту і реалізований він по формулі :

$$\mathbf{p1m} /5/: (c^2 \oplus (\sim d^3) + (\sim nd^3) + (\sim d^2) \oplus (\sim b^7) + c^4 +) \ominus ((\sim b^5) \oplus c^5) \oplus ((\sim b^2) + (\sim a) + (\sim na^2) \oplus (\sim c^4) + nd^2 + d), \text{ де } 5 - \text{число ітерацій (кількість рапортів, що присутні в орнаменті)}.$$

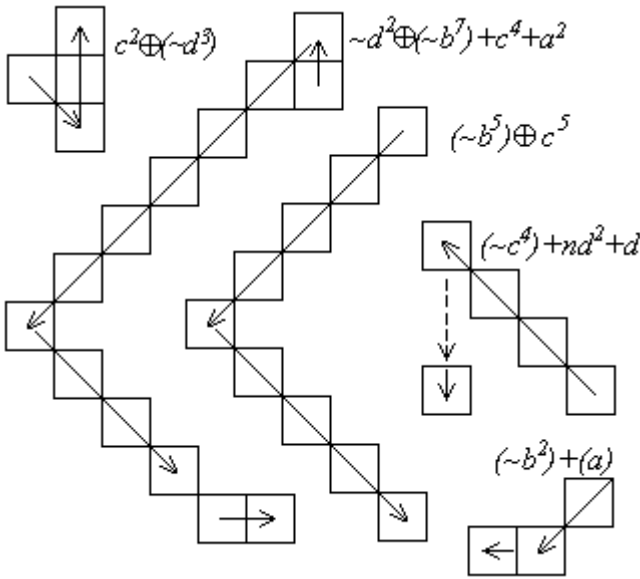


Рис. 7. Непохідні елементи і конкатенація між ними

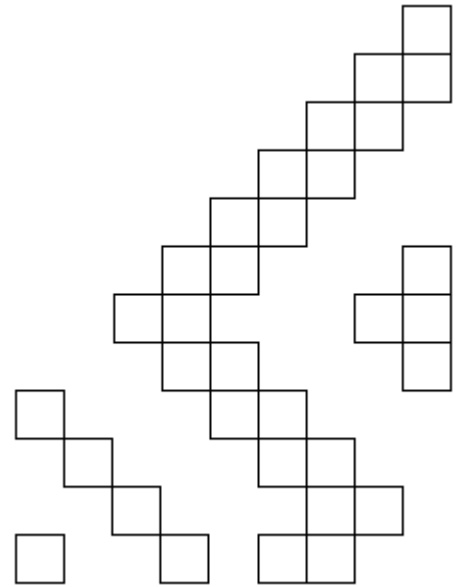


Рис. 8. Зображення, утворене з непохідних елементів

Дано оцінку величини коефіцієнтів стиснення симетричних зображень для різних варіантів (в \*.bmp та \*.txt (у вигляді формули опису) форматах) зберігання в пам'яті ЕОМ складових орнаменту. Нехай  $Q_{\min b}$  – об'єм пам'яті для збереження мінімального рисунку в \*.bmp форматі, а  $Q_{\min t}$  – об'єм пам'яті для збереження мінімального рисунку в \*.txt форматі. Тоді коефіцієнт стиснення мінімального рисунку  $K_{\min}$  рівний  $Q_{\min b} / Q_{\min t} = K_{\min}$ .



Рис. 9. Зображення-орнамент

Коефіцієнт стиснення для рапорту рівний

$$K_{RP} = (K_i \cdot Q_{\min b}) / Q_{\min t} = K_i \cdot K_{\min},$$

де  $K_i$  – кількість мінімальних рисунків в рапорті.

Коефіцієнт стиснення для підорнаменту рівний

$$K_{POR_i} = \frac{POR_{bi}}{POR_{ti}} \approx \frac{K_i \cdot K_{IT} Q_{\min b}}{Q_{\min t}} = K_i \cdot K_{IT} \cdot K_{\min},$$

де  $K_{IT}$  - кількість ітерацій (кількість рапортів).

Коефіцієнт стиснення для орнаменту рівний  $K_{OR} = \frac{\sum_{i=1}^n RP_{bi} \cdot K_{ITi}}{\sum_{i=1}^n RP_{ti}}$ .

Спроековано інформаційну модель побудови орнаменту, яка передбачає використання довідників мінімальних рисунків (необхідних для вибору варіантів формування підорнаментів орнаментистом). Розроблено інфологічну та даталогічну моделі бази даних забезпечують зручну підтримку довідників орнаментистом.

Завдяки використанню запропонованих алгоритмів синтезу орнаментів, досягнуто скорочення часу синтезу та суттєве зменшення об'єму пам'яті для їх зберігання.

У четвертому розділі описано розроблені редактор орнаментів та редактор вишивок, а також наведено результати синтезу і архівування складних орнаментальних зображень.

Редактор орнаментів дозволяє синтезувати складні зображення-орнаменти на основі аналітичних формул мінімального рисунку, підорнаменту та орнаменту. Разом з тим, розроблена програмна система дає можливість здійснювати архівування зображень шляхом виділення мінімального рисунку (формули в форматі \*.txt або зображення в форматі \*.bmp) та груп перетворень над ним, що здійснюється автоматизованим шляхом з участю людини-орнаментиста. Для наведеного на рис. 10 орнаменту об'єм пам'яті в форматі \*.txt (об'єм формули) становить 671 байт, а об'єм пам'яті в форматі \*.bmp рівний 315 Кб. Формула орнаменту має наступний вигляд (орнамент побудований в базисі операцій  $\{\sim, \oplus\}$ ):

$r4m(3; 4)/9/:$   $nd(8,0) \oplus b(4,10) \oplus a(3,10) \oplus (\sim b(3,10)) \oplus (\sim a(2,10)) \oplus b(2,10) \oplus$   
 $\oplus (\sim d(3,10)) \oplus b(4,10) \oplus c(8,10) \oplus (\sim nc(2,0)) \oplus (\sim a(5,10)) \oplus (\sim d(2,10)) \oplus a(2,10) \oplus$   
 $\oplus (\sim c(2,10)) \oplus (\sim d(2,10))$ : 81, 81.

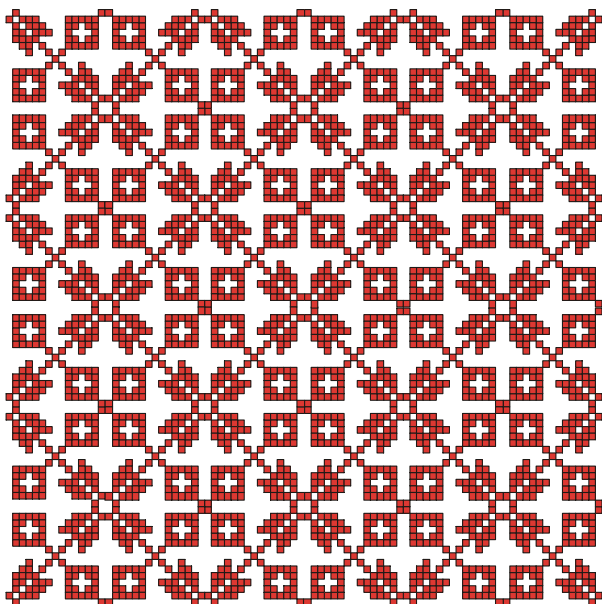


Рис. 10. Орнамент групи  $r4m$

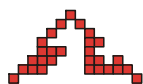
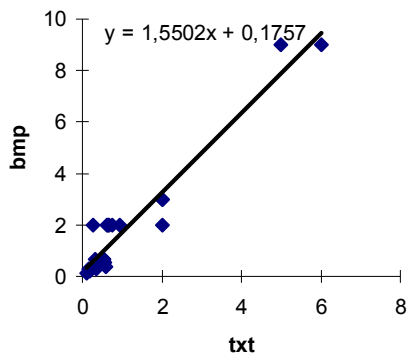


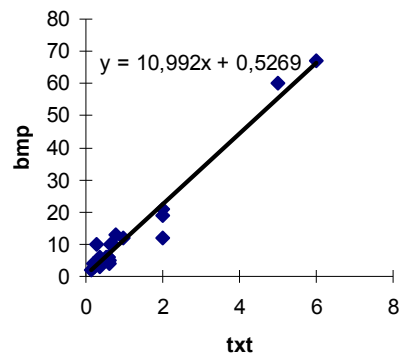
Рис. 11. Мінімальний рисунок

В останній формулі  $r4m$  – позначення групи; (3, 4) – координати першого елемента групи в площині з накладеною сіткою; 9 – кількість рапортів групи;  $nd(8,0) \oplus b(4,10) \oplus \dots$  – формула мінімального рисунку показаного на рис. 11, де перше число в дужках – код довжини непохідного елемента, друге – код кольору; 81, 81 – розмір сітки в пікселях по горизонталі і вертикалі, відповідно.

Залежність об'ємів пам'яті в форматах \*.bmp від \*.txt для мінімальних рисунків та підорнаментів приведені на рис 12.а і 12.б відповідно.



а)



б)

Рис. 12. Залежність об'ємів пам'яті (Кб) в форматі bmp від txt для мінімальних рисунків (а) та підорнаментів (на основі групи pg) (б)

Спроекований програмно-апаратний комплекс створення та редагування вишивок дозволяє синтезувати самостійно різні вишивки для швейних машин фірми «BROTHER» моделей «PE-100» і «Super Galaxi». В склад комплексу входить пакет прикладних програм (редактор вишивок) та пристрій вводу-виводу інформації (програматор) для репрограмуючого картриджу. Редактор вишивок виконує наступні функції: створення картинки для проєктованої вишивки в форматі \*.bmp; створення необхідних контурів для автоматичного заповнення областей стібками; автоматичне заповнення областей і обшивка контурів стібками із встановленими параметрами; редагування результатів автоматичного заповнення; ручне накладання стібків; створення шарів вишивки. Програматор призначений для виконання наступних функцій: читання та запис даних із картриджу; визначення серійного номеру картриджу; стирання даних із картриджу; шифрування та дешифрування даних; здійснення захисту даних.

Отже, розроблені редактори орнаментів, вишивок та програматор дозволяють, відповідно, синтезувати орнаменти, перетворювати їх в масив стібків та програмувати для автоматичного вишивання на тканині.

У додатках наведено приклади зображень українських народних вишивок на смузі та площині, елементарні рисунки орнаментів та їх формули побудови, синтезовані орнаменти з відповідними математичними описами, роздрук програм редактора орнаментів, відповідна інструкція користувача та матеріали впровадження.



## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ ТА ВИСНОВКИ

1. Показано фундаментальну роль поняття симетрії (в науці, техніці, мистецтві, побуті), розкрито її геометричну суть та приведено групи перетворень симетричних зображень для площини та смуги.
2. На основі поняття симетрії розглянуто українську народну вишивку, як об'єкт, наділений структурою, виділено структурні компоненти орнаменту та його характеристики. Показано, що перетворення над зображеннями-орнаментами (вишивками) утворюють 12 груп перетворень на площині та 7 груп перетворень на смузі, які входять до відповідних федорівських груп.
3. Проаналізовано основні методи опису, синтезу, моделювання та архівування складних зображень і програмні засоби їх реалізації, обгрунтовано застосування структурних методів при описі зображень-орнаментів.
4. Розроблено метод опису та моделювання складних симетричних зображень-орнаментів, який базується на алгоритмах формалізації груп перетворень, мові опису мінімальних рисунків та алгоритмах формалізації рапортів.
5. На основі запропонованої мови опису мінімального рисунку і груп перетворень здійснено моделювання складних зображень-орнаментів.
6. Використовуючи породжувальні перетворення, формалізовано групи перетворень на площині та смузі, що дало можливість змоделювати узагальнений алгоритм синтезу зображень-орнаментів.
7. На основі запропонованої мови опису зображень, розроблені алгоритми синтезу мінімального рисунку: здійснено моделювання мінімального рисунку в різних функціональних базисах, доведено теорему про мінімальний базис, показано приклади їх застосування до опису мінімальних зображень та спроектовано базу даних.
8. Запропоновано узагальнений алгоритм синтезу зображень-орнаментів, який базується на алгоритмах формування мінімальних рисунків (детермінованим та стохастичним способами) та алгоритмах формування груп перетворень (детермінованим способом); розроблено інформаційну модель побудови орнаментів, що дало можливість розробити редактор зображень-орнаментів та дано оцінку ефективності архівування симетричних зображень.
9. Розроблені редактори зображень-орнаментів та вишивок дозволили створювати нові та економно зберігати наявні зображення-орнаменти, автоматизувати процес створення та редагування вишивок для відтворення їх в натуральному вигляді (на тканині).

**СПИСОК ОСНОВНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ**

1. Березька К.М. Опис, аналіз та синтез складних зображень // Інформаційні технології і системи. - 1998. - Т.1, №1/2. - С.168-173.
2. Березька К.М., Карпінський М.П. Мова опису складних зображень // Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы. - 1997. - №1. - С.30-37.
3. Карпінський М.П., Березька К.М., Березький О.М. Генератор симетричних зображень // Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы. - 1998. - №1. - С.152-157.
4. Березька К.М. Структурний метод опису складних зображень (на прикладах української вишивки) // Вісник Державного університету «Львівська політехніка». Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології. - 1998. - № 351. - С. 172 - 177.
5. Березька К.М., Березький О.М. Автоматизоване генерування орнаментних зображень // Вісник Державного університету «Львівська політехніка». Прикладна математика. - 1998. - № 337. - С. 158 - 160.
6. Березька К.М. Алгоритми побудови груп перетворень // Вісник Львівського державного університету. Прикладна математика та інформатика. - 1999. - Вип.1.- С. 8-12.
7. Березька К.М. Мова опису складних зображень // Матер. 4-ої української конф. «Автоматика 97».- Т. III. - Черкаси, 1997. - С. 95.
8. Березька К.М., Березький О.М. Плоскі федорівські групи в складних симетричних зображеннях // Матер. Всеукраїнської наук. конф. «Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях». - Львів, 1997. - С. 11.
9. Березька К.М. Структурний метод опису складних симетричних зображень // Матер. Всеукраїнської наук. конф. «Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях». - Львів, 1997. - С. 10-11.
10. Березька К.М., Березький О.М. Рекурсивні алгоритми генерування складних зображень // Матер. Міжнар. наук. конф. «Сучасні проблеми математики». - Ч. 1. - Чернівці, 1998. - С.44-46.
11. Березька К.М. Формалізація груп перетворень // Матер. Всеукраїнської наук. конф. «Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях». - Львів, 1999. - С. 6-7.
12. Березька К.М., Березький О.М. Програмно-апаратний комплекс створення вишивок // Матер. Всеукраїнської наук. конф. «Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях». - Львів, 1999. - С. 7.

## АНОТАЦІЯ

**Березька К.М. Моделювання та синтез складних зображень симетричної структури.** – Рукопис.

*Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02–математичне моделювання та обчислювальні методи.* – Державний науково-дослідний інститут інформаційної інфраструктури, Львів, 2000.

Дисертація присвячена опису, моделюванню та синтезу складних симетричних зображень. Розроблено метод опису та моделювання складних зображень, який базується на запропонованій мові опису структурних частин зображень-орнаментів та розроблених алгоритмах синтезу та моделювання груп перетворень.

Досліджено властивості операцій наведеної мови опису. Запропоновано алгоритми синтезу та моделювання груп перетворень зображень на основі осьових симетрій. Отримано аналітичні вирази для коефіцієнтів стиснення зображень, побудованих на основі структурного методу.

На основі розроблених алгоритмів спроектовано та впроваджено редактори орнаментів та вишивок, наведено результати генерування та архівації орнаментів.

*Ключові слова:* складне симетричне зображення, зображення-орнамент, симетрія, математичне моделювання, синтез, мова опису, архівація.

**Березская Е.Н. Моделирование и синтез сложных изображений симметричной структуры.** – Рукопись.

*Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы.* – Государственный научно-исследовательский институт информационной инфраструктуры, Львов, 2000.

Диссертация посвящена описанию, моделированию и синтезу сложных симметричных изображений.

Целью диссертационного исследования является разработка метода описания и моделирования сложных симметричных изображений и создание на его основе редактора орнаментов. Для достижения данной цели были решены следующие задачи:

- розробтан метод описания и моделирования сложных симметричных изображений;
- розробтан язык описания структурных частей изображений-орнаментов;
- розробтаны алгоритмы синтеза сложных изображений, со симметричной структурой;
- программно реализованы и внедрены редакторы орнаментов и вышивок.

В работе показана фундаментальная роль симметрии в разных сферах жизнедеятельности человека (в науке, технике, искусстве, быту), раскрыта ее геометрическая сущность, предложено классификацию украинской народной

вышивки и сделан анализ существующих методов описания и синтеза сложных изображений. Обосновано использования структурных методов описания сложных изображений.

В диссертации доказано, что преобразования над изображениями вышивки (вышивка - объект, наделенный структурой) образуют 12 групп преобразований на плоскости и 7 групп преобразований на полосе, которые относятся к соответствующим федоровским группам.

Предложен метод описания и моделирования сложных симметричных изображений, который базируется на разработанном языке описания минимальных рисунков и алгоритмах синтеза подорнаментов (на основе синтеза групп преобразований). В основу построения языка описания сложных изображений положена бесконтекстная грамматика, построенная путем выделения неприводных элементов и использования соответствующих правил их соединения. Исследованы свойства алгебры языка описания изображений.

Предложен рекурсивный подход к описанию групп преобразований, на основе которого формализованы раппорты групп.

Разработаны алгоритмы синтеза групп преобразований на плоскости и полосе путем использования композиции порождающих преобразований (смещение, поворот, скользящее и зеркальное отражения).

Получены алгоритмы синтеза минимальных рисунков в разных базисах операций. Показано, что вследствие минимизации числа операций над неприводными элементами синтез минимальных рисунков можно производить в полном и минимальном базисах, в результате чего доказана теорема о минимальном базисе. Разработана информационная модель построения орнаментов, которая предусматривает использование справочников минимальных рисунков.

Предложен обобщенный алгоритм синтеза орнаментальных изображений, который состоит из следующих этапов: формирование минимального рисунка и формирование групп преобразований. Синтез минимального рисунка происходит в одном случае на основе его алгебраической формулы описания, в другом – путем использования базы данных типовых для данной орнаментной области минимальных рисунков. При этом возможны два способа формирования минимальных рисунков: детерминированный и стохастический. Использование детерминированного способа синтеза требует полного формализованного описания минимального рисунка, стохастический способ формирует его по законам распределения дискретных случайных величин. Синтез групп преобразований происходит тремя способами: через порождающие преобразования, на основе осевых симметрий, и рекурсивным способом.

Дана оценка коэффициентов сжатия симметричных изображений для разных вариантов (в \*.bmp и \*.txt форматах) сохранения в памяти ЭВМ составляющих орнамента.

На основе разработанного метода программно реализован редактор орнаментов, который дает возможность, используя аналитические формулы минимальных рисунков, подорнаментов и орнаментов, синтезировать сложные орнаментные изображения. Вместе с тем созданная программная система дает возможность проводить архивацию изображений путем выделения минимального рисунка и групп преобразований над ним.

Спроектированный программно-аппаратный комплекс создания и редактирования вышивок дает возможность самостоятельно синтезировать различные вышивки для швейных машин фирмы «BROTHER» моделей «PE-100» и «Super Galaxi». В состав комплекса входит пакет прикладных программ (редактор вышивок) и устройство ввода-вывода информации (программатор) для репрограммируемого картриджа.

Таким образом, разработанные редакторы орнаментов, вышивок и программатор дают возможность, соответственно, синтезировать орнаменты, преобразовывать их в массив стежков и программировать для автоматического вышивания на ткани.

*Ключевые слова:* сложное симметричное изображение, изображение-орнамент, симметрия, математическое моделирование, синтез, язык описания, архивация.

**Berezka K.M. Modelling and synthesis of complex pictures of symmetrical structure.** - Manuscript.

*Dissertation for the candidate degree of technical sciences in speciality 01.05.02 - mathematical modeling and numerical methods.* - The State Scientific and Research Institute of Information Infrastructure, Lviv, 2000.

The dissertation is dedicated to the description, modeling and synthesis of complex symmetrical pictures. Developed method of depicting and modeling of complex pictures is based on the suggested language for depicting of structural parts of ornamental pictures and created algorithms of synthesis and modeling the transformation groups.

The properties of algebra of the given language are investigated. Algorithms of synthesis and modeling of transformation groups of pictures on the basis of axial symmetry are suggested. Analytical expressions for coefficients of compressing pictures built on the basis of structural method were obtained. Editors of ornaments and embroideries are projected and introduced on the basis of developed algorithms.

The results of generating and archivation of ornaments are given.

*Key words:* complex symmetrical pictures, ornamental picture, symmetry, математическое моделирование, synthesis, the language of description, archivation.