

АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

МАРТИНЮК ОЛЕСЯ МИРОНІВНА

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ  
ДЛЯ ЗЛІЧЕННИХ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ  
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

01.01.02 - диференціальні рівняння

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття вченого ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

КИЇВ - 1993

Робота виконана у відділі звичайних диференціальних рівнянь  
Інституту математики АН України.

Науковий керівник : доктор фізико-математичних наук  
РОНТО М.Я.

Офіційні опоненти : доктор фізико-математичних наук  
ТЕПЛИНСЬКИЙ В.В.

кандидат фізико-математичних наук  
РОГОВЧЕНКО Ю.В.

Провідна установа : Київський державний університет  
ім. Т.Г.Шевченка

Захист відбудеться "26" жовтня 1993 р. в 15 годин  
на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.02 при Інституті ма-  
тематики АН України за адресою :  
252601, Київ-4, ГСП, вул.Терещківська,3.

В дисертації можна ознайомитися в бібліотеці Інституту.

Автореферат розіслано "12" вересня 1993 р.

Генераль секретар  
спеціалізованої ради

ЛУЧКА А.Ю.

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Теорія лнійних коливань та загально-  
го виду періодичних крайових задач і сьогодні залишається одним  
з розділів якісної теорії диференціальних рівнянь та прикладної  
математики, що найбільш інтенсивно розвивається. Це викликано,  
з одного боку, запитами практики, а з іншого – необхідністю по-  
дальшого розвитку різних питань теоретичного характеру. В те-  
орії періодичних розв'язків широко розроблені різні методи, по-  
в'язані з дослідженням існування та єдиності розв'язку, його  
стійкості, а також з наближеними методами побудови розв'язків.

Ці питання широко розглядалися у фундаментальних працях  
Ю.О.Митропольського, А.М.Самойленка, М.О.Перестика, Г.М.Вайнік-  
ко, В.П.Максимова, М.В.Авбалова, І.Т.Кігурадзе, Д.І.Мартинюка,  
М.П.Єругіна, М.І.Шкіля, Є.О.Гребенікова, Ю.О.Рябова, А.І.Перо-  
ва, О.А.Войчука та в роботах інших авторів.

Важливою обставиною, яка визначає складність аналізу крайових  
задач, є розмірність, тобто чи будуть невідомі функції, які  
входять в рівняння та крайові умови, елементами скінченновимір-  
ного чи нескінченновимірного простору. Ряд практичних питань з  
різних областей математики і математичної фізики потребують  
розгляду та вивчення не скінченновимірних, а звичайних систем  
звичайних диференціальних рівнянь, що підпорядковані певно-  
го виду крайовим умовам. Такі системи з'являються при вивченні  
коливань стержнів, балок, коли для аналізу відповідних матема-  
тичних моделей у вигляді лінійних диференціальних рівнянь в ча-  
стинних похідних застосовується метод поділу змінних Фур'є.

Ясно, що теоретична та практична цінність полягає у вивченні  
звичайних систем загального виду крайових задач, в тому числі і  
періодичних. При цьому доцільно розвивати такі методи, які були  
б придатними як для встановлення існування розв'язків, так і  
практичної побудови розв'язків звичайних систем звичайних дифе-  
ренціальних рівнянь. Хорошу перспективу на цьому шляху відіграє  
група чисельно-аналітичних методів, зокрема, чисельно-  
аналітичний метод послідовних наближень А.М.Самойленка. Багато

розробок цього методу за останні роки з'явилося в роботах А.М.Самойленка, М.П.Ронто, Ю.О.Митропольського, Д.І.Мартинюка, Б.П.Ткача, М.О.Перестяка, Ю.В.Теплинського, С.І.Трофимчука, В.А.Ронто, Ю.В.Роговченко, О.Д.Нуржанова, Ю.Д.Шлапака, С.В.Мартинюка, О.П.Трофимчук, які підтвердили його універсальність для різноманітних задач звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь вищих порядків, рівнянь із запізненням, злічених систем першого порядку, рівнянь з імпульсною дією, рівнянь в частинних похідних, рівнянь з двоточковими та загального виду крайовими умовами.

Але, не дивлячись на досить велику кількість робіт з крайових задачах для звичайних диференціальних рівнянь, питання існування та побудови розв'язків крайових задач для злічених систем нелінійних диференціальних рівнянь, побудови вкорочених систем диференціальних рівнянь і вивчення їх зв'язку з відповідними зліченими або розглянуті не в повній мірі, або не розглядалися взагалі. Тому серед нерозв'язаних питань теорії крайових задач для вказаних систем звичайних диференціальних рівнянь важливе місце займає проблема поширення та дальшого розвитку ефективних і практично зручних для реалізації методів, якими володіє зараз теорія крайових задач.

Метод роботи є узагальнення чисельно - аналітичного методу послідовних наближень для дослідження періодичних розв'язків систем нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку та розв'язків двоточкових крайових задач для злічених систем диференціальних рівнянь нормального виду, а також дослідження близькості розв'язків зліченої та вкороченої систем.

Методи досліджень базуються на розробленому А.М.Самойленком підході до дослідження розв'язків диференціальних рівнянь з допомогою чисельно-аналітичного методу послідовних наближень.

#### Наукова новизна результатів роботи :

обґрунтовано чисельно-аналітичний метод послідовних наближень для злічених систем нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку нормального виду з періодичними крайовими умо-

вами;

- розвинута методика побудови послідовних наближень для злічених систем нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку з двоточковими крайовими умовами;

- вказано алгоритм побудови вкороченої системи диференціальних рівнянь та встановлено зв'язок її розв'язку з розв'язком відповідної їй зліченої системи у випадку крайових умов, в тому числі періодичних.

Теоретична та практична цінність дисертації визначається тим, що одержані результати узагальнюють та доповнюють відповідні дослідження періодичних та крайових задачах. Розроблена методика дослідження розв'язків крайових задач для злічених систем нелінійних диференціальних рівнянь може бути перенесена на системи вищих порядків. Запропоновані алгоритми можуть бути використані при розв'язуванні задач фізики, техніки, що зводяться до нелінійних періодичних та крайових задач.

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися на семінарі відділу звичайних диференціальних рівнянь Інституту математики АН України (керівник - член-кореспондент АН України А.М.Самойленко), на школах-семінарах: "Нелінійні еволюційні рівняння в прикладних задачах" (16-25 вересня 1990 року, Кабардино-Балкарський державний університет, с. Приельбрусся), "Розривні динамічні системи" (17-20 вересня 1991 року, Ужгородський державний університет), "Нелінійні задачі математичної фізики та їх застосування" (2-9 жовтня 1991 року, Самаркандський державний університет ім. А.Навої), "Нелінійні задачі математичної фізики та їх застосування" (5-12 жовтня 1992 року, будинок творчості вчених, с.Кацивелі, Крим).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1-7].

Об'єм та структура роботи. Дисертація складається з вступу,

трьох глав, закінчення та списку цитованої літератури, що містить 101 найменування. Об'єм роботи складає 115 сторінок машинописного тексту.

### ЗМІСТ РОБОТИ.

У вступі обґрунтовується актуальність теми дисертаційної роботи, формулюється мета досліджень, коротко аналізуються основні праці, що відносяться до теми дисертації та наводяться анотація основних одержаних результатів.

Перша глава, що включає в себе §§1-5, присвячена узагальненню та поширенню чисельно-аналітичного методу послідовних наближень на дослідження періодичних розв'язків злічених систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку виду

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}), \quad (1)$$

підпорядковану періодичним крайовим умовам

$$x(0) = x(T), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T). \quad (2)$$

Тут  $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$  - точка простору  $\mathbb{R}^n$  обмеженої числової послідовності з нормою  $\|x\| = \sup_n |x_n|$ ,  $f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x), \dots)$  - неперервна, періодична по  $t$  з періодом  $T$  функція.

Права частина рівняння (1) визначена в області

$$(t, x, \dot{x}) \in (-\infty, \infty) \times D_1 \times D_2, \quad (3)$$

де  $D_1, D_2$  - обмежені, замкнуті множини з  $\mathbb{R}^n$ .

В області (3) функція  $f(t, x, \dot{x})$  обмежена зліченим вектором  $M = (M_1, \dots, M_n, \dots) \in \mathbb{R}^n$  та задовольняє умову Ліпшица із зліченими матрицями  $K_1, K_2$  з невід'ємними елементами

$$\begin{aligned} |f(t, x, y)| &\leq M, \\ |f(t, x, y) - f(t, x', y')| &\leq K_1 |x - x'| + K_2 |y - y'|, \\ t \in (-\infty, \infty), \quad x, x' \in D_1, \quad y, y' \in D_2. \end{aligned} \quad (4)$$

де  $|f(t, x, y)| = (|f_1(t, x, y)|, \dots, |f_n(t, x, y)|, \dots)$  і нерівності між нескінченними векторами в (4) розуміємо покомпонентно, і, крім того:

1) множина  $D_\rho$  точок  $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}, \dots) \in \mathbb{R}^n$ , що розміщені в області  $D_1$  разом із своїм  $\rho = \frac{T}{4} M$ -околом, непорожня і, крім цього, множина  $D_\gamma$ , утворена  $\gamma = \frac{5}{6} TM$ -околом нульового вектора простору  $\mathbb{R}^n$ , лежить в області  $D_2$ :

$$D_\rho \neq \emptyset, \quad D_\gamma \subset D_2; \quad (5)$$

2) оператор, що утворений матрицею

$$Q_0 = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{4} K_1 & \frac{T^2}{4} K_2 \\ \frac{5}{6} TK_1 & \frac{5}{6} TK_2 \end{bmatrix},$$

є цілком регулярним, тобто

$$\|Q_0\| \leq g_0 < 1. \quad (6)$$

В §1 вводяться лінійні оператори  $L, S, L^2$  вигляду

$$Lf(t) = \int_0^t (f(s) - Sf(t)) ds, \quad Sf(t) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt,$$

$$L^2 f(t) = \int_0^t \left[ \int_0^t (f(s) - Sf(t)) ds - S \left( \int_0^t (f(s) - Sf(t)) ds \right) \right] dt.$$

З їх допомогою будується послідовність  $T$ -періодичних функцій  $x_m(t, x_0)$ , які задовольняють періодичні крайові умови (2) при довільному значенні параметра  $x_0 \in D_\rho$

$$x_m(t, x_0) = x_0 + L^2 f(t, x_{m-1}(t, x_0), \dot{x}_{m-1}(t, x_0)). \quad (7)$$

$$m = 1, 2, \dots, \quad x_0(t, x_0) = x_0 \in D_\rho.$$

Доведена рівномірна збіжність послідовності функцій (7) до граничної функції  $x^*(t, x_0)$ , яка буде розв'язком збуреної по від-

ношенню до (1), (2) деякої Т-періодичної крайової задачі.

Має місце наступне твердження.

**ТЕОРЕМА 1.** Нехай права частина  $f(t, x, y)$  зліченої системи диференціальних рівнянь визначена, неперервна, періодична по  $t$  в періодом  $T$  в області (3) та приймає значення в просторі  $M$ , а також виконуються умови (4)-(6).

Тоді послідовність функцій  $x_m(t, x_0)$  виду (7), яка залежить від  $x_0$  як від параметра та задовольняє періодичні крайові умови (2), рівномірно збігається при  $m \rightarrow \infty$  разом з похідними  $\dot{x}_m(t, x_0)$  відносно області

$$(t, x_0) \in [0, T] \times D_p$$

відповідно до граничних функцій  $x^*(t, x_0)$ ,  $\dot{x}^*(t, x_0)$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, x_0) = x^*(t, x_0), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \dot{x}_m(t, x_0) = \dot{x}^*(t, x_0).$$

При цьому  $x^*(t, x_0)$ , що задовольняє при  $t=0$  початкові умови

$$x(0) = x^*(0, x_0) = x_0,$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}^*(0, x_0) = -S(Lf(t, x^*(t, x_0), \dot{x}^*(t, x_0)))$$

і одночасно Т-періодичні крайові умови (2), є розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = x_0 + L^2 f(t, x(t), \dot{x}(t)),$$

тобто розв'язком крайової задачі

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}) - S(f(t, x^*(t, x_0), \dot{x}^*(t, x_0))),$$

$$x(0) = x(T) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T) = -S(Lf(t, x^*(t, x_0), \dot{x}^*(t, x_0))).$$

Крім цього, справедливі наступні оцінки похибок:

$$\|x_m(t, x_0) - x^*(t, x_0)\| \leq \frac{T^2}{4} \frac{q^m}{1-q} \|M\|,$$

$$\|\dot{x}_m(t, x_0) - \dot{x}^*(t, x_0)\| \leq \frac{5}{6} T \frac{q^m}{1-q} \|M\|, \quad m=1, 2, \dots$$

де

$$\|x(t)\| = \sup_{t \in [0, T]} \max |x_n(t)|, \quad \|Q\| = \left\| \frac{T^2}{4} K_1 + \frac{5}{6} T K_2 \right\| < 1.$$

В §2 встановлено, що гранична функція  $x^*(t, x_0)$  послідовності (7) буде розв'язком Т-періодичної крайової задачі (1), (2) тоді і тільки тоді, коли  $x_0 \in D_p$  буде коренем визначального рівняння

$$\Delta(x_0) = S(f(t, x^*(t, x_0), \dot{x}^*(t, x_0))). \quad (8)$$

Тут же вивчається спеціальна задача управління, яка дозволяє побудувати збурене рівняння по відношенню до рівняння (1), для якого розв'язок деякої задачі Коші буде в той же час Т-періодичним розв'язком побудованого рівняння.

**ТЕОРЕМА 2.** Нехай виконані умови теореми 1. Тоді розв'язок  $x = x^*(t)$  задачі Коші

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}), \quad x(0) = \dot{x}_0,$$

$$\dot{x}(0) = -S(Lf(t, x^*(t, x_0), \dot{x}^*(t, x_0))) = y_0.$$

де  $x^*(t, x_0)$  - гранична функція послідовності (7), співпадає з періодичним розв'язком крайової задачі (1) - (3) тоді і тільки тоді, коли початкове значення  $x_0$  є розв'язком визначального рівняння

$$\Delta(x_0) = 0 = S(f(t, x^*(t, x_0), \dot{x}^*(t, x_0))).$$

При цьому

$$x^*(t) = x^*(t, x_0),$$

і при всіх  $m = 1, 2, \dots$  для відхилення точного Т-періодичного розв'язку  $x = x^*(t) = x^*(t, x_0)$  зліченої системи (1) від її наближеного Т-періодичного розв'язку  $x_m(t, x_0)$  виду (7), а та-

мож для відповідних похідних справедливі оцінки

$$\|x^*(t) - x_m(t, x_0)\| \leq \frac{T^2}{4} \frac{q^m}{1-q} \|M\|,$$

$$\|\dot{x}^*(t) - \dot{x}_m(t, x_0)\| \leq \frac{5}{6} T \frac{q^m}{1-q} \|M\|,$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

В §3 вводиться у розгляд наближене визначальне рівняння виду

$$\Delta_m(x_0) = S(f(t, x_m(t, x_0), \dot{x}_m(t, x_0))),$$

яке відрізняється від точного визначального рівняння (8) тим, що замість  $x^*(t, x_0)$  в ньому фігурує  $m$ -те наближення  $x_m(t, x_0)$ , яке на практиці завжди можна побудувати.

Доведено твердження, яке дає достатні умови існування  $T$ -періодичного розв'язку рівняння (1).

В §4 знайдені необхідні умови для знаходження розв'язку  $T$ -періодичної крайової задачі (1), (2), а саме умови, необхідні для того, щоб деяка підобласть області  $D_p$  містила б точку  $x_0^*$ , яка при  $t=0$  визначає початкове значення  $x^*(0) = x_0^*$  точного розв'язку  $x^*(t)$  розглянутої періодичної задачі. При цьому точне початкове значення для похідної в точці  $t=0$  задається формулою

$$\dot{x}(0) = -S(Lf(t, x^*(0, x_0^*), \dot{x}^*(0, x_0^*))).$$

**ТЕОРЕМА 3.** Припустимо, що задача (1)-(3), задовольняє умови (4)-(6).

Тоді для того, щоб деяка область  $D_A \subset D_p$  містила б точку  $x_0 = x_0^*$ , яка при  $t=0$  визначає початкове значення  $x^*(0) = x_0$  періодичного розв'язку  $x = x^*(t)$  задачі (1) - (3), необхідно, щоб для

всіх  $m$  і довільного  $\bar{x}_0 \in D_A$  виконувалася нерівність

$$\|\Delta_m(\bar{x}_0)\| \leq \sup_{x_0 \in D_A} \left\{ \left(1 + \frac{q}{1-q}\right) \|K_1\| \|\bar{x}_0 - x_0\| + \left\| \frac{T^2}{6} K_1 + \frac{2T}{3} K_2 \right\| \frac{q}{1-q} \|M\| \right\}.$$

Тут же викладено чисельний алгоритм наближеного вибору початкової точки періодичного розв'язку.

В §5 міститься приклад, на якому ілюструються основні теоретичні положення. Розглядається зліченна нелінійна система другого порядку з періодом  $T=p$ . Побудовано в аналітичному вигляді перші наближення. Чисельно знайдено наближене початкове значення  $p$ -періодичного розв'язку по коренях наближеного визначального рівняння  $\Delta_0(x_0) = 0$ .

У другій главі вивчається двоточкова крайова задача для зліченної системи диференціальних рівнянь нормального вигляду першого порядку, а саме:

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{9}$$

$$Ax(0) + Cx(T) = d, \det C \neq 0, \tag{10}$$

де  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ,  $d = (d_1, d_2, \dots, d_n, \dots)$  - точки простору  $\mathbb{R}$  обмеженої числової послідовності з нормою  $\|x\| = \sup_n |x_n|$ ,  $\|d\| = \sup_n |d_n|$ . Функція  $f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x), \dots)$  неперервна по  $t$  в області

$$(t, x) \in (0, T) \cdot D, \tag{11}$$

яка приймає значення в просторі  $\mathbb{R}$ ,  $D$  - обмежена, замкнута множина з  $\mathbb{R}$ . Матриці  $A, C$  зліченні, причому для  $C$  існує обернена матриця  $C^{-1}$ .

Припустимо, що права частина рівняння (9) задовольняє умову обмеженості зліченим вектором  $M = (M_1, M_2, \dots, M_n, \dots)$ ,  $M_i > 0$  і умову Ліпшица із зліченною матрицею  $K$  з невід'ємними

елементами

$$|f(t, x, y)| \leq M,$$

$$|f(t, x') - f(t, x'')| \leq K|x' - x''|, \tag{12}$$

$$t \in (0, T), x', x'' \in D,$$

де  $|f(t, x)| = (|f_1(t, x)|, \dots, |f_n(t, x)|, \dots)$  і нерівність між нескінченно-нормованими векторами в (12) розуміємо покомпонентно.

Серед двоточкових крайових задач (9), (10) виділимо клас таких, для яких параметри  $M, K, T, A, G, d$ , а також область визначення (11) задовольняють деякі додаткові умови, а саме:

1) множина  $D_\rho$  точок  $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}, \dots) \in \mathbb{R}^n$ , що містяться в області  $D$ , разом із своїм  $\rho$ -околом, де  $\rho = \frac{T}{2} M + \rho_1$ ,  $\rho_1 = |G^{-1}d - (G^{-1}A + B)x_0|$ , непорожня:

$$D_\rho \neq \emptyset; \tag{13}$$

2) оператор, утворений матрицею

$$Q_0 = \frac{T}{\pi} \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1n} & \dots \\ K_{21} & \dots & K_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & \dots & K_{nn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

є цілком регулярним, тобто

$$|Q_0| \leq g < 1. \tag{14}$$

В §6 вводиться у розгляд послідовність функцій  $x_m(t, x_0)$ , що залежить від вліченного параметра  $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n}, \dots)$  ви-

гляду

$$x_m(t, x_0) = x_0 + Lf(t, x_{m-1}(t, x_0)) + \frac{t}{T} \left[ G^{-1}d - (G^{-1}A + B)x_0 \right]. \tag{15}$$

Встановлена рівномірна збіжність цієї послідовності в нормі простору обмежених числових послідовностей  $\mathbb{R}$  до граничної функції  $x^*(t, x_0)$ .

Доведено, що функція  $x^*(t, x_0)$  буде одночасно розв'язком "збуреної" задачі Коші

$$\dot{x} = f(t, x) + \Delta(x_0),$$

$$x(0) = x_0,$$

і збуреної крайової задачі

$$\dot{x} = f(t, x) + \Delta(x_0),$$

$$Ax(0) + Cx(T) = d,$$

де збурена функція

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T} \left[ G^{-1}d - (G^{-1}A + B)x_0 \right] - \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x^*(t, x_0)) dt. \tag{16}$$

Оцінено відхилення  $x^*(t, x_0)$  від  $x_m(t, x_0)$  для всіх  $m=1, 2, \dots$

В §7 розглянуто зв'язок існування розв'язку заданої крайової задачі (9), (10) з існуванням нулів визначальної функції  $\Delta(x_0)$  вигляду (16). Необхідні і достатні умови того, щоб гранична функція послідовності (15) була розв'язком заданої крайової задачі (9), (10), дає наступне твердження.

**ТЕОРЕМА 4.** Нехай права частина  $f(t, x)$  системи (9) визначена, неперервна в області (11) і виконуються умови (12)-(14). Тоді для того, щоб розв'язок  $x = x^*(t)$  задачі Коші

$$\dot{x} = f(t, x),$$

$$x(0) = x_0,$$

був і розв'язком крайової задачі (9), (10), необхідно і достат-

ньо, щоб початкове значення  $x_0$  було розв'язком визначального рівняння

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T} \left[ G^{-1}d - (G^{-1}A + B)x_0 \right] - \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x^*(t, x_0)) dt = 0. \quad (17)$$

Крім цього, в даному випадку  $x^*(t) = x^*(t, x_0)$  і при всіх  $m=1, 2, 3, \dots$  для відхилення точного розв'язку  $x = x^*(t) = \dot{x}^*(t, x_0)$  крайової задачі (9), (10) від її наближеного  $x_m(t, x_0)$  вигляду (15) має місце нерівність

$$|x^*(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leq \frac{T\pi}{6} \left\{ \frac{q^m}{1-q} |\alpha| + |\beta| \frac{q^{m-1}}{1-q} |\beta| \right\}.$$

В §8 існування розв'язку крайової задачі (9), (10) досліджується за коренями наближеного визначального рівняння вигляду

$$\Delta_m(x_0) = \frac{1}{T} \left[ G^{-1}d - (G^{-1}A + B)x_0 - \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x_m(t, x_0)) \right],$$

яке одержуємо в (17), але замість  $x^*(t, x_0)$  в ньому фігурує  $x_m(t, x_0)$ .

Знайдено достатні умови існування розв'язків крайової задачі (9), (10).

В наступному параграфі задані необхідні умови того, щоб деяка підобласть області визначення правої частини містила точку  $x_0^*$ , яка при  $t=0$  задає початкове значення  $x^*(0) = x_0^*$  точного розв'язку  $x^*(t)$  крайової задачі (9), (10).

Ілюстративний приклад, що розглядається в § 10, показує застосування вище викладених теоретичних положень. Розглядається зліченна крайова задача першого порядку, для якої чисельно знайдено початкове значення та побудовано перше наближення розв'язку в аналітичному вигляді.

В третю главу включені результати, які стосуються до дослідження зв'язку розв'язків зліченої системи диференціальних

рівнянь в розв'язками відповідних їм вкорочених систем.

Спочатку в § 11 близькість розв'язків зліченої

$$\dot{x} = f(t, x) + \Delta(x_0), \quad (18)$$

$$x(0) = x_0$$

і вкороченої

$$\frac{dv}{dt} = f^1(t, v+0) + \Delta^1(y_0+0), \quad (19)$$

$$v(0) = y_0$$

систем досліджується для збуреної задачі Коші у випадку системи диференціальних рівнянь нормального виду. Тут

$$f^1(t, v+0) = P_n f(t, v+0) = (f_1(t, v+0), \dots, f_n(t, v+0), 0, \dots),$$

де  $P_n$  - проектор, який нескінченному вектору  $x = (x_1, \dots, x_n,$

$x_{n+1}, \dots)$  ставить у відповідність вектор

$$P_n x = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots).$$

Зазначимо, що функція  $f(t, x)$  задовольняє введену у розгляд К.П.Персидським посилену умову Коші відносно змінної  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots)$ .

Справедливе наступне твердження про близькість розв'язків початкових задач для зліченої (18) та вкороченої (19) систем диференціальних рівнянь.

**ТЕОРЕМА 5.** Нехай права частина  $f(t, x)$  зліченої системи диференціальних рівнянь (18) в області  $(t, x) \in (0, +\infty) \times D$  і функція  $\Delta(x_0)$  в області  $x_0 \in D_0$  задовольняють умову Ліпшица і при  $n \rightarrow \infty$   $K_{22} \rightarrow 0, L_{2n} \rightarrow 0$ , тобто функції  $f(t, x)$  і  $\Delta(x_0)$  задовольняють посилену умову Коші.

Тоді для довільного розв'язку рівняння (18) з початковим значенням  $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}, \dots)$  таким, що  $\|x_0\| =$

$= \|(0, \dots, 0, x_{on+1}, x_{on+2}, \dots)\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , для відхилення розв'язку  $y(t)$  зліченої системи (18) від розв'язку  $v(t)$  вкороченої системи (19) має місце оцінка

$$\|y(t) - v(t)\| \leq \frac{(\varphi_2(t)\lambda_2 - \varphi_1(t)\lambda_1)\|z_0\|K_{2n}}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{\varphi_2(t) - \varphi_1(t)}{\lambda_2 - \lambda_1} q_n K_{2n}$$

$$+ \frac{\varphi_1(t)(\lambda_2 - K_{1n}) - \varphi_2(t)(\lambda_1 - K_{1n})}{\lambda_2 - \lambda_1} L_{2n}\|z_0\|.$$

де

$$\bar{q}_n = q_n + \gamma_n, \quad \|r^2(t, v(t) + 0)\| \leq q_n, \quad \|\Delta^2(y_0 + z_0)\| \leq \gamma_n,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(K_{1n} + K_{2n}) \pm \sqrt{(K_{1n} - K_{2n})^2 + 4K_{2n}K_{3n}}}{2}$$

і при  $n \rightarrow \infty$  справедливе граничне твердження

$$\|y(t) - v(t)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

В наступному параграфі розглядається зв'язок розв'язків зліченої крайової задачі (9), (10) з розв'язком вкороченої крайової задачі.

Основні положення дисертації опубліковані в роботах:

1. Ройто Н.М., Мартынюк О.М. Исследование периодических решений счетных систем второго порядка // Укр. мат. журн. - 1991. - 44, № 1. - С. 83-93.
2. Мартынюк О.М. О взаимосвязи решений счетных и "укороченных"

систем дифференциальных уравнений для одной начальной задачи // Аналитические методы исследования нелинейных дифференциальных систем. - Киев : Ин-т математики АН Украины, 1992. - С. 45-52.

3. Мартынюк О.М. О решении двухточечной краевой задачи для счетных систем // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. - Киев : Ин-т математики АН Украины, 1992. - С. 68-70.
4. Мартынюк О.М. О решении краевой задачи для счетных систем дифференциальных уравнений // Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики - вторые Боголюбовские чтения. - Киев : Ин-т математики АН Украины, 1992. - С. 96-97.
5. Мартынюк О.М. О численно-аналитическом методе для счетных периодических систем второго порядка // Нелинейные проблемы теории дифференциальных уравнений. - Киев : Ин-т математики АН УССР, 1991. - С. 49-59.
6. Мартынюк О.М. Использование численно-аналитического метода применительно к счетным системам дифференциальных уравнений // Школа-семинар "Разрывные динамические системы", Ужгород, 17-20 сент. 1991 г.: Тез. докл. - Киев: О-во "Знание", 1991. - С. 39-40.
7. Мартынюк О.М., Мартынюк С.В. Исследование периодических решений счетных систем дифференциальных уравнений второго порядка // Нелинейные эволюционные уравнения в прикладных задачах. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. - С. 88-90.

---

Підп. до друку 19.07.93. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс. друк.  
Ум. друк. арк. 1,16. Ум. фарбо-відб. 1,16. Обл.-вид. арк. 0,75.  
Тираж 100 пр. Зам? Безкоштовно.

---

Віддруковано в Інституті математики АН України  
252601 Київ 4, ГОП, вул. Терещківська, 3