computing@computingonline.net
www.computingonline.net

ISSN 1727-6209
International Journal of Computing

ДОСЛІДЖЕННЯ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ В ЗАДАЧАХ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ІНТЕРВАЛЬНОГО РІЗНИЦЕВОГО ОПЕРАТОРА ІЗ ЗАДАНОЮ ТОЧНІСТЮ

Микола Дивак [1)], Тарас Дивак [1)], Петро Стахів [2)]

[1)] Тернопільський національний економічний університет
вул. Юності, 9, Тернопіль 46020 Україна
mdy@tneu.edu.ua, dtaras80@mail.ru
[2)] Національний університет "Львівська політехніка"
вул. Ст. Бандери, 12, Львів 79013 Україна
e-mail: spg@polynet.lviv.ua

Резюме: *у статті розглядаються проблеми параметричної ідентифікації нелінійного різницевого оператора на основі інтервальних даних. Показано, що, формально, ця проблема є задачею пошуку хоча б одного розв'язку інтервальної системи нелінійних алгебраїчних рівнянь. Запропоновано і обґрунтовано для вирішення цієї задачі використання методів випадкового пошуку мінімуму нелінійної чисельно заданої функції, властивості якої досліджуються в даній роботі.*

Ключові слова: *параметрична ідентифікація, різницевий оператор, інтервальний аналіз, методи випадкового пошуку.*

RESEARCH OF OBJECTIVE FUNCTION IN PARAMETRIC IDENTIFICATION TASKS FOR INTERVAL DIFFERENCE OPERATOR WITH REQUIRED ACCURACY

Mykola Dyvak [1)], Taras Dyvak [1)], Petro Stakhiv [2)]

[1)] Ternopil National Economic University
9 Yunosti St., Ternopil 46020 Ukraine
mdy@tneu.edu.ua, dtaras80@mail.ru
[2)] National University "Lviv Polytechnics"
12 St. Bandera St., Lviv 79013 Ukraine
e-mail: spg@polynet.lviv.ua

Abstract: *The paper presents the problems of parametric identification of nonlinear difference operator based on interval data. It is shoed that, formally, this problem belongs to the task of finding at least of one solution of interval system of nonlinear algebraic equations. It is proposed and justified the use of the methods of random search with a nonlinear discrete criterion function for solving this task. The properties of the function are researched in this paper.*

Keywords: *modeling under specified accuracy, identification parametric methods, interval difference operator, methods of random search.*

ВСТУП

Макромоделювання у вигляді різницевих операторів часто є одним із способів представлення властивостей складних об'єктів та процесів. Наприклад, макромоделювання використовують для опису полів концентрацій шкідливих викидів автотранспорту, теплогенеруючих та промислових об'єктів [1,2].

Якщо ідентифікація різницевого оператора проводиться із використанням експериментальних даних, то точність отриманої макромоделі буде залежати не тільки від методичних похибок, але й від похибок в експериментальних даних, які у багатьох випадках разом із похибками заокруглень є визначальними. Зокрема, для експериментального дослідження полів концентрацій шкідливих викидів використовують спектроаналізатори хімічних речовин, які відзначаються достатньо високими похибками, до 30%, тобто є визначальними при моделюванні. В цих випадках доцільно розглядати похибки в експериментальних даних обмеженими за амплітудою, а самі дані представляти в інтервальному вигляді [3].

Традиційно, в задачах параметричної ідентифікації на основі експериментальних даних використовують критерій мінімізації середньоквадратичного відхилення між модельованими та експериментальними даними. Інтервальна форма представлення експериментальних даних в задачах параметричної ідентифікації різницевого оператора із заданою точністю, в межах інтервальних похибок експериментальних даних, вимагає застосування абсолютно іншого критерію узгодження експериментальних та модельованих даних, а саме забезпечення включення прогнозованих значень у відповідний інтервал експериментальних даних для заданих початкових умов. Такого типу задачі розглянуті у працях [3-5]. Зокрема, у праці [5] показано, що у цьому випадку застосування вказаного критерію задача параметричної ідентифікації різницевого оператора є задачею розв'язування інтервальної системи нелінійних алгебричних рівнянь (ІСНАР). Для знаходження розв'язків отриманої ІСНАР, створено метод та алгоритм [6], який ґрунтується на випадковому пошуку вектора параметрів різницевого оператора. Проте, використання створеного методу для конкретних задач макромоделювання [6] показало його не прогнозовану складність та збіжність, що пов'язано із відсутністю досліджень цільової критеріальної функції пошуку параметрів. Тому метою даної праці є розв'язання актуальної задачі встановлення властивостей критеріальної цільової функції у випадку параметричної ідентифікації різницевого оператора із заданими прогностичними характеристиками в межах експериментальних похибок. Такі дослідження уможливлять покращити збіжність та знизити обчислювальну складність алгоритмів параметричної ідентифікації різницевих операторів.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ НЕЛІНІЙНОГО ІНТЕРВАЛЬНОГО РІЗНИЦЕВОГО ОПЕРАТОРА

Нехай процес описується таким різницевим оператором:

$$v_{i,j,h,k} = f(v_{0,0,0,0},...,v_{0,0,h,0},v_{i,0,0,0},...,v_{1,j,0,0},...,v_{i-1,j-1,h-1,k-1},\vec{g}),\ i=1,...,N,\ j=1,...,L,\ h=1,...,H,\ k=1,...,K \tag{1}$$

де $f(\bullet)$ – відоме нелінійне перетворення, що задає структуру різницевого оператора; $v_{i,j,h,k}$ – прогнозоване (істинне) значення концентрації шкідливої речовини у точці з дискретними координатами *i,j,h в k*-ий момент часу; $\vec{g}$ – невідомий вектор (розмірністю $m \times 1$) параметрів різницевого оператора.

Для оцінювання вектора параметрів $\vec{g}$ різницевого оператора використовуємо результати спостережень за концентрацією шкідливої речовини для заданих дискретних значень координат *i,j,h* в *k*-ий момент часу

$$\tilde{v}_{i,j,h,k} = v_{i,j,h,k} + e_{i,j,h,k},\ i=1,...,N,\ j=1,...,L,\ h=1,...,H,\ k=1,...,K \tag{2}$$

де $\tilde{v}_{i,j,h,k}$ – виміряне значення прогнозованої характеристики в точці простору з координатами *i,j,h* в k-ий момент часу. У формулі (2) приймаємо: $e_{i,j,h,k}$ – випадкові обмежені за амплітудою похибки

$$\left|e_{1,j,h,k}\right| = \left|e_{i,1,h,k}\right| = \left|e_{i,j,1,k}\right| = ... = \left|e_{i,j,h,k}\right| \le \Delta_{i,j,h,k},\ \Delta_{i,j,h,k} > 0\quad \forall\ \ i=1,...,N,\ j=1,...,L,\ h=1,...,H,\ k=1,...,K \tag{3}$$

які в загальному випадку залежать від координат простору та часу вимірювань.

Із використанням моделі спостережень (2) та урахуванням обмеженості за амплітудою похибки (3), оцінки концентрації шкідливої речовини, отримані на основі експериментальних даних набувають інтервального представлення:

$$[z_{i,j,h,k}]=[z^-_{i,j,h,k};z^+_{i,j,h,k}]=[(\tilde{v}_{i,j,h,k}-\Delta_{i,j,h,k});(\tilde{v}_{i,j,h,k}+\Delta_{i,j,h,k})],$$
$$i=1,...,N\,,\ j=1,...,L\,,h=1,...,H\,,k=1,...,K \tag{4}$$

де $[z^-_{i,j,h,k};z^+_{i,j,h,k}]$ – гарантований інтервал, який включає істинне невідоме значення концентрації речовини, тобто невідомий вектор параметрів $\vec{g}$ різницевого оператора будемо оцінювати за умовами включення прогнозованих значень у відповідний інтервал експериментальних даних. Таким чином критерієм для отримання оцінок параметрів різницевого оператора будуть такі включення:

$$v_{i,j,h,k}\in[z^-_{i,j,h,k};z^+_{i,j,h,k}]\ \ \forall i=1,...,N\,,\ j=1,...,L\,,h=1,...,H\,,k=1,...,K \tag{5}$$

Тоді, підставляючи у вираз (5) значення $v_{i,j,h,k}$, яке задається різницевим оператором (1) отримаємо умови узгодження експериментальних значень концентрацій із модельованими

$$z^-_{i,j,h,k}\le f(v_{0,0,0,0},...,v_{0,0,h,0},v_{i,0,0,0},...,v_{1,j,0,0},...,v_{i-1,j-1,h-1,k-1},\vec{g})\le z^+_{i,j,h,k}\,,$$
$$i=1,...,N\,,\ j=1,...,L\,,h=1,...,H\,,k=1,...,K \tag{6}$$

Однак на практиці застосування різницевих схем для побудови макромоделей вимагає задання деяких початкових умов із подальшим застосуванням рекурентних схем для отримання прогнозних значень модельованої величини.

Нехай початкові умови стосовно концентрацій шкідливих викидів задані в межах інтервальних оцінок концентрацій шкідливих викидів у вигляді $[\hat{v}^-_{0,0,0,0};\hat{v}^+_{0,0,0,0}]\subseteq[z^-_{0,0,0,0};z^+_{0,0,0,0}],\ldots,$ $[\hat{v}^-_{i-1,j-1,h-1,k-1};\hat{v}^+_{i-1,j-1,h-1,k-1}]\subseteq$ $[z^-_{i-1,j-1,h-1,k-1};z^+_{i-1,j-1,h-1,k-1}]$. Тоді прогнозовані значення концентрацій шкідливих викидів на основі різницевого оператора зі структурою (1) отримаємо за таким виразом

$$[\hat{v}^-_{i,j,h,k};\hat{v}^+_{i,j,h,k}]=f([\hat{v}_{0,0,0,0}],...,[\hat{v}_{0,0,h,0}],[\hat{v}_{i,0,0,0}],...,[\hat{v}_{1,j,0,0}],...,[\hat{v}_{i-1,j-1,h-1,k-1}],\hat{\vec{g}}),$$
$$i=1,...,N\,,\ j=1,...,L\,,h=1,...,H\,,k=1,...,K \tag{7}$$

де $[\hat{v}_{0,0,0,0}],...,[\hat{v}_{0,0,h,0}],[\hat{v}_{i,0,0,0}],...,[\hat{v}_{1,j,0,0}],$ $...,[\hat{v}_{i-1,j-1,h-1,k-1}]$ – задані у вигляді початкових умов та спрогнозовані у точках з дискретними координатами простору $i-1=0,...,N-1$, $j-1=1,...,L-1\,,h-1=1,...,H-1$, та в дискретні моменти часу $k-1=1,...,K-1$ на основі макромоделі інтервальні оцінки концентрацій шкідливих викидів; $\hat{\vec{g}}$ – вектор невідомих оцінок параметрів різницевого оператора.

За цих умов, критерієм для отримання оцінок параметрів різницевого оператора будуть такі включення:

$$[\hat{v}_{i,j,h,k}]=[\hat{v}^-_{i,j,h,k};\hat{v}^+_{i,j,h,k}]\subseteq[z_{i,j,h,k}]=[z^-_{i,j,h,k}z^+_{i,j,h,k}],\ \forall i=0,...,N\,,\ j=1,...,L\,,\ h=1,...,H\,,\ k=1,...,K \tag{8}$$

Оскільки для отримання інтервалу прогнозованої характеристики $[\hat{v}_{i,j,h,k}]$ за формулою різницевого оператора (6) необхідно проводити обчислення за правилами інтервальної арифметики [7], то такий оператор називатимемо інтервальним різницевим оператором.

Підставляючи інтервальні оцінки $[\hat{v}^-_{i,j,h,k};\hat{v}^+_{i,j,h,k}]$, $i-1=0,...,N-1$, $j-1=1,...,L-1$, $h-1=1,...,H-1$, $k-1=1,...,K-1$ задані у вигляді початкових умов та обчислені за формулою (7) в умови (8), отримаємо таку інтервальну систему нелінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} [\hat{v}_{0,0,0,0}] \subseteq [z_{0,0,0,0}],... \\ z^-_{i,j} \le f([\hat{v}_{0,0,0,0}],...,[\hat{v}_{0,0,h,0}],[\hat{v}_{i,0,0,0}],...,[\hat{v}_{1,j,0,0}],...,[\hat{v}_{i-1,j-1,h-1,k-1}],\hat{\vec{g}}) \le z^+_{i,j}, \\ [\hat{v}_{i-1,j-1,h-1,k-1}] = f([\hat{v}_{0,0,0,0}],...,[\hat{v}_{0,0,h,0}],[\hat{v}_{i,0,0,0}],...,[\hat{v}_{1,j,0,0}],...,[\hat{v}_{i-2,j-2,h-2,k-2}],\hat{\vec{g}}) \end{cases}$$
$$i=1,...,N,\ j=1,...,L,\ h=1,...,H,\ k=1,...,K \quad (9)$$

Отже задача ідентифікації параметрів інтервального різницевого оператора (7) за умов (5) є задачею розв'язування інтервальної системи нелінійних алгебричних рівнянь у вигляді (7). Відомо [6], що розв'язками цієї системи є не опукла область. У праці [5,6] розглянуто алгоритм та метод розв'язування даної задачі, побудований на ітераційній схемі випадкового пошуку оцінок параметрів різницевого оператора. Розглянемо особливості цієї обчислювальної схеми.

2. ОБЧИСЛЮВАЛЬНА СХЕМА ПАРАМЕТРИЧНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ІНТЕРВАЛЬНОГО НЕЛІНІЙНОГО РІЗНИЦЕВОГО ОПЕРАТОРА

В основі обчислювальної схеми покладено трьох-крокові процедури:

1) задання початкових умов у вигляді інтервальних наближень початкових дискретних значень прогнозованої характеристики із виконанням відомих умов включення (5);
2) задання початкової $\hat{\vec{g}}_0$ чи формування поточної оцінки $\hat{\vec{g}}$ вектора параметрів різницевого оператора випадковим чином;
3) реалізація рекурентної схеми з метою отримання інтервальних дискретних оцінок прогнозованої характеристики та перевірки "якості" поточної оцінки вектора параметрів різницевого оператора. Деталізований покроковий опис обчислювальної схеми наведено нижче.

Крок 1. Покладемо $l=0$, де l – номер ітерації пошуку $\hat{\vec{g}}$ – вектора оцінок параметрів.

Крок 2. Обчислення $[\hat{v}_{l,i,j,h,k}]$ $i=1,...,N$, $j=1,...,L$, $h=1,...,H$, $k=1,...,K$ за формулою (6).

Крок 3. Обчислення величини δ_l, що задає якість поточного наближення до істинної (допускової) оцінки вектора параметрів.

На цьому кроці приймаємо, що якість наближення буде тим вищою, чим ближче буде прогнозований коридор, побудований на основі даного наближення вектора параметрів, до експериментального. Таким чином якість наближення будемо визначати кількісно у вигляді різниці центрів найбільш віддалених між собою прогнозного та експериментального інтервалів – у випадку, коли вони не перетинаються та найменшою шириною перетину серед прогнозних та експериментальних інтервалів – для випадку їх перетину. Формально ці умови запишемо так:

$$\delta_l = \max_{i=0,...,N,j=0,...,L,h=0,...,H,k=0,...,K} \left\{ mid\left(\left[\hat{v}_{l,i,j,h,k}\right]\right) - mid\left(\left[z_{i,j,h,k}\right]\right) \right\}, \text{ якщо } \left[\hat{v}_{l,i,j,h,k}\right] \cap \left[z_{i,j,h,,k}\right] = \varnothing,$$
$$\exists\ i=0,...,N,\ \exists\ j=0,...,L\ \exists\ h=0,...,H,\ \exists\ k=0,...,K. \quad (10)$$

$$\delta_l = \max_{i=0,...,N,j=0,...,L,h=0,...,H,k=0,...,K} \left\{ mid\left(\left[\hat{v}_{l,i,j,h,k}\right]\right) - mid\left(\left[\hat{v}_{i,j,h,k}\right] \cap \left[z_{i,j,h,k}\right]\right) \right\}, \text{ якщо}$$
$$\left[\hat{v}_{l,i,j,h,k}\right] \cap \left[z_{i,j,h,,k}\right] \ne \varnothing,$$
$$\forall\ i=0,...,N,\ \forall\ j=0,...,L\ \forall\ h=0,...,H,\ \forall\ k=0,...,K. \quad (11)$$

де $mid(\bullet)$, $wid(\bullet)$ – операції визначення центру та ширини інтервалу, відповідно.

Слід зауважити, що формула (8) визначає функцію цілі у випадку достньо грубої оцінки вектора параметрів, коли існують дискети, у яких прогнозований інтервал не перетинається із експериментальним. Формула (10) – це результат багаторазового практичного застосування алгоритму розробленого авторами [6]. В описах базового методу, для представлення цільової функції використовувалася виключно формула (11), що періодично призводило до зациклювання обчислень.

Крок 4. Якщо $\delta_l = 0$, обчислене за формулою (11), то $\hat{\vec{g}} = \hat{\vec{g}}_l$ і кінець пошуку, інакше – покладемо $l=l+1$ і перехід на крок 5.

Крок 5. Генерування випадкового вектора $\vec{\xi}_l$ за формулою:

$$\vec{\xi}_l = r \cdot (\frac{\Delta g_{1l}}{R_l}, ..., \frac{\Delta g_{ml}}{R_l}) \tag{12}$$

де $\Delta g_{1l}, ..., \Delta g_{ml}$ – випадкові числа, згенеровані відповідно до рівномірного закону розподілу на інтервалі $[-1;1]$;

$$R_l = \sqrt{\Delta g_{1l}^2 + ... + \Delta g_{ml}^2}$$

Параметр пошуку r отримуємо на кожній ітерації за допомогою алгоритму настроювання.

Крок 6. Обчислення нового наближення $\hat{\vec{g}}_{l+1}$ за формулою

$$\hat{\vec{g}}_{l+1} = \hat{\vec{g}}_l + \vec{\xi}_l \tag{13}$$

і перехід на крок 2.

Як видно із формули (13) „якість“ нового наближення залежить від згенерованого випадковим чином вектора $\vec{\xi}_l$, зокрема від оптимального вибору параметра пошуку r. З метою забезпечення співвідношення $\hat{\vec{g}}_{l+1} \succ \hat{\vec{g}}_l$, де $\succ$ – відношення переваги, а також забезпечення швидкої збіжності алгоритму необхідне настроювання параметра пошуку r.

Як видно із наведеного опису алгоритму, цільовою функцією для знаходження параметрів різницевого оператора є функція якості наближення оцінок параметрів до розв'язків ІСНАР, дискретне значення якої на кожній ітерації задається: виразом (10) – для грубих оцінок параметрів; формулою (11) – для точних оцінок.

Для настроювання параметра r використовують методи одновимірної оптимізації [5], приймаючи до уваги припущення, що функція якості наближення поточної оцінки параметрів різницевого оператора до істинної оцінки, яка залежить від параметра вибору кроку r є унімодальною.

Взявши за основу вираз (9) для цільової функції, підставимо замість $[\hat{v}_{l,i,j,h,k}]$ вираз для його обчислення (6) із заміною вектора оцінок параметрів $\hat{\vec{g}}$ на вектор $\hat{\vec{g}}_{l+1}$ поточних оцінок згідно наведеної вище обчислювальної схеми $\hat{\vec{g}}_{l+1} = \hat{\vec{g}}_l + r \cdot (\frac{\Delta g_{1l}}{R_l}, ..., \frac{\Delta g_{ml}}{R_l})$, отримаємо формулу для функції якості наближення поточної оцінки параметрів від параметра вибору кроку r:

$$\begin{aligned}\delta_{l+1}(r) = \max_{i=0..N, j=0,..,L, h=0,...,H, k=0,...,K} \Big\{ wid\Big(f\big((\vec{g}_l + r \cdot (\Delta g_{1l}/R_l, ..., \Delta g_{ml}/R_l)),\\ [\hat{v}_{0,0,0,0}], ...[\hat{v}_{0,0,h,0}], [\hat{v}_{i,0,0,0}], ...[\hat{v}_{1,j,0,0}], ...[\hat{v}_{i-1,j-1,h-1,k-1}]\big)\Big) - wid\Big(f\big((\vec{g}_l + r \cdot (\Delta g_{1l}/R_l, ..., \Delta g_{ml}/R_l)),\\ [\hat{v}_{0,0,0,0}], ..., [\hat{v}_{0,0,h,0}], [\hat{v}_{i,0,0,0}], ..., [\hat{v}_{1,j,0,0}], ..., [\hat{v}_{i-1,j-1,h-1,k-1}]\big) \cap [z_{i,j,h,k}]\Big)\Big\}\end{aligned} \tag{14}$$

Саме таку формулу і необхідно використовувати для настроювання параметра пошуку.

Проте практична реалізація розглянутого методу на багато численних прикладах показала, що функція для оптимізації кроку $\delta(r)$, задана виразом (14) не завжди є унімодальною, що призводить до не прогнозованого підвищення обчислювальної складності та збіжності. Тому наведені у працях [5, 6] метод та алгоритм настроювання кроку не достатньо обґрунтовані. Для їх удосконалення необхідно дослідити особливості критеріальної функції для розв'язування задачі параметричної ідентифікації.

3. АНАЛІЗ КРИТЕРІАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ ЗАДАЧІ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ІНТЕРВАЛЬНОГО РІЗНИЦЕВОГО ОПЕРАТОРА ІЗ ЗАДАНОЮ ТОЧНІСТЮ

Припустимо, що у певний спосіб отримано грубі наближення оцінок параметрів різницевого оператора – розв'язків ІСНАР, які уможливлюють взяти за основу вираз (11) для обчислення критеріальної функції якості наближення.

Підставимо у виразі (11) замість прогнозованого значення $[\hat{v}_{l,i,j,h,k}]$ вираз для його обчислення (7), у якому попередньо замінимо оцінки вектора параметрів $\hat{\vec{g}}$, які є одним із розв'язків ІСНАР (9) на будь який вектор $\hat{\vec{g}}_l$. В результаті проведено підстановки та замін отримаємо критеріальну функцію якості поточного наближення $\hat{\vec{g}}_l$ оцінок параметрів до одного із розв'язків ІСНАР (9), у такому вигляді

$$\delta(\hat{\vec{g}}_l)=\max_{i=0..N,j=0,..,L,h=0,...,H,k=0,...,K}\{wid(f(\vec{g}_l,[\hat{v}_{0,0,0,0}],...[\hat{v}_{0,0,h,0}],[\hat{v}_{i,0,0,0}],...[\hat{v}_{1,j,0,0}],...[\hat{v}_{i-1,j-1,h-1,k-1}]))--wid(f(\vec{g}_l,$$
$$[\hat{v}_{0,0,0,0}],...,[\hat{v}_{0,0,h,0}],[\hat{v}_{i,0,0,0}],...,[\hat{v}_{1,j,0,0}],...,[\hat{v}_{i-1,j-1,h-1,k-1}])\cap[z_{i,j,h,k}])\} \quad (15)$$

Тоді задача параметричної ідентифікації параметрів інтервального різницевого оператора зводиться до мінімізації критеріальної функції (15), тобто

$$\delta(\hat{\vec{g}}_l)\xrightarrow{\hat{\vec{g}}_l}\min \quad (16)$$

Розв'язком задачі оптимізації (14) є вектор оцінок $\hat{\vec{g}}$ параметрів нелінійного різницевого оператора (1).

Розглянемо особливості критеріальної функції (16). Слід зауважити, що критеріальна функція $\delta(\hat{\vec{g}}_l)$ не має явного представлення і її значення може бути обчислене виключно чисельними методами в силу дискретності від $i=1,...,N$, $j=1,...,L$, $h=1,...,H$, $k=1,...,K$.

Нехай знайдено хоча б один розв'язок $\hat{\vec{g}}_l=\hat{\vec{g}}$ ІСНАР (9), тоді виконуються включення (8), тобто

$$f([\hat{v}_{0,0,0,0}],...,[\hat{v}_{0,0,h,0}],[\hat{v}_{i,0,0,0}],...,[\hat{v}_{1,j,0,0}],...,[\hat{v}_{i-1,j-1,h-1,k-1}],\hat{\vec{g}})\subseteq[z^-_{i,j,h,k}z^+_{i,j,h,k}],\ \forall i=0,...,N,$$
$$j=1,...,L,\ h=1,...,H,\ k=1,...,K \quad (17)$$

За умови виконання включення (17), отримаємо

$$wid(f(\vec{g}_l,[\hat{v}_{0,0,0,0}],...[\hat{v}_{0,0,h,0}],[\hat{v}_{i,0,0,0}],...[\hat{v}_{1,j,0,0}],...[\hat{v}_{i-1,j-1,h-1,k-1}]))-wid(f(\vec{g}_l,$$
$$[\hat{v}_{0,0,0,0}],...,[\hat{v}_{0,0,h,0}],[\hat{v}_{i,0,0,0}],...,[\hat{v}_{1,j,0,0}],...,[\hat{v}_{i-1,j-1,h-1,k-1}])\cap[z_{i,j,h,k}])=$$
$$wid(f(\vec{g}_l,[\hat{v}_{0,0,0,0}],...[\hat{v}_{0,0,h,0}],[\hat{v}_{i,0,0,0}],...[\hat{v}_{1,j,0,0}],...[\hat{v}_{i-1,j-1,h-1,k-1}]))-wid(f(\vec{g}_l,$$
$$[\hat{v}_{0,0,0,0}],...,[\hat{v}_{0,0,h,0}],[\hat{v}_{i,0,0,0}],...,[\hat{v}_{1,j,0,0}],...,[\hat{v}_{i-1,j-1,h-1,k-1}]))=0,\ \forall i=0,...,N,$$
$$j=1,...,L,\ h=1,...,H,\ k=1,...,K \quad (18)$$

Підставляючи вираз (18) у (15), а результат у (16) отримаємо $\min\limits_{\hat{\vec{g}}_l}(\delta(\hat{\vec{g}}_l))=0$.

Отже найменше значення критеріальної функції $\delta(\hat{\vec{g}}_l)$ досягається для векторів оцінок $\hat{\vec{g}}$ параметрів різницевого оператора, які забезпечують сумісність ІСНАР (9). При цьому для векторів оцінок $\hat{\vec{g}}$ значення функції перетворюється у нуль: $\delta(\hat{\vec{g}}_l=\hat{\vec{g}})=0$.

Вказана властивість є надійною ознакою для визначення глобальних мінімумів цільової функції задачі оптимізації (15) у алгоритмах та чисельних процедурах параметричної ідентифікації нелінійних інтервальних різницевих операторів. Інші властивості критеріальної функції заданої виразом (15) дослідимо на конкретному прикладі побудови інтервального різницевого оператора описаного в праці [1].

Розглянем одновимірну модель поширення концентрацій окису вуглецю CO в неоднорідному середовищі внаслідок рівномірного руху транспортного потоку з постійною потужністю викидів (лінійне джерело шкідливих викидів із нескінченною довжиною). Такий процес у даній праці описано різницевим оператором [1]:

$$v_j = g_1 \cdot v_{j-1} + g_2 \cdot (v_{j-2} - v_{j-1}),\; j = 2,...,L. \qquad (19)$$

Для ідентифікації різницевого оператора отримані дані вимірювань концентрацій окислу вуглецю із відносною похибкою 10 % перпендикулярно до дороги на відстані від 0 до 100 метрів із дискретою Δx =10м. Результати вимірювань наведені в таблиці 1.

Таблиця 1. Інтервальні дані вимірювань концентрацій шкідливих викидів

№ дис-кети	Відстань від дороги	Виміряна концентрація *CO*	Інтервальні значення концентрації *CO*
j	x_j, м	$\tilde{v}_j$, мг/м^3	$[z_j]=[z_j^-;z_j^+]$, мг/м^3
0	0	55	[49,5;60,5]
1	10	47	[42,3;51,7]
2	20	43	[38,7;47,3]
3	30	37	[33,3;40,7]
4	40	32	[28,8;35,2]
5	50	30	[27,0;33,0]
6	60	26	[23,4;28,6]
7	70	23	[20,7;25,3]
8	80	20	[18,0;22,0]
9	90	18	[16,2;19,8]
10	100	16	[14,4;17,6]

Користуючись даними таблиці із урахуванням структури різницевого оператора було побудовано ІСНАР у вигляді (9), де $[v_0^-;v_0^+]$=[52,25;57,75] та $[v_1^-;v_1^+]$=[44,65;49,35]. Один із розв'язків $\hat{g}_1 = 0.8897, \hat{g}_2 = -0.0261$ даної ІСНАР отримано із використанням вище наведеної обчислювальної процедури пошуку параметрів різницевого оператора.

Тепер для дослідження критеріальної функції в околі отриманого розв'язку була побудована прямокутна область 100*100 дискретних значень параметрів g_1, g_2 з кроками відповідно $\Delta g_1 = 0.003, \Delta g_2 = 0.002$. Для отриманої сітки на основі формули (15) розраховано значення критеріальної функції. Результати побудованої критеріальної функції наведені на рис. 1. Для наглядної ілюстрації розраховано лінії рівного рівня критеріальної функції і зображено на рис. 2.

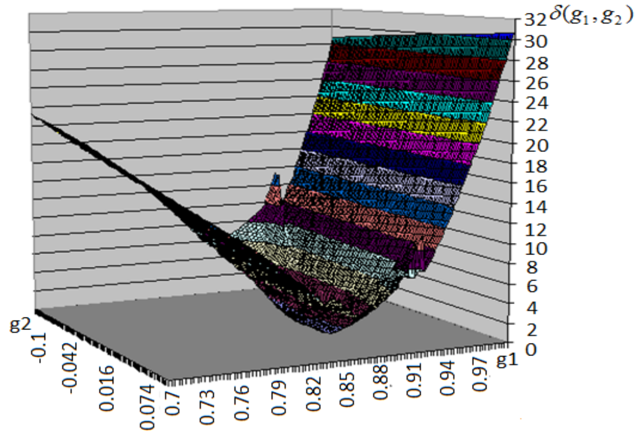

Рис. 1 – Графік критеріальної функції

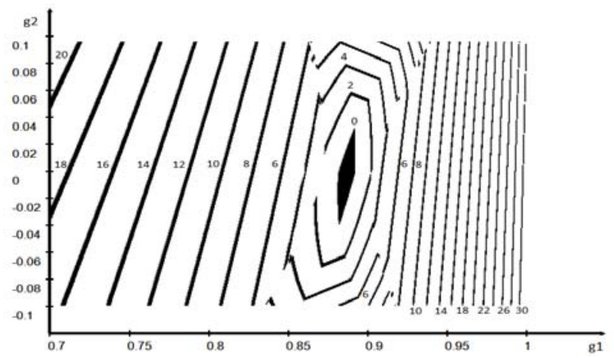

Рис. 2 – Лінії рівних рівнів критеріальної функції

Як видно із рис. 1, рис. 2 критеріальна функція не є унімодальною, що суттєвим чином ускладнює алгоритми пошуку точок її глобальних мінімумів. Також слід зауважити, що її значення мало змінюється при незначному віддаленні від області розв'язків і навпаки різко зростає при значному віддалені від цієї області. Цей факт наштовхує на гіпотезу про не важливість вибору початкових умов для реалізації вище описаного алгоритму параметричної ідентифікації. Проте цю гіпотезу ще слід перевірити на практиці та на інших прикладах.

З проведеного аналізу можна зробити такі висновки:

1) задача параметричної ідентифікації нелінійного інтервального різницевого оператора є задачею розв'язку інтервальної системи нелінійних алгебричних рівнянь, для якої розроблено ітераційний метод випадкового пошуку розв'язків оптимізаційної задачі;
2) критеріальна функція вказаної задачі у точках глобального мінімуму перетворюється в нуль;
3) в загальному випадку критеріальна функція не є унімодальною, що суттєвим чином ускладнює алгоритми пошуку точок її глобальних мінімумів;

4) на конкретному прикладі показано, що значення критеріальної функції мало змінюється при незначному віддаленні від області розв'язків і навпаки різко зростає при значному віддалені від цієї області.

Встановлені властивості створюють можливості покращити алгоритми параметричної ідентифікації інтервального нелінійного різницевого оператора у напрямі зниження обчислювальної складності та підвищення збіжності.

4. ВИСНОВКИ

Розглянуто задачу ідентифікації лінійного інтервального різницевого оператора. Показано, що дана задача є задачею розв'язування ІСНАР. Проведено аналіз відомої обчислювальної процедури випадкового пошуку одного розвязку вказаної ІСНАР і показано, що ця процедура по своїй суті на цілена на розв'язування оптимізаційної задачі. Досліджено властивості критеріальної функції оптимізаційної задачі і при цьому отримано такі нові наукові та практичні результати:

- вперше сформульовано задачу параметричної ідентифікації нелінійного інтервального різницевого оператора із заданою точністю в межах похибок спостережень у вигляді оптимізаційної задачі із чисельно представленою цільовою функцією, що у повній мірі обґрунтовує використання існуючої чисельної процедури випадкового пошуку параметрів різницевого оператора.
- вперше для задачі параметричної ідентифікації нелінійного інтервального різницевого оператора із заданою точністю встановлено властивості критеріальної функції, зокрема: вона є неунімодальною; у точках глобального мінімуму набуває нульового значення; її значення мало змінюється при незначному віддаленні від області розв'язків і навпаки різко зростає при значному віддалені від цієї області. Встановлені властивості у сукупності уможливлюють покращити алгоритми параметричної ідентифікації інтервального нелінійного різницевого оператора у напрямі зниження обчислювальної складності та підвищення збіжності.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

[1] Ковальчук П.І. *Моделювання і прогнозування стану навколишнього середовища: Навчальний посібник*. – К.: Либідь, 2003. – 208 с.

[2] Адмаев О.В. Моделирование оценки выбросов автотранспорта в Красноярске // *Вестник Красноярского государственного университета. Серия физико-математические науки*. – 2005. – №4. – С. 143-150.

[3] Дивак М.П., Пукас А.В., Дивак Т.М. Ідентифікація параметрів різницевого оператора в задачах моделювання процесів поширення забруднень методами аналізу інтервальних даних // *Зб. Наук. Праць ДонНТУ. Серія інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка*. – 2009. – Вип.10 (153). – С. 224-229.

[4] Дивак М., Стахів П., Каліщук І. Ідентифікація параметрів моделей "вхід-вихід" динамічних систем на основі інтервального підходу // *Вісник Тернопільського державного технічного університету*. – 2004. – Т.9. – №4. – С. 109–117.

[5] Дивак М.П., Марценюк Є.О., Войтюк І.Ф. Оптимальна процедура налаштування параметрів методу ідентифікації інтервальної дискретної моделі динамічної системи. // *Відбір та обробка інформації*. – 2008. – Вип 27 (103) – С. 17-23.

[6] Дивак М.П., Дивак Т.М. Особливості побудови інтервальної системи алгебричних рівнянь та методу її розвязку в задачах ідентифікації лінійного інтервального різницевого оператора. // *Індуктивне моделювання складних систем. Збірник наукових праць*. // Відпов. Редактор В.С.Степашко – Київ: МННЦ ІТС НАН та МОН України, 2009. – 236с. – С. 35-43.

[7] Алефельд Г., Херцбергер Ю. *Введение в интервальные вычисления*. – М.: Мир, 1987. – 360 с.

Дивак Микола Петрович, *доктор технічних наук, професор, декан факультету комп'ютерних інформаційних технологій ТНЕУ. Закінчив Львівський політехнічний інститут у 1986 р. Захистив кандидатську дисертацію з управління в технічних системах у 1992 р., докторську дисертацію з математичного моделювання та обчислювальних методів у 2003 р. З 2002 року завідувач кафедри комп'ютерних наук ТНЕУ.*

Наукові інтереси: розробка та застосування методів множинного оцінювання та інтервального аналізу для моделювання статистичних та динамічних систем в сфері економіки, екології та технологічних галузях;

розпаралелення обчислень для задач інтервального аналізу.

Дивак Тарас Миколайович *закінчив факультет комп'ютерних інформаційних технологій Тернопільського національного економічного університету у 2010 році, магістр комп'ютерних наук. На даний час є аспірантом кафедри комп'ютерних наук ТНЕУ.*

Наукові інтереси: моделювання динамічних систем в сфері екології та технологічних галузях.

Стахів Петро Григорович, доктор технічних наук, закінчив Львівський державний університет у 1970 р., спеціальність "Радіофізика та електроніка". Навчався в аспірантурі у Львівському державному університеті ім. Ів. Франка (1970–1973 рр.) та докторантурі при Московському енергетичному інституті (1988–1991 рр.). У 1975 р. захистив дисертацію "Синтез лінійних електричних кіл (метод змінних стану)" на здобуття вченого ступеня кандидата технічних наук (спеціальність "Теоретичні основи електротехніки"). У 1992 р. захистив докторську дисертацію за спеціальністю "Теоретична електротехніка" на тему "Аналіз динамічних режимів електричних та електронних кіл з багатополюсниками". На даний час працює завідувачем кафедри ТЗЕ НУ "Львівська політехніка".

Наукові інтереси повязані із теорією електричних кіл та математичним і комп'ютерним моделюванням динамічних процесів як в електротехнічних, так і споріднених системах розпаралелення обчислень для задач інтервального анналізу.