ISSN 2078-5860. ФОРМУВАННЯ РИНКОВОЇ ЕКОНОМІКИ В УКРАЇНІ. 2018. Вип. 39. С. 35-44
FORMATION OF MARKET ECONOMY IN UKRAINE. 2018. Is. 39. P. 35-44

УДК 330.42:519.86

ОПТИМАЛЬНЕ ПЛАНУВАННЯ ЛОГІСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ НА ОСНОВІ ФУНКЦІЇ З АРГУМЕНТОМ ПІД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

О. Возняк, О. Голубник

Тернопільський національний економічний університет
Львівський національний університет імені Івана Франка

Проаналізовано роль математичного інструментарію в дослідженні економічних явищ та процесів. Запропоновано використання функції з аргументом під знаком модуля в якості математичної моделі логістичного процесу. Сформовано та доведено теореми для знаходження мінімальних та максимальних значень досліджуваної функції. Побудовано оптимальні плани виробничих процесів з використанням розглянутих теорем.
Ключові слова: модель, математичні методи, оптимальний план, логістичні задачі, функція з аргументом під знаком модуля, мінімум функції, максимум функції, оптимальний план перевезення товару.

Постановка проблеми. В сучасних умовах розвитку ринкової економіки, яка ґрунтується на знаннях, проблеми оптимізації виробництва та бізнесу набувають особливої актуальності. Висока конкуренція суб’єктів господарювання зумовлює потребу у мінімізації витрат виробництва, використанні інноваційних технологій та інтелектуальних ресурсів, тим самим забезпечуючи зростання конкурентоспроможності товарів та послуг.

Економічна наука у своєму арсеналі містить широкий інструментарій методів пізнання економічних явищ та процесів для вирішення прикладних, практичних завдань, а також для їх теоретичного моделювання. Найважливішою складовою частиною методів будь-якої економічної науки є математичні методи. Їх використання в поєднанні з ґрунтовним економічним аналізом відкриває нові можливості для економічної науки та практики.

Багато практичних задач господарської діяльності та ряд важливих питань економічної теорії пов’язані з задачами визначення найкращого, оптимального варіанту розв’язку. Такими, наприклад, є задачі вибору оптимальної виробничої програми підприємства, транспортні задачі, задачі раціонального розподілу вантажних потоків та цілий комплекс проблем пов’язаних з оптимальним плануванням національної економіки. Величезна кількість можливих варіантів діяльності ускладнює отримання оптимального плану емпіричним або експертним шляхом. Застосування математичних методів і обчислювальних можливостей в плануванні діяльності суб’єктів господарювання забезпечує раціоналізацію, підвищення ефективності його діяльності та економічне зростання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На сьогоднішній час існує велика кількість робіт присвячених дослідженню різних аспектів теорії математичного програмування. Одними з перших дослідників оптимізації лінійних функції при лінійних обмеженнях були Джон фон Нейман та Л. В. Канторович. Вагомий внесок у розвиток математичної теорії лінійного та нелінійного програмування, а також методів дослідження різних економічних проблем здійснили такі вчені як Дж. Данціг, В. В. Леонтьєв, В. С. Немчинов, В. В. Новожилов, А. Л. Лур'є, А. Брудно, А. Г. Аганбегян, Д. Б. Юдін, Е. Г. Гольштейн та інші. Однак, незважаючи на вагомий доробок з даної проблематики потребує подальшого дослідження питання вибору та обґрунтування функціональної залежності для опису економічних явищ та процесів.

Виклад основного матеріалу. Існує багато задач з економіки, які зводяться до знаходження оптимального варіанту планування тих чи інших виробничих процесів, транспортних перевезень, використання сировини, обладнання і т. д. Розв'язання таких задач, інколи, зводиться до дослідження функції вигляду: $f(x)=A\sum_{i=1}^{n}|x-a_i|+M$.

Якщо $i=1$, то $f(x)=A|x-a_1|+M$, де A, a_1, M – задані числа, $x\in R$.

Важливо відмітити, що M є деяке стале число, яке не залежить від змінної x.

Якщо $A>0$, то перший доданок $A|x-a_1|$ ніколи не буде від'ємним і при $x=a_1$ перетворюється в нуль. Тому функція $f(x)$ має найменше значення, яке дорівнює M : $y_{\min}=M$ і не має найбільшого значення.

Якщо $A<0$, то з таких самих міркувань виходить, що $y_{\max}=M$, причому це значення досягається при $x_0=a_1$, а $y_{\min}$ не існує.

Теоретичною основою для знаходження найбільшого (найменшого) значення функції вигляду

$$f(x)=A\sum_{i=1}^{k}|x-a_i|+M , \tag{1}$$

яка може бути математичною моделлю виробничого процесу, можуть стати в пригоді дві теореми.

Теорема 1. Функція $f(x)=\sum_{i=1}^{2n}|x-a_i|$, де a_1, a_2, a_3, …, a_{2n} – сталі і $a_1<a_2<a_3<...<a_{2n}$, має мінімум на відрізку, кінці якого є двома середніми членами послідовності a_1, a_2, a_3, …, a_{2n}; $f_{\min}=\sum_{i=n+1}^{2n}a_i-\sum_{i=1}^{n}a_i$.

Доведення. Оскільки $a_1<a_2<a_3<...<a_{2n}$, то при довільних значеннях x маємо: $x-a_1>x-a_2>x-a_3>...>x-a_{2n}$. Нехай $x\le a_1$, тоді $x-a_{2n}<x-a_{2n-1}<...<<x-a_1\le 0$ і $f(x)=-2nx+(a_1+a_2+a_3+...+a_{2n})$. Якщо $a_1\le x\le a_2$, то

$$f(x)=(x-a_1)-(x-a_2)-(x-a_3)-...-(x-a_{2n})=-(2n-2)x+(-a_1+a_2+a_3+...+a_{2n})$$

Якщо $a_2\le x\le a_3$, то

$$f(x)=(x-a_1)+(x-a_2)-(x-a_3)-...-(x-a_{2n})=-(2n-4)x+(-a_1-a_2+a_3+...+a_{2n})$$

і т. д. При $a_n\le x\le a_{n+1}$

$$f(x)=(x-a_1)+(x-a_2)+...+(x-a_n)-(x-a_{n+1})-...-(x-a_{2n})=-\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=n+1}^{2n}a_i .$$

При $a_{n+1} \le x \le a_{n+2}$

$$f(x) = (x-a_1)+(x-a_2)+...+(x-a_n)+(x-a_{n+1})-...-(x-a_{2n}) = 2x - \sum_{i=1}^{n+1} a_i + \sum_{i=n+2}^{2n} a_i$$

і т. д. Якщо $a_{2n-1} \le x \le a_{2n}$, то

$$f(x) = (x-a_1)+(x-a_2)+...+(x-a_{2n}) = 2nx-(a_1+a_2+a_3+...+a_{2n}).$$

Звідси випливає, що на кожному відрізку з відрізків $[a_i; a_{i+1}]$, починаючи з $x \le a_1$ і закінчуючи $a_{n-1} \le x \le a_n$, функція (1) збігається з лінійними функціями, кожна з яких монотонно спадає. На проміжку $a_n \le x \le a_{n+1}$ вона набуває сталого значення, яке дорівнює $-\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{2n} a_i$. На відрізках, починаючи з $a_{n+1} \le x \le a_{n+2}$ і закінчуючи $x \ge a_{2n}$, функція (1) збігається з лінійними функціями, кожна з яких монотонно зростає. Найменше значення функції $y_{\min} = \sum_{i=n+1}^{2n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i$ при $a_n \le x \le a_{n+1}$.

Отже, для знаходження мінімуму функції $f(x) = \sum_{i=1}^{2n} |x-a_i|$, де a_1, a_2, a_3, ..., a_{2n} – сталі числа і $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{2n}$, потрібно вибрати відрізок, кінці якого зображають собою два середніх члени послідовності a_1, a_2, a_3, ..., a_{2n}.

Аналогічно можна довести наступну теорему.

Теорема 2. Функція $f(x) = \sum_{i=1}^{2n+1} |x-a_i|$, де a_1, a_2, a_3, ..., a_{2n+1} – сталі числа і $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{2n+1}$, має мінімум у точці $x = a_{n+1}$, яка є середнім членом послідовності a_1, a_2, a_3, ..., a_{2n+1}; $f_{\min} = -\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{2n+1} a_i$.

В залежності від парності n екстремум функції (1) знаходять за допомогою відповідно першої і другої теорем. Якщо n – непарне число, то екстремум досягається у точці $x = a_{n+1}$, якщо n – парне число, то екстремум досягається на відрізку $[a_n; a_{n+1}]$.

Теорема 3. Функція

$$f(x) = |x-a_1| - |x-a_2| + |x-a_3| - |x-a_4| + ... + |x-a_{2n-1}| - |x-a_{2n}|,$$

де a_1, a_2, a_3, ..., a_{2n} – сталі числа і $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{2n}$, має найменше значення $f_{\min} = (a_1+a_3+...+a_{2n-1}) - (a_2+a_4+...+a_{2n})$ і найбільше значення $f_{\max} = (a_2+a_4+...+a_{2n}) - (a_1+a_3+...+a_{2n-1})$.

Доведення. Оскільки $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{2n}$, то при довільних значеннях x $x-a_1 > x-a_2 > x-a_3 > ... > x-a_{2n}$.

Нехай $x \le a_1$. Тоді $x-a_{2n} < ... < x-a_2 < x-a_1 \le 0$ і

$$f(x)=-(x-a_1)+(x-a_2)-(x-a_3)+(x-a_4)-...-(x-a_{2n-1})+(x-a_{2n})=$$
$$=(a_1+a_3+...+a_{2n-1})-(a_2+a_4+...+a_{2n}).$$

Нехай $a_1 \le x \le a_2$. Тоді $x-a_{2n}<...<x-a_3<x-a_2 \le 0$, $x-a_1 \ge 0$ і

$$f(x)=(x-a_1)+(x-a_2)-(x-a_3)-(x-a_4)-...-(x-a_{2n-1})+(x-a_{2n})=$$
$$=2x+(-a_1+a_3+a_5+...+a_{2n-1})-(a_2+a_4+...+a_{2n}).$$

Нехай $a_2 \le x \le a_3$. Тоді $x-a_{2n}<...<x-a_4<x-a_3 \le 0$, $x-a_1>x-a_2 \ge 0$ і

$$f(x)=(x-a_1)-(x-a_2)-(x-a_3)+(x-a_4)-...-(x-a_{2n-1})+(x-a_{2n})=$$
$$=(-a_1+a_3+a_5+...+a_{2n-1})-(-a_2+a_4+a_6+...+a_{2n}).$$

Нехай тепер $a_{2k-1} \le x \le a_{2k}$. Тоді $x-a_{2n}<...<x-a_{2k+1}<x-a_{2k} \le 0$,

$x-a_1>x-a_2>...>x-a_{2k-1} \ge 0$ і

$$f(x)=(x-a_1)-(x-a_2)+...-(x-a_{2k-2})+(x-a_{2k-1})+(x-a_{2k})-(x-a_{2k+1})+...-$$
$$-(x-a_{2n-1})+(x-a_{2n})=2x+(-a_1-a_3-...-a_{2k-1}+a_{2k+1}+...+a_{2n-1})-$$
$$-(-a_2-a_4-...-a_{2k-2}+a_{2k}+...+a_{2n}).$$

Нехай $a_{2k} \le x \le a_{2k+1}$. Тоді $x-a_{2n}<...<x-a_{2k+2}<x-a_{2k+1} \le 0$,

$x-a_1>x-a_2>...>x-a_{2k} \ge 0$ і

$$f(x)=(x-a_1)-(x-a_2)+...+(x-a_{2k-1})-(x-a_{2k})-(x-a_{2k+1})+(x-a_{2k+2})-...-$$
$$-(x-a_{2n-1})+(x-a_{2n})=(-a_1-a_3-...-a_{2k-1}+a_{2k+1}+...+a_{2n-1})-$$
$$-(a_2-a_4-...-a_{2k}+a_{2k+2}+...+a_{2n}).$$

Нарешті, нехай $x \ge a_{2n}$. Тоді $x-a_1>x-a_2>...>x-a_{2n} \ge 0$ і

$$f(x)=(x-a_1)-(x-a_2)+(x-a_3)-(x-a_4)+...+(x-a_{2n-1})-(x-a_{2n})=$$
$$=(-a_1-a_3-...-a_{2n-1})-(-a_2-a_4-...-a_{2n})=$$
$$=(a_2+a_4+...+a_{2n})-(a_1+a_3+...+a_{2n-1})$$

Як бачимо, на кожному з проміжків $a_{2k-1} \le x \le a_{2k}$, де $k=1,2,3,...,n$, функція $f(x)$ збігається з відповідною лінійною функцією вигляду $y=2x+l_k$, кожна з яких монотонно зростає.

На проміжках $a_{2k} \le x \le a_{2k+1}$, де $k=1,2,3,...,n$, функція $f(x)$ набуває сталих значень m_1, m_2, …, m_{n-1}. При $x \le a_1$ і $x \ge a_{2n}$ функція $f(x)$ також набирає сталих значень: $m_0=(a_1+a_3+...+a_{2n-1})-(a_2+a_4+...+a_{2n})$ і

$m_n=(a_2+a_4+...+a_{2n})-(a_1+a_3+...+a_{2n-1})$, причому $m_0<m_1<m_2<...<m_n$.

Найменше значення функції $f(x)$ є

$$f_{\min}=m_0=(a_1+a_3+...+a_{2n-1})-(a_2+a_4+...+a_{2n}),$$

а найбільше значення є $f_{\max}=m_n=(a_2+a_4+...+a_{2n})-(a_1+a_3+...+a_{2n-1})$.

Зауважимо, що $m_n=-m_0$.

Розглянуті теореми можна використати для оптимального планування виробничих процесів при розв'язувані наступних ситуацій.

Задача 1. По колу розміщено 5 коробок з деталями (рис. 1). У першій – 19 деталей, у другій – 9 деталей, у третій – 26 деталей, у четвертій – 8 деталей, у п'ятій – 18. Потрібно перекласти деталі з будь-якої коробки в будь-яку сусідню так, щоб в усіх коробках було деталей порівну. Як можна це зробити так, щоб перекласти найменшу кількість деталей?

Перший спосіб розв'язання. Через x позначимо кількість деталей, перекладених з першої коробки в другу (якщо деталі перекладаються з другої коробки в першу, то $x<0$). Усіх деталей у коробках: $19+9+26+8+18=80$. В одній коробці має бути $80:5=16$ (деталей). Складаємо таблицю:

№п/п	Кількість деталей	Кількість деталей, яка повинна бути в коробці	Кількість перекладених деталей
1	19	$19-x=16$	$\|x\|$
2	9	$9+x-a=16$	$a=\|x-7\|$
3	26	$26+(x-7)-b=16$	$b=\|x+3\|$
4	8	$8+(x+3)-c=16$	$c=\|x-5\|$
5	18	$18+(x-5)-d=16$	$d=\|x-3\|$

Позначимо через y загальну кількість перекладених деталей, тоді

$$y=|x|+|x-7|+|x+3|+|x-5|+|x-3|. \tag{2}$$

На рис. 1 представлено схему перекладання деталей. У цій формулі знаки модуля використані тому, що для нас важлива лише кількість перекладених деталей, а не те, у якому напрямі їх перекладали. Потрібно вибрати x так, щоб функція y мала найменше значення. Якщо побудувати графік функції, то з нього видно, що $y_{\min}=15$ при $x=3$. Усіх деталей потрібно перекласти 15: $y_{\min}=15$ при $x=3$.

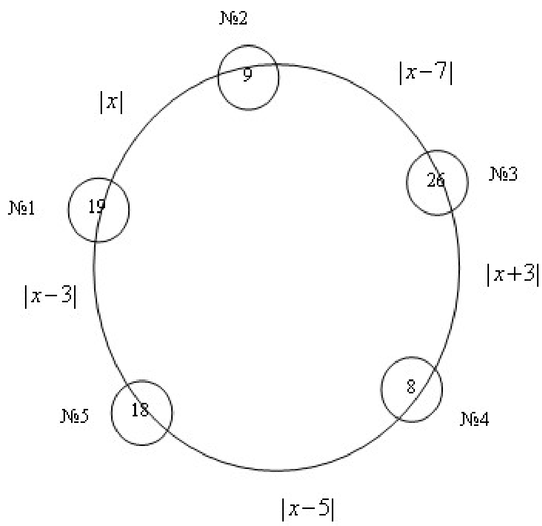

Рис. 1. Схема перекладання деталей

Другий спосіб розв'язання. Розв'яжемо задачу методом опорної функції.

Оскільки графік функції має 5 переломів (непарну кількість), то екстремальне значення вона буде набувати (згідно теореми 2) при такому значенні x, яке є середнім членом послідовності: -3, 0, 3, 6, 7, тобто при $x=3$. Функція (2) буде мати мінімальне значення при $x=3$.

Схема оптимального плану перекладання деталей зображена на рис. 2. Якщо значення виразу є додатним (від'ємним), то деталі треба перекладати в напрямі за годинниковою стрілкою (проти годинникової стрілки).

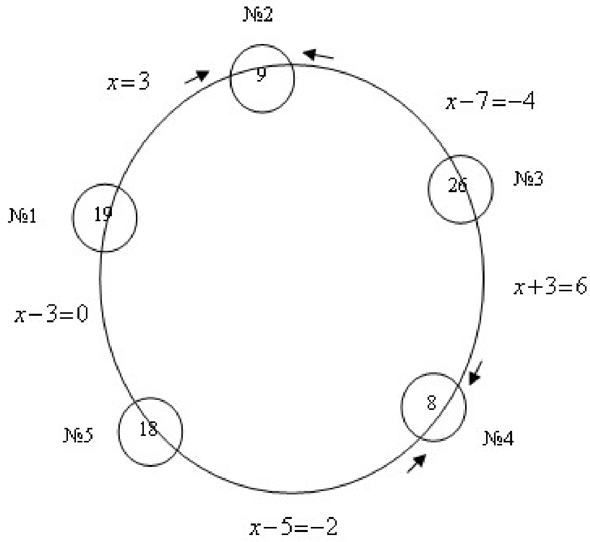

Рис. 2. Схема оптимального плану перекладання деталей

Задача 2. Два цегляних заводи повинні обслуговувати чотири будівельні об'єкти. Заводи і будівельні об'єкти розміщені на однаковій відстані один від одного і сполучені кільцевою дорогою. На рис. 3 показано місце розміщення цегельних заводів і будівельних об'єктів, визначено кількість випуску цегли в добу (із знаком "+") і кількість цегли, яка необхідна для кожного будівельного об'єкта (із знаком "–"). Як організувати найбільш економне перевезення цегли?

Розв'язання. Використовуючи метод розв'язування попередньої задачі, складемо таблицю:

№п/п	Кількість цегли на об'єкті	Кількість цегли, яка має бути на об'єкті	Кількість перевезеної цегли
1	40000	$40000-x=0$	$\lvert x\rvert$
2	–30000	$0+x-a=30000$	$a=\lvert x-30000\rvert$
3	60000	$60000+(x-30000)-b=0$	$b=\lvert x+30000\rvert$
4	–40000	$0+(x+30000)-c=40000$	$c=\lvert x-10000\rvert$
5	–10000	$0+(x-10000)-d=10000$	$d=\lvert x-20000\rvert$
6	–20000	$0+(x-20000)-e=20000$	$e=\lvert x-40000\rvert$

Розв'язування задачі зводиться до дослідження функції

$y=\lvert x\rvert+\lvert x-30000\rvert+\lvert x+30000\rvert+\lvert x-10000\rvert+\lvert x-20000\rvert+\lvert x-40000\rvert$ (рис. 3).

$y_{\min}=110000$ при $10000\le x\le 20000$, де $x\in N$.

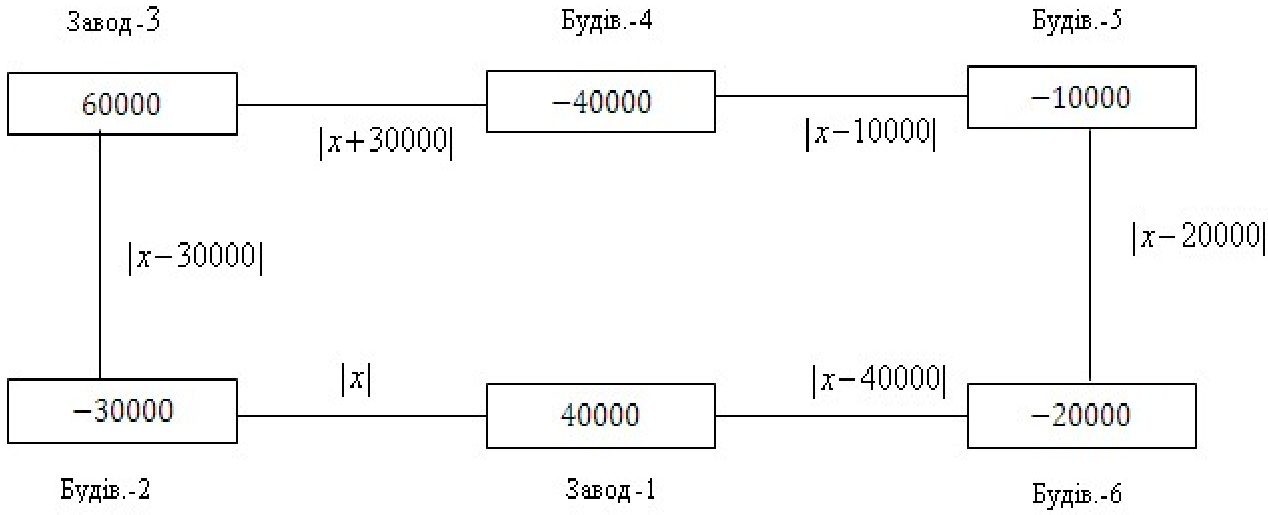

Рис. 3. Схема розміщення цегельних заводів і будівельних об'єктів

Графік цієї функції має шість переломів (парну кількість) при $x=-30$, $x=0$, $x=10$, $x=20$, $x=30$, $x=40$. Тому згідно з теоремою 1 ця функція буде мати екстремальне значення на відрізку $[10000;20000]$, кінці якого є двома середніми членами послідовності: -30, 0, 10, 20, 30, 40.

На відміну від попередньої ця задача має багато розв'язків, кожний з яких є натуральним числом від 10000 до 20000 включно.

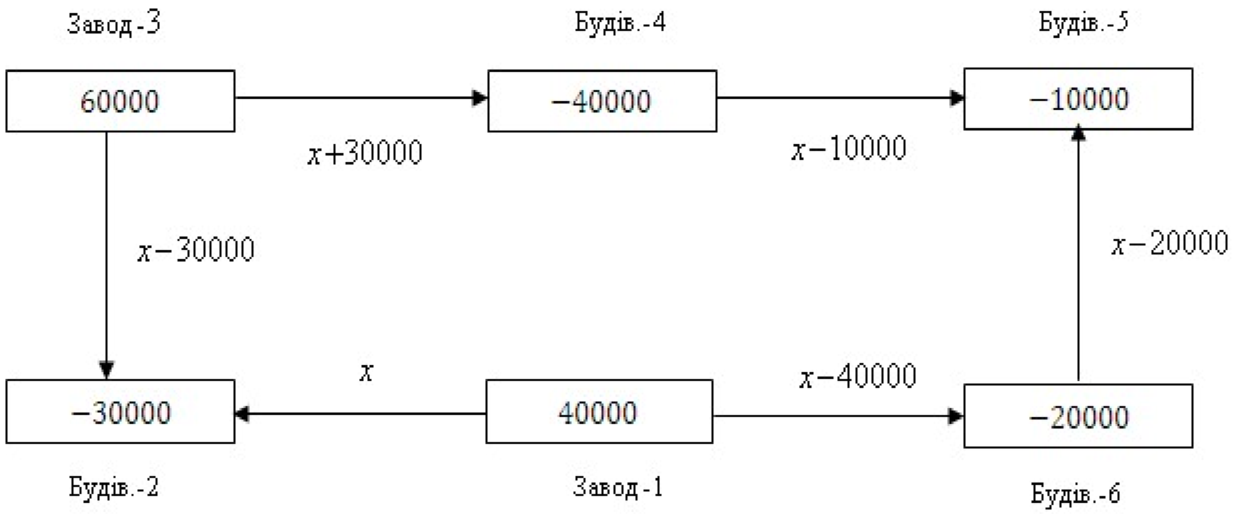

Рис. 4. Схема оптимального плану перевезення

Схема оптимального плану перевезення цегли зображена на рис. 4.

Якщо значення виразу є додатним (від'ємним) числом, то цеглу треба перевозити в напрямі за годинниковою стрілкою (проти годинникової стрілки).

Задача 3. На рис. 5, показано місце і кількість наявного товару (із знаком "+"), а із знаком "–", – кількість необхідного товару. Складіть оптимальний план перевезення товару.

Складемо таблицю:

№п/п	Кількість товару, який є в наявності	Кількість товару, яка має бути у кожному пункті	Кількість перевезеного товару
1	80	10; $80-x=10$	$\lvert x\rvert$
2	0	40; $0+x-a=40$	$a=\lvert x-40\rvert$
3	30	10; $30+(x-40)-b=10$	$b=\lvert x-20\rvert$
4	60	20; $60+(x-20)-c=20$	$c=\lvert x+20\rvert$
5	0	70; $0+(x+20)-d=70$	$d=\lvert x-50\rvert$
6	90	10; $90+(x-50)-e=10$	$e=\lvert x+30\rvert$
7	0	40; $0+(x+30)-k=40$	$k=\lvert x-10\rvert$
8	0	60; $0+(x-10)-p=60$	$p=\lvert x-70\rvert$

Розв’язування задачі зводиться до дослідження функції

$y=|x|+|x-40|+|x-20|+|x+20|+|x-50|+|x+30|+|x-10|+|x-70|$ (рис. 5).

$y_{\min}=220$ при $10\le x\le 20$.

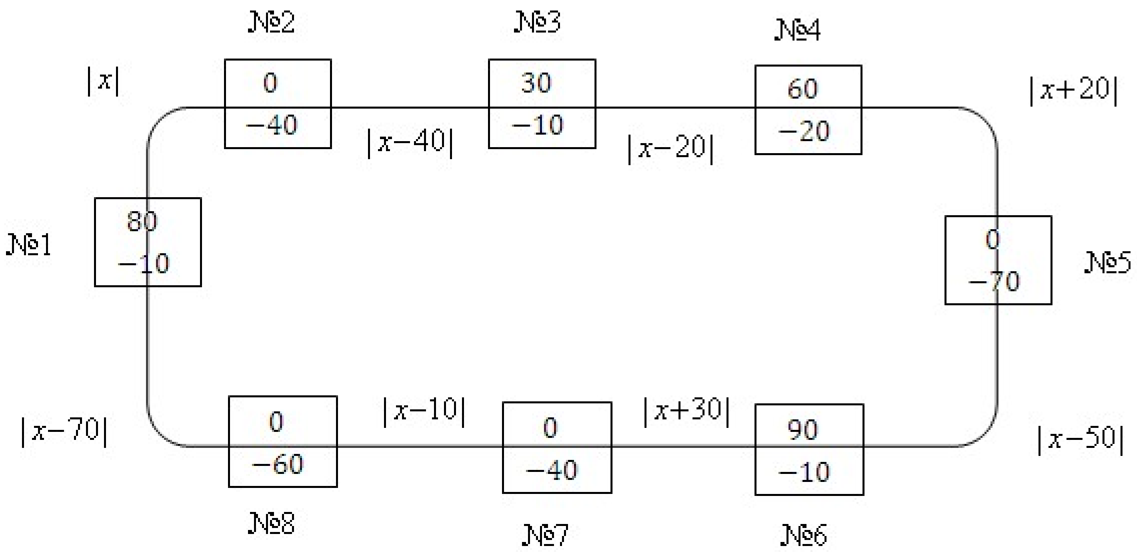

Рис. 5. Схема розміщення товару

Графік цієї функції має вісім переломів при $x=-30$, $x=-20$, $x=0$, $x=10$, $x=20$, $x=40$, $x=50$, $x=70$. Тому згідно з теоремою 1 ця функція буде мати мінімальне значення на відрізку $[10;20]$, кінці якого є двома середніми членами послідовності: -30, -20, 0, 10 20, 40, 50, 70.

На рис. 6 показано оптимальний план перевезення товару. Якщо значення виразу є додатним (від’ємним) числом, то товар треба перевозити в напрямі за годинниковою стрілкою (проти годинникової стрілки).

Висновки. Проведене дослідження свідчить, що трансформація національної економічної системи формує нові умови функціонування системи господарювання. В умовах зростання як внутрішньої так і зовнішньої конкуренції, інтелектуалізації процесів виробництва товарів та послуг розвиток методології побудови і застосування математичного інструментарію аналізу та оптимізації виробничих процесів є стратегічним напрямом становлення економіки знань.

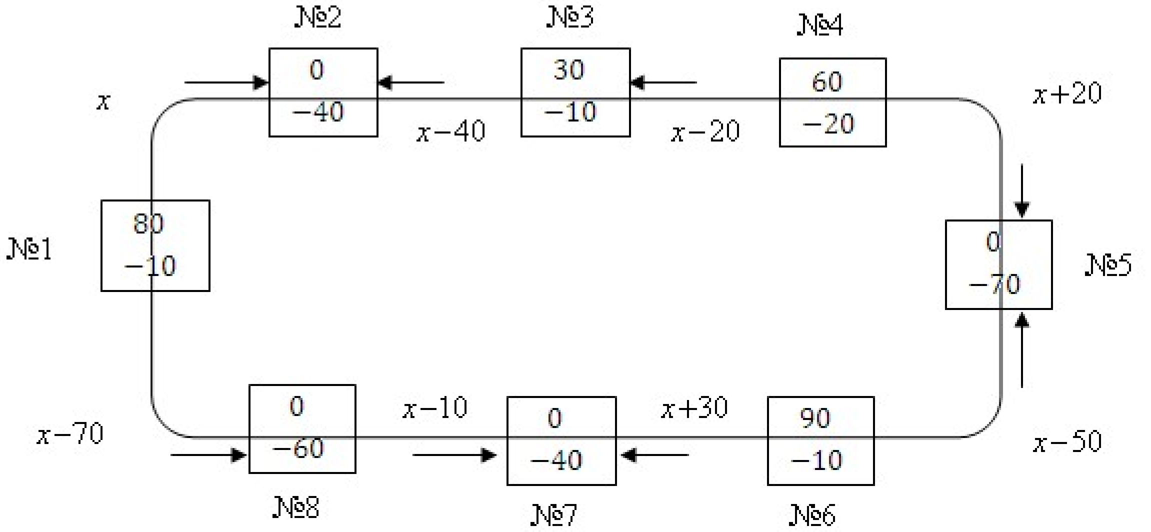

Рис. 6. Схема оптимального плану перевезення товару

Сформовані та доведені в роботі теореми знаходження екстремуму функції з аргументом під знаком модуля доцільно застосовувати для оптимального планування виробничих процесів. Запропоновані методи розв'язування логістичних задач апробовані та забезпечують побудову оптимальних планів транспортування товарів. Таким чином, можна зробити висновок про доцільність використання функції з аргументом під знаком модуля в якості математичної моделі виробничого процесу, а застосування запропонованих методів знаходження екстремуму функцій забезпечить можливість оптимального планування виробничих процесів.

1. Беляева Х.С. Экстремальные задачи / Х.С. Беляева, В. И. Монахов. – М.: Просвещение, 1977. – 144 с.
2. Болтянский В. Г. Математика решает задачи на оптимизацию / В. Г. Болтянский. – М.: Знание, 1977. – 192 с.
3. Возняк Г.М. Прикладные задачи на экстремумы / Г.М. Возняк, В.А. Гусєв. – М.: Просвещение, 1985. – 144 с.
4. Нагибин Ф.Ф. Экстремумы / Ф.Ф. Нагибин. – М.: Просвещение, 1968. – 104 с.

OPTIMAL PLANNING OF LOGISTICS PROCESSES BASED ON THE FUNCTION WITH ARGUMENT UNDER THE MODULUS SIGN

O. Vozniak, O. Holubnyk

Ternopil National Economic University
Ivan Franko National University of Lviv

The role of mathematical tools in the study of economic phenomena and processes is analyzed. Many practical tasks of business activity and a number of important issues of economic theory related to the problem of determining the best, optimal variant solution. Such, for example, are the tasks of choosing the optimal production program of the enterprise, transport tasks, tasks of rational distribution of freight flows and a whole set of problems associated with the optimal planning of the national economy. A huge number of possible variants of activity make it difficult to obtain an optimal plan empirically and expertly. The application of mathematical methods and computing capabilities in planning of activity of economic entities provides rationalization, increase of efficiency of its activity and economic growth. The use of a function with an argument under the modulus sign as a mathematical model of the production process is proposed. The theorems for finding the minimum and maximum values of the investigated function are formed and proved. Depending on the parity n in investigated function, the extremum of the function is found using the first and second theorems, respectively. The optimal plans of production processes using the theorems considered are constructed. Proposed methods of solving logistic problems are tested and provide the construction of optimal plans for transportation of goods. Thus, we can conclude that it is expedient to use the function with an argument under the modulus sign as a mathematical model of the production process, and the application of the proposed methods for finding the extremum of functions will provide an opportunity for optimal planning of production processes.

Keywords: model, mathematical methods, optimal plan, function with argument under the modulus sign, minimum function, maximum function, optimal plan for transportation of goods.