ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ *VISNYK LVIV UNIV*
Сер. прикл. матем. інформ. *Ser. Appl. Math. Comp. Sci.*
2002. Вип. 4. С. 17-22 *2002. No 4. P. 17-22*

УДК 517.956.4

ПРО ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО ВИРОДЖЕНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

О. Возняк

Тернопільська академія народного господарства
вул. Львівська, 11, м. Тернопіль, 46004, e-mail: ovz@tanet.edu.te.ua

Розглянуто один клас вироджених параболічних рівнянь. Для рівнянь з цього класу побудований фундаментальний розв'язок задачі Коші, досліджено його властивості й одержано деякі застосування цих властивостей. Зокрема, знайдено необхідні та достатні умови, за виконання яких розв'язки однорідних рівнянь набувають вигляду інтегралів Пуассона функцій чи узагальнених борельових мір зі спеціальних просторів $L_p^{k(0,a)}$, $1 < p \le \infty$, і $M^{k(0,a)}$.

Ключові слова: вироджені параболічні рівняння, фундаментальний розв'язок задачі Коші, коректна розв'язність задачі Коші, інтегральне зображення.

У 1975 році С.Д.Ейдельман і Г.П.Малицька $[10]$ означили новий клас вироджених параболічних рівнянь довільного порядку, які узагальнюють класичне рівняння дифузії з інерцією А. М. Колмогорова. Задача Коші та якісні властивості таких рівнянь описані у $[4-8]$. Ми для рівнянь з цього класу у випадку, коли наявні виродження на початковій гіперплощині, побудували фундаментальний розв'язок (ФР) задачі Коші, дослідили його властивості, навели теореми про коректну розв'язність задачі Коші та про інтегральне зображення розв'язків для однорідних рівнянь зі слабким виродженням на початковій гіперплощині. Наведені нижче результати аналогічні до одержаних у $[3]$.

Використовуватимемо такі позначення:
n_1, n_2, n_3, n_4 і b – задані натуральні числа, причому $n_1 \ge n_2 \ge n_3 \ge n_4$;

$n \equiv n_1 + n_2 + n_3 + n_4$; $q \equiv \dfrac{2b}{2b-1}$; $\mathbf{Z}_+^r$ – множина всіх r–вимірних мультиіндексів;

$|k_1| \equiv \sum_{j=1}^{n_1} k_{1j}$, якщо $k_1 \equiv (k_{1j}, 1 \le j \le n_1) \in \mathbf{Z}_+^{n_1}$; $M_k \equiv \sum_{l=1}^{4}\sum_{j=1}^{n_l}\left(l - 1 + \dfrac{1}{2b}\right)(k_{lj}+1)$, якщо $k \equiv (k_{lj}, 1 \le j \le n_l, 1 \le l \le 4) \in \mathbf{Z}_+^n$; $\{x \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4),\ \xi \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)\} \subset \mathbf{R}^n$, якщо $\{x_l \equiv (x_{lj}, 1 \le j \le n_l), \xi_l \equiv (\xi_{lj}, 1 \le j \le n_l)\} \subset \mathbf{R}^{n_l}$, $1 \le l \le 4$;

$\partial_{x_1}^{k_1} \equiv \prod_{j=1}^{n_1} \partial_{x_{1j}}^{k_{1j}}$, $\partial_x^k \equiv \prod_{l=1}^{4}\prod_{j=1}^{n_l} \partial_{x_{lj}}^{k_{lj}}$, якщо $x_1 \in \mathbf{R}^{n_1}$, $x \in \mathbf{R}^n$, $k_1 \in \mathbf{Z}_+^{n_1}$, $k \in \mathbf{Z}_+^{n_1}$;

$B(t,\tau) \equiv \int_\tau^t \dfrac{\beta(\gamma)}{\alpha(\gamma)} d\gamma$; $x_{lj}(t,\tau) \equiv \sum_{r=0}^{l-1} \dfrac{1}{r!}[B(t,\tau)]^r x_{(l-r)j}$, $1 \le j \le n_l$, $1 \le l \le 4$;

$x(t,\tau)\equiv\left(x_{lj}(t,\tau), 1\le j\le n_l, 1\le l\le 4\right)$; $E_c(t,x;\tau,\xi)\equiv\exp\left\{-c\sum_{l=1}^{4}\sum_{j=1}^{n_l}\left[B(t,\tau)\right]^{1-lq}\left|x_{lj}(t,\tau)-\xi_{lj}\right|^{q}\right\}$;

$E_c^d(t,x;\tau,\xi)\equiv E_c(t,x;\tau,\xi)\exp\left\{d\int_\tau^t\frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)}\right\}$; $\Pi_H\equiv\left\{(t,x)\,\middle|\,t\in H, x\in\mathbf{R}^n\right\}$;

T – задане додатне число; i – уявна одиниця.

Розглянемо рівняння вигляду

$$(Lu)(t,x)\equiv\left(\alpha(t)\partial_t^1-\beta(t)\left(\sum_{l=2}^{4}\sum_{j=1}^{n_l}x_{(l-1)j}\partial_{x_{lj}}^1+\sum_{0<|k_1|\le 2b}a_{k_1}(t)\partial_{x_1}^{k_1}\right)-a_0(t)\right)u(t,x)=0,$$

$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

де коефіцієнти $a_{k_1}:[0,T]\to\mathbf{C}$, $0<|k_1|\le 2b$, $a_0:(0,T]\to\mathbf{C}$ неперервні й такі, що $\alpha(0)\beta(0)=0$, $\forall t\in(0,T]$: $\alpha(t)>0$, $\beta(t)>0$, β – монотонно неспадна; диференціальний вираз $\partial_t^1-\sum_{|k_1|\le 2b}a_{k_1}(t)\partial_{x_1}^{k_1}$, $t\in[0,T]$, є рівномірно параболічним за Петровським; $\exists A\in\mathbf{R}$ $\forall t\in(0,T]$: $\operatorname{Re}a_0(t)\le A$.

Фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння (1) називатимемо функцію $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n$, таку, що

$$u(t,x)\equiv\int_{\mathbf{R}^n}Z(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi,\ (t,x)\in\Pi_{(\tau,T]}, \tag{2}$$

є розв'язком рівняння (1), який задовольняє умову

$$u(t,x)\big|_{t=\tau}=\varphi(x),\ x\in\mathbf{R}^n, \tag{3}$$

для будь–якого числа $\tau\in(0,T)$ і довільної неперервної та обмеженої функції $\varphi:\mathbf{R}^n\to\mathbf{C}$.

Одним із основних результатів статті є

Теорема 1. *Правильні такі твердження:*

1) *існує єдиний ФР* $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n$, *задачі Коші для рівняння* (1)*;*

2) *для функції* Z *справджується формула*

$$Z(t,x+ix^*;\tau,\xi+i\xi^*)=\Gamma(t,\tau,S)\Big|_{S=W(t,\tau,x,\xi)+iW(t,\tau,x^*,\xi^*)},\ 0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi,x^*,\xi^*\}\subset\mathbf{R}^n,$$

де $W(t,\tau,x,\xi)\equiv\left(W_{lj}(t,\tau,x,\xi), 1\le j\le n_l, 1\le l\le 4\right)$, $W_{lj}(t,\tau,x,\xi)\equiv\left(x_{lj}(t,\tau)-\xi_{lj}\right)\left[B(t,\tau)\right]^{-(l-1)-\frac{1}{2b}}$, *а* $\Gamma(t,\tau,S)$, $S\equiv\left(S_{lj}, 1\le j\le n_l, 1\le l\le 4\right)\in\mathbf{C}^n$, *за фіксованих* t *і* τ *є цілою функцією аргументів,* S_{lj} *порядку зростання* q *і такого ж порядку спадання за дійсних значень аргументів;*

3) *правильні оцінки*

$$\left|\partial_x^k Z(t,x+ix^*;\tau,\xi+i\xi^*)\right|+\left|\partial_\xi^k Z(t,x+ix^*;\tau,\xi+i\xi^*)\right|\le C_k\left[B(t,\tau)\right]^{-M_k}E_c^d(t,x;\tau,\xi)E_{c_1}(t,x^*;\tau,\xi^*),$$

$$0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi,x^*,\xi^*\}\subset\mathbf{R}^n, k\in\mathbf{Z}_+^n, \tag{4}$$

де $C_k>0$, $c>0$, $c_1<0$, *і* $d\in R$*;*

4) *ФР Z має властивість нормальності, а також для нього правильна формула згортки*

$$Z(t,x;\tau,\xi)=\int_{\mathbf{R}^n} Z(t,x;\gamma,\lambda)Z(\gamma,\lambda;\tau,\xi)d\lambda,\ 0<\tau<\gamma<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n; \tag{5}$$

5) *у випадку слабкого виродження, тобто коли інтеграл*

$$\int_0^T \frac{d\gamma}{\alpha(\gamma)} \tag{6}$$

збігається, оцінки (4) *та рівність* (5) *виконуються й за* $\tau=0$, *а оцінну функцію* E_c^d *в* (4) *можна замінити на* E_c.

Як і для вироджених параболічних рівнянь з меншою кількістю змінних [3,7, 10], побудову ФР задачі Коші для рівняння (1) виконують за допомогою методу перетворення Фур'є, згідно з яким розв'язок задачі (1), (3) шукаємо у вигляді

$$u(t,x)=\left(F^{-1}[v(t,\xi)]\right)(t,x),\ (t,x)\in\Pi_{(\tau,T]}.$$

Для знаходження функції v одержуємо таку задачу Коші з частинними похідними першого порядку:

$$\left(\alpha(t)\partial_t^1+\beta(t)\left(\sum_{l=2}^{4}\sum_{j=1}^{n_l}\xi_{lj}\partial^1_{\xi_{(l-1)j}}-\sum_{0<|k_1|\le 2b}a_{k_1}(t)(i\xi_1)^{k_1}\right)-a_0(t)\right)v(t,\xi)=0,\ (\tau,\xi)\in\Pi_{(\tau,T]},$$

$$v(t,\xi)\big|_{t=\tau}=F^{-1}[\varphi](\xi),\ \xi\in\mathbf{R}^n.$$

Використовуючи для розв'язування цієї задачі метод характеристик і виконуючи необхідні перетворення, отримуємо формулу (2) для розв'язку задачі (1), (3). У цьому разі ФР Z визначена рівністю

$$Z(t,x;\tau,\xi)\equiv[B(t,\tau)]^{-M_0}\left(F^{-1}[Q(t,\tau,\lambda)]\right)(t,\tau,W(t,\tau,x,\xi)),\ 0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbf{R}^n,$$

де

$$Q(t,\tau,\Lambda)\equiv\exp\left\{\int_0^1\sum_{0<|k_1|\le 2b}a_{k_1}\left(P^{-1}[B(t,\tau)\gamma]\right)i^{|k_1|}[B(t,\tau)]^{1-\frac{|k_1|}{2b}}\prod_{l=1}^{4}\left(\sum_{r=0}^{l-1}\frac{1}{r!}\gamma^r\lambda_{r+1}^{(5-l)}\right)^{k_1^{(5-l)}}d\gamma\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{\int_\tau^t\frac{a_0(\gamma)}{\alpha(\gamma)}d\gamma\right\},\quad P(t)\equiv B(t,\tau),\quad P^{-1} \text{ – обернена функція до } P;$$

$\lambda\equiv(\lambda_{lj},1\le j\le n_l,1\le l\le\ \ \le 4)\in\mathbf{R}^n$, $\lambda_l\equiv(\lambda_{lj},1\le j\le n_l)$, $1\le l\le 4$; $\lambda_l^{(1)}\equiv(\lambda_{lj},1\le j\le n_4)$, $1\le l\le 4$, $\lambda_l^{(h)}\equiv(\lambda_{lj},n_{6-h}+1\le\ \ \le j\le n_{5-h})$, $1\le l\le 6-h$, $2\le h\le 4$; $k_1\equiv(k_1^{(h)},1\le h\le 4)$.

Отже, дослідження властивостей ФР Z зводиться до дослідження властивостей функції Q. Виконавши його і використавши лему 1.1 з [9] про перетворення Фур'є цілих функцій, доведемо твердження 1-3 теореми 1. Твердження 4) можна довести стандартним способом [7,9] за допомогою відповідної формули Гріна–Остроградського.

Властивості ФР Z дають змогу дослідити коректну розв'язність неоднорідного рівняння $Lu=f$ з початковою умовою $u(t,x)\big|_{t=0}=\varphi(x)$, $x\in\mathbf{R}^n$, у випадку слабкого виродження і без початкової умови, якщо є сильне виродження, тобто коли інтеграл (6) розбігається. Аналогічні результати для параболічних за І. Г. Петровським рівнянь наведено в $[2]$.

Якщо виродження слабке, то можна одержати для рівняння (1) результати, які аналогічні наведеним у $[1, 3, 6]$ і стосуються інтегральних зображень та описання множин початкових значень розв'язків. Щоб їх сформулювати, наведемо спочатку означення необхідних норм і просторів.

Нехай $0 < c_0 < c$, $a \equiv (a_l, 1 \le l \le 4)$, де c – стала з оцінок (4), а числа a_l, $1 \le l \le 4$, такі, що $0 \le a_l < c_0 T^{-1+lq}$, $1 \le l \le 4$; $k_l(t, a_l) \equiv c_0 a_l \left(c_0^{2b-1} - a_l^{2b-1}(T - B(T,t))^{2b(l-1)+1}\right)^{1-q}$, $0 \le t \le T$, $1 \le l \le 4$, $k(t,a) \equiv (k_l(t,a_l), 1 \le l \le 4)$. Зауважимо, що $k_l(t,a_l) \ge k_l(0,a_l)$, $t \in [0,T]$, $1 \le l \le 4$, і правильна нерівність

$$E_{c_0}(t,x;0,\xi)\phi(0,a,\xi) \le \phi(t,a,x),\ t \in [0,T],\ \{x,\xi\} \subset \mathbf{R}^n,$$

де $\phi(t,a,x) \equiv \exp\left\{\sum_{l=1}^{4} k_l(t,a_l) \sum_{j=1}^{n_l} \left|x_{lj}(t,0)\right|^q\right\}$.

Нехай $1 \le p \le \infty$, $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$, – задана комплекснозначна функція, яка при кожному $t \in [0,T]$ вимірна за x. Для $t \in [0,T]$ означимо норми

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \equiv \left\|u(t,x)(\phi(t,a,x))^{-1}\right\|_{L_p(\mathbf{R}^n)}$$

і через $L_p^{k(0,a)}$, $1 \le p \le \infty$, позначимо простір усіх вимірних функцій $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$, для яких норма $\|\varphi\|_p^{k(0,a)}$ є скінченною. Нехай $M^{k(0,a)}$ – простір усіх комплекснозначних узагальнених мір μ, які визначені на σ–алгебрі борельових множин простору $\mathbf{R}^n$ і задовольняють умову

$$\|\mu\|^{k(0,a)} \equiv \int_{\mathbf{R}^n} (\phi(0,a,x))^{-1} d|\mu|(x) < \infty,$$

де $|\mu|$. – повна варіація μ.

Приймемо ще

$$s_l(t,a_l) \equiv l^{q-1} k_l(t,a_l) + \sum_{r=l+1}^{4} r^{q-1}(r-l)^{-q}[B(t,0)]^{(r-l)q} k_r(t,a_r),\ 1 \le l \le 4;$$

$$s(t,a) \equiv (s_l(t,a), 1 \le l \le 4),\ \|u(t,\cdot)\|_p^{s(t,a)} \equiv \left\|u(t,x)(\phi(0,s(t,a),x))^{-1}\right\|_{L_p(\mathbf{R}^n)}.$$

Зауважимо, що $\|u(t,\cdot)\|_p^{s(t,a)} \le \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)}$, $0 \le t \le T$, $1 \le p \le \infty$.

У наступних теоремах припускаємо, що інтеграл (6) збігається.

Теорема 2. *Для будь–яких функцій* $\varphi \in L_p^{k(0,a)}$, $1 \le p \le \infty$, *і узагальненої міри* $\mu \in M^{k(0,a)}$ *формули*

$$u(t,x) = \int_{\mathbf{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi,\ (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{7}$$

$$u_0(t,x) = \int_{\mathbf{R}^n} Z(t,x;0,\xi)d\mu(\xi),\ (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{8}$$

визначають єдині розв'язки рівняння (1) *у шарі* $\Pi_{(0,T]}$, *які мають такі властивості: існує стала* $C>0$, *не залежна від* φ *та* μ *і така, що*

$$\forall t\in(0,T]: \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \le C\|\varphi\|_p^{k(0,a)},$$

$$\forall t\in(0,T]: \|u_0(t,\cdot)\|_1^{k(t,a)} \le C\|\mu\|^{k(0,a)};$$

при $1\le p<\infty$ $\lim\limits_{t\to 0+}\|u(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_p^{s(t,a)}=0$, *а при* $p=\infty$ *і для функції* (8) $u(t,\cdot)\underset{t\to 0+}{\to}\varphi$, $u_0(t,\cdot)\underset{t\to 0+}{\to}\mu$ *слабко, тобто для будь-яких* ψ *відповідно з просторів* $L_1^{-s(T,a)}$ *і* $C_0^{-s(T,a)}$ *правильні співвідношення*

$$\lim_{t\to 0+}\int_{\mathbf{R}^n}\psi(x)u(t,x)dx=\int_{\mathbf{R}^n}\psi(x)\varphi(x)dx,$$

$$\lim_{t\to 0+}\int_{\mathbf{R}^n}\psi(x)u_0(t,x)dx=\int_{\mathbf{R}^n}\psi(x)d\mu(x),$$

де $L_1^{-s(T,a)}$ – *простір вимірних функцій* $\psi:\mathbf{R}^n\to\mathbf{C}$, *для яких є скінченною норма*

$$\|\psi\|_1^{-s(T,a)}\equiv\|\psi(x)\phi(0,s(T,a),x)\|_{L_1(R^n)},$$

а $C_0^{-s(T,a)}$ – *простір неперервних функцій* $\psi:\mathbf{R}^n\to\mathbf{C}$ *таких, що при* $|x|\to\infty$

$$|\psi(x)|\phi(0,s(T,a),x)\to 0.$$

Теорема 3. *Нехай* u – *розв'язок рівняння* (1) *у шарі* $\Pi_{(0,T]}$, *який задовольняє умову*

$$\forall t\in(0,T]: \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)}\le C \tag{9}$$

з деякими $C>0$ *і* $1\le p\le\infty$. *Тоді при* $1<p\le\infty$ *існує єдина функція* $\varphi\in L_p^{k(0,a)}$, *а при* $p=1$ – *єдина узагальнена міра* $\mu\in M^{k(0,a)}$ *такі, що розв'язок* u *можна зобразити, відповідно, у вигляді* (7) *і* (8).

Наслідок. *З теорем 2 і 3 випливають такі твердження:*

1) *простори* $L_p^{k(0,a)}$, $1<p\le\infty$, *і* $M^{k(0,a)}$ *є множинами початкових значень розв'язків рівняння* (1) *тоді і тільки тоді, коли розв'язки задовольняють умову* (9) *при* $1<p\le\infty$ *і* $p=1$, *відповідно;*

2) *для зображення розв'язків рівняння* (1) *у вигляді* (7) *чи* (8) *з* $\varphi\in L_p^{k(0,a)}$, $1<p\le\infty$, *і* $\mu\in M^{k(0,a)}$ *необхідно й досить, щоб виконувалась умова* (9).

Доведення теорем 2 і 3 досить громіздкі, вони потребували розвитку методик, викладених в $[1, 6]$.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Возняк О.Г.* Про інтегральне зображення розв'язків параболічних систем з виродженням // Матеріали Міжнар. матем. конф., присвяченої пам'яті Ганса Гана. Чернівці, 1995. С. 42-60.
2. *Возняк О. Г., Івасишен С.Д.* Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. АН України. 1994. № 6. С. 7-10.

3. *Возняк О.Г., Івасишен С.Д.* Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь та їх застосування // Доп. НАН України. 1996. №10. С. 11-16.
4. *Ейдельман С.Д., Тичинська Л.М.* Побудова фундаментальних розв'язків деяких вироджених параболічних рівнянь довільного порядку // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1979. №11. С. 896-899.
5. *Ивасишен С.Д., Андросова Л.М.* Об интегральном представлении и начальных значениях решений некоторых вырождающихся параболических уравнений // Докл. АН УРСР. Сер. А. 1989. №1. С.16-19.
6. *Ивасишен С.Д., Андросова Л.М.* Об интегральном представлении решений одного класса вырожденных параболических уравнений типа Колмогорова // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, №3. С. 479-487.
7. *Ивасишен С.Д., Андросова Л.М.* Фундаментальные решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений / Чернов. ун-т. Черновцы, 1989. 62 с. Деп. в УкрНИИНТИ 16.06.89, №1761. Ук89.
8. *Малицкая А.П.* Построение фундаментальных решений некоторых ультрапараболических уравнений высокого порядка // Укр. матем. журн. 1985. Т. 37, №6. С.713-718.
9. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. М., 1964.
10. *Эйдельман С.Д., Малицкая А.П.* О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, №7. С.1316-1330.

ON FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR ONE DEGENERATE PARABOLIC EQUATION

O. Voznyak

Ternopil Academy of National Economy
Lvivska str, 11, Ternopil, 46004, e-mail: ovz@tanet.edu.te.ua

The one class of the degenerate parabolic equations are considered. Fundamental solution of the Cauchy problem for such equations are constructed, his properties are investigated, and some applications of these properties are obtained. Separately, necessary and sufficient conditions are found under which solutions of the homogeneous equations are represented in the form of Poisson's integrals of the functions or generalized Borel measures from special spaces $L_p^{k(0,a)}$, $1 < p \le \infty$, and $M^{k(0,a)}$.

Key words: degenerate parabolic equations; fundamental solution of the Cauchy problem, correct solvability of the Cauchy problem, integral representation.

Стаття надійшла до редколегії 25.10.2001
Прийнята до друку 12.03.2002