ФОРМУВАННЯ РИНКОВОЇ ЕКОНОМІКИ В УКРАЇНІ. 2011. Вип. 23. Ч. 2. С. 241–247.

FORMATION OF MARKET ECONOMY IN UKRAINE. 2011. Is. 23. Pt. 2. P. 241–247.

УДК 331.56

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ БЕЗРОБІТТЯ В ПЕРІОД КРИЗИ

В. Приймак[1], Н. Ковалевич[1], О. Возняк[2]

[1]Львівський національний університет імені Івана Франка
[2]Тернопільський національний економічний університет

Побудовано моделі розвитку безробіття в регіоні у виді задач Коші для диференціальних рівнянь першого порядку. Знайдено розв'язки цих задач. Запропоновано використовувати їх для можливості прогнозування і регулювання безробіття на різних етапах економічної кризи.

Ключові слова: безробіття, економічна криза, моделювання, диференціальне рівняння, задача Коші.

Для можливості регулювання безробіття необхідно вміти робити його детальний аналіз, а також будувати моделі його трансформації. Загальний аналіз безробіття виконують статистичні органи кожної держави. Однак, часом необхідні більш глибокі дослідження безробіття регіону чи країни в цілому. В цьому випадку його поділяють на види. Головними з них є фрикційне, структурне і циклічне безробіття. Перші два з них є неминучими на будь-якому етапі розвитку економіки. Циклічне безробіття виникає в період кризи. На етапі економічного піднесення воно дорівнює нулю.

Під час економічного зростання виробництво постійно розширюється, створюються нові робочі місця, кількість безробітних зменшується. Протилежна картина спостерігається в період кризи. Скорочення виробництва веде до зменшення валового внутрішнього продукту і спаду попиту на робочу силу. Внаслідок цього зростає безробіття. Це зростання продовжується до визначеного моменту часу і далі, при перших ознаках оздоровлення економіки, зупиняється, а потім починає знижуватися [1, с. 155].

Цілком уникнути безробіття неможливо. Хоча воно спричиняє значні економічні втрати через зменшення вироблюваного національного продукту. Крім цього безробіття зумовлює великі соціальні втрати. Адже втрата роботи на певний період часу негативно позначається не тільки на кваліфікації працівника, зменшенні його доходів і, як наслідок, його фізичному здоров'ї, але й на психіці людини.

«Надмірно високий рівень безробіття викликає посилення економічного розшарування суспільства, зубожіння окремих груп населення, тиск на державний бюджет, покликаний необхідністю забезпечення немаєтних, нарешті, практично неминучі соціальні конфлікти» [2, с. 59]. Тому державна політика кожної держави у сфері праці спрямована на зменшення безробіття. Хоча штучна підтримка високого, економічно невиправданого рівня зайнятості в регіоні чи державі також погано. Це неминуче супроводжується низькою ефективністю виробництва, інфляцією попиту і т. п. Найліпша ситуація на ринку праці буде тоді, коли рівень безробіття не надто низький і не перевищує природної його норми.

Таким чином, дії держави в період кризи мають бути спрямовані не тільки на забезпечення соціального захисту безробітних, а й на регулювання обсягів, структури і тривалості безробіття. Сприятимуть цьому запропоновані в даній роботі економіко-математичні моделі трансформації безробіття в період кризи.

Крім державних органів дослідженням безробіття займаються науковці. Проблемам аналізу безробіття, його моделювання і прогнозування, соціального захисту від нього, дослідженню особливостей його регулювання присвячено багато наукових праць. Зокрема, в роботі [3] досліджено структуру безробіття економічно активного населення України з урахуванням зареєстрованого, незареєстрованого і часткового безробіття, а в науковій праці [4] побудовано економетричну модель впливу соціально-економічних чинників на тривалість пошуку роботи безробітними. Дослідженню прихованого безробіття та вивченню методів вимірювання його величини присвячено наукові роботи [5, 6] та інші. Однак, в літературних джерелах відсутні публікації, в яких би розглядалися динамічні моделі розвитку безробіття в регіоні. Тому дана наукова робота є актуальною.

Метою даного дослідження є побудова та розв’язання динамічних моделей трансформації безробіття в регіоні чи всій країні для різних фаз економічної кризи.

Позначимо через $Б_i(t)$ кількість безробітних *i*-го регіону в момент часу t. Нехай в початковий момент $t=0$ ця величина дорівнює $Б_{i0}$.

Для побудови динамічної моделі трансформації безробіття в загальному випадку приймемо, що швидкість зміни кількості безробітних *i*-го регіону дорівнює деякій функції $\varphi_i(t)$ від часу t. Оскільки ця швидкість виражається похідною $\frac{dБ_i(t)}{dt}$, то отримаємо таке диференціальне рівняння:

$$\frac{dБ_i(t)}{dt}=\varphi_i(t). \qquad (1)$$

Помноживши (1) на dt та інтегруючи отриманий вираз, будемо мати

$$Б_i(t)=\int\varphi_i(t)dt+C_{i1}, \qquad (2)$$

де C_{i1} – стала інтегрування. Вона визначається з початкових умов $Б_i(0)=Б_{i0}$.

Залежність (2) дозволяє записати закон зміни безробіття в *i*-му регіоні в загальному випадку. Але функція $\varphi_i(t)$ може бути залежною не тільки від часу t, але й від кількості безробітних $Б_i(t)$. Тоді розв’язок рівняння (1) ускладнюється. Нам потрібно буде попередньо розділити змінні, якщо така процедура можлива, або виходити з положення, яке склалося, іншим можливим способом.

Таким чином, знайти конкретний вираз правої частини залежності (2) в загальному випадку не має можливості. Тому розглянемо часткові випадки функції $\varphi_i(t)$, виходячи з деяких логічних припущень про швидкість зміни кількості безробітних *i*-го регіону. Оскільки номер регіону в запропонованих моделях не відіграє принципового значення, до для спрощення викладу матеріалу в подальших моделях будемо його опускати.

З початком економічної кризи виробництво в регіонах країни та загальнодержавному масштабі починає скорочуватись і відбувається поступове вивільнення зайнятих на ньому працівників. Як наслідок – кількість безробітних збільшується. Чим більше в регіоні зайнятих, тим швидше зростає безробіття. Тому, в першу чергу, треба розглянути таку модель зміни кількості безробітних:

$$\frac{dБ(t)}{dt}=k_1З(t), \qquad (3)$$

де $З(t)$ – кількість зайнятих в регіоні в момент часу t;

k_1 – коефіцієнт пропорційності для даного регіону $(k_1>0)$.

Як відомо, сума кількості зайнятих і кількості безробітних – це робоча сила даного регіону. Тобто, $З(t)+Б(t)=РС(t)$. Звідси $З(t)=РС(t)-Б(t)$. Припустивши, що за період часу, для якого розглянута модель буде придатною, сума кількості зайнятих і кількості безробітних не зміниться, останню рівність можна записати так: $З(t)=РС-Б(t)$. Тут $РС$ стала величина. Тепер, з урахуванням вищесказаного, рівняння (3) прийме такий вигляд:

$$\frac{dБ(t)}{dt} = k_1 (PC - Б(t)). \tag{4}$$

Для того, щоб знайти загальний розв'язок $Б(t)$ цього рівняння як явну функцію від часу t, спочатку в диференціальному рівнянні (4) розділимо змінні:

$$\frac{dБ(t)}{PC - Б(t)} = k_1 dt, \tag{5}$$

а далі подамо його у вигляді

$$d\ln(PC - Б(t)) = -k_1 dt. \tag{6}$$

Інтегруючи останню рівність, отримаємо

$$\ln(PC - Б(t)) = -k_1 t + C_1, \tag{7}$$

де C_1 – стала інтегрування, яку визначають з початкових умов.

Звідси

$$Б(t) = PC - e^{C_1} e^{-k_1 t}. \tag{8}$$

Оскільки при $t = 0$ $Б(0) = Б_0$, то з (8) маємо

$$e^{C_1} = PC - Б_0. \tag{9}$$

Підставляючи (9) у співвідношення (8), розв'язок рівняння (4) при заданих початкових умовах запишемо у виді:

$$Б(t) = PC - (PC - Б_0)e^{-k_1 t}. \tag{10}$$

Рівняння (3) можна використовувати при моделюванні трансформації безробіття в деякі періоди кризи, але не в усі. Зокрема в початковий період кризи кількість безробітних збільшується, а чисельність зайнятих зменшується. В той же час швидкість зміни функції, яка відображає кількість безробітних, є не тільки додатною величиною, а й зростає (її прискорення додатне і вгнута вона вниз) [1, С. 155]. Тобто

$$\frac{dБ(t)}{dt} > 0, \quad \frac{d^2Б(t)}{dt^2} > 0. \tag{11}$$

Враховуючи сказане, для моделювання динаміки безробіття на початковому етапі кризи можна запропонувати такі диференціальні рівняння:

$$\frac{dБ(t)}{dt} = k_2 Б(t), \tag{12}$$

$$\frac{dБ(t)}{dt} = k_3 З(t) Б(t), \tag{13}$$

де k_2 і k_3 – коефіцієнти пропорційності для даного регіону. Для цього етапу кризи $k_2 > 0$ і $k_3 > 0$.

Перевіримо виконання умови (11) для розв'язків рівнянь (12), (13).

Оскільки кількості безробітних $Б(t)$ і зайнятих $З(t)$ є додатними величинами, то перша нерівність умови (11) для обох розв'язків є очевидною.

Перш ніж перейти до перевірки другої нерівності умови (11), виразимо в рівнянні (13) кількість зайнятих через чисельність безробітних з урахуванням припущення про сталість робочої сили $З(t) = PC - Б(t)$. Таким чином замість (13) отримуємо таку залежність:

$$\frac{dБ(t)}{dt} = k_3 (PC - Б(t)) Б(t). \tag{14}$$

Знайдемо похідні від обох частин кожного з цих рівнянь (12), (14) за часом t. Отримаємо такі співвідношення:

$$\frac{d^2Б(t)}{dt^2} = k_2 \frac{dБ(t)}{dt}, \qquad \frac{d^2Б(t)}{dt^2} = k_3 (PC - 2Б(t)) \frac{dБ(t)}{dt}.$$

Враховуючи ці залежності, першу нерівність умови (11) і те, що $PC > 2Б(t)$, очевидною є і друга нерівність цієї умови.

Тепер знайдемо розв'язки рівнянь (12), (14).

Залежність (12) є математичною моделлю досить простого типу зростання. Виходячи з неї, кількість безробітних $Б(t)$ можна знайти за допомогою процедур, які аналогічні використаним нами при розв'язуванні рівняння (4) – розділенням змінних та інтегруванням. Виконавши ці процедури будемо мати

$$Б(t) = e^{C_2} e^{k_2 t} . \tag{15}$$

Знайшовши сталу інтегрування C_2 з початкової умови $Б(0) = Б_0$, розв'язок диференціального рівняння (12) при заданих початкових умовах запишемо у вигляді:

$$Б(t) = Б_0 e^{k_2 t} . \tag{16}$$

Знайти аналітичний вираз функції $Á(t)$, яка б задовольняла диференціальному рівнянню (14) можна також за допомогою розділення змінних та інтегрування. Розділивши змінні, замість (16) будемо мати:

$$\frac{dБ(t)}{(PC - Б(t))Б(t)} = k_3 dt . \tag{17}$$

Розклавши в (17) правильний дріб $\dfrac{1}{(PC - Б(t))Б(t)}$ на суму елементарних дробів $\dfrac{1}{PC \cdot (PC - Б(t))} + \dfrac{1}{PC \cdot Б(t)}$ і помноживши отриману залежність на $ĐÑ$, будемо мати таке рівняння:

$$\frac{dБ(t)}{PC - Б(t)} + \frac{dБ(t)}{Б(t)} = k_3 \cdot PC \cdot dt . \tag{18}$$

Подавши залежність (18) у вигляді

$$d \ln(PC - Б(t)) - d \ln Б(t) = d \ln \frac{PC - Б(t)}{Б(t)} = -k_3 \cdot PC \cdot dt \tag{19}$$

і інтегруючи її, отримаємо

$$\ln \frac{PC - Б(t)}{Б(t)} = -k_3 \cdot PC \cdot t + C_3 , \tag{20}$$

звідки

$$\frac{PC - Б(t)}{Б(t)} = e^{-k_3 \cdot PC \cdot t} e^{C_3} . \tag{21}$$

Оскільки значення функції $Б(t)$ в початковий момент часу $t = 0$ дорівнює $Б_0$, то

$$e^{C_3} = \frac{PC - Б_0}{Б_0} = \frac{PC}{Б_0} - 1 , \tag{22}$$

а замість (21) можна записати

$$\frac{PC - Б(t)}{Б(t)} = (\frac{PC}{Б_0} - 1) e^{-k_3 \cdot PC \cdot t} . \tag{23}$$

Отримане алгебраїчне рівняння розв'язуємо відносно $Б(t)$. В результаті знайдемо розв'язок рівняння (14) за заданих початкових умов

$$Б(t) = \frac{PC}{1 + \alpha \cdot e^{-k_3 \cdot PC \cdot t}} , \tag{24}$$

де $\alpha = \dfrac{PC}{Б_0} - 1$.

Як було сказано вище, в початковий період кризи прискорення зміни кількості безробітних (друга похідна за часом від функції кількості безробітних) додатне. З часом величина цього прискорення зменшується до нуля і далі стає від'ємною [1, С. 155]. Тенденцію зміни функції кількості безробітних для часу, який близький до моменту рівності прискорення нулю можна відобразити такою моделлю:

$$\frac{dБ(t)}{dt} = k_4, \tag{25}$$

де коефіцієнт k_4, виходячи з умови зростання безробіття, додатний. Як відомо, перша похідна додатна від лінійно зростаючої функції. Тому розв'язком рівняння (25) є функція

$$Б(t) = k_4 t + C_4. \tag{26}$$

Враховуючи початкові умови $Б(0) = Б_0$, стала інтегрування дорівнює $C_4 = Б_0$. Тому для розглянутого періоду кризи залежність кількості безробітних регіону від часу за заданих початкових умов можна апроксимувати такою функцією:

$$Б(t) = k_4 t + Б_0. \tag{27}$$

Розглянемо наступні етапи кризи. З часом, після рівності нулю неперервного абсолютного прискорення функції безробіття, воно стає від'ємним і далі продовжує зменшуватися. Неперервний абсолютний приріст в цей момент будучи додатним також зменшується до нуля і далі стає від'ємним [1, С. 155]. Тому перш, ніж перейти до оприлюднення математичної моделі динаміки безробіття для цього періоду кризи, зупинимось на викладенні тих логічних міркувань, які покладені нами в основу її побудови.

Як показують наші розрахунки, величина природного рівня безробіття в Україні в передкризовий період була значно більшою його реального значення. Не вникаючи в причини такої ситуації зауважимо, що в нашій країні перед початком кризи був резерв зростання безробіття до його природної норми. Враховуючи те, що природне безробіття є резервом робочої сили, що забезпечує можливість швидкого міжрегіонального і міжгалузевого її перерозподілу відповідно до коливань попиту і обумовлених ними коливань попиту виробництва на неї [2, с. 59], державне регулювання ринку праці повинно бути спрямоване на зменшення перевищення величини реального рівня безробіття його природної норми, або взагалі не перевищення цієї норми.

Припустимо, що за рахунок ефективності державного регулювання ринку праці максимальна кількість безробітних в регіоні не може перевищити величини $Б_{\max}$. Зокрема, ця величина може дорівнювати добутку природного рівня безробіття і робочої сили $k_{пр} \cdot PC$. Виходячи зі сказаного, одним з варіантів моделі для визначення функції безробіття на розглянутому етапі кризи може бути таке диференціальне рівняння

$$\frac{dБ(t)}{dt} = k_5 З(t)(Б_{\max} - Б(t)). \tag{28}$$

при початкових умовах $Б(0) = Б_0$. Тут k_5 – додатний коефіцієнт пропорційності для даного регіону.

Тут для функції $Б(t)$ справджується умова вгнутості догори, оскільки $З(t) = PC - Б(t) > 0$, $Б_{\max} > Б(t)$ і $\dfrac{d^2Б(t)}{dt^2} = k_5(-PC - Б_{\max} + 2Б(t))\dfrac{dБ(t)}{dt} < 0$.

Для знаходження розв'язку розглянутої задачі виразимо кількість зайнятих через чисельність безробітних і в отриманому диференціальному рівнянні розділимо змінні. В результаті будемо мати

$$\frac{dБ(t)}{(PC - Б(t))(Б_{\max} - Б(t))} = k_5 dt. \tag{29}$$

Замінивши ліву частину рівняння (29) різницею елементарних дробів, отримаємо таку залежність:

$$\frac{dБ(t)}{(PC-Б_{\max})(Б_{\max}-Б(t))}-\frac{dБ(t)}{(PC-Б_{\max})(PC-Б(t))}=k_5dt\,. \qquad (30)$$

Помножимо цю рівність на $PC-Б_{\max}$ і перетворимо її до такого вигляду:

$$d\ln(PC-Б(t))-d\ln(Б_{\max}-Б(t))=d\ln\frac{PC-Б(t)}{Б_{\max}-Б(t)}=k_5\cdot(PC-Б_{\max})\cdot dt\,. \qquad (31)$$

Інтегруючи (31), знайдемо

$$\ln\frac{PC-Б(t)}{Б_{\max}-Б(t)}=k_5\cdot(PC-Б_{\max})\cdot t+C_5\,, \qquad (32)$$

або

$$\frac{PC-Б(t)}{Б_{\max}-Б(t)}=e^{k_5(PC-Б_{\max})\cdot t}e^{C_5}\,. \qquad (33)$$

З початкової умови виходить, що $e^{C_5}=\frac{PC-Б_0}{Б_{\max}-Б_0}$. Тому рівність (33) запишеться так:

$$\frac{PC-Б(t)}{Б_{\max}-Б(t)}=\frac{PC-Б_0}{Б_{\max}-Б_0}e^{k_5(PC-Б_{\max})\cdot t}\,. \qquad (34)$$

Розв'язавши рівність (34) відносно $Б(t)$, остаточно отримаємо розв'язок рівняння (28) за заданих початкових умов

$$Б(t)=\frac{\alpha\cdot Б_{\max}e^{k_5(PC-Б_{\max})\cdot t}-\beta\cdot PC}{\alpha\cdot e^{k_5(PC-Б_{\max})\cdot t}-\beta}\,, \qquad (35)$$

де $\alpha=\frac{PC}{Б_0}-1$, $\beta=\frac{Б_{\max}}{Б_0}-1$.

Досягнувши максимальної величини, рівень безробіття в регіоні починає помалу знижуватися. Для моделювання його трансформації в цьому випадку можна скористатись диференціальними рівняннями (12), (14) чи (25) з від'ємними коефіцієнтами k_2, k_3 і k_4. Причому в співвідношенні (14) параметр PC треба буде замінити на $Б_{\max}$.

Запропоновані в роботі диференціальні рівняння і їх розв'язки доцільно використовувати при моделюванні та прогнозуванні трансформації безробіття в регіоні чи всій країні на різних етапах розвитку економічної кризи. Цими моделями можна скористатись при проведенні аналізу деяких інших економічних процесів та короткостроковому прогнозуванні їхнього розвитку в майбутньому.

---

1. *Карташов С. А., Одегов Ю. Г.* Рынок труда: проблемы формирования и управления (на примере г. Москвы) / С. А. Карташов, Ю. Г. Одегов. – М. : Финстатинформ, 1998. – 696 с.
2. *Лібанова Е. М.* Ринок праці: навч. посібник / Е. М. Лібанова. – К. : Центр навчальної літератури, 2003. – 224 с.
3. *Приймак В. І.* Регіональні особливості безробіття в Україні / В. І. Приймак // Україна: аспекти праці. – 2003. – № 4. – С. 8 – 13.
4. *Приймак В., Голубник О., Ільчишин М.* Економетричне моделювання залежності тривалості безробіття від соціально-демографічних чинників / В. Приймак, О. Голубник, М. Ільчишин // Вісник Львів. ун-ту. Сер. екон. – 2005. – Вип. 34.– С. 158 – 164.
5. *Лібанова Е.* Тиск на ринок праці в Україні: вимірювання та аналіз / Е. Лібанова // Україна: аспекти праці. – 2002. – № 5. – С. 3 – 12.
6. *Петрова І.* Загострення проблеми прихованого безробіття / І. Петрова // Економіка України. – 1997. – № 3. – С. 47 – 55.

INSTRUMENTS MATHEMATICAL MODELLING OF DYNAMICS OF UNEMPLOYMENT IN CRISIS

V. Pryimak[1], N. Kovalevych[1], O. Vozniak[2]

[1]*Ivan Franko National University of L'viv*
[2]*National Economic University of Ternopil'*

It is constructed models of development of unemployment in region in the form of problems of Koshi for the first order differential equations. Solutions of these problems have been found. It is offered to use them for possibility of forecasting and regulation of unemployment at different stages of an economic crisis.

Key words: unemployment, economic crisis, modeling, differential equations, Koshi problem.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ БЕЗРАБОТИЦЫ В ПЕРИОД КРИЗИСА

В. Прыймак[1], Н. Ковалевич[1], О. Возняк[2]

[1]*Львовский национальный университет имени Ивана Франко*
[2]*Тернопольский национальный экономический университет*

Построены модели развития безработицы в регионе в виде задач Коши для дифференциальных уравнений первого порядка. Найдено решения этих задач. Предложено использовать их для возможности прогнозирования и регулирования безработицы на разных этапах экономического кризиса.

Ключевые слова: безработица, экономический кризис, моделирование, дифференциальное уравнение, задача Коши.