ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№ 898, 2018, с. 13–21

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№ 898, 2018, p. 13–21

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛМОГОРОВА З ДВОМА ГРУПАМИ ПРОСТОРОВИХ ЗМІННИХ ТА ВИРОДЖЕННЯМ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

О. Г. Возняк[a], С. Д. Івасишен[b, c], І. П. Мединський[b, d]

[a]*Тернопільський національний економічний університет*
вул. Львівська, 11, 46004, Тернопіль, Україна
[b]*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України*
вул. Наукова, 3-б, 79060, Львів, Україна
[c]*Національний технічний університет України "КПІ"*
просп. Перемоги, 37, 03056, Київ, Україна
[d]*Національний університет "Львівська політехніка"*
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 12 квітня 2018 р.)

Для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторових змінних та виродженням на початковій гіперплощині встановлено оцінки приростів за просторовими змінними фундаментального розв'язку задачі Коші та його похідних.

Ключові слова: фундаментальний розв'язок задачі Коші, виродження на початковій гіперплощині, параметрикс, метод Леві.

2000 MSC: 35E20

УДК: 517.956.4

Вступ

У праці [7] для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова, у якому коефіцієнти залежать від двох груп просторових змінних, з виродженням на початковій гіперплощині, побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) та одержано точні оцінки його похідних. Для такого рівняння тільки без виродження на початковій гіперплощині побудовано класичний ФРЗК та одержано точні оцінки його похідних у праці [5]. Зокрема, такі самі результати отримано для рівняння, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження і у випадку без виродження [3] і з виродженням на початковій гіперплощині [4]. Ці результати одержано з використанням модифікованого методу Леві, запропонованого в [2] і розвинутого в працях [5, 6].

У цій статті для такого самого рівняння визначено оцінки приростів ФРЗК і його похідних за просторовими змінними, що доповнює результати з праці [7]. Ці результати аналогічні до результатів, одержаних у праці [6], узагальнюють відповідні результати з праці [1] для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині.

I. Припущення та допоміжні відомості

Нехай n, n_1, n_2 – задані натуральні числа такі, що $n_1 \geq n_2 \geq 1$ і $n = n_1 + n_2$, $m_1 = 1/2$, $m_2 = 3/2$, $M = m_1 n_1 + m_2 n_2$; $\mathbb{N}_j := \{1, \ldots, j\}$, $\mathbb{Z}_j := \mathbb{N}_j \cup \{0\}$, якщо $j \in \mathbb{N}$. Просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається із двох груп змінних $z^{(0)} := x := (x_1, x_2)$. До групи основних змінних належать змінні $t \in H \subset \mathbb{R}$ і $x_1 := (x_{11}, \ldots, x_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$, а до групи змінних виродження належать $x_2 := (x_{21}, \ldots, x_{2n_2}) \in \mathbb{R}^{n_2}$.

Скористаємось і такими позначеннями: $\Pi_H := \{(t, x) | t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, з $H \subset \mathbb{R}$; α і β – неперервні на відрізку $[0, T]$ функції, для яких $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t \in (0, T]$, $\alpha(0)\beta(0) = 0$ і β монотонно неспадна; $B(t, \tau) := \int\limits_{\tau}^{t} \frac{\beta(\mu)}{\alpha(\mu)} d\mu$, $0 < \tau < t \leq T$; $\Delta_x^z f(\cdot, x, \cdot) := f(\cdot, x, \cdot) - f(\cdot, z, \cdot)$, $\Delta_{x_s}^{z_s} f(\cdot, x, \cdot) := \Delta_x^{z^{(s)}} f(\cdot, x, \cdot)$, $s \in \mathbb{N}_2$; $z^{(1)} := (z_1, x_2)$, $z^{(2)} := (x_1, z_2)$; $Z^{(0)}(t, \tau) := X(t, \tau) := (X_1(t, \tau), X_2(t, \tau))$, $Z^{(s)}(t, \tau) := X(t, \tau)|_{x_s = z_s}$, $s \in \mathbb{N}_2$; $X_1(t, \tau) := x_1$, $X_2(t, \tau) := x_2 + B(t, \tau)\hat{x}_1$, $\hat{x}_1 := (x_{11}, \ldots, x_{1n_2})$. Будова параметричних точок $Y(t, \tau)$ аналогічна до будови точок $X(t, \tau)$.

У статті часто однаковими літерами (здебільшого літерами C, c і d) позначатимемо різні сталі, якщо їх значення нас не цікавлять.

Розглядатимемо рівняння вигляду

$$Lu(t, x) := (S - A(t, x, \partial_{x_1}))u(t, x) = 0,$$
$$(t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

де

$$S := \alpha(t)\partial_t - \beta(t) \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}},$$

$$A(t, x, \partial_{x_1}) := \beta(t) \sum_{j,\, l=1}^{n_1} a_{jl}(t, x) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} +$$

$$+\beta(t) \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, x) \partial_{x_{1j}} + a_0(t, x).$$

Припускатимемо, що коефіцієнти a_{jl}, a_j і a_0 є комплекснозначними функціями на $\Pi_{[0,T]}$, які задовольняють такі умови:

1) a_{jl}, a_j, a_0 є обмеженими й неперервними за t та існує така стала $\delta > 0$, що для довільних $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 := (\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\mathrm{Re} \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x)\sigma_{1j}\sigma_{1l} \geq \delta|\sigma_1|^2; \qquad (2)$$

2) a_{jl}, a_j, a_0 є гельдеровими за просторовими змінними в такому сенсі:

$$\exists\, H_1 > 0\ \exists\, \gamma_1 \in (0,1)\ \forall\{(t,x),(t,z^{(1)})\} \subset \Pi_{[0,T]}:$$

$$|\Delta_{x_1}^{z_1} a(t,x)| \leq H_1|x_1 - z_1|^{\gamma_1}, \qquad (3)$$

$$\exists\, H_2 > 0\ \exists\, \gamma_2 \in (1/3, 2/3]$$

$$\forall\{(t,x),(t,z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0,T]},\ \forall h \in [\tau,T]: |\Delta_{x_2}^{z_2} a(t,x)| \leq$$
$$\leq H_2((B(h,\tau))^{m_2\gamma_2} + |X_2(h,\tau) - z_2|^{\gamma_2}), \qquad (4)$$

де a – будь-який із коефіцієнтів a_{jl}, a_j або a_0.

З умови (4) при $h = \tau$ випливає звичайна умова Гельдера за змінною x_2. Достатню умову виконання (4) наведено в лемі 1 з [7].

Використовуватимемо такі оцінювальні функції:

$$E_c^{(j)}(t,\tau,z_j) := \exp\{-c(B(t,\tau))^{1-2j}|z_j|^2\},$$
$$t > \tau,\ z_j \in \mathbb{R}^{n_j},\ j \in \{1,2\}, \qquad (5)$$

$$E_c(t,\tau,x,\xi) := E_c^{(1)}(t,\tau,X_1(t,\tau) - \xi_1) \times$$
$$\times E_c^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau) - \xi_2),\ t > \tau,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad (6)$$

$$E_c^d(t,\tau,x,\xi) := E_c(t,\tau,x,\xi)E^d(t,\tau),$$

$$E^d(t,\tau) := \exp\{dA(t,\tau)\},\ A(t,\tau) := \int_\tau^t \frac{d\mu}{\alpha(\mu)},$$

$$t > \tau,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ d \in \mathbb{R},$$

$$I_0^{sl}(x,\xi) := (B(t,\mu)B(\mu,\tau))^{-M} \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^n} E_c(t,\mu,x,\lambda)E_c(\mu,\tau,\Lambda^{sl}(t,\mu),\xi)d\lambda, \qquad (7)$$

$$I_1^{sr}(x_1,\xi) := (B(t,\mu))^{-m_1n_1} \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^{n_1}} E_{c_0}^{(1)}(t,\mu,x_1 - \lambda_1)E_c(\mu,\tau,\Lambda^{sr}(t,\mu),\xi)d\lambda_1, \qquad (8)$$

де

$$\Lambda^{sl}(t,\tau) := \begin{cases} Z^{(s)}(t,\tau),\ l = 0, \\ (\lambda_1, Z_2^{(s)}(t,\tau)), l = 1, \\ \lambda,\ l = 2, \end{cases}$$

$$s \in \mathbb{Z}_2,\ r \in \mathbb{Z}_1,\ 0 < \tau < \mu < t \leq T,\ \{x,z,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Наведемо властивості цих функцій у поданій нижче лемі, яка доводиться аналогічно до леми 1 з [6].

Лема 1. *Правильні такі твердження:*

$$E_c(t,\tau,x,\xi) \leq E_{c_0}(t,\tau,x,\xi),$$
$$t > \tau,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad (9)$$

$$|x_1 - \xi_1|^{\gamma_1} E_c^{(1)}(t,\tau,x_1 - \xi_1) \leq$$
$$\leq C(B(t,\tau))^{m_1\gamma_1} E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1 - \xi_1),$$
$$t > \tau,\ \{x_1,\xi_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1}, \qquad (10)$$

$$|X_s(t,\tau) - \xi_s|^{\gamma_s} E_c(t,\tau,x,\xi) \leq$$
$$\leq C(B(t,\tau))^{m_s\gamma_s} E_{c_0}(t,\tau,x,\xi),$$
$$t > \tau, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ s \in \mathbb{N}_2, \qquad (11)$$

$$(B(t,\tau))^{-M} \int_{\mathbb{R}^{n_2}} E_c(t,\tau,x,\xi)d\xi_2 \leq$$
$$\leq C(B(t,\tau))^{-m_1n_1} E_c^{(1)}(t,\tau,x_1 - \xi_1),$$
$$t > \tau,\ x \in \mathbb{R}^n,\ \{x_1,\xi_1\} \in \mathbb{R}^{n_1}, \qquad (12)$$

$$(B(t,\tau))^{-m_sn_s} \int_{\mathbb{R}^{n_s}} E_c^{(s)}(t,\tau,X_s(t,\tau) - \xi_s)d\xi_s = C,$$
$$t > \tau,\ x_s \in \mathbb{R}^{n_s},\ s \in \mathbb{N}_2, \qquad (13)$$

$$(B(t,\tau))^{-M} \int_{\mathbb{R}^n} E_c(t,x,\tau,\xi)d\xi = C,$$
$$t > \tau,\ x \in \mathbb{R}^n, \qquad (14)$$

$$E_c^{(1)}(t,\mu,x_1 - \lambda_1)E_c^{(1)}(\mu,\tau,\lambda_1 - \xi_1) \leq$$
$$\leq E_c^{(1)}(t,\tau,x_1 - \xi_1),$$
$$0 < \tau < \mu < t \leq T,\ \{x_1,\lambda_1,\xi_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1}, \qquad (15)$$

$$E_c(t,\tau,y^{(s)},\xi) \leq CE_{c_0}(t,\tau,x,\xi),$$
$$0 < \tau < \mu < t \leq T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad (16)$$

$$E_c(\mu,\tau,Z(t,\mu),\xi) \leq CE_{c/4}(\mu,\tau,X(t,\mu),\xi) \leq$$
$$\leq CE_{c/4}(t,\tau,x,\xi),$$
$$0 < \tau < \mu < t \leq T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad (17)$$

$$E_c(\mu,\tau,(\lambda_1,Z_2^{(l)}(t,\mu)),\xi) \leq E_c^{(1)}(\mu,\tau,\lambda_1 - \xi_1) \times$$
$$\times E_{-c}^{(1)}(t,\mu,x_1 - \lambda_1)E_{c/4}^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau) - \xi_2),$$
$$t_1 \leq \mu \leq t,\ \lambda_1 \in \mathbb{R}^{n_1},$$
$$\{x,\xi,z^{(l)}\} \subset \mathbb{R}^n,\ l \in \mathbb{Z}_2, \qquad (18)$$

$$I_0^{s2}(z^{(r)},\xi) \leq CI_0^{s2}(x,\xi) \leq C(B(t,\tau))^{-M} \times$$
$$\times E_{c_0}(t,\tau,x,\xi),\ 0 < \tau < \mu < t \leq T,$$
$$\{x,\xi,z^{(r)}\} \subset \mathbb{R}^n,\ \{s,r\} \subset \mathbb{Z}_2, \qquad (19)$$

$$I_0^{sl}(z^{(r)},\xi) \leq C(B(t,\tau))^{-M} E_c(t,\tau,x,\xi),$$
$$t_1 \leq \mu < t \leq T,\ \lambda_1 \in \mathbb{R}^{n_1},$$
$$\{x,\xi,z^{(r)}\} \subset \mathbb{R}^n,\ l \in \mathbb{N}_2,\ \{s,r\} \subset \mathbb{Z}_2, \qquad (20)$$

$$I_1^{sl}(z_1,\xi) \leq CI_1^{sl}(x_1,\xi) \leq CE_c(t,\tau,x,\xi),$$
$$t_1 \leq \mu < t \leq T,\ \{x_1,z_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1},$$
$$\{x,\xi,z^{(s)}\} \subset \mathbb{R}^n,\ s \in \mathbb{Z}_2,\ l \in \mathbb{Z}_1, \qquad (21)$$

де C, c і c_0 – додатні сталі, причому $c_0 < c$, у формулі (16) *$y^{(s)}$ – точка на відрізку прямої, що сполучає точки x і $z^{(s)}$, $s \in \mathbb{N}_2$, у формулах* (16)–(21) *$|x_s - z_s|^{1/m_s} \leq (B(t,\tau))/4$, $s \in \mathbb{N}_2$, а t_1 таке, що $B(t,t_1) = B(t_1,\tau)$.*

На першому етапі будуємо ФРЗК для рівняння

$$L_1u(t,x) := (S - A(t,(x_1,y_2),\partial_{x_1}))u(t,x) = 0,$$
$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (22)$$

у вигляді

$$Z_1(t,x;\tau,\xi;y_2) = Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)+$$
$$+W_1(t,x;\tau,\xi;y_2), \qquad (23)$$

де

$$W_1(t,x;\tau,\xi;y_2) := \int_\tau^t \frac{d\mu}{\alpha(\mu)} \int_{\mathbb{R}^n} Z_0(t,x;\mu,\lambda;y_2)\times$$
$$\times Q_1(\mu,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\lambda, \qquad (24)$$

Z_0 – параметрикс, а Q_1 – невідома функція.

За параметрикс виберемо функцію

$$Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2) := G_0(t,x;\tau,\xi;(\xi_1,y_2)),$$
$$0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ y_2\in\mathbb{R}^{n_2}. \qquad (25)$$

Властивості $Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)$ наведемо у поданій нижче лемі (доведення див. в [7]).

Лема 2. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (22) *виконуються умови **1** і **2**. Тоді правильні такі твердження:*

$$|D_x^{lk}Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le$$
$$\le C(B(t,\tau))^{-M-M_{lk}}E_c^d(t,\tau,x,\xi), \qquad (26)$$
$$|\Delta_{x_s}^{z_s}D_x^{lk}Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le$$
$$\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M-M_{lk}-m_s\gamma_s^0}\times$$
$$\times(E_c^d(t,\tau,x,\xi)+E_c^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)), \qquad (27)$$
$$|\Delta_{y_2}^{z_2}D_x^{lk}Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le$$
$$\le C((B(h,\tau))^{m_2\gamma_2}+|Y_2(h,\tau)-z_2|^{\gamma_2})\times$$
$$\times(B(t,\tau))^{-M-M_{lk}}E_c^d(t,\tau,x,\xi); \qquad (28)$$
$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} D_x^{lk}Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi\Big| \le$$
$$\le C(B(t,\tau))^{-M_{lk}+m_1\gamma_1}E^d(t,\tau), \qquad (29)$$
$$\Big|\Delta_{x_s}^{z_s}\int_{\mathbb{R}^n} D_x^{lk}Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi\Big| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}\times$$
$$\times(B(t,\tau))^{-M_{lk}+m_1\gamma_1-m_s\gamma_s^0}E^d(t,\tau), \qquad (30)$$
$$\partial_{x_2}^{k_2}\int_{\mathbb{R}^{n_2}} Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2)d\xi_2 = 0, \qquad (31)$$
$$\partial_{x_2}^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2) = (-\partial_{\xi_2})^{k_2}Z_0(t,x;\tau,\xi;y_2). \qquad (32)$$

Тут $l\in\mathbb{N}_2$, $k=(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}_+^n$, $D_x^{1k}:=\partial_x^k$ *і* $D_x^{2k}:=S$, $M_{1k}:=m_1|k_1|+m_2|k_2|$ *і* $M_{2k}:=1$, $h\in[\tau,T]$, $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi,z^{(s)}\}\subset\mathbb{R}^n$, $s\in\mathbb{N}_2$, $\{y_2,z_2\}\subset\mathbb{R}^{n_2}$, $d\in\mathbb{R}$. *При цьому* $k\ne0$ *в оцінках* (29), (30) *і* $k_2\ne0$ *в* (31), (32), γ_1^0 *і* γ_2^0 *– довільні числа з проміжку* $(0,1]$, γ_1 *і* γ_2 *– числа з умов* (3) *і* (4).

Для функції Q_1 справджуються оцінки

$$|\partial_{x_2}^{k_2}Q_1(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le C_{k0}\beta(t)\times$$
$$\times(B(t,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2|k_2|}E_c^d(t,\tau,x,\xi), \qquad (33)$$
$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_2}^{k_2}Q_1(t,x;\tau,\xi;y_2)| \le C\beta(t)\times$$
$$\times|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M-1+m_1\gamma_1-m_2|k_2|-m_s\gamma_s^0}\times$$
$$\times(E_c^d(t,\tau,x,\xi)+E_c^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)), \qquad (34)$$

де $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $\{x_s,z_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s}$, $s\in\mathbb{N}_2$, $k_2\in\mathbb{Z}_+^{n_2}$, $\gamma_1^0\in(0,\gamma_1]$, $\gamma_2^0\in(0,1]$, числа γ_1 і γ_2 – такі, як вище.

Основні результати першого етапу побудови ФРЗК Z_1 для рівняння (22) і його оцінки наведено в [7].

На другому етапі побудови ФРЗК Z для рівняння (1), відповідно до методу Леві, шукаємо у вигляді

$$Z(t,x;\tau,\xi) = Z_2(t,x;\tau,\xi)+W_2(t,x;\tau,\xi), \qquad (35)$$

де функція

$$Z_2(t,x;\tau,\xi) := Z_1(t,x;\tau,\xi;\xi_2),$$
$$0<\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \qquad (36)$$

є параметриксом, побудованим за ФРЗК Z_1. Об'ємний потенціал W_2 задається формулою

$$W_2(t,x;\tau,\xi) := \int_\tau^t \frac{d\mu}{\alpha(\mu)}\int_{\mathbb{R}^n} Z_2(t,x;\mu,\lambda)\times$$
$$\times Q_2(\mu,\lambda;\tau,\xi)d\lambda, \qquad (37)$$

де Q_2 – неперервна функція, для якої справджуються такі оцінки:

$$|Q_2(t,x;\tau,\xi)| \le C\beta(t)\times$$
$$\times(B(t,\tau))^{-M-1+m_2\gamma_2}E_c^d(t,\tau,x,\xi), \qquad (38)$$
$$|\Delta_{x_s}^{z_s}Q_2(t,x;\tau,\xi)| \le C\beta(t)\times$$
$$\times|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M-1+m_2\gamma_2-m_s\gamma_s^0}\times$$
$$\times(E_c^d(t,\tau,x,\xi)+E_c^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)), \qquad (39)$$

де $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $\{x_s,z_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s}$, $\gamma_s^0\in(0,\gamma_s]$, числа γ_s, $s\in\mathbb{N}_2$, – такі, як вище.

У поданій нижче лемі сформулюємо властивості параметриксу Z_2.

Лема 3. *За умов **1** і **2** справджуються такі оцінки:*

$$|D_x^{lk} Z_2(t, x; \tau, \xi)| \le$$
$$\le C(B(t, \tau))^{-M-M_{lk}} E_c^d(t, \tau, x, \xi), \quad (40)$$
$$|\Delta_{x_s}^{z_s} D_x^{lk} Z_2(t, x; \tau, \xi)| \le$$
$$\le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} (B(t, \tau))^{-M-M_{lk}-m_s\gamma_s^0} \times$$
$$\times (E_c^d(t, \tau, x, \xi) + E_c^d(t, \tau, z^{(s)}, \xi)), \quad (41)$$
$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_x^{lk} Z_2(t, x; \tau, \xi) d\xi \Big| \le$$
$$\le C(B(t, \tau))^{-M_{lk}+m_{lk}} E^d(t, \tau), \quad (42)$$
$$\Big| \Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_x^{lk} Z_2(t, x; \tau, \xi) d\xi \Big| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} \times$$
$$\times (B(t, \tau))^{-M_{lk}+m_{lk}-m_s\gamma_s^0} E^d(t, \tau), \quad (43)$$
$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} D_x^{lk} Z_2(t, x; \tau, \xi) d\xi_2 \Big| \le$$
$$\le C(B(t, \tau))^{-m_1 n_1 - M_{lk} + \theta(|k_2|-1) m_2\gamma_2} \times$$
$$\times E_c^{(1)}(t, \tau, x_1 - \xi_1) E^d(t, \tau), \quad (44)$$
$$\Big| \Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} D_x^{lk} Z_2(t, x; \tau, \xi) d\xi_2 \Big| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} \times$$
$$\times (B(t, \tau))^{-m_1 n_1 - M_{lk} + \theta(|k_2|-1) m_2\gamma_2 - m_s\gamma_s^0} \times$$
$$\times (E_c^{(1)}(t, \tau, x_1 - \xi_1) + E_c^{(1)}(t, \tau, z_1 - \xi_1)) E^d(t, \tau), \quad (45)$$

де

$$m_{lk} = \begin{cases} m_1\gamma_1, \; l \in \mathbb{N}_2, \; k_2 = 0, \\ m_2\gamma_2, \; l = 1, \; k_2 \ne 0, \end{cases}$$

$0 < \tau < t \le T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $z_s \in \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_2$, $\gamma_1^0 \in (0, \gamma_1]$, $\gamma_2^0 \in (0, 1]$ *в (40) і* $\gamma_2^0 \in (0, \gamma_2)$ *в* (41), (43), γ_1, γ_2 *– числа з умови **2)**,* $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_+^n$*. При цьому* $|k_1| \le 2$, $k_2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2}$ *у* (40), (41), *а в* (42), (43) $k_1 \ne 0$ *і* $k_2 \ne 0$ *в* (44), (45), θ *– характеристична функція множини* $[0, \infty)$.

□ *Доведення.* Оцінки (40)–(42) та (43) для $k_2 = 0$ доведені в [7] і випливають із означення (36) та теореми 2 з [7]. Потрібно довести (43), (44) і (45) для $k_2 \ne 0$. Оцінки (44), (45) за $k_2 = 0$ випливають з відповідних оцінок (40), (41) і нерівності (13). У випадку $k_2 \ne 0$ оцінки (44), (45) можна покращити. Спочатку розглянемо прирости за змінною x_1. Для цього запишемо таке зображення:

$$\Delta_{x_1}^{z_1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{x_2}^{k_2} Z_1(t, x; \tau, \xi; \xi_2) d\xi_2 =$$
$$= \sum_{j=1}^{n_1} \int\limits_{z_{1j}}^{x_{1j}} \Big(- \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} \Delta_{y_2}^{\xi_2} \partial_{\zeta_1}^{k_1} Z_1(t, \zeta_1^{(j)};$$
$$\tau, \xi; y_2) \Big|_{y_2 = X_2(t, \tau)} d\xi_2 \Big) d\zeta_{1j}, \quad (46)$$

де $\zeta_1^{(j)} := ((z_{11}, \ldots, z_{1(j-1)}, \zeta_{1j}, x_{1(j+1)}, \ldots, x_{1n_1}), x_2)$, $j \in \mathbb{N}_{n_1}$.

Доданки з (46) оцінюємо за допомогою оцінок (98) з [7], нерівностей (12), (11) і (16):

$$\Big| \Delta_{x_1}^{z_1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{x_2}^{k_2} Z_1(t, x; \tau, \xi; \xi_2) d\xi_2 \Big| \le$$
$$\le \sum_{j=1}^{n_1} \Big| \int\limits_{z_{1j}}^{x_{1j}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} |X_2(t, \tau) - \xi_2|^{\gamma_2} \times$$
$$\times E_c^d(t, \tau, \zeta_1^{(j)}, \xi) d\xi_2 \Big) \Big| d\zeta_{1j} (B(t, \tau))^{-M-m_2} \le$$
$$\le C|x_1 - z_1|^{\gamma_1^0} (B(t, \tau))^{-m_1\gamma_1 - m_1\gamma_1^0 + m_2\gamma_2} E^d(t, \tau) \times$$
$$\times (E_{c_1}^{(1)}(t, \tau, x_1 - \xi_1) + E_{c_1}^{(1)}(t, \tau, z_1 - \xi_1)). \quad (47)$$

Оцінимо прирости за змінною x_2. За допомогою (23), (24) і (32), урахувавши властивості функції Q_1, запишемо

$$\Delta_{x_2}^{z_2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{x_2}^{k_2} Z_1(t, x; \tau, \xi; \xi_2) d\xi_2 =: Z_{11} + Z_{12} + Z_{13}, \quad (48)$$

де

$$Z_{11} := \Delta_{x_2}^{z_2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{x_2}^{k_2} Z_0(t, x; \tau, \xi; \xi_2) d\xi_2 =$$
$$= \sum_{j=1}^{n_2} \int\limits_{z_{2j}}^{x_{2j}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{\zeta_2}^{\hat{k}_2} Z_0(t, \zeta_2^{(j)}; \tau, \xi; \xi_2) d\xi_2 \Big) d\zeta_{2j} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n_2} \int\limits_{z_{2j}}^{x_{2j}} \Big(- \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} \Delta_{y_2}^{\xi_2} \partial_{\zeta_2}^{\hat{k}_2} Z_0(t, \zeta_2^{(j)};$$
$$\tau, \xi; y_2) \Big|_{y_2 = X_2^{(j)}(t, \tau)} d\xi_2 \Big) d\zeta_{2j}, \quad (49)$$

$$Z_{12} := \Delta_{x_2}^{z_2} \int\limits_{\tau}^{t_1} \frac{d\mu}{\alpha(\mu)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_2}^{k_2} Z_0(t, x; \tau, \lambda; \lambda_2) \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} Q_1(\mu, \lambda; \tau, \xi; \xi_2) d\xi_2 d\lambda =$$
$$= \int\limits_{\tau}^{t_1} \frac{d\mu}{\alpha(\mu)} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \Big(\Delta_{x_2}^{z_2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{x_2}^{k_2} Z_0(t, x; \tau, \lambda; \lambda_2) d\lambda_2 \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} Q_1(\mu, \lambda; \tau, \xi; \xi_2) d\xi_2 \Big) d\lambda_1, \quad (50)$$

$$Z_{13} := \Delta_{x_2}^{z_2} \int\limits_{t_1}^{t} \frac{d\mu}{\alpha(\mu)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_0(t, x; \tau, \lambda; \lambda_2) \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{\lambda_2}^{k_2} Q_1(\mu, \lambda; \tau, \xi; \xi_2) d\xi_2 d\lambda =$$
$$= \int\limits_{t_1}^{t} \frac{d\mu}{\alpha(\mu)} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \Big(\Delta_{x_2}^{z_2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} Z_0(t, x; \tau, \lambda; \lambda_2) d\lambda_2 \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{\lambda_2}^{k_2} Q_1(\mu,\lambda;\tau,\xi;\xi_2)d\xi_2 \Big) \, d\lambda_1, \qquad (51)$$

де $\zeta_2^{(j)}{:=}(x_1,(z_{21},\dots,z_{2(j-1)},\zeta_{2j},x_{2(j+1)},\dots,x_{2n_2}))$, $X_2^{(j)}(t,\tau) := X_2(t,\tau)\Big|_{x=\zeta_2^{(j)}}$, $\partial_{\zeta_2}^{\hat{k}_2} := \partial_{\xi_{2j}}\partial_{\xi_2}^{k_2}$, $j\in\mathbb{N}_{n_2}$, а число t_1 – таке, як вище.

Оцінимо Z_{11} за допомогою (27), (12), (18) для $l=0$ та (16):

$$|Z_{11}| \le C\sum_{j=1}^{n_2} \Big| \int\limits_{x_2}^{z_2} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} (B(t,\tau))^{-M-m_2(|\hat{k}_2|-\gamma_2)}\times$$

$$\times E_{c_0}^d(t,\tau,\zeta_2^{(j)},\xi)d\xi_2 \Big) \, d\zeta_{2j} \Big| \le C|x_2-z_2|^{\gamma_2^0} E^d(t,\tau)\times$$

$$\times (B(t,\tau))^{-m_1\gamma_1-m_2(|k_2|-\gamma_2+\gamma_2^0)} E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1). \quad (52)$$

Використовуючи оцінки (33) і (52) та нерівності (9), (10) і (12), запишемо

$$|Z_{12}| \le \int\limits_{\tau}^{t_1} \frac{d\theta}{\alpha(\mu)} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \Big| \Delta_{x_2}^{z_2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{x_2}^{k_2} Z_0(t,x;\mu,\lambda;\lambda_2)d\lambda_2 \Big| \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} |Q_1(\mu,\lambda;\tau,\xi;\xi_2)|d\xi_2 d\lambda_1 \le C|x_2-z_2|^{\gamma_2^0}\times$$

$$\times \int\limits_{\tau}^{t_1} (B(t,\mu))^{-m_1\gamma_1-m_2(|k_2|-\gamma_2+\gamma_2^0)} E^d(t,\mu)\times$$

$$\times (B(\mu,\tau))^{-1-m_1(n_1-\gamma_1)} E^d(\mu,\tau)\frac{\beta(\mu)}{\alpha(\mu)}d\mu\times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} E_{c_0}^{(1)}(t,\mu,x_1-\lambda_1)E_{c_0}^{(1)}(\mu,\tau,\lambda_1-\xi_1)d\lambda_1 \le$$

$$\le C|x_2-z_2|^{\gamma_2^0}(B(t,\tau))^{-m_1(n_1-\gamma_1)-m_2(|k_2|-\gamma_2+\gamma_2^0)}\times$$

$$\times E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E^d(t,\tau). \qquad (53)$$

Перш ніж перейти до оцінювання доданка Z_{13} з (48), наведемо потрібну для цього властивість функції Q_1. На підставі (106) з [7] запишемо таке зображення:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{\lambda_2}^{k_2} Q_1(\mu,\lambda;\tau,\xi;y_2)d\xi_2 =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} \Delta_{y_2}^{\xi_2}\partial_{x_2}^{k_2} Q_1(\mu,\lambda;\tau,\xi;y_2)\Big|_{y_2=\Lambda_2(t,\mu)} d\xi_2.$$

Звідси за допомогою оцінок (34), (11) і (12) отримаємо нерівність

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} \partial_{\lambda_2}^{k_2} Q_1(\mu,\lambda;\tau,\xi;\xi_2)d\xi_2 \Big| \le$$

$$\le C\beta(\mu)(B(\mu,\tau))^{-1-m_1n_1-m_2(|k_2|-\gamma_2)}\times$$

$$\times E_{c_0}^{(1)}(\mu,\tau,\lambda_1-\xi_1)E^d(\mu,\tau).$$

Застосуємо цю нерівність разом з оцінкою (52) та нерівностями (13) і (15) для оцінювання доданка Z_{13}:

$$|Z_{13}| \le \int\limits_{t_1}^{t} \frac{d\mu}{\alpha(\mu)} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} \Delta_{x_2}^{z_2} Z_0(t,x;\mu,\lambda;\lambda_2)d\lambda_2 \Big| \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} |\partial_{\lambda_2}^{k_2} Q_1(\mu,\lambda;\tau,\xi;\xi_2)|d\xi_2 d\lambda_1 \le$$

$$\le C|x_2-z_2|^{\gamma_2^0} \int\limits_{t_1}^{t} (B(t,\mu))^{-m_1n_1+m_2(\gamma_2-\gamma_2^0)} E^d(t,\mu)\times$$

$$\times (B(\mu,\tau))^{-1-m_1n_1-m_2(|k_2|-\gamma_2)} E^d(\mu,\tau)\frac{\beta(\mu)}{\alpha(\mu)}d\mu\times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} E_{c_0}^{(1)}(t,\mu,x_1-\lambda_1)E_{c_0}^{(1)}(\mu,\tau,\lambda_1-\xi_1)d\lambda_1 \le$$

$$\le C|x_2-z_2|^{\gamma_2^0}(B(t,\tau))^{-m_1n_1-m_2(|k_2|-2\gamma_2+\gamma_2^0)}\times$$

$$\times E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E^d(t,\tau). \qquad (54)$$

З отриманих оцінок (47), (52)–(54), зображення (48) і співвідношень (49)–(51) випливають оцінки (45), якщо $k_2 \neq 0$. Оцінки (43) є безпосереднім наслідком (45) і (13). ■

II. Основний результат

Основним результатом статті є

Теорема 1. *Нехай виконуються умови **1** і **2**. Тоді для рівняння* (1) *існує ФРЗК Z, для якого справджуються оцінки*

$$|D_x^{lk}Z(t,x;\tau,\xi)| \le C(B(t,\tau))^{-M-M_{lk}}E_c^d(t,\tau,x,\xi), \quad (55)$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}D_x^{lk}Z(t,x;\tau,\xi)| \le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^{lk}}\times$$

$$\times (B(t,\tau))^{-M-M_{lk}-m_s\gamma_s^{lk}}\times$$

$$\times (E_c^d(t,\tau,x,\xi)+E_c^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)), \qquad (56)$$

де $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $z_s\in\mathbb{R}^{n_s}$, $s\in\mathbb{N}_2$, $\gamma_s^{lk}\in(0,m_{lks}^{-1}m_1\gamma_1)$, якщо $m_1\gamma_1<m_2\gamma_2-m_1$, і $\gamma_s^{lk}\in(0,m_{lks}^{-1}(m_2\gamma_2-m_1))$, якщо $m_1\gamma_1>m_2\gamma_2-m_1$,

$$m_{lks} = \begin{cases} m_1,\, l\in\mathbb{N}_2,\, k_2=0, \\ m_s,\, l=1,\, k_2\neq 0, \end{cases}$$

*$k=(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}_+^n$, причому $m_1|k_1|+|k_2|\le 1$, і γ_1, γ_2 – числа з умови **2**.*

□ *Доведення.* Існування Z та оцінки $D_x^{lk}Z$, $l\in\mathbb{N}_2$, $m_1|k_1|+|k_2|\le 1$, доведено в [7]. Встановимо оцінки (56). Зауважимо, що ураховуючи означення (35) і оцінку (41), для цього потрібно оцінити прирости функції (37). Достатньо отримати оцінки W_2 за умови $|x_s-z_s|^{1/m_s}\le (B(t,\tau))/4$, тому що для $|x_s-z_s|^{1/m_s}\ge (B(t,\tau))/4$ потрібні оцінки безпосередньо випливають з (55). Оскільки функція Q_2 задовольняє умови **3** і **4** леми 3 з [7] та умови леми 7 з [7], то існують похідні $D_x^{lk}W_2$, $l\in\mathbb{N}_2$,

$k=(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}_+^n$, $m_1|k_1|+|k_2|\le 1$, які визначаються формулою

$$D_x^{lk}W_2(t,x;\tau,\xi)=\int\limits_{\tau}^{t_1}\frac{d\mu}{\alpha(\mu)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}D_x^{lk}Z_2(t,x;\tau,\lambda)\times$$
$$\times Q_2(\mu,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+\int\limits_{t_1}^{t}\frac{d\mu}{\alpha(\mu)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}D_x^{lk}Z_2(t,x;\tau,\lambda)\times$$
$$\times\Delta^{X(t,\mu)}_{(\lambda_1,X_2(t,\tau))}Q_2(\mu,(\lambda_1,X_2(t,\tau));\tau,\xi)d\lambda+$$
$$+\int\limits_{t_1}^{t}\frac{d\mu}{\alpha(\mu)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}D_x^{lk}Z_2(t,x;\tau,\lambda)\times$$
$$\times\Delta_\lambda^{(\lambda_1,X_2(t,\tau))}Q_2(\mu,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$
$$+\int\limits_{t_1}^{t}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}D_x^{lk}Z_2(t,x;\tau,\lambda)d\lambda\Big)\,Q_2(\mu,X(t,\tau);\tau,\xi)\times$$
$$\times\frac{d\mu}{\alpha(\mu)}+Q_2(t,x;\tau,\xi)\theta(l-2),\ l\in\mathbb{N}_2,$$

де θ – функція Гевісайда. За допомогою цієї формули запишемо таке зображення:

$$\Delta_{x_s}^{z_s}D_x^{lk}W_2(t,x;\tau,\xi)=$$
$$=\int\limits_{\tau}^{t_1}\frac{d\mu}{\alpha(\mu)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_s}^{z_s}D_x^{lk}Z_2(t,x;\mu,\lambda)Q_2(\mu,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$
$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_{lks}}\frac{d\mu}{\alpha(\mu)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}\Big(\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}}D_x^{lk}Z_2(t,x;\mu,\lambda)d\lambda_2\Big)\times$$
$$\times\Delta^{X(t,\mu)}_{(\lambda_1,X_2(t,\mu))}Q_2(\mu,(\lambda_1,X_2(t,\mu));\tau,\xi)d\lambda_1+$$
$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_{lks}}\frac{d\mu}{\alpha(\mu)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta_{x_s}^{z_s}D_x^{lk}Z_2(t,x;\mu,\lambda)\times$$
$$\times\Delta_\lambda^{(\lambda_1,X_2(t,\mu))}Q_2(\mu,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$
$$+\int\limits_{t_1}^{\eta_{lks}}\Big(\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n}D_x^{lk}Z_2(t,x;\mu,\lambda)d\lambda\Big)\times$$
$$\times Q_2(\mu,X(t,\mu);\tau,\xi)\frac{d\mu}{\alpha(\mu)}+$$
$$+\int\limits_{\eta_{lks}}^{t}\frac{d\mu}{\alpha(\mu)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}}D_x^{lk}Z_2(t,x;\mu,\lambda)d\lambda_2\Big)\times$$
$$\times\Delta^{X(t,\mu)}_{(\lambda_1,X_2(t,\mu))}Q_2(\mu,(\lambda_1,X_2(t,\mu));\tau,\xi)d\lambda_1-$$
$$-\int\limits_{\eta_{lks}}^{t}\frac{d\mu}{\alpha(\mu)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}}D_x^{lk}Z_2(t,z^{(s)};\mu,\lambda)d\lambda_2\Big)\times$$
$$\times\Delta^{Z^{(s)}(t,\mu)}_{(\lambda_1,Z_2^{(s)}(t,\mu))}Q_2(\mu,(\lambda_1,Z_2^{(s)}(t,\mu));\tau,\xi)d\lambda_1+$$
$$+\int\limits_{\eta_{lks}}^{t}\frac{d\mu}{\alpha(\mu)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}D_x^{lk}Z_2(t,x;\mu,\lambda)\times$$
$$\times\Delta_\lambda^{(\lambda_1,X_2(t,\mu))}Q_2(\mu,\lambda;\tau,\xi)d\lambda-$$
$$-\int\limits_{\eta_{lks}}^{t}\frac{d\mu}{\alpha(\mu)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}D_x^{lk}Z_2(t,z^{(s)};\mu,\lambda)\times$$
$$\times\Delta_\lambda^{(\lambda_1,Z_2^{(s)}(t,\mu))}Q_2(\mu,\lambda;\tau,\xi)d\lambda+$$
$$+\int\limits_{\eta_{lks}}^{t}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}D_x^{lk}Z_2(t,x;\mu,\lambda)d\lambda\Big)\times$$
$$\times Q_2(\mu,X(t,\mu);\tau,\xi)\frac{d\mu}{\alpha(\mu)}-$$
$$-\int\limits_{\eta_{lks}}^{t}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}D_x^{lk}Z_2(t,z^{(s)};\mu,\lambda)d\lambda\Big)\times$$
$$\times Q_2(\mu,Z(t,\mu);\tau,\xi)\frac{d\mu}{\alpha(\mu)}+$$
$$+\theta(l-2)\Delta_{x_s}^{z_s}Q_2(t,x;\tau,\xi)=:\sum_{j=1}^{11}W_{2j}^{lks},\qquad(57)$$

де η_{lks} таке, що $B(t,\eta_{lks})=|x_s-z_s|^{1/m_{lks}}$, $s\in\mathbb{N}_2$, а числа t_1 і l – такі, як вище.

Щоб оцінити W_{21}^{lks}, використаємо оцінки (41), (38) і нерівності (19):

$$|W_{21}^{lks}|\le\int\limits_{\tau}^{t_1}\frac{\beta(\mu)}{\alpha(\mu)}d\mu\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big|\Delta_{x_s}^{z_s}D_x^{lk}Z_2(t,x;\mu,\lambda)\Big|\cdot|Q_2(\mu,\lambda;\tau,\xi)|d\lambda\le$$
$$\le\int\limits_{\tau}^{t_1}\frac{\beta(\mu)}{\alpha(\mu)}d\mu\int\limits_{\mathbb{R}^n}|x_s-z_s|^{\gamma_s^{lk}}(B(t,\mu))^{-M-M_{lk}-m_s\gamma_s^{lk}}\times$$
$$\times(E_c^d(t,\mu,x,\lambda)+E_c^d(t,\mu,z^{(s)},\lambda))\times$$
$$\times(B(\mu,\tau))^{-M-1+m_2\gamma_2}E_c^d(\mu,\tau,\lambda,\xi)d\lambda\le$$
$$\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^{lk}}(B(t,t_1))^{-M_{lk}-m_s\gamma_s^{lk}}\times$$
$$\times E^d(t,\tau)\int\limits_{\tau}^{t_1}(B(\mu,\tau))^{-1+m_2\gamma_2}\frac{\beta(\mu)}{\alpha(\mu)}d\mu\times$$
$$\times(I_0^{s2}(x,\xi)+I_0^{s2}(z^{(s)},\xi))\le$$
$$\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^{lk}}(B(t,\tau))^{-M-M_{lk}+m_2\gamma_2-m_s\gamma_s^{lk}}\times$$
$$\times(E_{c_0}^d(t,\tau,x,\xi)+E_c^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)),$$

де

$$\gamma_1^{lk}\in(0,\gamma_1],\ \gamma_2^{lk}\in(0,1),\ m_1|k_1|+|k_2|\le 1,$$
$$l\in\mathbb{N}_2,\ \{x,z^{(s)}\}\subset\mathbb{R}^n,\ s\in\mathbb{N}_2.$$

Нерівність

$$J(\gamma) := \int\limits_{t_1}^{\eta_{lks}} (B(t,\mu))^{-1+\gamma} \frac{\beta(\mu)}{\alpha(\mu)} d\mu \le$$

$$\le C(B(t,\tau))^{\gamma}\theta(\gamma) + C|x_s - z_s|^{\gamma/m_{\eta_{lks}}}\theta(-\gamma),$$

яка справджується для довільного $\gamma \ne 0$, використаємо для оцінки доданків W_{2j}^{lks}, $j \in \mathbb{N}_4 \backslash \{1\}$, $\{l,s\} \subset \mathbb{N}_2$, $m_1|k_1| + |k_2| \le 1$. За допомогою оцінок (39), (45) і нерівностей (21) одержимо

$$|W_{22}^{lks}| \le \int\limits_{t_1}^{\eta_{lks}} \frac{d\mu}{\alpha(\mu)} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \Big| \Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} D_x^{lk} Z_2(t,x;\mu,\lambda) d\lambda_2 \Big| \times$$

$$\times \Big| \Delta_{(\lambda_1, X_2(t,\mu))}^{X(t,\mu)} Q_2(\mu,(\lambda_1, X_2(t,\mu));\tau,\xi) \Big| d\lambda_1 \le$$

$$\le \int\limits_{t_1}^{\eta_{lks}} \frac{\beta(\mu)}{\alpha(\mu)} d\mu \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} |x_s - z_s|^{\gamma_s} \times$$

$$\times (B(t,\mu))^{-m_1 n_1 - M_{lk} - m_s\gamma_s + \theta(|k_2|-1)m_2\gamma_2} \times$$

$$\times (E_c^{(1)}(t,\mu,x_1-\lambda_1) + E_c^{(1)}(t,\mu,z_1-\lambda_1))E^d(t,\mu) \times$$

$$\times |x_1 - \lambda_1|^{\gamma_1^0} (B(\mu,\tau))^{-M-1+m_2\gamma_2 - m_1\gamma_1^0} \times$$

$$\times (E_c^d(\mu,\tau,(\lambda_1, X_2(t,\mu)),\xi) + E_c^d(\mu,\tau,X(t,\mu),\xi)) d\lambda_1 \le$$

$$\le C|x_s - z_s|^{\gamma_s} J(\gamma_{22}^{lks}) \times$$

$$\times (B(t_1,\tau))^{-M-1+m_2\gamma_2 - m_1\gamma_1^0} E^d(t,\tau) \times$$

$$\times (I_1^{00}(x_1,\xi) + I_1^{00}(z_1,\xi) + I_1^{10}(x_1,\xi) + I_1^{10}(z_1,\xi)),$$

де

$$\gamma_{22}^{lks} = 1 - M_{lk} + m_1\gamma_1^0 - m_s\gamma_s + \theta(|k_2|-1)m_2\gamma_2,$$

$$\{l,s\} \subset \mathbb{N}_2,\ m_1|k_1| + |k_2| \le 1.$$

Врахувавши нерівності (21), а також те, що $\gamma_{22}^{lks} < 0$, коли $\gamma_1^0 < \gamma_1$, $l \in \mathbb{N}_2$ і $M_{lk} \ge 1$, та $\gamma_{22}^{lks} > 0$, якщо $\gamma_1^0 = \gamma_1$ і $M_{lk} < 1$, одержимо

$$|W_{22}^{lks}| \le C|x_s - z_s|^{m_{lks}^{-1}\gamma_{22}^{lks}} (B(t,\tau))^{-M-1+m_2\gamma_2 - m_1\gamma_1^0} \times$$

$$\times (E_{c_0}^d(t,\tau,x,\xi) + E_{c_0}^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)),$$

$$\{l,s\} \subset \mathbb{N}_2,\ m_1|k_1| + |k_2| \le 1.$$

Оцінимо W_{23}^{lks} за допомогою оцінок (41) з $\gamma_s^{lk} = \gamma_s$ і (39) з $\gamma_2^0 = \gamma_2$:

$$|W_{23}^{lks}| \le \int\limits_{t_1}^{\eta_{lks}} \frac{d\mu}{\alpha(\mu)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big| \Delta_{x_s}^{z_s} D_x^{lk} Z_2(t,x;\mu,\lambda) \Big| \times$$

$$\times \Big| \Delta_{\lambda}^{(\lambda_1, X_2(t,\mu))} Q_2(\mu,\lambda;\tau,\xi) \Big| d\lambda \le$$

$$\le \int\limits_{t_1}^{\eta_{lks}} \frac{\beta(\mu)}{\alpha(\mu)} d\mu \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x_s - z_s|^{\gamma_s} (B(t,\mu))^{-M-M_{lk}-m_s\gamma_s} \times$$

$$\times (E_c^d(t,\mu,x,\lambda) + E_c^d(t,\mu,z^{(s)},\lambda)) \times$$

$$\times |X_2(t,\mu) - \lambda_2|^{\gamma_2} (B(\mu,\tau))^{-M-1} \times$$

$$\times (E_c^d(\mu,\tau,(\lambda_1, X_2(t,\mu)),\xi) + E_c^d(\mu,\tau,X(t,\mu),\xi)) d\lambda \le$$

$$\le C|x_s - z_s|^{\gamma_s} J(\gamma_{23}^{lks})(B(t_1,\tau))^{-1} E^d(t,\tau) \times$$

$$\times (I_0^{00}(x,\xi) + I_0^{00}(z^{(s)},\xi) + I_0^{01}(x,\xi) + I_0^{01}(z^{(s)},\xi)),$$

де

$$\gamma_{23}^{lks} = 1 - M_{kl} + m_2\gamma_2 - m_s\gamma_s,\ \{l,s\} \subset \mathbb{N}_2,$$

$$m_1|k_1| + |k_2| \le 1.$$

Врахувавши нерівності (20) і те, що $\gamma_{23}^{lks} > 0$, якщо $k_2 = 0$, та $\gamma_{23}^{lks} < 0$, якщо $k_2 \ne 0$, отримаємо

$$|W_{23}^{lks}| \le C|x_s - z_s|^{\gamma_s} (B(t,\tau))^{-M-M_{lk}+m_2\gamma_2 - m_s\gamma_s} \times$$

$$\times (E_{c_0}^d(t,\tau,x,\xi) + E_{c_0}^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)), \{l,s\} \subset \mathbb{N}_2,\ k_2 = 0,$$

$$|W_{23}^{lks}| \le C|x_s - z_s|^{m_{lks}^{-1}(m_2\gamma_2 - m_1)} (B(t,\tau))^{-M-1} \times$$

$$\times (E_{c_0}^d(t,\tau,x,\xi) + E_{c_0}^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)), \{l,s\} \subset \mathbb{N}_2,\ k_2 \ne 0.$$

За допомогою оцінок (43), (38) і (17) аналогічно одержимо

$$|W_{24}^{lks}| \le \int\limits_{t_1}^{\eta_{lks}} \Big| \Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_x^{lk} Z_2(t,x;\mu,\lambda) d\lambda \Big| \times$$

$$\times |Q_2(\mu,X(t,\mu);\tau,\xi)| \frac{d\mu}{\alpha(\mu)} \le C \int\limits_{t_1}^{\eta_{lks}} |x_s - z_s|^{\gamma_s} \times$$

$$\times (B(t,\mu))^{-M_{lk}+m_{lk}-m_s\gamma_s} (B(\mu,\tau))^{-M-1+m_2\gamma_2} \times$$

$$\times E^d(t,\mu) E_c^d(\mu,\tau,X(t,\mu),\xi) \frac{\beta(\mu)}{\alpha(\mu)} d\mu \le$$

$$\le C|x_s - z_s|^{m_{lks}^{-1}\gamma_{24}^{lks}} (B(t,\tau))^{-M-1+m_2\gamma_2} \times$$

$$\times E_c^d(t,\tau,x,\xi),\ \gamma_{24}^{lks} := 1 - M_{lk} + m_{lk}.$$

Доданки W_{25}^{lks} і W_{26}^{lks}, W_{27}^{lks} і W_{28}^{lks}, W_{29}^{lks} і W_{210}^{lks}, $\{l,s\} \subset \mathbb{N}_2, m_1|k_1| + |k_2| \le 1$ оцінюються однаково. Оцінимо перші з них. Для цього скористаємось відповідно оцінками (44) і (39), (40) і (39) та (42) і (38) з $\gamma_s^0 = \gamma_s$, $s \in \mathbb{N}_2$, разом з нерівностями (10) і (21). Врахувавши, що $B(\eta_s,\tau) > B(t_1,\tau) = (B(t,\tau))/2$, отримаємо

$$|W_{25}^{lks}| \le \int\limits_{\eta_{lks}}^{t} \frac{d\mu}{\alpha(\mu)} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2}} D_x^{lk} Z_2(t,x;\mu,\lambda) d\lambda_2 \Big| \times$$

$$\times \Big| \Delta_{(\lambda_1, X_2(t,\mu))}^{X(t,\mu)} Q_2(\mu,(\lambda_1, X_2(t,\mu));\tau,\xi) \Big| d\lambda_1 \le$$

$$\le C \int\limits_{\eta_{lks}}^{t} \frac{\beta(\mu)}{\alpha(\mu)} d\mu \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} (B(t,\mu))^{-m_1 n_1 - M_{lk} + \theta(|k_2|-1)m_2 n_2} \times$$

$$\times E^d(t,\mu) E_c^{(1)}(t,\mu,x_1-\lambda_1) |x_1 - \lambda_1|^{\gamma_1} \times$$

$$\times (B(\mu,\tau))^{-M-1+m_2\gamma_2 - m_1\gamma_1} \times$$

$$\times (E_c^d(\mu,\tau,(\lambda_1, X_2(t,\mu)),\xi) + E_c^d(\mu,\tau,X(t,\mu),\xi)) d\lambda_1 \le$$

$$\le C \int\limits_{\eta_{lks}}^{t} (B(t,\mu))^{-M_{lk}+m_1\gamma_1+\theta(|k_2|-1)m_2 n_2} \frac{\beta(\mu)}{\alpha(\mu)} d\mu \times$$

$$\times(B(t,\tau))^{-M-1+m_2\gamma_2-m_1\gamma_1}E^d(t,\tau)\times$$
$$\times(I_1^{01}(x_1,\xi)+I_1^{00}(x_1,\xi))\le C|x_s-z_s|^{m_{lks}^{-1}\gamma_{25}^{lks}}\times$$
$$\times(B(t,\tau))^{-M-1+m_2\gamma_2-m_1\gamma_1}E_c^d(t,\tau,x,\xi),$$

де

$$\gamma_{25}^{lks}:=1-M_{lk}+m_1\gamma_1+\theta(|k_2|-1)m_2\gamma_2,$$
$$\{l,s\}\subset\mathbb{N}_2,\ m_1|k_1|+|k_2|\le 1,$$
$$|W_{27}^{lks}|\le\int\limits_{\eta_{lks}}^{t}\frac{d\mu}{\alpha(\mu)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big|\,D_x^{lk}Z_2(t,x;\mu,\lambda)\,\Big|\times$$
$$\times\Big|\,\Delta_\lambda^{(\lambda_1,X_2(t,\mu))}Q_2(\mu,\lambda;\tau,\xi)\,\Big|\,d\lambda\le$$
$$\le C\int\limits_{\eta_{lks}}^{t}\frac{\beta(\mu)}{\alpha(\mu)}d\mu\int\limits_{\mathbb{R}^n}(B(t,\mu))^{-M-M_{lk}}E_c^d(t,\mu,x,\lambda)\times$$
$$\times|X_2(t,\mu)-\lambda_2|^{\gamma_2}(B(\mu,\tau))^{-M-1}\times$$
$$\times(E_c^d(\mu,\tau,(\lambda_1,X_2(t,\mu)),\xi)+E_c^d(\mu,\tau,\lambda,\xi))d\lambda\le$$
$$\le C(B(t,\tau))^{-1}\int\limits_{\eta_{lks}}^{t}(B(t,\mu))^{-M_{lk}+m_2n_2}\frac{\beta(\mu)}{\alpha(\mu)}d\mu\times$$
$$\times(I_0^{02}(x,\xi)+I_0^{01}(x,\xi))E^d(t,\tau)\le$$
$$\le C|x_s-z_s|^{m_{lks}^{-1}(1-M_{lk}+m_2\gamma_2)}(B(t,\tau))^{-M-1}\times$$
$$\times(E_c^d(t,\tau,x,\xi)+E_c^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)),$$
$$|W_{29}^{lks}|\le\int\limits_{\eta_{lks}}^{t}\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}D_x^{lk}Z_2(t,x;\mu,\lambda)d\lambda\,\Big|\times$$
$$\times|Q_2(\mu,X(t,\mu);\tau,\xi)|\frac{d\mu}{\alpha(\mu)}\le$$
$$\le C\int\limits_{\eta_{lks}}^{t}(B(t,\mu))^{-M_{lk}+m_{lk}}(B(\mu,\tau))^{-M-1+m_2\gamma_2}\times$$
$$\times E^d(t,\mu)E_c^d(\mu,\tau,X(t,\mu),\xi)\frac{\beta(\mu)}{\alpha(\mu)}d\mu\le$$
$$\le C|x_s-z_s|^{m_{lks}^{-1}(1-M_{lk}+m_{lk})}\times$$
$$\times(B(t,\tau))^{-M-1+m_2\gamma_2}E_c^d(t,\tau,x,\xi).$$

З огляду на нерівності (39) доданок W_{211}^{lks} з (57) має потрібну оцінку.

З отриманих оцінок доданків W_{2j}^{lks}, $j\in\mathbb{N}_{11}$, $\{l,s\}\subset\mathbb{N}_2$, $m_1|k_1|+|k_2|\le 1$, і зображення (57) випливають оцінки

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}D_x^{lk}W_2(t,x;\tau,\xi)|\le C|x_s-z_s|^{\gamma_s^{lk}}(B(t,\tau))^{-M-1}\times$$
$$\times(E_c^d(t,\tau,x,\xi)+E_c^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)),\qquad(58)$$

де $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi,z^{(s)}\}\subset\mathbb{R}^n$, $\{x_s,z_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s}$, $k=(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}_+^n$, $\gamma_s^{lk}\in(0,m_{lks}^{-1}m_1\gamma_1)$, якщо $m_1\gamma_1<m_2\gamma_2-m_1$, і $\gamma_s^{lk}\in(0,m_{lks}^{-1}(m_2\gamma_2-m_1))$, якщо $m_1\gamma_1>m_2\gamma_2-m_1$, $m_1|k_1|+|k_2|\le 1$.

З оцінок (41) і (58) випливає оцінка (56). Теорему доведено.

Зауважимо, що показник Гельдера γ_2^{lk} для приросту похідної ФРЗК за другою просторовою змінною на $m_2^{-1}m_1=1/3$ менший від показника Гельдера γ_2 коефіцієнтів рівняння (1). ■

Висновки

Отримані оцінки приростів похідних від ФРЗК можна застосувати для знаходження точних класів коректної розв'язності задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних та виродженням на початковій гіперплощині; дослідження локальної розв'язності задачі Коші для відповідного квазілінійного рівняння; побудови ФРЗК для таких рівнянь з більшою кількістю груп просторових змінних.

Література

[1] *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – 152. – 390 p.

[2] *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Про класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова // Сучасні проблеми механіки та математики. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. – Т. 1. – С. 36–38.

[3] *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження // Буков. мат. журн. – 2014. – 2, № 2–3. – С. 27–41.

[4] *Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині // Буков. мат. журн. – 2015. – 3, № 3–4. – С. 43–51.

[5] *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних // Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. – 2016. – 13, № 1. – С. 108–155.

[6] *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Про класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапара-

болічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – 59, № 2. – С. 28–42.

[7] *Возняк О. Г., Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторових змінних та виродженням на початковій гіперплощині // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Серія Фіз.-мат. науки. – 2017. – № 871. – С. 46–64.

THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR ULTRAPARABOLIC KOLMOGOROV TYPE EQUATION WITH TWO GROUPS OF SPATIAL VARIABLES AND WITH DEGENERATION ON THE INITIAL HYPERPLANE

O. G. Voznyak[a], S. D. Ivasyshen[b, c], I. P. Medynsky[b, d]

[a] *Ternopil National Economical University*
11, Lvivska Str., 46004, Ternopil, Ukraine
[b] *Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine*
3-b, Naukova Str., 79060, Lviv, Ukraine
[c] *National Technical University of Ukraine "KPI"*
37, Prosp. Peremohy, 03056, Kyiv, Ukraine
[d] *Lviv Polytechnic National University*
12, S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

For an ultraparabolic equation of Kolmogorov type with two groups of spatial variables and with degeneration on the initial hyperplane the estimates of increments with respect to spatial variables for the fundamental solution of the Cauchy problem and its derivatives are established.

Key words: fundamental solution of the Cauchy problem, degeneration on the initial hyperplane, parametrix, Levi method.

2000 MSC: 35E20

UDK: 517.956.4