МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Комплексні практичні індивідуальні завдання з курсу «Економетрика» («Економетрія»)

Тернопіль – 2019

Рецензенти:
С. В. Мартинюк – к. ф.-м. н., доцент кафедри інформатики і методики її викладання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка

О. С. Башуцька – к. е. н., ст. викладач кафедри економічної кібернетики та інформатики Тернопільського національного економічного університету

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики
протокол №3 від 15.10.2019р.

Рекомендовано вченою радою ФКІТ протокол №2 від 31.10.2019р.

Березька К. М., Мартинюк О. М., Пласконь С. А., Сенів Г. В., Єрьоменко В. О., Попіна С. Ю., Хома-Могильська С. Г., Руська Р. В. Комплексні практичні індивідуальні завдання з курсу «Економетрика» («Економетрія»), 2019. – 68 с.
У посібнику наведено короткі теоретичні відомості, приклади розв’язування задач та індивідуальні завдання з дисципліни «Економетрика». Для студентів денної форми навчання.

Відповідальний за випуск: О. М. Мартинюк, кандидат фізико-математичних наук, завідувач кафедри ПМ ТНЕУ

Зміст

Програма дисципліни «Економетрика» («Економетрія») ……… 4

Структура залікового кредиту дисципліни «Економетрика» («Економетрія») ………………………………………………….. 6

Перелік теоретичних запитань ………………………………….. 7

Тематика комплексного практичного індивідуального завдання 9

Зразки розв’язування комплексного практичного індивідуального завдання ………………………………………….. 20

Завдання 1 ……………………………………………………... 20

Завдання 2 ……………………………………………………... 31

Завдання 3 ……………………………………………………... 36

Завдання 4 ……………………………………………………... 42

Завдання 5 ……………………………………………………... 46

Завдання 6 ……………………………………………………... 48

Завдання 7 ……………………………………………………... 56

ДОДАТКИ …………………………………………………........... 59

Додаток 1. Алгоритм знаходження оберненої матриці в Excel .. 59

Додаток 2. Алгоритм множення матриць в Excel ……………....... 59

Додаток 3. Порядок знаходження оцінок параметрів економетричної моделі з використанням функції ЛИНЕЙН 59

Додаток 4. Довідкові таблиці ……………………………………. 61

Програма дисципліни «Економетрика» («Економетрія»)

Змістовий модуль 1. Методологія побудови однофакторних економетричних моделей.

Тема 1. Предмет та метод економетрики.

Предмет та метод економетрики. Історичні відомості. Приклади моделей та методів, які носять і не носять характер економетричних досліджень. Значення курсу та взаємозв'язок з іншими економічними дисциплінами. Математична модель та основні етапи її побудови. Теоретичні основи математичного моделювання та класифікація моделей. [1] с.386-414, [2] с.3-5, [3] с.20-27.

Тема 2. Однофакторна лінійна економетрична модель.

Регресійна та економетрична модель. Знаходження статистичних оцінок параметрів методом найменших квадратів (МНК). [1] с.415-429, [2] с.6-13, [3] с.27-33, с.44-53.

Тема 3. Статистична перевірка оцінок однофакторної економетричної моделі.

Стандартна похибка оцінки за рівнянням економетричної моделі. Коефіцієнт детермінації та коефіцієнт кореляції. Основні припущення при використанні МНК. Загальні відомості про статистичні оцінки. Незміщеність і ефективність оцінок МНК. Перевірка нульових гіпотез. Побудова інтервалів довір'я рівняння економетричної моделі. Перевірка нульових гіпотез і довірчі інтервали параметрів α_0 і α_1. Перевірка моделі на адекватність. [1] с.430-448, [2] с.19-37, [5] с.41-50.

Тема 4. Однофакторні нелінійні економетричні моделі.

Криві зростання. Зведення деяких нелінійних моделей до лінійних. Лінеаризація квадратичних функцій. Лінеаризація зворотних кривих зростання. Лінеаризація експоненційних функцій. Лінеаризація степеневих функцій. Приклади застосування нелінійних моделей на практиці. [1] с.449-457, [2] с.45-48, с.51-67, [4] с.262-307, [7] с.124-130.

Змістовий модуль 2. Методологія побудови багатофакторних економетричних моделей.

Тема 5. Класична лінійна багатофакторна модель.

Лінійна багатофакторна економетрична модель. МНК для багатофакторної економетричної моделі. Лінійна економетрична модель з трьома змінними. МНК для моделі з трьома змінними. Коефіцієнти парної, частинної та множинної кореляції. [1] с. 465-468, 483-493, [2] с.54-56, с.61-63, [5] с.93-96.

Тема 6. Матричний підхід до лінійної багатофакторної моделі.

Постановка задачі в матричній формі та основні припущення МНК для загального випадку. МНК в матричній формі. Дисперсійно-коваріаційна матриця $\operatorname{var}(\mathbf{a})$. Матриця кореляції. Перевірка моделі на адекватність. Перевірка нульових гіпотез і довірчі інтервали параметрів. Перевірка нульової гіпотези стосовно коефіцієнта множинної кореляції. Прогнозування за економетричною моделлю. [1] с.468-476, 494-510, [2] с. 51-67, [3] с. 249-263.

Тема 7. Часові ряди і прогнозування.

Загальні відомості про часові ряди і задачі їх аналізу. Стаціонарні часові ряди і їх характеристики. Автокореляційна функція. Аналітичне вирівнювання (згладжування) часового ряду (виділення невипадкової компоненти). Прогнозування на основі моделей часових рядів. [1] с.538-557, [7] с.133-150.

Змістовий модуль 3. Особливі випадки в багатофакторному економетричному аналізі.

Тема 8. Мультиколінеарність.

Мультиколінеарність і її наслідки. Дослідження мультиколінеарності. Способи усунення мультиколінеарності. [2] с.76-85, [3] с.228-244, [8] с.247-258

Тема 9. Гетероскедастичність.

Поняття гомо- і гетероскедастичності. Узагальнений МНК. Методи виявлення гетероскедастичності. Усунення гетероскедастичності. [4] с.207-237, [7] с.155-167, [8] с.192-193.

Тема 10. Автокореляція.

Природа автокореляції та її вплив в економетричних моделях. Методи знаходження оцінок в умовах автокореляції. Тести на наявність автокореляції. Усунення автокореляції. [8] с.258-278, [7] с. 170-177.

Тема 11. Авторегресивні і дистрибутивно-лагові моделі.

Природа авторегресивних моделей. Приклади практичного застосування авторегресивних моделей. Оцінка параметрів дистрибутивно-лагових моделей. Комбінація моделей адаптивних очікувань і часткових пристосувань. Оцінювання параметрів авторегресивних моделей. Виявлення автокореляції в авторегресивних моделях. [7] с. 167-188.

Тема 12. Dummy-змінні

Природа Dummy-змінних. Регресія однієї кількісної та однієї якісної змінної двох класів або категорій. Регресія кількісної змінної та однієї якісної змінної з більш ніж двома класами. Регресія однієї кількісної і двох якісних змінних. Порівняння двох регресійних моделей. [3] с. 310-325.

Структура залікового кредиту дисципліни «Економетрика» («Економетрія»)

денна / заочна форма навчання

Назва теми	Кількість годин							
	Лекції		**Практичні заняття**		**Самостійна робота**		**Індивідуальна робота**	
	денна	заочна	денна	заочна	денна	заочна	денна	заочна
Змістовий модуль 1. Методологія побудови однофакторних економетричних моделей								
Тема 1. Предмет та метод економетрії	1	0,5	0,5	-	1	6	-	-
Тема 2. Однофакторна лінійна економетрична модель	3	1,5	1,5	1	2	7	0,5	-
Тема 3. Статистична перевірка оцінок однофакторної економетричної моделі	4	2	4	1	2	7	0,5	-
Тема 4. Однофакторні нелінійні економетричні моделі	4	2	4	2	3	8	0,5	-
Змістовий модуль 2. Методологія побудови багатофакторних економетричних моделей								
Тема 5. Класична лінійна багатофакторна модель	4	1	4	1	3	8	0,5	-
Тема 6. Матричний підхід до лінійної багатофакторної моделі	4	1	4	1	3	8	0,5	-
Змістовий модуль 3. Особливі випадки в багатофакторному економетричному аналізі								
Тема 7. Часові ряди і прогнозування	4	-	4	-	3	8	-	-
Тема 8. Мультиколінеарність	2	1	2	-	3	8	0,5	-
Тема 9. Гетероскедастичність	2	1	4	-	3	8	0,5	-
Тема 10. Автокореляція	2	-	2	-	3	8	0,5	-
Тема 11. Авторегресивні і дистрибутивно-лагові моделі	4	-	4		3	8		
Тема 12. Dummy-змінні	2		2		3	8		
Разом	**36**	**10**	**36**	**6**	**32**	**92**	**4**	**-**

ПЕРЕЛІК ТЕОРЕТИЧНИХ ЗАПИТАНЬ

1. Предмет та метод економетрії.
2. Значення курсу та взаємозв'язок з іншими економічними дисциплінами.
3. Математична модель та основні етапи її побудови.
4. Теоретичні основи математичного моделювання та класифікація моделей.
5. Регресійна та економетрична модель.
6. Знаходження статистичних оцінок параметрів методом найменших квадратів (МНК) через систему нормальних рівнянь.
7. Знаходження статистичних оцінок параметрів методом найменших квадратів (МНК) через прирости.
8. Стандартна похибка оцінки за рівнянням економетричної моделі.
9. Коефіцієнт детермінації та коефіцієнт кореляції.
10. Основні припущення при використанні МНК.
11. Незміщеність і ефективність оцінок МНК.
12. Перевірка нульових гіпотез.
13. Побудова інтервалів довір'я рівняння економетричної моделі.
14. Перевірка нульових гіпотез і довірчі інтервали параметрів α_0 і α_1.
15. Перевірка моделі на адекватність.
16. Криві зростання. Зведення нелінійних моделей до лінійних.
17. Лінійна багатофакторна економетрична модель. МНК для багатофакторної економетричної моделі.
18. Лінійна економетрична модель з трьома змінними. МНК для моделі з трьома змінними.
19. Коефіцієнти парної, частинної та множинної кореляції.
20. Постановка задачі в матричній формі та основні припущення МНК для загального випадку. МНК в матричній формі.
21. Дисперсійно-коваріаційна матриця $\mathrm{var}(\mathbf{a})$. Матриця кореляції.
22. Перевірка моделі на адекватність в матричній формі.
23. Перевірка нульових гіпотез і довірчі інтервали параметрів.
24. Перевірка нульової гіпотези стосовно коефіцієнта множинної кореляції.
25. Покроковий метод побудови економетричних моделей.
26. Мультиколінеарність і її наслідки.
27. Дослідження мультиколінеарності.
28. Способи усунення мультиколінеарності.
29. Поняття гомо- і гетероскедастичності.
30. Методи виявлення гетероскедастичності. Узагальнений МНК.
31. Природа автокореляції та її вплив в економетричних моделях.
32. Методи знаходження оцінок в умовах автокореляції.
33. Природа авторегресивних моделей.
34. Оцінка параметрів дистрибутивно-лагових моделей.
35. Оцінювання параметрів авторегресивних моделей.

Тематика комплексного практичного індивідуального завдання

Завдання 1. **Побудова лінійної економетричної моделі з двома змінними. Статистична перевірка оцінок лінійної економетричної моделі з двома змінними**

Для десяти підприємств регіону за умовний деякий період відомі числові значення двох економічних показників: валова продукція Y (млн. грн.) і вартість основних виробничих фондів X (млн. грн.), (табл.1). Для дослідження характеристики впливу вартості основних виробничих фондів (X) на випуск валової продукції (Y) підприємства з допомогою економетричної моделі необхідно:

1. Обчислити статистичні оцінки параметрів лінійного рівняння регресії (за системою нормальних рівнянь та через відхилення від середніх);
2. Обчислити загальну, пояснену та непояснену дисперсії.
3. Для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити значущість коефіцієнтів регресії α_0 та α_1;
4. Знайти довірчі інтервали коефіцієнтів регресії з надійністю $\gamma = 0{,}95$;
5. Знайти вибіркові коефіцієнт детермінації, коефіцієнт кореляції;
6. Знайти та побудувати довірчий інтервал рівняння економетричної моделі з надійністю $p = 0{,}90$;
7. Виконати перевірку нульової гіпотези відносно коефіцієнта кореляції.
8. Перевірити на адекватність побудовану економетричну модель з ймовірністю p=0,95.
9. Знайти прогнозне значення валової продукції, вартість основних виробничих фондів якої складає 8 млн. грн, а також із надійністю $\gamma = 0{,}95$ побудувати довірчий інтервал для цього прогнозного значення.

Числові параметри варіантів наведені в таблицях 2 та 3.

Таблиця 1

№ підприємства	Валовий випуск продукції, *Y*, млн. грн.	Вартість основних виробничих фондів, *X*, млн. грн.
1	$2,2 + a_1$	$1,3 + b_1$
2	$4,2 + a_2$	$2,2 + b_2$
3	$5,8 + a_3$	$3,4 + b_3$
4	$6,8 + a_4$	$2,6 + b_4$
5	$5,8 + a_5$	$3,2 + b_5$
6	$7,8 + a_6$	$4,5 + b_1$
7	$9,6 + a_7$	$5,0 + b_2$
8	$8,6 + a_8$	$6,2 + b_3$
9	$10,2 + a_9$	$7,3 + b_4$
10	$12,4 + a_{10}$	$8,2 + b_5$

Таблиця 2

Варіант, остання цифра № залікової	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
0	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	0.1	2.1
1	2.1	2.0	1.4	2.3	2.2	2.6	2.7	2.9	0.2	3.2
2	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.2	0.5	0.5	0.3	0.4
3	2.1	1.2	1.3	3.4	2.4	2.5	2.6	2.7	0.4	3.1
4	1.5	2.1	1.2	5.1	1.2	2.0	1.8	3.2	0.1	3.1
5	1.6	2.2	1.3	5.2	1.3	2.1	1.9	3.4	0.2	3.2
6	1.7	2.3	1.4	5.3	1.4	2.2	1.7	3.5	0.3	3.3
7	1.8	2.4	1.6	5.4	1.5	2.3	1.4	4.1	0.4	3.4
8	1.9	2.6	1.7	5.2	1.6	2.4	1.5	4.2	0.4	3.6
9	2.0	2.7	1.8	5.0	1.7	2.6	1.2	4.3	0.2	3.7

Таблиця 3

(***Номер варіанту вибирати по порядковому № студента в списку групи***)

Варіант	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	Варіант	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
1	0.5	0.6	0.8	0.9	0.9	**24**	2.1	1.3	4.1	2.1	0.3
2	1.1	1.2	1.1	1.2	1.2	**25**	0.5	0.6	1.2	1.4	0.6
3	1.3	1.1	1.4	1.5	1.2	**26**	0.5	0.4	0.7	1.0	1.0
4	1.6	1.2	1.3	1.4	1.5	**27**	1.2	1.3	1.4	2.0	1.5
5	1.6	1.7	1.8	1.4	1.5	**28**	2.0	2.1	0.3	0.3	1.1
6	0.3	0.3	0.2	0.2	0.3	**29**	1.2	1.6	1.7	0.3	0.4
7	1.0	1.2	1.2	1.3	1.3	**30**	1.5	1.4	0.8	0.3	0.2
8	1.3	1.5	1.7	1.8	0.2	**31**	0.8	0.2	0.1	2.1	1.3
9	0.3	1.2	1.4	0.2	0.1	**32**	0.9	0.5	1.9	1.3	1.4
10	1.8	1.1	0.3	0.5	0.7	**33**	1.7	1.7	1.7	1.8	2.0
11	0.7	0.8	2.1	2.3	1.5	**34**	0.9	0.8	1.3	1.2	2.3

12	1.9	1.3	0.2	1.3	1.6	**35**	2.4	1.4	1.5	0.3	0.5
13	2.2	2.4	1.5	1.7	0.2	**36**	1.5	1.8	0.6	0.7	0.3
14	0.3	0.4	0.5	0.7	0.8	**37**	1.4	1.7	1.9	2.3	1.8
15	0.4	1.3	1.4	1.7	1.2	**38**	2.1	0.4	0.6	1.5	1.2
16	2.3	1.0	1.3	0.5	0.6	**39**	1.9	1.3	1.1	2.1	0.8
17	0.7	0.3	1.2	1.4	1.1	**40**	2.4	2.1	0.9	1.8	1.9
18	1.1	1.4	1.3	1.0	2.3	**41**	2.1	0.8	0.7	2.3	1.2
19	2.2	2.3	1.5	0.2	0.6	**42**	2.3	0.3	0.4	0.9	1.5
20	1.6	1.7	2.1	0.5	1.6	**43**	1.6	1.7	0.9	2.2	0.7
21	1.7	1.2	1.8	1.9	1.0	**44**	0.7	0.8	1.3	1.4	1.4
22	2.3	2.1	1.8	2.0	1.2	**45**	0.9	0.7	1.5	1.6	0.5
23	2.4	2.2	0.9	0.7	0.8	**46**	0.4	0.3	2.1	2.4	1.5

Завдання 2. **Нелінійні економетричні моделі**

1. Використовуючи вибіркові дані завдання 1, підібрати криву, яка найповніше описує тенденцію з допомогою Excel (ЛИНИЯ ТРЕНДА). Для кращого підбору лінії тренду пробувати декілька варіантів кривих: лінійна; поліноміальна (степінь 2); поліноміальна (степінь 3); логарифмічна; степенева; експоненційна.
2. Побудувати залежність виду згідно свого варіанту (див. табл. 4), використавши МНК за системою нормальних рівнянь.

Таблиця 4

Варіант (за останньою цифрою залікової книжки)	Вид залежності
0	$y = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{1}{x}$
1	$y = \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt{x}$
2	$y = \alpha_0 + \alpha_1 x^3$
3	$y = \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt{\frac{1}{x}}$
4	$y = \alpha_0 + \alpha_1 x^2$
5	$y = \alpha_0 + \alpha_1 \ln x$
6	$y = \alpha_0 \alpha_1^{\,x}$

7	$y = \alpha_0 x^{\alpha_1}$
8	$y = \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt[3]{x}$
9	$y = e^{\alpha_0 + \alpha_1 x}$

Завдання 3. **Лінійні багатофакторні економетричні моделі. Знаходження оцінок методом найменших квадратів з застосуванням системи нормальних рівнянь**

На основі даних *таблиці 5*:

1) знайти оцінки параметрів економетричної моделі, яка описує залежність валової продукції від вартості основних виробничих фондів та затрат робочого часу;
2) обчислити коефіцієнти парної та частинної кореляції;
3) знайти коефіцієнти множинної детермінації та кореляції.

Зробити економічний аналіз отриманих розрахунків.

Числові значення даних для варіантів наведені в таблицях 5 та 2 і 3.

Таблиця 5

№ п/п	Валова продукція, Y, млн. грн.	Основні виробничі фонди, X_1, млн. грн.	Затрати робочого часу, X_2, тис. люд.-год.
1	$2{,}2 + a_1$	$1{,}3 + b_1$	$2{,}3 + a_1$
2	$4{,}2 + a_2$	$2{,}2 + b_2$	$3{,}4 + a_2$
3	$5{,}8 + a_3$	$3{,}4 + b_3$	$2{,}2 + a_3$
4	$6{,}8 + a_4$	$2{,}6 + b_4$	$3{,}4 + a_1$
5	$5{,}8 + a_5$	$3{,}2 + b_5$	$4{,}2 + a_2$
6	$7{,}8 + a_6$	$4{,}5 + b_1$	$4{,}3 + a_3$
7	$9{,}6 + a_7$	$5{,}0 + b_2$	$5{,}4 + a_1$
8	$8{,}6 + a_8$	$6{,}2 + b_3$	$5{,}6 + a_2$
9	$10{,}2 + a_9$	$7{,}3 + b_4$	$5{,}7 + a_3$
10	$12{,}4 + a_{10}$	$8{,}2 + b_5$	$6{,}2 + a_2$

Завдання 4. **Лінійні багатофакторні економетричні моделі. Знаходження оцінок методом найменших квадратів з застосуванням матричної форми запису**

Використовуючи вибіркові дані попереднього завдання, знайти:

1. Вектор оцінок $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

2. Матрицю дисперсій оцінок $\operatorname{var}(\mathbf{a})$.

3. Інтервали довір'я (p=0,9) параметрів α_0, α_1 та α_2.

Завдання 5. **Мультиколінеарність в економетричних моделях**

Економічний показник середньомісячна заробітна плата (y) залежить від продуктивності праці (x_1), фондомісткості (x_2) і коефіцієнта плинності робочої сили (x_3). На основі статистичних даних за 10 років необхідно оцінити наявність загальної мультиколінеарності. У випадку її присутності, виявити пари факторів між якими існує мультиколінеарність, один із факторів виключити з розгляду таких пар. Дослідження провести за методом Феррара-Глобера.

Вихідні дані наводяться в табл. 6 та табл. 7

Таблиця 6

Номер цеху	Продуктивність праці, людино-дні	Фондомісткість, млн. грн.	Коефіцієнт плинності робочої сили, %
1	32 + a_4	0.89 + a_9	19.5 + a_1
2	29 + a_5	0.43 + a_9	15.6 + a_2
3	30 + a_6	0.70 + a_9	13.5 + a_3
4	31 + a_7	0.61 + a_9	9.5 + a_1
5	25 + a_8	0.51 + a_9	23.5 + a_2
6	34 + a_4	0.71 + a_9	12.5 + a_3
7	29 + a_5	0.65 + a_9	17.5 + a_1
8	24 + a_6	0.43 + a_9	14.5 + a_2
9	20 + a_7	0.33 + a_9	14.5 + a_3
10	33 + a_8	0.92 + a_9	75 + a_1

Таблиця 7

Варіант остання цифра № залікової	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
0	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	0.01	2.1
1	2.1	2.0	1.4	2.3	2.2	2.6	2.7	2.9	0.02	3.2
2	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.12	0.15	0.25	0.03	0.4
3	2.1	1.2	1.3	3.4	2.4	2.5	2.6	2.7	0.04	3.14
4	1.5	2.1	1.2	5.1	1.2	2.0	1.8	3.2	0.01	3.1
5	1.6	2.2	1.3	5.2	1.3	2.1	1.9	3.4	0.02	3.2
6	1.7	2.3	1.4	5.3	1.4	2.2	1.7	3.5	0.03	3.3
7	1.8	2.4	1.6	5.4	1.5	2.3	1.4	4.1	0.04	3.4
8	1.9	2.6	1.7	5.2	1.6	2.4	1.5	4.2	0.04	3.6
9	2.0	2.7	1.8	5.0	1.7	2.6	1.2	4.3	0.02	3.7

Завдання 6. **Гетероскедастичність в економетричних моделях**

Побудувати економетричну модель залежності величини доходу від рівня заощаджень. Перед побудовою економетричної залежності перевірити наявність явища гетероскедастичності з допомогою тестів: рангової кореляції Спірмена, Голдфелда-Квондта, Глейзера. Вихідні дані наведені табл. 8, а також у табл. 7 та 9.

Таблиця 8

Місяць	Дохід, умовних одиниць	Заощадження, умовних одиниць
1	$10.8 + b_1$	$2.36 + a_9$
2	$11.4 + b_2$	$2.20 + a_9$
3	$12.0 + b_3$	$2.08 + a_9$
4	$12.6 + b_4$	$2.20 + a_9$
5	$13.0 + b_5$	$2.10 + a_9$
6	$13.9 + b_1$	$2.12 + a_9$
7	$14.7 + b_2$	$2.41 + a_9$
8	$15.5 + b_3$	$2.50 + a_9$
9	$16.3 + b_4$	$2.43 + a_9$
10	$17.5 + b_5$	$2.59 + a_9$
11	$18.7 + b_5$	$2.9 + a_9$
12	$19.7 + b_4$	$2.95 + a_9$

13	$20.6 + b_3$	$2.82 + a_9$
14	$21.7 + b_2$	$3.04 + a_9$
15	$23.2 + b_1$	$3.53 + a_9$
16	$24.2 + b_1$	$3.44 + a_9$
17	$25.9 + b_2$	$3.75 + a_9$
18	$27.2 + b_3$	$3.99 + a_9$

Таблиця 9

Варіант, № у списку	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	Варіант, № у списку	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
1	0.5	0.6	0.8	0.9	0.9	**26**	2.3	1.0	1.3	0.5	0.6
2	1.1	1.2	1.1	1.2	1.2	**27**	0.7	0.3	1.2	1.4	1.1
3	1.3	1.1	1.4	1.5	1.2	**28**	1.1	1.4	1.3	1.0	2.3
4	1.6	1.2	1.3	1.4	1.5	**29**	2.2	2.3	1.5	0.2	0.6
5	1.6	1.7	1.8	1.4	1.5	**30**	1.6	1.7	2.1	0.5	1.6
6	0.3	0.3	0.2	0.2	0.3	**31**	1.7	1.2	1.8	1.9	2.0
7	1.0	1.2	1.1	1.3	1.3	**32**	2.3	2.1	1.8	2.0	1.2
8	1.3	1.5	1.7	1.8	0.2	**33**	2.4	2.2	0.9	0.7	0.8
9	0.3	1.2	1.4	0.2	0.1	**34**	1.8	1.9	2.1	0.5	0.9
10	1.8	1.1	0.3	0.5	0.7	**35**	2.3	2.1	2.4	2.0	0.8
11	2.1	1.3	4.1	2.1	0.3	**36**	0.9	0.8	1.3	1.2	2.3
12	0.5	0.6	1.2	1.4	0.6	**37**	2.4	1.4	1.5	0.3	0.5
13	0.5	0.4	0.7	1.0	1.0	**38**	1.5	1.8	0.6	0.7	0.3
14	1.2	1.3	1.4	2.0	2.5	**39**	1.4	1.7	1.9	2.3	1.8
15	2.0	2.1	0.3	0.3	1.1	**40**	2.1	0.4	0.6	1.5	1.2
16	1.2	1.6	1.7	0.3	0.4	**41**	1.9	1.3	1.1	2.1	0.8
17	1.5	1.4	0.8	0.3	0.2	**42**	2.4	2.1	0.9	1.8	1.9
18	0.8	0.2	0.1	2.1	2.3	**43**	2.1	0.8	0.7	2.3	1.2
19	0.9	0.5	1.9	1.3	1.4	**44**	2.3	0.3	0.4	0.9	1.5
20	1.7	1.7	1.7	1.8	2.0	**45**	1.6	1.7	0.9	2.2	0.7
21	0.7	0.8	2.1	2.3	1.5	**46**	0.7	0.8	1.3	1.4	2.4
22	1.9	1.3	0.2	1.3	1.6	**47**	0.9	0.7	1.5	1.6	0.5
23	2.2	2.4	1.5	1.7	0.2	**48**	0.4	0.3	2.1	2.4	1.5
24	0.3	0.4	0.5	0.7	0.8	**49**	1.3	1.1	0.4	1.5	1.7
25	0.4	1.3	1.4	1.7	1.2	**50**	1.9	2.4	1.8	0.7	0.3

Завдання 7. **Автокореляція в економетричних моделях.**

Побудувати економетричну модель залежності прибутку підприємства від вартості основних виробничих фондів, затрат праці та собівартості продукції, попередньо дослідивши наявність автокореляції. Числові параметри варіантів наведені в табл. 10, а також в табл. 7 та 9.

Таблиця 10

№ підприємства	Прибуток, Y, млн. грн.	Вартість основних виробничих фондів, x_1, млн. грн.	Затрати праці, x_2, тис. люд.днів	Собівартість одиниці продукції, x_3, грн
1	$10.6 + a_3$	$20.4 + b_1$	$100.4 + a_6$	$10.3 + a_1$
2	$20.4 + a_4$	$30.5 + b_2$	$110.2 + a_7$	$20.3 + a_2$
3	$22.4 + a_5$	$25.6 + b_3$	$105.3 + a_8$	$24.5 + a_3$
4	$30.6 + a_6$	$40.3 + b_4$	$120.3 + a_9$	$28.3 + a_1$
5	$35.7 + a_7$	$60.5 + b_5$	$140.3 + a_{10}$	$29.3 + a_2$
6	$40.3 + a_4$	$65.3 + b_5$	$145.4 + a_1$	$35.2 + a_3$
7	$51.3 + a_4$	$70.8 + b_4$	$155.2 + a_2$	$38.4 + a_1$
8	$55.5 + a_5$	$85.1 + b_3$	$170.3 + a_3$	$48.2 + a_2$
9	$68.3 + a_6$	$90.2 + b_2$	$175.4 + a_4$	$50.4 + a_3$
10	$72.2 + a_7$	$100.2 + b_1$	$185.3 + a_5$	$58.2 + a_1$
11	$84.8 + a_3$	$120.4 + b_2$	$189.4 + a_1$	$55.3 + a_2$
12	$90.3 + a_5$	$125.6 + b_3$	$192.3 + a_6$	$60.3 + a_2$
13	$98.8 + a_6$	$132.4 + b_4$	$190.4 + a_5$	$69.4 + a_4$
14	$105.2 + a_7$	$136.7 + b_5$	$199.5 + a_3$	$70.3 + a_2$
15	$114.6 + a_3$	$145.2 + b_1$	$210.6 + a_9$	$75.8 + a_1$

Таблиця 11

Додаткова таблиця даних, яку можна використати для завдань 1-4 при бажанні викладача.

Варіант											
01.	Y	20	19	17	16	14	13	12	11	9	8
	X_1	18	20	21	23	24	26	29	31	33	36
	X_2	103	108	115	123	130	140	151	160	175	190
02.	Y	50	43	35	30	20	18	16	14	13	6
	X_1	10	12	15	17	18	19	22	24	26	30
	X_2	75	80	88	99	103	108	113	125	133	140
03.	Y	56	50	48	43	38	36	30	27	20	17
	X_1	19	23	26	31	36	41	45	51	57	60
	X_2	102	107	113	120	130	140	151	166	175	190
04.	Y	7	7	6	6	5	5	4	4	3	3
	X_1	30	36	38	43	48	50	56	60	67	80
	X_2	151	166	175	190	198	210	223	232	240	246
05.	Y	35	33	32	29	26	24	20	18	16	13
	X_1	6	6	8	9	10	11	11	12	13	14
	X_2	30	38	48	56	67	81	92	98	105	116
06.	Y	30	25	24	20	15	14	13	12	10	8
	X_1	20	25	27	30	35	39	40	45	47	49
	X_2	100	133	145	166	185	200	211	219	225	233
07.	Y	45	43	41	38	34	30	28	25	22	17
	X_1	13	24	33	37	49	60	76	90	97	105
	X_2	45	50	57	64	70	77	86	92	98	100
08.	Y	52	50	47	44	40	35	25	22	18	15
	X_1	33	39	41	44	47	50	54	57	60	66
	X_2	20	21	19	17	16	14	13	11	10	9
09.	Y	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3
	X_1	8	10	13	14	15	17	19	20	22	23
	X_2	12	13	15	18	18	19	21	23	24	25
10.	Y	16	15	13	11	9	8	6	5	4	2
	X_1	22	23	26	28	31	33	34	39	43	45
	X_2	34	37	41	44	47	51	55	59	63	67
11.	Y	16	12	11	10	9	7	6	5	5	2
	X_1	30	35	41	44	49	50	55	60	68	75
	X_2	4	6	8	10	13	14	15	17	20	23
12.	Y	25	23	19	18	17	15	13	10	7	5
	X_1	10	12	13	17	20	25	30	33	35	40
	X_2	13	14	15	17	20	23	27	30	38	45
13.	Y	50	55	60	68	75	80	82	90	95	100
	X_1	27	30	38	45	50	55	58	63	67	70
	X_2	23	27	30	38	45	50	55	60	68	75
14.	Y	19	17	16	14	13	12	10	8	7	5
	X_1	19	21	24	28	29	31	34	37	40	42
	X_2	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10
15.	Y	25	22	20	18	15	13	10	9	6	4
	X_1	38	45	50	55	60	68	75	80	85	90
	X_2	120	113	108	103	98	95	90	85	70	65

16.	Y	34	30	25	22	19	17	14	12	10	7
	X_1	6	6	7	8	8	9	9	10	10	12
	X_2	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25
17.	Y	21	19	17	14	12	10	7	6	5	3
	X_1	20	22	26	29	33	35	38	40	41	44
	X_2	29	28	27	26	25	24	24	23	23	22
18.	Y	40	38	35	33	29	26	22	20	19	17
	X_1	35	38	40	41	44	50	60	68	75	80
	X_2	45	40	35	30	25	20	15	10	8	5
19.	Y	44	41	40	38	35	33	29	26	22	20
	X_1	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13
	X_2	210	200	195	185	170	160	156	150	140	135
20.	Y	18	17	16	15	15	14	13	13	12	12
	X_1	22	25	30	32	34	37	40	41	43	45
	X_2	44	41	40	38	35	33	29	26	22	20
21.	Y	33	29	26	22	20	18	16	14	11	10
	X_1	37	40	41	43	45	48	50	53	56	60
	X_2	45	43	41	40	37	34	32	30	26	22
22.	Y	45	40	36	32	27	24	20	17	12	8
	X_1	10	13	17	20	24	28	32	35	40	43
	X_2	22	27	30	34	38	40	43	47	50	54
23.	Y	30	28	25	22	20	18	15	12	9	7
	X_1	5	7	10	12	14	16	19	21	24	27
	X_2	14	16	19	21	24	27	30	33	36	40
24.	Y	25	23	20	18	15	12	10	8	6	4
	X_1	7	9	11	14	16	19	20	23	25	27
	X_2	200	190	180	170	160	150	140	130	120	110
25.	Y	1	6	9	13	17	20	24	30	35	40
	X_1	60	55	50	45	40	36	30	24	20	15
	X_2	20	24	30	35	40	44	47	53	58	62
26.	Y	2	5	8	12	14	18	21	25	28	32
	X_1	44	40	37	33	30	26	22	18	15	10
	X_2	22	26	29	30	33	35	38	40	44	48
27.	Y	17	20	24	30	35	40	44	49	52	56
	X_1	36	30	24	20	15	12	10	8	6	4
	X_2	33	35	38	40	44	48	51	54	60	63
28.	Y	2	4	6	7	9	10	12	15	17	19
	X_1	45	42	40	37	34	30	28	24	20	18
	X_2	70	65	60	55	50	45	40	38	30	22
29.	Y	9	10	12	15	17	19	20	23	25	26
	X_1	80	76	72	68	66	62	60	55	52	50
	X_2	32	34	40	44	42	45	50	55	58	60
30.	Y	6	7	9	10	12	15	17	19	22	24
	X_1	60	56	52	48	43	40	37	34	30	26
	X_2	14	20	25	29	34	40	45	48	52	55
31.	Y	15	17	19	20	23	25	26	30	33	40
	X_1	43	48	50	54	58	62	66	70	73	77
	X_2	2	7	12	15	20	24	30	33	38	42
32.	Y	12	15	20	24	30	33	38	42	44	48
	X_1	30	34	40	45	50	53	57	62	66	70

	X_2	70	68	66	65	63	60	55	52	50	44
33.	Y	23	25	26	30	33	40	44	50	56	60
	X_1	40	37	34	30	25	20	18	15	12	8
	X_2	2	7	12	15	20	22	28	32	34	40
34.	Y	5	8	10	15	19	22	27	30	33	40
	X_1	100	90	86	82	75	70	66	62	58	56
	X_2	22	27	30	33	40	43	47	52	55	60
35.	Y	3	7	12	16	20	25	30	33	38	42
	X_1	86	82	75	70	66	62	58	56	50	44
	X_2	20	22	26	30	33	37	40	45	48	50
36.	Y	70	66	62	58	56	52	50	46	42	38
	X_1	20	18	18	15	13	11	10	8	6	4
	X_2	20	22	26	31	33	38	40	45	48	50
37.	Y	7	9	11	12	12	15	18	21	22	24
	X_1	40	37	36	34	33	30	27	25	22	20
	X_2	18	21	22	24	26	27	29	31	33	35
38.	Y	11	12	12	15	18	20	21	23	25	26
	X_1	30	27	25	22	20	19	17	16	14	12
	X_2	19	22	23	25	27	28	30	32	34	36
39.	Y	3	5	8	10	15	19	22	27	30	32
	X_1	50	53	52	50	49	46	42	40	37	33
	X_2	22	24	26	27	29	31	33	35	38	40
40.	Y	8	10	11	12	12	15	16	18	19	20
	X_1	30	27	25	22	20	18	16	15	13	11
	X_2	27	29	31	33	35	38	40	43	44	46
41.	Y	6	7	9	10	12	15	17	19	22	24
	X_1	49	46	42	40	37	33	32	30	28	26
	X_2	25	27	28	30	32	34	36	39	41	42
42.	Y	3	7	12	16	20	25	30	33	38	42
	X_1	50	48	47	45	44	41	39	37	36	34
	X_2	25	27	28	30	32	34	36	39	41	42
43.	Y	5	7	10	12	14	16	19	21	24	27
	X_1	33	32	30	28	26	25	23	20	19	17
	X_2	22	27	30	33	40	43	47	52	55	60
44.	Y	1	6	9	13	17	20	24	30	35	40
	X_1	100	90	86	82	75	70	66	62	58	56
	X_2	27	30	33	40	43	47	52	55	60	62
45.	Y	8	10	13	14	15	17	19	20	22	23
	X_1	12	13	15	18	18	19	21	23	24	25
	X_2	40	37	34	30	25	20	18	15	12	8
46.	Y	2	4	6	7	9	10	12	15	17	19
	X_1	70	66	62	58	56	52	50	46	42	38
	X_2	32	34	40	44	42	45	50	55	58	60
47.	Y	12	13	15	18	18	19	21	23	24	25
	X_1	3	7	12	16	20	25	30	33	38	42
	X_2	25	27	28	30	32	34	36	39	41	42
48.	Y	27	29	31	33	35	38	40	43	44	46
	X_1	25	27	28	30	32	34	36	39	41	42
	X_2	3	7	12	16	20	25	30	33	38	42
49.	Y	25	27	28	30	32	34	36	39	41	42

	X_1	1	6	9	13	17	20	24	30	35	40
	X_2	12	13	15	18	18	19	21	23	24	25
50.	Y	19	22	23	25	27	28	30	32	34	36
	X_1	27	29	31	33	35	38	40	43	44	46
	X_2	1	6	9	13	17	20	24	30	35	40

Зразки розв'язування комплексного практичного індивідуального завдання

Завдання 1

Для десяти підприємств регіону за умовний деякий період відомі числові значення двох економічних показників: валова продукція y і вартість основних виробничих фондів x, (табл.12). Для дослідження характеристики впливу вартості основних виробничих фондів (x) на випуск валової продукції (y) підприємства з допомогою економетричної моделі необхідно:

1. Зробити специфікацію моделі.
2. Знайти оцінки параметрів лінійної моделі з допомогою МНК (за системою нормальних рівнянь та через відхилення від середніх).
3. Побудувати оціночну пряму.
4. Обчислити загальну, пояснюючу та непояснюючу дисперсію.
5. Знайти значення вибіркових коефіцієнтів детермінації і кореляції та показників MAPE і MPE.
6. Побудувати довірчі інтервали параметрів α_0 та α_1 економетричної моделі з надійністю 0,95.
7. Побудувати довірчий інтервал рівняння економетричної моделі з надійністю 0,95.
8. Виконати перевірки нульових гіпотез стосовно коефіцієнта кореляції і параметрів α_0 та α_1 економетричної моделі для рівня значущості α=0,05.
9. Перевірити адекватність побудованої економетричної моделі.

Таблиця 12

№ підприємства	Валовий випуск продукції, млн.грн., y_i	Основні виробничі фонди, млн.грн., x_i
1	1,9	1,8
2	2,2	2,1
3	3	2,4
4	3,1	2,3
5	3,9	2,6
6	4,6	2,9
7	4,8	2,7
8	5,8	3,1
9	7,3	3,5
10	8,7	4,1

♦ ***Розв'язування.***

1. Побудуємо діаграму розсіювання залежності валового випуску продукції (y) від вартості основних виробничих фондів підприємства (x), відклавши на координатній площині точки з координатами (x_i; y_i) з таблиці 12:

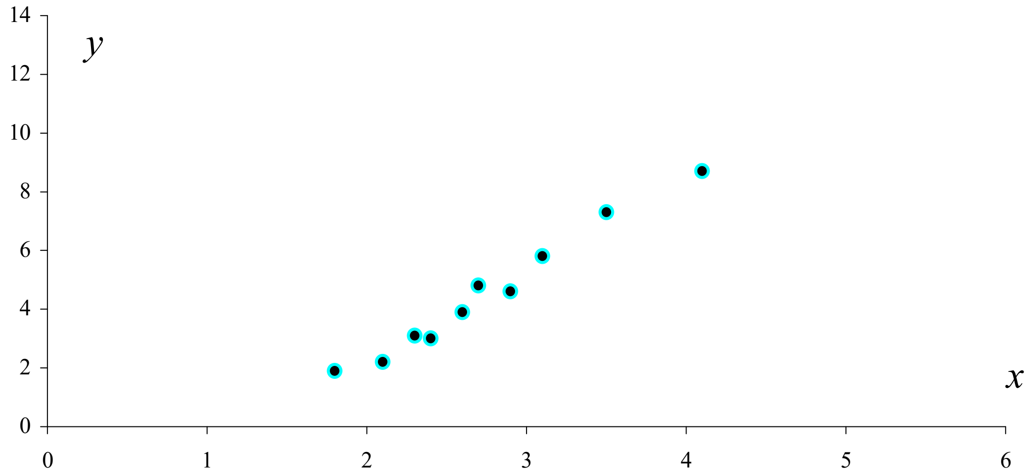

Рис.1. Діаграма розсіювання

Розміщення точок на діаграмі розсіювання дає можливість зробити припущення про існування лінійної форми зв'язку у вигляді функції:

$$\hat{y}=a_0+a_1x,$$

де $\hat{y}$ – розрахунковий обсяг випуску валової продукції, млн. грн.; x – вартість основних виробничих фондів, млн. грн.

2. Для спрощення розрахунків при знаходженні оцінок a_0 та a_1 параметрів економетричної моделі побудуємо таблицю:

Таблиця 13

№ п/п	y_i	x_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$	Δx_i	$(\Delta x_i)^2$	Δy_i	$\Delta x_i \cdot \Delta y_i$
1	1,9	1,8	3,24	3,42	-0,95	0,903	-2,63	2,499
2	2,2	2,1	4,41	4,62	-0,65	0,423	-2,33	1,515
3	3	2,4	5,76	7,2	-0,35	0,123	-1,53	0,536
4	3,1	2,3	5,29	7,13	-0,45	0,203	-1,43	0,644
5	3,9	2,6	6,76	10,14	-0,15	0,023	-0,63	0,094
6	4,6	2,9	8,41	13,34	0,15	0,023	0,07	0,011
7	4,8	2,7	7,29	12,96	-0,05	0,002	0,27	-0,014
8	5,8	3,1	9,61	17,98	0,35	0,123	1,27	0,445
9	7,3	3,5	12,25	25,55	0,75	0,563	2,77	2,078
10	8,7	4,1	16,81	35,67	1,35	1,823	4,17	5,63
Сума	**45,3**	**27,5**	**79,83**	**138,01**	**0**	**4,205**	**0**	**13,435**

Δx_i – це відхилення кожного значення x_i від середнього $\bar{x}$;

Δy_i – це відхилення кожного значення y_i від середнього $\bar{y}$;

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\frac{27,5}{10}=2,75; \qquad \bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}=\frac{45,3}{10}=4,53.$$

$$\Delta x_1 = x_1 - \bar{x} = 1{,}8 - 2{,}75 = -0{,}95;$$
$$\Delta x_2 = x_2 - \bar{x} = 2{,}1 - 2{,}75 = -0{,}65;$$
....
$$\Delta x_{10} = x_{10} - \bar{x} = 4{,}1 - 2{,}75 = 1{,}35.$$

Запишемо систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases} \qquad \begin{cases} 10a_0 + 27{,}5a_1 = 45{,}3 \\ 27{,}5a_0 + 79{,}83a_1 = 138{,}01 \end{cases}$$

Розв'яжемо її:

$$\begin{cases} a_0 = -2{,}75a_1 + 4{,}53 \\ 27{,}5(-2{,}75a_1 + 4{,}53) + 79{,}83a_1 = 138{,}01 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_0 = -2{,}75a_1 + 4{,}53 \\ -75{,}625a_1 + 124{,}575 + 79{,}83a_1 = 138{,}01 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_0 = -2{,}75a_1 + 4{,}53 \\ 4{,}205a_1 + 124{,}575 = 138{,}01 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -2{,}75a_1 + 4{,}53 \\ 4{,}205a_1 = 13{,}435 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_0 = -2{,}75 \cdot 3{,}195 + 4{,}53 \\ a_1 = 3{,}195 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -4{,}26 \\ a_1 = 3{,}195 \end{cases}$$

Знайдемо ці ж оцінки за формулами відхилень від середніх:

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i \Delta y_i)}{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2} = \frac{13{,}435}{4{,}205} = 3{,}195;$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1\bar{x} = 4{,}53 - 3{,}195 \cdot 2{,}75 = -4{,}26.$$

Отже, нами отримано оціночне рівняння економетричної моделі $\hat{y} = -4{,}26 + 3{,}195x$.

3. Побудуємо оціночну пряму $\hat{y} = -4{,}26 + 3{,}195x$.

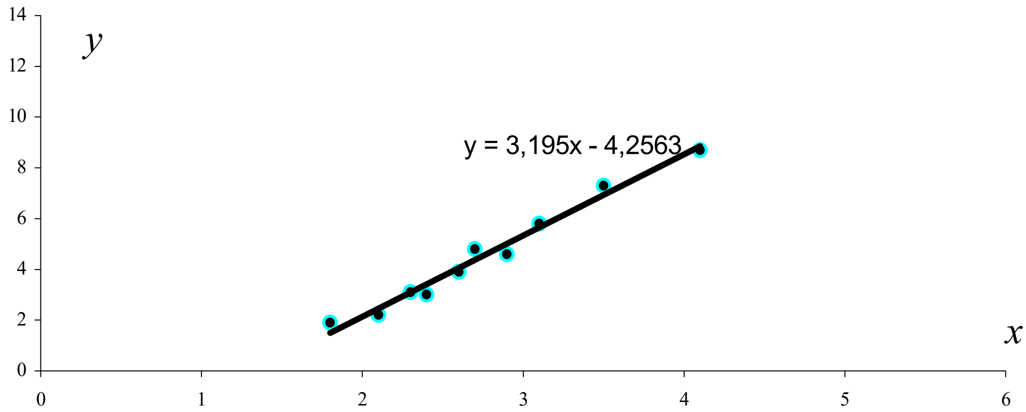

Рис.2. Діаграма розсіювання та оціночна пряма

4. Для знаходження дисперсій використаємо наступні формули:

$$\sigma^2_{\text{заг.}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}{n};\ \sigma^2_{\text{поясн.}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i - \bar{y}\right)^2}{n};\ \sigma^2_{\text{непояснн.}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}{n}.$$

Для спрощення підрахунків побудуємо таблицю, використавши середні значення змінних: $\bar{x} = 2{,}75$; $\bar{y} = 4{,}53$.

Таблиця 14

№ п/п	y_i	x_i	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$\hat{y}_i$	$\hat{y}_i - \bar{y}$	$(\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$\hat{y}_i - y_i$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$
1	1,9	1,8	-2,63	6,92	1,49	-3,04	9,21	-0,41	0,164
2	2,2	2,1	-2,33	5,43	2,45	-2,08	4,31	0,25	0,064
3	3	2,4	-1,53	2,34	3,41	-1,12	1,25	0,41	0,17
4	3,1	2,3	-1,43	2,04	3,09	-1,44	2,07	-0,01	0,0001
5	3,9	2,6	-0,63	0,4	4,05	-0,48	0,23	0,15	0,023
6	4,6	2,9	0,07	0	5,01	0,48	0,23	0,41	0,167
7	4,8	2,7	0,27	0,07	4,37	-0,16	0,03	-0,43	0,185
8	5,8	3,1	1,27	1,61	5,65	1,12	1,25	-0,15	0,023
9	7,3	3,5	2,77	7,67	6,93	2,4	5,74	-0,37	0,14
10	8,7	4,1	4,17	17,39	8,84	4,31	18,6	0,14	0,021
Сума	**45,3**	**27,5**	**0**	**43,88**	**45,3**	**0**	**42,92**	**0**	**0,956**

Отже, маємо:

$$\sigma^2_{\text{заг}} = \frac{43{,}88}{10} = 4{,}388;\quad \sigma^2_{\text{поясн.}} = \frac{42{,}92}{10} = 4{,}292;\quad \sigma^2_{\text{непояснн.}} = \frac{0{,}956}{10} = 0{,}096.$$

5. Знайдемо значення вибіркових коефіцієнтів детермінації та кореляції.

Для обчислення коефіцієнта детермінації використовуємо формулу:

$$d = \frac{\sigma^2_{\text{поясн.}}}{\sigma^2_{\text{заг.}}} = \frac{4{,}292}{4{,}388} = 0{,}978,$$

а це означає, що 97,8 % загальної дисперсії пояснюється оціночною прямою, на долю неврахованих факторів припадає 2,2 %.

Коефіцієнт кореляції знайдемо за формулою:

$$r = \pm\sqrt{d} = \pm\sqrt{0,978} = 0,99.$$

Знак коефіцієнта кореляції визначається знаком кутового коефіцієнта оціночного рівняння a_1 (в нашому випадку він додатний). Отримане значення коефіцієнта кореляції вказує на ступінь тісноти лінійного зв'язку між змінними. Значення коефіцієнта кореляції рівне 0,99 (дуже близьке до одиниці), а це значить, що лінійна форма зв'язку між змінними y та x вибрана вірно і цей зв'язок тісний.

Обчислимо значення абсолютної середньої відсоткової помилки MAPE за формулою:

$$MAPE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\hat{y}_i - y_i}{y_i}\right| \cdot 100\%.$$

Для цього використаємо розрахунки таблиці 3:

$$\sum_{i=1}^{10}\left|\frac{\hat{y}_i - y_i}{y_i}\right| = \left|\frac{-0,41}{1,9}\right| + \left|\frac{0,25}{2,2}\right| + \left|\frac{0,41}{3}\right| + \left|\frac{-0,01}{3,1}\right| + \left|\frac{0,15}{3,9}\right| + \left|\frac{0,41}{4,6}\right| + \left|\frac{-0,43}{4,8}\right| +$$

$$+\left|\frac{-0,15}{5,8}\right| + \left|\frac{-0,37}{7,3}\right| + \left|\frac{0,14}{8,7}\right| = 0,213 + 0,115 + 0,137 + 0,003 + 0,039 +$$

$$+ 0,089 + 0,09 + 0,026 + 0,051 + 0,017 = 0,78.$$

Тоді $MAPE = \frac{1}{10} \cdot 0,78 \cdot 100\% = 7,8\% < 10\%$, що відповідає високій точності прогнозу за отриманою економетричною моделлю $\hat{y} = -4,26 + 3,195x$.

Середню відсоткову помилку MPE знайдемо за формулою:

$$MPE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\hat{y}_i - y_i}{y_i} \cdot 100\%,$$

Обчислимо

$$\sum_{i=1}^{10}\frac{\hat{y}_i - y_i}{y_i} = -0,213 + 0,115 + 0,137 - 0,003 + 0,039 +$$

$$+ 0,089 - 0,09 - 0,026 - 0,051 + 0,017 = 0,014.$$

Отримали

$MPE = \frac{1}{10} \cdot 0,014 \cdot 100\% = 0,14\% < 5\%$, що свідчить про високу якість економетричної моделі.

6. Довірчі інтервали з надійністю γ для невідомих параметрів a_0 та a_1 мають вигляд:

$$a_m - t_m(\gamma, k)S_{a_m} < \alpha_m < a_m + t_m(\gamma, k)S_{a_m},$$

де $m = 0;1$, $t_m = t_m(\gamma, k)$ – корінь рівняння $P(|t_m| < t) = \gamma$, t_m – випадкова величина, розподілена за законом Ст'юдента.

Для надійності $\gamma = 0,95$ і числа ступенів вільності $k = n - 2 = 8$ за таблицею значень функції Ст'юдента знаходимо $t_0(0,95;8) = = t_1(0,95;8) = 2,306$. Потім обчислимо незміщену точкову оцінку σ_u^2 непоясненої дисперсії за формулою:

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{1}{10-2}\cdot 0,956 = 0,1195.$$

Значення $\sigma_{a_0}^2$, $\sigma_{a_1}^2$ та σ_{a_0}, σ_{a_1} знаходимо за формулами:

$$\sigma_{a_0}^2 = \frac{\sigma_u^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}, \quad \sigma_{a_0} = \sqrt{\sigma_{a_0}^2}; \quad \sigma_{a_1}^2 = \frac{\sigma_u^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}, \quad \sigma_{a_1} = \sqrt{\sigma_{a_1}^2}.$$

$$\sigma_{a_0}^2 = \frac{0,1195 \cdot 79,83}{10 \cdot 4,205} = 0,227, \quad \sigma_{a_0} = \sqrt{0,227} = 0,476;$$

$$\sigma_{a_1}^2 = \frac{0,1195}{4,205} = 0,028, \quad \sigma_{a_1} = \sqrt{0,028} = 0,167.$$

Тоді довірчі інтервали для α_0 та α_1 мають вигляд:

$$-4,26 - 2,306 \cdot 0,476 < \alpha_0 < -4,26 + 2,306 \cdot 0,476,$$

$$3,19 - 2,306 \cdot 0,167 < \alpha_1 < 3,195 + 2,306 \cdot 0,167$$

або

$$-5,36 < \alpha_0 < -3,16,$$

$$2,81 < \alpha_1 < 3,58.$$

Щоб відобразити ці довірчі інтервали графічно, в оціночне рівняння замість *a₀* підставимо нижню і верхню межу для α_0. Отримаємо рівняння: $y = -5,36 + 3,195x$ та $y = -3,16 + 3,195x$. Побудуємо ці прямі та оціночну пряму, обчисливши для кожної з них координати двох точок:

Нижня межа $y = 3,195x - 5,36$	
x	y
2	1,03
5	10,62

Оціночна пряма $y = 3,195x - 4,26$	
x	y
2	2,13
5	11,71

Верхня межа $y = 3,195x - 3,16$	
x	y
2	3,23
5	12,82

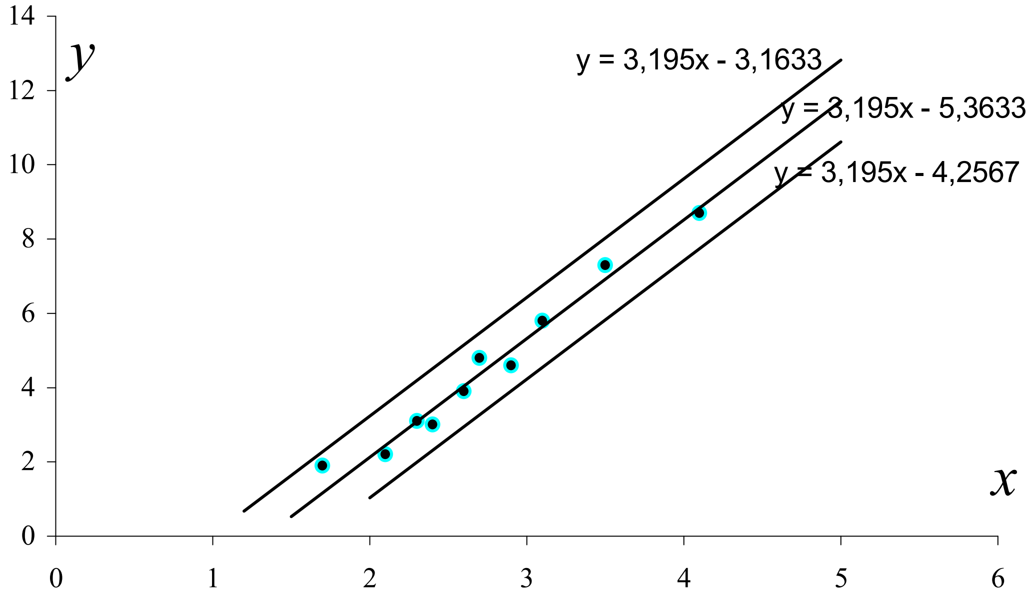

Рис. 3. Довірчий інтервал для α_0

Для побудови довірчого інтервалу для α_1, підставимо в оціночне рівняння нижню і верхню межу для α_1, маємо $y = -4{,}26 + 2{,}81x$ та $y = -4{,}26 + 3{,}58x$. Обчислимо для кожної з цих прямих координати двох точок для їх побудови:

Нижня межа $y = -4{,}26 + 2{,}81x$		Оціночна пряма $y = -4{,}26 + 3{,}195x$		Верхня межа $y = -4{,}26 + 3{,}58x$	
x	y	x	y	x	y
0	-4,26	0	-4,26	0	-4,26
5	9,79	5	11,71	5	13,64

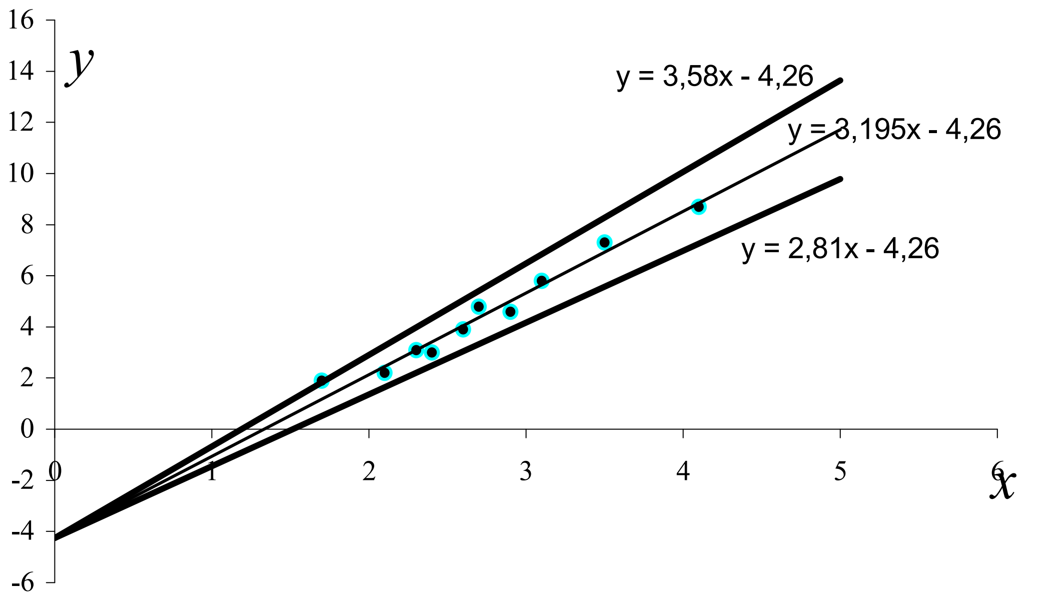

Рис. 4. Довірчий інтервал для α_1

7. Для побудови нижньої межі довірчого інтервалу економетричної моделі потрібно відкласти на координатній площині точки з координатами $\left\{x_i; \hat{y}_i - t(\gamma, n-2)S_{\hat{y}_i}\right\}$, $i = \overline{1,n}$ і з'єднати сусідні (по індексу i) точки відрізками. Щоб отримати верхню межу, робимо те ж саме з точками $\left\{x_i; \hat{y}_i + t(\gamma, n-2)S_{\hat{y}_i}\right\}$.

Величину $S_{\hat{y}_i}$ знаходимо за формулою $S_{\hat{y}_j} = \sigma_u \sqrt{\left[\frac{1}{n} + \frac{\left(x_j - \overline{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}\right]}$.

Для цього спочатку знайдемо значення $\sigma_u = \sqrt{\sigma_u^2} = \sqrt{0{,}1195} = 0{,}35$ та $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = 4{,}205$.

Тоді

$$S_{\hat{y}_1} = 0{,}35\sqrt{\left[\frac{1}{10} + \frac{(1{,}8 - 2{,}75)^2}{4{,}205}\right]} = 0{,}196;$$

$$S_{\hat{y}_2} = 0{,}35\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{(2{,}1 - 2{,}75)^2}{4{,}205}} = 0{,}157;$$

$$S_{\hat{y}_3} = 0{,}35\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{(2{,}4 - 2{,}75)^2}{4{,}205}} = 0{,}126;$$

$S_{\hat{y}_4} = 0{,}135$; $S_{\hat{y}_5} = 0{,}114$; $S_{\hat{y}_6} = 0{,}114$;

$S_{\hat{y}_7} = 0{,}111$; $S_{\hat{y}_8} = 0{,}126$; $S_{\hat{y}_9} = 0{,}169$; $S_{\hat{y}_{10}} = 0{,}256$.

З таблиці критичних значень функції Ст'юдента знаходимо $t(0{,}95;8) = 2{,}306$ і обчислюємо ординати точок нижньої межі довірчого інтервалу:

$$\hat{y}_1 - tS_{\hat{y}_1} = 1{,}49 - 2{,}306 \cdot 0{,}196 = 1{,}037;$$

$$\hat{y}_2 - tS_{\hat{y}_2} = 2{,}45 - 2{,}306 \cdot 0{,}157 = 2{,}089;$$

$$\hat{y}_3 - tS_{\hat{y}_3} = 3{,}41 - 2{,}306 \cdot 0{,}126 = 3{,}12;$$

$$\hat{y}_4 - tS_{\hat{y}_4} = 3{,}09 - 2{,}306 \cdot 0{,}135 = 2{,}779;$$

$$\hat{y}_5 - tS_{\hat{y}_5} = 4{,}05 - 2{,}306 \cdot 0{,}114 = 3{,}778;$$

$$\hat{y}_6 - tS_{\hat{y}_6} = 5{,}01 - 2{,}306 \cdot 0{,}114 = 4{,}748;$$

$$\hat{y}_7 - tS_{\hat{y}_7} = 4{,}37 - 2{,}306 \cdot 0{,}111 = 4{,}114;$$

$$\hat{y}_8 - tS_{\hat{y}_8} = 5{,}65 - 2{,}306 \cdot 0{,}126 = 5{,}36;$$

$$\hat{y}_9 - tS_{\hat{y}_9} = 6{,}93 - 2{,}306 \cdot 0{,}169 = 6{,}54;$$

$$\hat{y}_{10} - tS_{\hat{y}_{10}} = 8{,}84 - 2{,}306 \cdot 0{,}256 = 8{,}25.$$

Тоді обчислимо значення ординат точок верхньої межі довірчого інтервалу:

$$\hat{y}_1 + tS_{\hat{y}_1} = 1{,}49 + 2{,}306 \cdot 0{,}196 = 1{,}943;$$

$$\hat{y}_2 + tS_{\hat{y}_2} = 2{,}45 + 2{,}306 \cdot 0{,}157 = 2{,}811;$$

$$\hat{y}_3 + tS_{\hat{y}_3} = 3{,}41 + 2{,}306 \cdot 0{,}126 = 3{,}7;$$

$$\hat{y}_4 + tS_{\hat{y}_4} = 3{,}09 + 2{,}306 \cdot 0{,}135 = 3{,}401;$$

$$\hat{y}_5 + tS_{\hat{y}_5} = 4{,}05 + 2{,}306 \cdot 0{,}114 = 4{,}312;$$

$$\hat{y}_6 + tS_{\hat{y}_6} = 5{,}01 + 2{,}306 \cdot 0{,}114 = 5{,}272;$$

$$\hat{y}_7 + tS_{\hat{y}_7} = 4{,}37 + 2{,}306 \cdot 0{,}111 = 4{,}626;$$

$$\hat{y}_8 + tS_{\hat{y}_8} = 5{,}65 + 2{,}306 \cdot 0{,}126 = 5{,}94;$$

$$\hat{y}_9 + tS_{\hat{y}_9} = 6{,}93 + 2{,}306 \cdot 0{,}169 = 7{,}32;$$

$$\hat{y}_{10} + tS_{\hat{y}_{10}} = 8{,}84 + 2{,}306 \cdot 0{,}256 = 9{,}43.$$

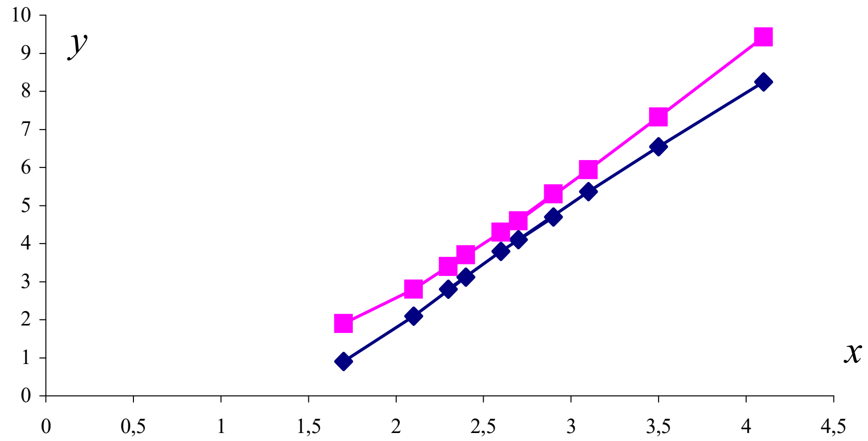

Рис. 5. Довірчий інтервал економетричної моделі

Довірчий інтервал економетричної моделі матиме вигляд як на рис. 5

Зауваження. Можна побудувати простіший (лінійний) довірчий інтервал економетричної моделі. Для цього обчислимо граничну похибку $\Delta_{yx} = t(\gamma; n-2) \cdot S_u$. Значення $t(\gamma; n-2)$ беремо з таблиці значень функції Ст'юдента $t(0{,}95;8) = 2{,}306$. Тоді $\Delta_{yx} = 2{,}306 \cdot 0{,}35 = 0{,}81$.

Довірчий інтервал матиме вигляд:

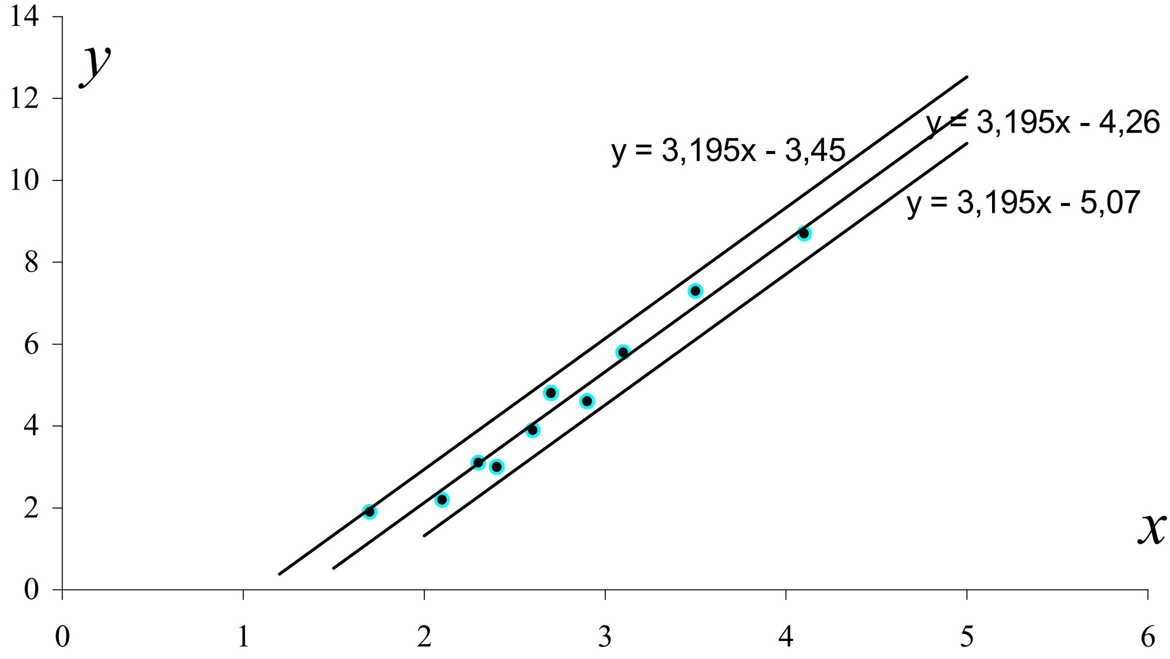

Рис. 6. Довірчий інтервал економетричної моделі (спрощений варіант)

$$\hat{y}-0{,}81 \le y \le \hat{y}+0{,}81,$$
$$-4{,}26+3{,}195x-0{,}81 \le y \le -4{,}26+3{,}195x+0{,}81,$$
$$3{,}195x-5{,}07 \le y \le 3{,}195x-3{,}45.$$

Обчислимо координати точок для побудови верхньої та нижньої межі довірчого інтервалу оціночного рівняння:

Нижня межа $y=3{,}195x-5{,}07$	
x	y
2	1,32
5	10,905

Оціночна пряма $y=3{,}195x-4{,}26$	
x	y
2	2,13
5	11,715

Верхня межа $y=3{,}195x-3{,}45$	
x	y
2	2,94
5	12,525

8. Висуваємо нульову гіпотезу H_o: $R_{ген}=0$ (робимо припущення, що коефіцієнт кореляції генеральної сукупності рівний нулю). Альтернативною гіпотезою буде H_1: $R_{ген}\neq 0$.

Далі для заданої вибірки обчислимо емпіричне значення параметру t:

$$t_{\text{емп}}=\frac{r\sqrt{n-m-1}}{\sqrt{1-r^2}}=\frac{0{,}99\sqrt{10-1-1}}{\sqrt{1-0{,}99^2}}=19{,}8.$$

Для рівня значимості $\alpha=0{,}05$ та числа ступенів вільності $k=n-2$ $(k=8)$ для двосторонньої критичної області $t_{кр.}=t_{двост}(0{,}05;8)$ табличне значення $t_{кр.}=2{,}306$.

Оскільки $\left|t_{\text{емп}}\right| > t_{kp}$, (19,8>2,306), то з надійністю p=0,95 гіпотезу H_o необхідно відхилити і прийняти альтернативну гіпотезу H_1 про існування залежності між змінними. Отже, у 95 % вибірок із генеральної сукупності коефіцієнт кореляції не дорівнює нулю.

Далі виконаємо перевірку нульової гіпотези стосовно α_1 (H_o: α_1=0) проти альтернативної H_1: $\alpha_1 \neq 0$. Для цього знаходимо емпіричне значення t за формулою:

$$t_{емп_{a_1}} = \frac{|a_1|}{s_{a_1}} = \frac{3,195}{0,167} = 19,13$$

Оскільки емпіричне значення t більше критичного (19,3>2,306), то нульова гіпотеза відхиляється і робиться висновок, що кутовий коефіцієнт a_1, розрахований за даною вибіркою є статистично значущим з ймовірністю p=0,95.

Перевіримо нульову гіпотезу H_o: α_0=0. Обчислимо

$$t_{емп_{a_0}} = \frac{|a_0|}{s_{a_0}} = \frac{4,26}{0,476} = 8,95\,.$$

$t_{емп}>t_{кр}$, (19,3>2,306), значить нульова гіпотеза стосовно параметру α_0 теж відхиляється, а значить α_0 не може бути рівним нулю в генеральній сукупності.

9. Для оцінки рівня адекватності побудованої економетричної моделі експериментальним даним використовуємо критерій Фішера F.

Обчислимо:

$$F_{емп} = \frac{r^2(n-m-1)}{m(1-r^2)} = \frac{0,98\cdot(10-1-1)}{1\cdot(1-0,98)} = 392$$

Знайдемо табличне значення даного критерію ($F_{кр.}$) для рівня надійності p=0,95 та числа ступенів вільності $k_1=m=1$, $k_2=n-m-1=10-1-1=8$: $F_{кр}$= 5,32.

Оскільки $F_{емп.}>F_{кр.}$, то отримане нами оціночне рівняння економетричної моделі

$$\hat{y} = 3,195x - 4,26$$

відповідає реальній дійсності і на його основі можна здійснювати прогнози.

Запитання для самоконтролю та самостійної роботи

1. Яка модель відноситься до категорії економетричних?
2. Яким чином визначається набір змінних для побудови економетричної моделі?

3. З яких причин у модель фактичних даних вводиться випадкова складова (залишки)?
4. Що називають специфікацією економетричної моделі?
5. У чому сутність методу найменших квадратів (МНК)?
6. Яка економічна інтерпретація параметрів рівняння регресії?
7. За допомогою яких характеристик перевіряють тісноту зв'язку між змінними моделі та значимість цього зв'язку?
8. Що виражає коефіцієнт кореляції?
9. Яка економічна інтерпретація оцінок рівняння регресії:
    - стандартної похибки оцінки за рівнянням регресії;
    - коефіцієнта детермінації;
    - кореляційного відношення;
    - вибіркових похибок параметрів регресії;
    - коефіцієнта кореляції?
10. У чому суть нульової гіпотези для коефіцієнта кореляції?
11. Що показує рівень значущості в критерії Фішера?

Завдання 2. Нелінійні економетричні моделі

У таблиці наведено дані щодо випуску промислової продукції в Україні [1]. Підібрати криві, які найповніше описують тенденцію.

Дата	Випуск продукції, млрд. крб.
січень 1994	46516
лютий 1994	52928
березень 1994	57928
квітень 1994	58827
травень 1994	59978
червень 1994	65169
липень 1994	64513

Використаємо можливості EXCEL. Будуємо графік даних (вибираємо тип діаграми **Точечная,** вид точкової діаграми 1). Можна забрати рамку і фон. Отримуємо діаграму розсіювання (рис. 7):

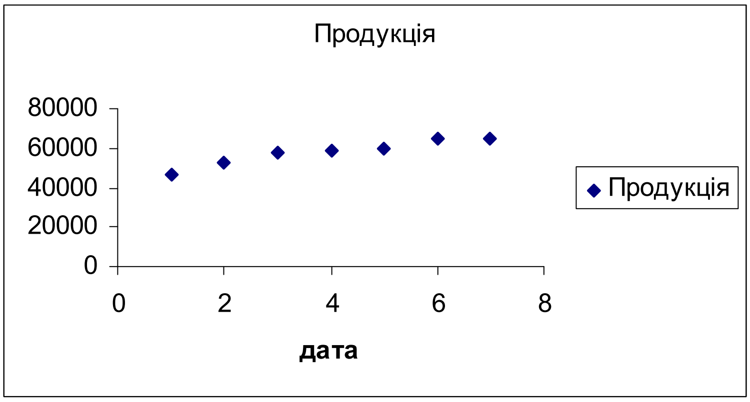

Рис.7. Діаграма розсіювання

Дальше правою кнопкою миші натискаємо по одній з точок діаграми і вибираємо з списку, що появився **Добавить линию тренда**, ЛК. У вікні, що появилося (рис. 8) вибираємо тип лінії тренду, а в **Параметрах** відмічаємо **Показывать уравнение на диаграмме** і **Поместить на диаграмму величину R^2**. **ОК**.

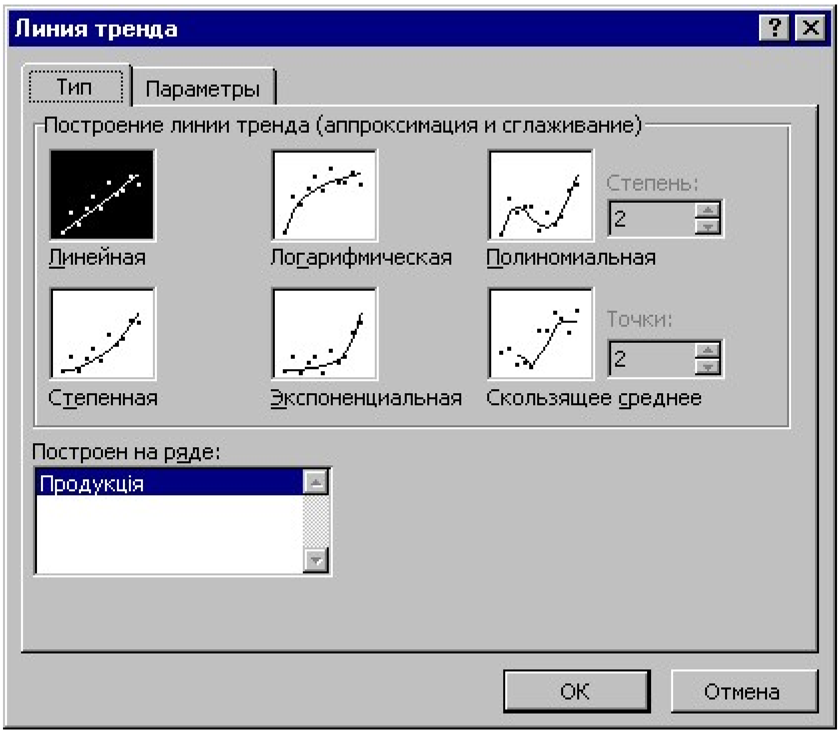

Рис. 8. Діалогове вікно **Линия тренда**

Для кращого підбору лінії тренду пробуємо декілька варіантів типу трендів і отримуємо наступні результати:

- лінійна – $y = 2875{,}8x + 46477$; $r^2 = 0{,}9045$;
- поліноміальна (степінь 2) – $y = -403{,}35x^2 + 6102{,}6x + 41636$; $r^2 = 0{,}9579$;
- поліноміальна (степінь 3) – $y = 102{,}94x^3 - 1638{,}7x^2 + 10323x + 37930$; $r^2 = 0{,}9668$;
- логарифмічна – $y = 9391{,}3\ln x + 46542$; $r^2 = 0{,}9693$;
- степенева – $y = 46899x^{0{,}1694}$; $r^2 = 0{,}9729$;
- експоненційна – $y = 46981e^{0{,}0511x}$; $r^2 = 0{,}8821$.

Найкраще апроксимує статистичні дані модель $\hat{y} = 46899x^{0{,}1694}$, з коефіцієнтом детермінації $r^2 = 0{,}9729$ (рис. 9).

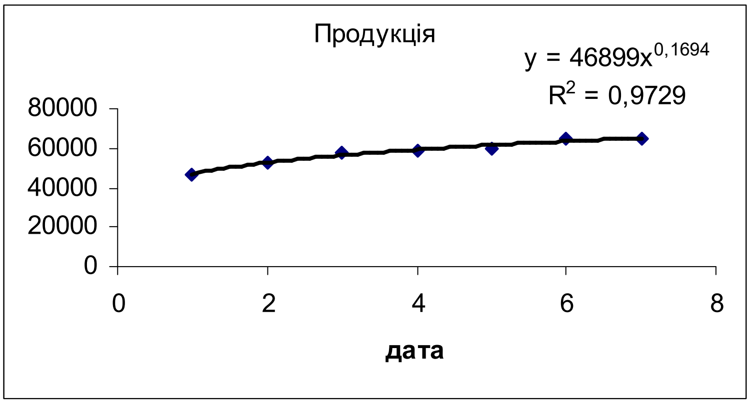

Рис. 9. Графік кривої зростання $\hat{y} = 46899x^{0{,}1694}$

Задача. У таблиці наведена статистична інформація для показників *Y* та *X*. Використати зворотну та степеневу модель для дослідження залежності собівартості *Y* (гр.од./шт.) від кількості виготовленої продукції *X* (шт.).

x_i	3	4	6	7	7	9
y_i	1	2	3	3	4	6

<u>Розв’язування</u>.

а) Зворотна залежність має вигляд: $y = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{1}{x} + u$.

Необхідно оцінити параметри цієї моделі. Відповідна економетрична модель має вигляд: $\hat{y} = a_0 + a_1 \frac{1}{x}$. Для лінеаризації зробимо заміну $\frac{1}{x} = t$.

Одержимо: $\hat{y} = a_0 + a_1 t$. Ця функція є лінійною. a_0 та a_1 обчислимо з системи нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} t_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} t_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i t_i. \end{cases}$$

Для знаходження коефіцієнтів цієї системи складемо розрахункову таблицю

Таблиця 15

i	x_i	y_i	$t_i = 1/x_i$	t_i^2	$y_i t_i$
1	1	3	1	1	3
2	2	4	0,5	0,25	2
3	3	6	0,3333	0,1111	2
4	3	7	0,3333	0,1111	2,3333
5	4	7	0,25	0,0625	1,75
6	6	9	0,1667	0,0278	1,5000
$\sum$		36	2,5833	1,5625	12,5833

$$\begin{cases} 6a_0 + 2{,}5833a_1 = 36 \\ 2{,}5833a_0 + 1{,}5625a_1 = 12{,}5833 \end{cases}$$

Розв’язок цієї системи:

$$a_0 = 8{,}789$$

$$a_1 = -6{,}478.$$

$$\hat{y} = 8{,}789 - 6{,}478t.$$

Отже, зворотна залежність має вигляд $\hat{y} = 8{,}789 - 6{,}478\frac{1}{x}$.

б) Степенева залежність має вигляд: $y = \alpha_0 x^{\alpha_1} u$.

Необхідно оцінити параметри цієї моделі. Відповідна економетрична модель має вигляд: $\hat{y} = a_0 x^{a_1}$. Для лінеаризації логарифмуємо праву і ліву частину залежності: $\ln \hat{y} = \ln a_0 + a_1 \ln x$.

Зробимо заміну: $\ln \hat{y} = \hat{y}'$; $\ln a_0 = a_0'$; $\ln x = x'$.

Одержимо: $\hat{y}' = a'_0 + a_1 x'$

Ця функція є лінійною відносно нових змінних $\hat{y}'$ і x'.

Статистичні оцінки a'_0, a_1 степеневого рівняння регресії із врахуванням заміни, задовольняють систему нормальних рівнянь

$$\begin{cases} na_0' + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i' = \sum_{i=1}^{n} y_i', \\ a_0' \sum_{i=1}^{n} x_i' + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i'^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i' x_i'. \end{cases}$$

Для знаходження коефіцієнтів цієї системи складемо розрахункову таблицю

Таблиця 16

i	x_i	y_i	$x_i' = \ln x_i$	$y_i' = \ln y_i$	$x_i'^2$	$y_i' x_i'$
1	1	3	0	1,09861303	0	0
2	2	4	0,69314765	1,38629529	0,4804537	0,96090732
3	3	6	1,09861303	1,79176067	1,20695059	1,96845162
4	3	7	1,09861303	1,94591146	1,20695059	2,13780368
5	4	7	1,38629529	1,94591146	1,92181464	2,69760790
6	6	9	1,79176067	2,19722606	3,21040632	3,93690324
$\sum$			6,0684297	10,3657180	8,02657579	11,7016738

$$\begin{cases} 6a_0' + 6{,}0684297 a_1 = 10{,}3657180 \\ 6{,}0684297 a_0' + 8{,}02657579 a_1 = 11{,}7016738 \end{cases}$$

Розв’язок цієї системи:

$$a_0' = 1{,}075599 \qquad a_1 = 0{,}644667.$$

$$\hat{y}' = 1{,}075599 + 0{,}644667 x'.$$

Перейдемо знову до нелінійної степеневої моделі з допомогою оберненого перетворення: $a_0 = e^{a_0'} = 2{,}9317$.

Отже, $\hat{y} = 2{,}9317x^{0{,}6447}$.

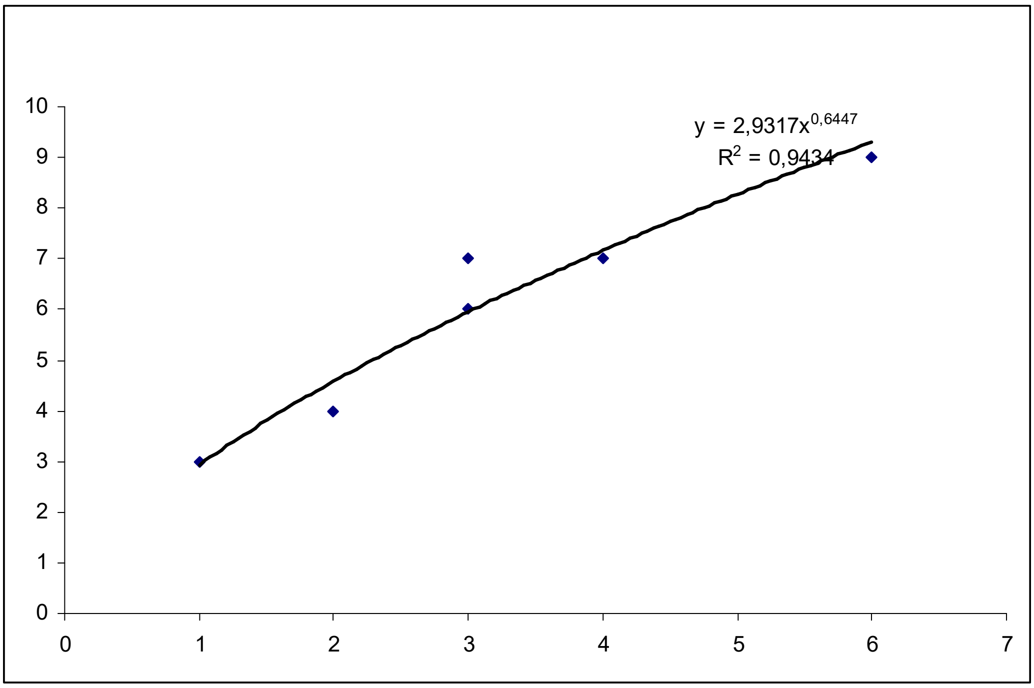

Рис. 10.

Запитання для самоконтролю та самостійної роботи

1. Дайте тлумачення нелінійної регресії та назвіть її основні види.
2. Які типи нелінійних кривих (*кривих зростання*) зустрічаються в макро- та мікроекономічних дослідженнях?
3. Якими способами лінеаризується функція відносно нових невідомих?
4. Запишіть рівняння парної та множинної регресії при параболічній залежності між змінними, поясніть їх склад.
5. Запишіть рівняння парної та множинної регресії при гіперболічній залежності між змінними, поясніть їх склад.
6. Запишіть рівняння парної та множинної регресії при степеневій залежності між змінними, поясніть їх склад.
7. Показати на графіках розповсюджені в економіці види залежностей між змінними?

Завдання 3. **Лінійні багатофакторні економетричні моделі. Знаходження оцінок методом найменших квадратів з застосуванням системи нормальних рівнянь**

Задача. Задана вибірка трьох змінних Y, X_1, X_2 у вигляді таблиці

Табл. 17

Y_i	4	5	6	8	11	11	12	12	13	14
X_1	3	4	5	7	9	11	10	12	11	12
X_2	7	9	11	12	12	15	18	21	22	24

1) Визначити оцінки a_0, a_1, a_2 з допомогою МНК, вважаючи, що економетрична модель лінійна. Знайти ці ж оцінки, застосовуючи формули відхилення від середніх.
2) Обчислити коефіцієнти парної та частинної кореляції;
3) Знайти коефіцієнти множинної детермінації та кореляції.

1) Розв'язування. a_0, a_1, a_2 знаходимо розв'язавши систему нормальних рівнянь МНК.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} Y_i = na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} X_{1i} + a_2 \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} Y_i X_{1i} = a_0 \sum_{i=1}^{n} X_{1i} + a_1 \sum_{i=1}^{n} X_{1i}^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} X_{2i} X_{1i} \\ \sum_{i=1}^{n} Y_i X_{2i} = a_0 \sum_{i=1}^{n} X_{2i} + a_1 \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} + a_2 \sum_{i=1}^{n} X_{2i}^2 \end{cases}$$

Як і в попередніх роботах розрахунки сум, які входять у систему нормальних рівнянь, зводимо в таблицю.

Табл. 18

№	Y_i	X_{1i}	X_{2i}	X_{1i}^2	X_{2i}^2	$Y_i X_{1i}$	$Y_i X_{2i}$	$X_{1i} X_{2i}$
1	4	3	7	9	49	12	28	21
2	5	4	9	16	81	20	45	36
3	6	5	11	25	121	30	66	55
4	8	7	12	49	144	56	96	84
5	11	9	12	81	144	99	132	108
6	11	11	15	121	225	121	165	165
7	12	10	18	100	324	120	216	180
8	12	12	21	144	441	144	252	252
9	13	11	22	121	484	143	286	242
10	14	12	24	144	576	168	336	288
Σ	**96**	**84**	**151**	**810**	**2589**	**913**	**1622**	**1431**

Виписуємо систему нормальних рівнянь, підставляючи розраховані суми

$$\begin{cases} 96 = 10a_0 + 84a_1 + 151a_2 \\ 913 = 84a_0 + 810a_1 + 1431a_2 \\ 1622 = 151a_0 + 1431a_1 + 2589a_2 \end{cases}$$

Розвязуємо систему рівнянь з допомогою матричного методу.

Матриця коефіцієнтів системи нормальних рівнянь

$$\begin{pmatrix} 10 & 84 & 151 \\ 84 & 810 & 1431 \\ 151 & 1431 & 2589 \end{pmatrix}$$

Оберенена до неї матриця

$$\begin{pmatrix} 0.848978 & -0.02401 & -0.03625 \\ -0.02401 & 0.053163 & -0.02798 \\ -0.03625 & -0.02798 & 0.017968 \end{pmatrix}$$

Розв'язки системи нормальних рівнянь, отримані множенням оберненої матриці на вектор вільних членів

$$\begin{pmatrix} 0.848978 & -0.02401 & -0.03625 \\ -0.02401 & 0.053163 & -0.02798 \\ -0.03625 & -0.02798 & 0.017968 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 96 \\ 913 \\ 1622 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.79 \\ 0.84 \\ 0.11 \end{pmatrix}$$

Отже, розв'язок системи нормальних рівнянь буде таким:

$a_0 = 0.79$

$a_1 = 0.84$

$a_2 = 0.11$

Таким чином, рівняння оціночної площини набуває виду

$\hat{Y} = 0,79 + 0,84X_1 + 0,11X_2$.

Оцінки економетричної моделі можна розрахувати за формулами відхилення від середніх. Формули відхилення від середніх отримуємо виконанням нескладних алгебраїчних перетворень системи нормальних рівнянь.

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})(X_{1i} - \overline{X}_1)\sum_{i=1}^{n}(X_{2i} - \overline{X}_2)^2 - \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})(X_{2i} - \overline{X}_2)\sum_{i=1}^{n}(X_{1i} - \overline{X}_1)(X_{2i} - \overline{X}_2)}{\sum_{i=1}^{n}(X_{1i} - \overline{X}_1)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i} - \overline{X}_2)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}(X_{1i} - \overline{X}_1)(X_{2i} - \overline{X}_2)\right)^2}$$

$$a_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})(X_{2i} - \overline{X}_2)\sum_{i=1}^{n}(X_{1i} - \overline{X}_1)^2 - \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})(X_{1i} - \overline{X}_1)\sum_{i=1}^{n}(X_{2i} - \overline{X}_2)(X_{1i} - \overline{X}_1)}{\sum_{i=1}^{n}(X_{2i} - \overline{X}_2)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{1i} - \overline{X}_1)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}(X_{2i} - \overline{X}_2)(X_{1i} - \overline{X}_1)\right)^2}$$

$$a_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1\overline{X}_1 - \hat{\beta}_2\overline{X}_2$$

Обчислення заносимо в таблицю

Табл. 19

Y_i	X_{1i}	X_{2i}	$\bar{Y}$	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$Y_i-\bar{Y}$	$X_{1i}-\bar{X}_1$	$X_{2i}-\bar{X}_2$	$(X_{1i}-\bar{X}_1)^2$	$(X_{2i}-\bar{X}_2)^2$	$(X_{1i}-\bar{X}_1)\times(X_{2i}-\bar{X}_2)$	$(Y_i-\bar{Y})\times(X_{1i}-\bar{X}_1)$	$(Y_i-\bar{Y})\times(X_{2i}-\bar{X}_2)$
4	3	7	9,6	8,4	15,1	-5,6	-5,4	-8,1	29,16	65,61	43,74	30,24	45,36
5	4	9				-4,6	-4,4	-6,1	19,36	37,21	26,84	20,24	28,06
6	5	11				-3,6	-3,4	-4,1	11,56	16,81	13,94	12,24	14,76
8	7	12				-1,6	-1,4	-3,1	1,96	9,61	4,34	2,24	4,96
11	9	12				1,4	0,6	-3,1	0,36	9,61	-1,86	0,84	-4,34
11	11	15				1,4	2,6	-0,1	6,76	0,01	-0,26	3,64	-0,14
12	10	18				2,4	1,6	2,9	2,56	8,41	4,64	3,84	6,96
12	12	21				2,4	3,6	5,9	12,96	34,81	21,24	8,64	14,16
13	11	22				3,4	2,6	6,9	6,76	47,61	17,94	8,84	23,46
14	12	24				4,4	3,6	8,9	12,96	79,21	32,04	15,84	39,16
96	**84**	**151**				**0**	**0**	**0**	**104,4**	**308,9**	**162,6**	**106,6**	**172,4**

$$\sum_{i=1}^{10}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2=(-5,6)^2+(-4,6)^2+(-3,6)^2+(-1,6)^2+(1,4)^2+(1,4)^2+(2,4)^2+(2,4)^2+$$
$$+(3,4)^2+(4,4)^2=31,36+21,16+12,96+2,56+1,96+1,96+5,76+5,76+11,56+$$
$$+19,36=114,4$$

Знаходимо оцінки економетричної моделі

$$a_1=\frac{106.6\cdot 308.9-172.4\cdot 162.6}{104.4\cdot 308.9-(162.6)^2}\approx 0.8427$$

$$a_2=\frac{172.4\cdot 104.4-106.6\cdot 162.6}{104.4\cdot 308.9-(162.6)^2}\approx 0.1145$$

$$a_0=9.6-0.84\cdot 8.4-0.1145\cdot 15.1=0.7919$$

Отже, $\hat{Y}=0,79+0,84X_1+0,11X_2$.

Результати розрахованих двома способами оцінок повинні співпасти.

2) Перш, ніж досліджувати економетричну модель з трьома змінними $\hat{Y}=a_0+a_1X_1+a_2X_2$, необхідно розрахувати три парних моделі наступного виду

$$Y=\alpha'+\beta'X_1$$
$$Y=\alpha''+\beta''X_2$$
$$X_1=\alpha'''+\beta'''X_2$$

Для кожної моделі розраховуємо коефіцієнти кореляції, які називають коефіцієнтами кореляції нульового порядку чи коефіцієнтами парної кореляції:

$$r_{YX_1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\overline{Y}\right)\left(X_{1i}-\overline{X}_1\right)}{\sqrt{\sum\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2\sum\left(X_{1i}-\overline{X}_1\right)^2}},\ r_{YX_2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\overline{Y}\right)\left(X_{2i}-\overline{X}_2\right)}{\sqrt{\sum\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2\sum\left(X_{2i}-\overline{X}_2\right)^2}},$$

$$r_{X_1X_2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_{1i}-\overline{X}_1\right)\left(X_{2i}-\overline{X}_2\right)}{\sqrt{\sum\left(X_{2i}-\overline{X}_2\right)^2\sum\left(X_{1i}-\overline{X}_1\right)^2}}$$

Для розрахунку даних коефіцієнтів скористаємося обчисленими в попередньому пункті задачі значеннями із таблиці 19.

$$r_{YX_1}=\frac{106.4}{\sqrt{114.4\cdot 104.4}}=\frac{106.4}{109.28}\approx 0.97,\ r_{YX_2}=\frac{172.4}{\sqrt{114.4\cdot 308.9}}=\frac{172.4}{187.98}\approx 0.92,$$

$$r_{X_1X_2}=\frac{162.6}{\sqrt{104.4\cdot 308.9}}=\frac{162.6}{179.58}\approx 0.91$$

Матриця коефіцієнтів кореляції нульового порядку набуває вигляду

$$|r|=\begin{pmatrix}1 & 0.97 & 0.92\\ 0.97 & 1 & 0.91\\ 0.92 & 0.91 & 1\end{pmatrix}.$$

Із допомогою матриці коефіцієнтів парної кореляції можна здійснити аналіз дисперсій змінних моделі. Проведення такого аналізу є одним із основних завдань економетрії. Значення коефіцієнта кореляції r_{YX1}=0.97, $r^2_{YX_1}\approx 0{,}94$. Це означає, що 94% загальної дисперсії змінної Y пояснюються економетричною моделлю $Y=\alpha'+\beta' X_1$. Непояснена дисперсія, викликана випадковою складовою *u*, складає 6%.

Коефіцієнт r_{YX_2}=0.92, $r^2_{YX_2}\approx 0{,}85$. Це означає, що 85% загальної дисперсії Y пояснюються економетричною моделлю $Y=\alpha''+\beta'' X_2$. Непояснена дисперсія складає 15%.

Очевидно, що якщо обмежитися розрахунками тільки перших моделей, то слід вибрати першу модель, яка пояснює більшу частку загальної дисперсії змінної Y.

Окремо слід зупинитися на аналізі дисперсій пояснюючих змінних X_1, X_2 який базується на коефіцієнті кореляції $r_{X_1X_2}$.

Значення $r_{X_1X_2}=0{,}91$, $r^2_{X_1X_2}=0{,}83$ показує, що 83% загальної дисперсії змінної X_1 пояснюється економетричною моделлю $X_1=\alpha'''+\beta''' X_2$.

Іншими словами, пояснююча змінна X_1 корелює з пояснюючою змінною X_2. Велике значення коефіцієнта кореляції між пояснюючими змінними економетричної моделі свідчить про явище мультиколінеарності, яке полягає в тому, що вплив пояснюючої змінної X_1 на результативну Y можна вважати опосередкованим через змінну X_2 і навпаки.

Здійснивши аналіз дисперсій на основі коефіцієнтів парної кореляції, можна поставити запитання в іншому аспекті. А саме, якщо $r^2_{YX_1} \approx 0{,}94$, то непоясненою залишається 6% дисперсії. Якщо в модель ввести ще одну пояснюючу змінну X_2, то необхідно дізнатися яку частку дисперсії непоясненої змінною X_1 пояснить введення змінної X_2. Визначити цю частку можна з допомогою коефіцієнта частинної кореляції чи коефіцієнта кореляції першого порядку

$$r_{YX_2.X_1} = \frac{r_{YX_2} - r_{YX_1} \cdot r_{X_1X_2}}{\sqrt{1 - r^2_{YX_1}} \cdot \sqrt{1 - r^2_{X_1X_2}}} = \frac{0.92 - 0.97 \cdot 0.91}{\sqrt{1 - (0.97)^2} \cdot \sqrt{1 - (0.91)^2}} = 0.4 .$$

Отже, якщо $r_{YX_2.X_1} = 0.4$, то з 6% дисперсії змінної Y, непоясненої змінною X_1 40% пояснює введення ще однієї пояснюючої змінної X_2.

Коефіцієнт частинної кореляції $r_{YX1.X2}$ визначається наступним чином

$$r_{YX_1.X_2} = \frac{r_{YX_1} - r_{YX_2} \cdot r_{X_1X_2}}{\sqrt{1 - r^2_{YX_2}} \cdot \sqrt{1 - r^2_{X_1X_2}}} = \frac{0.97 - 0.92 \cdot 0.91}{\sqrt{1 - (0.92)^2} \cdot \sqrt{1 - (0.91)^2}} = 0.83 .$$

Значить, із 15% дисперсії змінної Y непоясненої змінною X_2, 83% пояснює введення в модель змінної X_1.

Отже, аналіз дисперсій, який базується на матриці коефіцієнтів парної кореляції та коефіцієнтів частинної кореляції дає важливу інформацію при розрахунку економетричної моделі

$$\hat{Y} = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 .$$

Висновок.

1) Модель виду $\hat{Y} = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2$ можна замінити моделлю виду $Y = \alpha' + \beta' X_1$ на підставі того, що ця модель пояснює 94% дисперсії змінної Y. Введення в модель додаткової змінної X_2 пояснює лише 40% дисперсії Y, непоясненої змінною X_1. Змінна X_2 призводить до ускладнення моделі та збільшення обсягу розрахунків.

2) Модель виду $\hat{Y} = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2$ не варто замінювати моделлю виду $Y = \alpha'' + \beta'' X_2$ оскільки ця модель пояснює лише 85% дисперсії змінної Y. Введення в модель додаткової змінної X_1 пояснює лише 83% дисперсії Y, непоясненої змінною X_2.

Тепер визначаємо коефіцієнт множинної детермінації, який показує частку загальної дисперсії змінної Y, що пояснює оціночна площина.

$$R^2 = \frac{r^2_{YX_1} + r^2_{YX_2} - 2r_{YX_1}r_{YX_2}r_{X_1X_2}}{1 - r^2_{X1X2}}$$

$$R^2 = \frac{(0.97)^2 + (0.92)^2 - 2 \cdot 0.97 \cdot 0.92 \cdot 0.91}{1 - (0.91)^2} = 0.95$$

Коефіцієнт множинної кореляції або коефіцієнт другого порядку

$R = \sqrt{R^2} = \sqrt{0.95} = 0.97$

Запитання для самоконтролю та самостійної роботи

1. У чому різниця між парним і множинним рівнянням регресії?
2. Яка економічна інтерпретація параметрів множинного рівняння регресії?
3. Які ви знаєте способи подання системи нормальних рівнянь у багатовимірному способі?
4. Побудуйте систему нормальних рівнянь для економетричної моделі в якої є три незалежних змінних.
5. Сформулюйте припущення методу найменших квадратів.
6. Дайте тлумачення коефіцієнтів парної кореляції та запишіть формули їхнього застосування.
7. Як визначають матрицю коефіцієнтів парної кореляції ?
8. Що відображає коефіцієнт частинної кореляції?
9. Дайте тлумачення коефіцієнтів частинної кореляції та запишіть формули для їх знаходження.
10. Чим відрізняються коефіцієнти парної та частинної кореляції?
11. Як визначається коефіцієнт множинної кореляції?
12. Як визначається коефіцієнт множинної детермінації та його зв'язок із оціненим коефіцієнтом детермінації?

Завдання 4. **Лінійні багатофакторні економетричні моделі.**

Знаходження оцінок методом найменших квадратів з застосуванням матричної форми запису

Використовуючи вибіркові дані попереднього завдання, знайти:

1. Вектор оцінок $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

2. Матрицю дисперсій оцінок $\operatorname{var}(\mathbf{a})$

3. Інтервали довір'я (*p*=0,9) параметрів α_0, α_1 та α_2.

Допустимо, що між показником y і факторами x_1, x_2 існує лінійна залежність

$$\widehat{y} = a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_2$$

Знайдемо оцінки параметрів, використовуючи матричні операції за формулою

$$\mathbf{a} = \left[[X]^T [X]\right]^{-1} [X]^T Y \text{, де}$$

$$[X] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 11 \\ 1 & 7 & 12 \\ 1 & 9 & 12 \\ 1 & 11 & 15 \\ 1 & 10 & 18 \\ 1 & 12 & 21 \\ 1 & 11 & 22 \\ 1 & 12 & 24 \end{pmatrix}$$ - матриця пояснюючих змінних X_1, X_2, доповнена колонкою одиниць, $$Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \\ 11 \\ 11 \\ 12 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}$$ - вектор результативної змінної *Y*, $[X]^T$ - транспонована матриця пояснюючих змінних.

Проведемо відповідно обчислення

$$[X]^T [X] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 9 & 11 & 10 & 12 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 11 & 12 & 12 & 15 & 18 & 21 & 22 & 24 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 11 \\ 1 & 7 & 12 \\ 1 & 9 & 12 \\ 1 & 11 & 15 \\ 1 & 10 & 18 \\ 1 & 12 & 21 \\ 1 & 11 & 22 \\ 1 & 12 & 24 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 10 & 84 & 151 \\ 84 & 810 & 1431 \\ 151 & 1431 & 2589 \end{pmatrix}.$$

$$\left[[X]^T[X]\right]^{-1}=\begin{pmatrix} 0{,}848978 & -0{,}02401 & -0{,}03625 \\ -0{,}02401 & 0{,}053163 & -0{,}02798 \\ -0{,}03625 & -0{,}02798 & 0{,}017968 \end{pmatrix}.$$

Наступним кроком є обчислення добутку матриці $[X]^T$ і вектора Y:

$$[X]^T Y=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 9 & 11 & 10 & 12 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 11 & 12 & 12 & 15 & 18 & 21 & 22 & 24 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \\ 11 \\ 11 \\ 12 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 96 \\ 913 \\ 1622 \end{pmatrix}.$$

Тоді вектор оцінок

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix} 0{,}848978 & -0{,}02401 & -0{,}03625 \\ -0{,}02401 & 0{,}053163 & -0{,}02798 \\ -0{,}03625 & -0{,}02798 & 0{,}017968 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 96 \\ 913 \\ 1622 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}79 \\ 0{,}84 \\ 0{,}11 \end{pmatrix}.$$

Отже економетрична модель має вигляд:

$$y=0{,}79+0{,}84x_1+0{,}11x_2.$$

Знаходимо матрицю дисперсій оцінок :

$$\mathrm{VAR}(\mathbf{a})=\sigma_u^2\left[[X^T][X]\right]^{-1}=\begin{pmatrix} \sigma^2_{a_0} & \sigma^2_{a_0a_1} & \sigma^2_{a_0a_2} \\ \sigma^2_{a_1a_0} & \sigma^2_{a_1} & \sigma^2_{a_1a_2} \\ \sigma^2_{a_2a_0} & \sigma^2_{a_2a_1} & \sigma^2_{a_2} \end{pmatrix},$$

де $\sigma_u^2=\dfrac{e'e}{n\text{-}k}$, e - вектор відхилень значень змінної Y_i із вибірки від розрахункових значень цієї змінної $\hat{Y}_i$,

e' - транспонований вектор e, n – об’єм вибірки, k – кількість змінних, які входять в модель.

Діагональні елементи матриці визначають дисперсії оцінок a_0, a_1, a_2. Інші елементи взаємну коваріацію цих оцінок. З допомогою діагональних елементів матриці VAR(**a**) знаходяться граничні похибки оцінок для заданого рівня ймовірності.

Знаходимо розрахункові значення $\hat{Y}$

$\hat{y}_1 = 0{,}79 + 0{,}84 \cdot 3 + 0{,}11 \cdot 7 = 4{,}12$; $\hat{y}_2 = 0{,}79 + 0{,}84 \cdot 4 + 0{,}11 \cdot 9 = 5{,}19$; і т. д. $\hat{y}_{10} = 0{,}79 + 0{,}84 \cdot 12 + 0{,}11 \cdot 24 = 13{,}65$.

Обчислюємо вектор відхилень:

e_1=4 -4,12 = -0,12; e_2 = 5 - 5,19 = -0,19; і т. д. e_{10}= 14 - 13,65 = 0,35.

$e' \, e =$

$$\begin{pmatrix} -0{,}12 & -0{,}19 & -0{,}26 & -0{,}06 & 1{,}25 & -0{,}78 & 0{,}72 & -1{,}31 & 0{,}42 & 0{,}35 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}12 \\ -0{,}19 \\ -0{,}26 \\ -0{,}06 \\ 1{,}25 \\ -0{,}78 \\ 0{,}72 \\ -1{,}31 \\ 0{,}42 \\ 0{,}35 \end{pmatrix} =$$

=4,82.

σ_u^2= 4,82/(10–3) = 0,69.

$$\operatorname{var}(\mathbf{a}) = 0{,}69 \times \begin{pmatrix} 0{,}848978 & -0{,}02401 & -0{,}03625 \\ -0{,}02401 & 0{,}053163 & -0{,}02798 \\ -0{,}03625 & -0{,}02798 & 0{,}017968 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}585795 & -0{,}01657 & -0{,}02501 \\ -0{,}01657 & 0{,}036682 & -0{,}01931 \\ -0{,}02501 & -0{,}01931 & 0{,}012398 \end{pmatrix}.$$

Запитання для самоконтролю та самостійної роботи

1. Опишіть основні припущення лінійної багатофакторної моделі в матричній формі.
2. Опишіть етапи алгоритму визначення параметрів багатофакторної моделі.
3. Яка структура дисперсійно-коваріаційної матриці та для чого її розраховують?
4. Як визначити довірчі інтервали параметрів моделі?

Завдання 5. **Мультиколінеарність в економетричних моделях**

Економічний показник y залежить від трьох факторів x_1, x_2, x_3. На основі статистичних даних за 10 років необхідно: оцінити наявність загальної мультиколінеарності. У випадку її присутності, виявити пари факторів між якими існує мультиколінеарність, один із факторів виключити з розгляду таких пар.

Табл. 20

x_1	x_2	x_3
1,43	9,18	8,97
3,92	10,94	9,8
5,49	11,3	9,6
8,17	13,99	8,02
9,68	14,59	10,51
14,42	15,73	12,39
15,92	17,97	16,36
18,04	19,45	9,32
20,69	21,49	12,72
22,68	21,8	16,22

Для знаходження кореляційної матриці використовуємо вбудовану функцію **КОРРЕЛ** (коефіцієнт парної кореляції), яка знаходиться в категорії **СТАТИСТИКА** або заходимо в **Сервис** – **Анализ Данных** – **Корреляция**.

$[R]=\begin{bmatrix} 1 & 0{,}99 & 0{,}70 \\ 0{,}99 & 1 & 0{,}66 \\ 0{,}70 & 0{,}66 & 1 \end{bmatrix}$. Для знаходження χ_p^2 знаходимо визначник матриці $[R]$ $\det[R]=0{,}0077$. Визначник зручно обчислити з допомогою вбудованої математичної функції **МОПРЕД** (блок кореляційної матриці). Розрахункове значення χ_i^2 знаходимо за формулою

$$\chi_p^2 = -[n-1-\frac{1}{6}(2m+5)]\ln\det[R] = -\left[10-1-\frac{1}{6}(6+5)\right]\ln 0{,}0077 = 34{,}85\,.$$

Для довірчої ймовірності p=0,95 і числа ступенів вільності $\frac{1}{2}m(m-1)=\frac{3}{2}(3-1)=3$, $\chi_{кр}^2(0{,}95;3)=7{,}8$.

Так як розрахункове значення χ_p^2=34,85 і воно більше критичного, то з надійністю 0,95 можна стверджувати, що існує загальна мультиколінеарність. Пари факторів між якими існує мультиколінеарність знаходимо використовуючи t-статистику. Знаходимо обернену матрицю до кореляційної:

$$[Z]=[R]^{-1}=\begin{bmatrix} 72,48 & -67,98 & -5,83 \\ -67,98 & 65,54 & 4,29 \\ -5,83 & 4,29 & 2,25 \end{bmatrix}$$

t - статистику пари факторів розрахуємо за формулою:

$$t_{ij}=\frac{r_{ij}^{*}\sqrt{n-m-1}}{\sqrt{1-r_{ij}^{*2}}},$$

де $r_{ij}^{*}=\frac{-z_{ij}}{\sqrt{z_{ii}z_{jj}}}$; z_{ij}, z_{ii}, z_{jj} – елементи матриці $[Z]$.

$$r_{12}^{*}=\frac{-(-67,98)}{\sqrt{72,48\cdot 65,54}}=0,986; \quad t_{12}=\frac{0,986\cdot\sqrt{10-3-1}}{\sqrt{1-0,986^2}}=14,639;$$

$$r_{13}^{*}=\frac{-(-5,83)}{\sqrt{72,48\cdot 2,25}}=0,456; \quad t_{13}=\frac{0,456\cdot\sqrt{10-3-1}}{\sqrt{1-0,456^2}}=1,256;$$

$$r_{23}^{*}=\frac{-4,29}{\sqrt{65,54\cdot 2,25}}=-0,353; \quad t_{23}=\frac{-0,353\cdot\sqrt{10-3-1}}{\sqrt{1-0,353^2}}=-0,923.$$

Для ступенів вільності $k=n-m-1=10-3-1=6$ і $p=0,95$ критичне значення $t(0,95;6)=2,227$. Отже, звідси видно, що лише для пари факторів x_1 і x_2 $t_{12}>t(0,95;6)$, тобто з надійністю $p=0,95$ між факторами x_1 і x_2 існує мультиколінеарність. Виключаємо з розгляду один із факторів, нехай це буде x_1.

Наступним кроком буде знаходження кореляційної матриці між факторами x_2 і x_3: $[R]=\begin{bmatrix} 1 & 0,66 \\ 0,66 & 1 \end{bmatrix}$.

Обернена $[Z]=\begin{bmatrix} 1,785 & -1,184 \\ -1,184 & 1,785 \end{bmatrix}$, визначник матриці кореляції $\det[R]=0,560$.

Значення $\chi_p^2=-\left[10-1-\frac{1}{6}(4+5)\right]\ln 0,560=4,346$ менше від критичного $\chi_{кр}^2(0,95;2)=6,0$, це значить, що загальна мультиколінеарність між факторами x_2, x_3 – відсутня.

Запитання для самоконтролю та самостійної роботи

1. Що означає мультиколінеарність змінних?
2. Дайте коротку характеристику алгоритму Феррара-Глобера.
3. Які існують способи усунення мультиколінеарності?

Завдання №6

ТЕСТИ ДЛЯ ВИЯВЛЕННЯ ОЗНАКИ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНОСТІ

Тест рангової кореляції Спірмена. Дана процедура є найбільш простою та доступною серед множини аналітичних методів. Її можна використовувати як для малих, так і для великих вибірок. Основу алгоритму даного тесту складає обчислення коефіцієнта рангової кореляції Спірмена:

$$r_S = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n^3 - n}, \tag{6.1}$$

де d_i – різниця між рангами, які властиві двом характеристикам i-го об’єкта; n – кількість об’єктів, що рангуються.

Алгоритм тесту рангової кореляції Спірмена складається із таких кроків.

Припустимо, що $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$.

Крок 1. Будуємо рівняння регресії $\hat{Y} = b_0 + b_1 x$.

Крок 2. Знаходимо відхилення u_i.

Крок 3. Нехтуючи знаком u_i, тобто розглядаємо $|u_i|$, ранжуємо їх та x_i у зростаючому чи спадному порядку.

Крок 4. Знаходимо d_i – різницю між рангами, а також d_i^2.

Крок 5. Знаходимо за формулою (6.1) коефіцієнт r_S.

Крок 6. Перевіряємо значущість отриманого коефіцієнта рангової кореляції за t–критерієм Ст’юдента. Розрахункове (емпіричне) значення t–критерію знаходимо за формулою:

$$t_{емп} = \frac{r_S\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_S^2}}, \tag{6.2}$$

де n – кількість спостережень; $k = n - 2$ – число ступенів вільності.

Крок 7. Знаходимо критичне значення t–критерію, тобто $t_{кр}$.

Крок 8. Якщо $t_{емп.} > t_{кр}$, то підтверджується гіпотеза про гетероскедастичність. Якщо дана нерівність не виконується, то має місце гомоскедастичність.

Приклад

За даними нижче приведеної таблиці про витрати обігу (Y) та вантажообіг (X) побудована економетрична модель $\hat{y} = 29{,}46 - 0{,}74x$. *На рівні значущості* α =0,05 *перевірити наявність гетероскедастичності в економетричній моделі, використовуючи тести: рангової кореляції Спірмена, Гольдфельда–Квандта, Глейзера.*

***Розв'язання**. Стосовно нашого прикладу:*

Кроки 1, 2. Побудуємо модель $\hat{Y} = 29{,}46 - 0{,}74X$ та знайдемо відхилення $u_i = y_i - \hat{y}_i$

Крок 3. Здійснимо ранжування змінних $|u_i|$ та x_i. При заповненні сьомого стовпця вибирається найменше число в п'ятому стовпці і поруч з ним записується 1. Найменшому з тих чисел, що залишилися, відповідає 2, і т.д.

Крок 4. Знаходимо d_i =ранг$|u_i|$–ранг x_i, а також d_i^2.

Розрахунки проведемо в таблиці

Табл. 21

Витрати обігу, тис. грн. Y	Вантажообіг тис. грн, X	$\hat{Y}$	$Y - \hat{Y}$ u	$\lvert Y - \hat{Y}\rvert$ $\lvert u\rvert$	Ранг	Ранг $\lvert u\rvert$	d	d^2
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
25	6	25,02	-0,02	0,02	1	2	1	1
24	10	22,06	1,94	1,94	2	10	8	64
20	12	20,58	-0,58	0,58	3	4	1	1
20	14	19,1	0,9	0,9	4	6	2	4
17	15	18,36	-1,36	1,36	5	7	2	4
14	20	14,66	-0,66	0,66	6	5	-1	1
10	24	11,7	-1,7	1,7	7	9	2	4
9	27	9,48	-0,48	0,48	8	3	-5	25
8	29	8	0	0	9	1	-8	64
5	35	3,56	1,44	1,44	10	8	-2	4
								172

Крок 5. Обчислимо коефіцієнт рангової кореляції Спірмена за формулою (6.1).

$$r_S = 1 - \frac{6 \cdot 172}{10^3 - 10} = 1 - \frac{1032}{990} \approx -0{,}04242\,.$$

Крок 6. Перевіримо значущість отриманого коефіцієнта рангової кореляції за *t*– критерієм Ст'юдента. Розрахункове значення *t*–критерію знаходимо за формулою (6.2)

$$t_{емп} = \frac{|-0{,}04242| \cdot \sqrt{10-2}}{\sqrt{1-(-0{,}04242)^2}} \approx 0{,}12009\,.$$

Крок 7. Знаходимо критичне значення *t*– критерію для *k*=10–2=8 числа ступенів вільності й рівня значущості α =0,05 ($t_{кр}$=2,306).

Крок 8. Оскільки 0,12009<2,306, то гіпотеза про гетероске–дастичність не підтверджується.

Параметричний тест Гольдфельда-Квандта. Даний метод використовується, коли вхідна сукупність спостережень невелика. В його основу покладено припущення відносно того, що дисперсія залишків зростає пропорційно до величини квадрата однієї з незалежних змінних, тобто має місце формула $M\left(u^2\right) = \sigma_u^2 X_{ij}^2$ для побудованої нами моделі виду

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{XB} + \boldsymbol{U} \qquad (6.3)$$

Зауваження 1. *Перевірка за даним тестом повинна здійснюватися окремо для кожного регресора (незалежної змінної), що входить у багатофакторну модель.*

Алгоритм даного тесту включає в себе наступні кроки:

1. Впорядковуємо вхідну сукупність спостережень відповідно до величини зростання елементів вектора $\boldsymbol{X}_j$, який найбільш імовірно може викликати зміну дисперсії залишків.

2. Відкидаємо із вхідної сукупності *С* спостережень, які містяться в центрі вектора $\boldsymbol{X}_j$. Величину *С* знаходимо за формулою:

$$C = \frac{4n}{15}, \qquad (6.5)$$

де *n* – кількість елементів вектора $\boldsymbol{X}_j$. У результаті такої процедури залишок (*n*–*С*) спостережень поділиться на дві підвибірки однакового розміру (*n*–*С*)/2, одна з яких буде включати малі значення вектора $\boldsymbol{X}_j$, а інша – великі.

3. Використовуючи МНК (систему нормальних рівнянь або формули відхилення від середнього) або стандартну процедуру продукту EXCEL, побудуємо економетричні моделі для кожної з

отриманих на попередньому кроці підвибірок, обсяг яких становить $\frac{n-C}{2} \geq m$, де m – кількість незалежних змінних. Як результат одержимо дві моделі виду:

$$\boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{XB}_1 + \boldsymbol{U}_1, \quad \boldsymbol{Y}_2 = \boldsymbol{XB}_2 + \boldsymbol{U}_2. \tag{6.5}$$

Зауваження 2. *Якщо $n_1 \neq n_2$, то відкидається перше або останнє спостереження сукупності.*

4. Знаходимо суму квадратів залишків для першої та другої моделі:

$$S_1 = \boldsymbol{U}_1^T \boldsymbol{U}_1, \quad S_2 = \boldsymbol{U}_2^T \boldsymbol{U}_2, \tag{6.6}$$

де S_1, S_2 – сума квадратів залишків, відповідно для першої та другої моделі; $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2$ вектори залишків, відповідно для першої та другої моделі.

5. Обчислюємо величину критерію:

$$F^* = \frac{S_2}{S_1}. \tag{6.7}$$

6. Знаходимо критичне значення критерію Фішера ($F_{кр}$) для $k_1 = k_2 = \frac{n-c}{2} - m - 1$ ступенів вільності та рівня значущості α =0,05.

7. Якщо $F^* > F_{кр}$ ми допускаємо існування гетероскедастичності (відкидаємо гіпотезу H_0 щодо відсутності відмінності між дисперсіями випадкових величин U в двох підвибірках). Якщо $F^* \leq F_{кр},$ то гетероскедастичність відсутня (приймається гіпотеза H_0). Чим більше значення F^*, тим більша гетероскедастичність залишків.

Покажемо застосування даного тесту для нашої задачі.

Крок 1. Упорядкуємо вхідну сукупність спостережень відповідно до величини зростання елементів вектора $\boldsymbol{X}_1$, який найбільш імовірно може викликати зміну дисперсії залишків.

Зауваження 3. *Для цього можна використати процедуру сортування засобів ПК.*

Y	***X_1***
25	6
24	10
20	12
20	14
17	15
14	20
10	24
9	27
8	29
5	35

Крок 2. Розрахуємо кількість спостережень, які слід відкинути із середини сукупності

$$C = \frac{4 \cdot 10}{15} \approx 2{,}7$$

У нашому випадку викидаємо 5-е та 6-е спостереження. Тоді одержану вибірку ділимо на дві підвибірки однакового розміру $\frac{10-2}{2} = 4$.

Крок 3. Оціночне рівняння економетричних моделей кожної підвибірки можна розрахувати в EXCEL, користуючись функцією "***РЕГРЕССИЯ***" або статистичною функцією "***ЛИНЕЙН***" (див. додаток).

Для нашого прикладу

Лінійн1:

-0,7	**29,6**
0,226779	2,473863
0,826506	1,341641
9,527778	2
17,15	3,6

Лінійн2:

-0,46332	**21,32046**
0,027842	0,80826
0,99283	0,224038
276,9231	2
13,89961	0,100386

Таким чином, оціночне рівняння для першої підвибірки має вигляд $\hat{y}^1 = 29{,}6 - 0{,}7X$ для другої – $\hat{y}^2 = 21{,}32 - 0{,}46X$

Крок 4. Знайдемо суму квадратів залишків для першої та другої моделі. Ці суми містяться у п'ятому рядку результатів функції "ЛИНЕЙН" (*виділені сірим кольором*). Отже,

$$S_1=3,6, \quad S_2=0,1.$$

Крок 5. Обчислюємо величину критерію F^* за формулою (6.7)

$$F^* = \frac{0,1}{3,6} = 0,027778.$$

Крок 6. Знаходимо табличне значення критерію Фішера для $k_1 = k_2 = \dfrac{n-C}{2} - m - 1 = \dfrac{10-2}{2} - 1 - 1 = 2$ ступенів вільності і рівня значущості α =0,05 ($F_{кр}$=19).

Зауваження 4. *Число ступенів вільності вказане також у четвертому рядку результатів функції "ЛИНЕЙН".*

Крок 7. Оскільки 0,027778<19, то гетероскедастичність відсутня, що підтверджує достовірність побудованої моделі в завданні 1.

Тест Глейзера. Базується на визначенні регресійної залежності між модулем залишків та тією змінною, яка може спричинитися до гетероскедастичності, тобто розглядається регресія

$$|u_i| = f(x_i) + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{6.8}$$

В якості функції f зазвичай обирається функція виду

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x^{\delta}, \tag{6.9}$$

Регресія (6.8) вивчається при різних значеннях δ, а потім вибирається те конкретне значення, при якому коефіцієнт β_1 виявляється найбільш значущим, тобто має найбільше значення $t-$ статистики. При цьому в якості значень δ беруться числа: 1, 2, 3, 1/2, 1/3 тощо. Якщо ж β_1 незначущий для всіх розглянутих значень δ (випадок $f \equiv const$), тоді робиться висновок про відсутність гетероскедастичності.

Крок 1. Використовуючи звичайний МНК, визначаємо за даною вибіркою статистичні оцінки a та b у випадку однофакторної економетричної моделі або b_0 та b_j ($j=\overline{1,m}$) у випадку багатофакторної економетричної моделі.

Крок 2. Записуємо оціночне рівняння моделі. Визначаємо відхилення u_i.

Крок 3. Будуємо модель залежності відхилень $|u_i|$ від обраного регресора x_i у вигляді (6.8).

Крок 4. Для вибраного значення δ лінеаризованої моделі, використовуючи звичайний МНК, визначають статистичні оцінки b_0 b_1 та S_{b_j}.

Крок 5. Здійснюється перевірка на статистичну значущість всіх параметрів моделі при заданому рівні значущості α, використовуючи критерій Ст'юдента (*t*–критерій):

$$t_{\beta_j} = \frac{|b_j|}{S_{b_j}}, \tag{6.10}$$

де b_j – оцінка відповідного параметра моделі; $S_{b_j} = \sqrt{S_{b_j}^2}$,

$S_{b_j}^2$ – незміщена оцінка невідомої дисперсії параметра β_j

Крок 6. Знаходимо критичне значення ($t_{кр}$) критерію Ст'юдента для $k = n - m - 1$ ступенів вільності та рівня значущості α.

Крок 7. Порівнюємо розраховані значення t_{β_j} з критичним. У випадку, якщо $t_{\beta_j} \le t_{кр}$, оцінки параметрів є статистично незначущі, а це означає, що залишки не є гетероскедастичними. Якщо ж $t_{\beta_j} > t_{кр}$, тоді приймаємо гіпотезу про наявність гетероскедастичності залишків.

Стосовно нашого прикладу:

*Крок 1, 2. Н*ами побудована економетрична модель $\hat{Y} = 29{,}46 - 0{,}74X$ та знайдені відхилення $u_i = y_i - \hat{y}_i$

x_i	y_i	$\hat{y}_i$	$y_i - \hat{y}_i$	$\lvert u_i \rvert = \lvert y_i - \hat{y} \rvert$
6	25	25,02	-0,02	0,02
10	24	22,06	1,94	1,94
12	20	20,58	-0,58	0,58
14	20	19,1	0,9	0,9
15	17	18,36	-1,36	1,36
20	14	14,66	-0,66	0,66
24	10	11,7	-1,7	1,7
27	9	9,48	-0,48	0,48
29	8	8	0	0
35	5	3,56	1,44	1,44

Крок 3. Покладемо у функції (6.9) $\delta = 1$, тобто розглядатимемо модель $|u_i| = \beta_0 + \beta_1 x$.

Крок 4. Використовуючи функцію "ЛИНЕЙН" знайдемо статистичні оцінки b_0 b_1 та S_{b_j}.

0,0031874	**0,8468024**
0,0256564	0,5425588
0,0019255	0,7191122
0,0154338	8
0,0079812	4,1369788

Таким чином, $|u_i| = 0{,}8468 + 0{,}0032x$,

$$S_{b_0} = 0{,}5426, \quad S_{b_1} = 0{,}0257$$

Крок 5. Визначаємо достовірність параметрів моделі за формулою (6.10):

$$t_{\beta_0} = \frac{0{,}8468024}{0{,}5425588} = 1{,}560757$$

$$t_{\beta_1} = \frac{0{,}0031874}{0{,}0256564} = 0{,}124233$$

Крок 6. Для рівня значущості 0,05 і числа ступенів вільності $k = 10 - 1 - 1 = 8$ критичне значення критерію Ст'юдента $t_{кр}$ =2,306.

Крок 7. Оскільки $t_{\beta_j} < t_{кр}$ (1,560757<2,306; 0,124233<2,306), гіпотезу про наявність гетероскедастичності відкидаємо.

Завдання №7
АВТОКОРЕЛЯЦІЯ

Критерій Дарбіна-Уотсона. При використанні даного критерію формулюється нульова гіпотеза про відсутність автокореляції $H_0 : \rho = 0$. Альтернативна гіпотеза може бути побудованою на основі використання односторонньої критичної області – $H_1 : \rho > 0$, тобто існує додатна, або $H_1 : \rho < 0$, тобто існує від'ємна автокореляція, або на основі двосторонньої критичної області – $H_1 : \rho \neq 0$.

Статистика Дарбіна-Уотсона визначається за формулою:

$$DW = d = \frac{\sum_{t=2}^{n}\left(u_t - u_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2} \tag{7.1}$$

Між статистикою d і коефіцієнтом авторегресії ρ існує наближене співвідношення:

$$d \approx 2 - 2\rho. \tag{7.2}$$

Оскільки $-1<\rho<1$, то для загального випадку має місце $0<d<4$.

Розподіл статистики d (7.2), як випадкової величини, залежить від кількості спостережень у вибірці *n,* числа пояснюючих змінних у рівнянні регресії *m,* конкретних значень пояснюючих змінних і рівня значущості α. Ці обставини свідчать про неможливість побудови таблиці критичних значень *d*–статистики. Тому Дарбіном і Уотсоном було доведено, що існує нижня та верхня границі для критичного значення *d*, які не залежать від значень вибірки, а визначаються тільки обсягом вибірки *n,* числом пояснюючих змінних *m* і рівнем значущості ε.

Позначимо нижню границю величини *d* через $d_н$, а верхню – через $d_в$. Тому в таблиці *d*-статистики приведені значення $d_н$ та $d_в$ для рівнів значущості α=0,01 (α=0,025, α=0,05) при *n* від 15 до 100 і числа пояснюючих змінних *m*, від 1 до 5.

Зона автокореляційного зв'язку за критерієм Дарбіна-Уотсона

<table>
<tr><td>Відкидається H_0
Приймається H_1</td><td>?</td><td colspan="2">Приймається H_0
про відсутність
автокореляції
залишків</td><td>?</td><td>Відкидається H_0
Приймається H_1</td></tr>
<tr><td>0 $d_н$</td><td>$d_в$</td><td>2</td><td>4-$d_в$</td><td>4-$d_н$</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Додатна
автокореляція</td><td>Зона
невизна
ченості</td><td colspan="2">Автокореляція
відсутня</td><td>Зона
невизна
ченості</td><td>Від'ємна
автокореляція</td></tr>
</table>

Критерій Дарбіна-Уотсона має два недоліки. Перший з них полягає в тому, що критичні границі прийняття гіпотези H_0 і відхилення альтернативної H_1 не співпадають. Критичні значення утворюють п'ять областей різних статистичних рішень, у тому числі області невизначеності. В областях невизначеності нульова гіпотеза не приймається і не відкидається, тобто з допомогою d-критерію неможливо прийти до якогось висновку. Другий недолік полягає в тому, що при обсязі вибірки n<15 для d не існує критичних значень $d_н$ і $d_в$.

Знайдене значення d–статистики порівнюється з табличними значеннями $d_н$ і $d_в$, і, керуючись наступними правилами, робляться висновки:

1. $d_в \le d \le 4–d_в$ – приймається гіпотеза $H_0 : \rho = 0$, тобто автокореляція відсутня;
2. $0 < d \le d_н$ – приймається гіпотеза $H_1 : \rho > 0$, тобто існує додатна автокореляція залишків;
3. $d_н < d < d_в$ та $4 – d_в < d < 4 – d_н$ – при вибраному рівні значущості неможливо прийти до певного висновку (виникає потреба в додатковому дослідженні);
4. $4 - d_н \le d < 4$ – приймається гіпотеза $H_1 : \rho < 0$, тобто має місце від'ємна автокореляція.

Якщо залишки не містять автокореляцію, тобто ρ=0, то значення d міститься поблизу числа 2. Дане твердження доцільно використовувати в тому випадку, коли потрібно впевнитися у тому, є автокореляція чи ні.

Приклад

На основі даних про витрати обігу (Y) та вантажообіг (X) на рівні значущості α=0,05 *перевірити наявність автокореляції в економетричній моделі, використовуючи критерій Дарбіна–Уотсона.*

Розв'язання: *Крок. 1.* За даними нижче приведеної таблиці побудована економетрична модель $\hat{y} = 29{,}46 - 0{,}74x$ та знайдені відхилення $u_t = y_t - \hat{y}_t$

Табл. 22

x_t	y_t	$\hat{y}_t$	u_t	u_t^2	$u_t - u_{t-1}$	$(u_t - u_{t-1})^2$
6	25	25,02	-0,02	0,0004		
10	24	22,06	1,94	3,7636	1,96	3,8416
12	20	20,58	-0,58	0,3364	-2,52	6,3504
14	20	19,1	0,9	0,81	1,48	2,1904
15	17	18,36	-1,36	1,8496	-2,26	5,1076
20	14	14,66	-0,66	0,4356	0,7	0,49
24	10	11,7	-1,7	2,89	-1,04	1,0816
27	9	9,48	-0,48	0,2304	1,22	1,4884
29	8	8	0	0	0,48	0,2304
35	5	3,56	1,44	2,0736	1,44	2,0736
				12,3896		**22,854**

Крок 2. Знайдемо оцінку критерію Дарбіна-Уотсона за формулою (7.1):

$$DW = d = \frac{22{,}854}{12{,}3896} = 1{,}844612$$

Крок 3. Використовуючи табличні значення статистики Дарбіна-Уотсона для n=10 та α=0,05, одержуємо $d_н$=0,879, $d_в$=1,32.

Крок 4. Оскільки d=1,844612, то вона знаходиться в межах від $d_в$ до 4–$d_в$ (1,32< d < 2,68). Таким чином, робимо висновок, що автокореляція відсутня.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Алгоритм знаходження оберненої матриці в Excel

1. Відмічаємо поле, де буде знаходитись результат.
2. Входимо в майстер функцій (*f*). У категоріях вибираємо математику, а в функціях **МОБР**. Вводимо адресу матриці для якої знаходимо обернену. Натискаємо клавішу **Готово**.

3. Для того щоб отримати на екрані значення всієї оберненої матриці, натискаємо клавіші **F2 і Ctrl+Shift+Enter**.

Додаток 2

Алгоритм множення матриць в Excel

1. Відмічаємо поле, де буде знаходитись результат.
2. Входимо в майстер функцій (*f*). У категоріях вибираємо математику, а в функціях **МУМНОЖ** Вводимо адресу 1-ої матриці в 1=ий масив і 2-ої - в другий. Натискаємо клавішу **Готово**.
3. Для того щоб отримати на екрані значення всієї матриці добутку, натискаємо клавіші **F2 і Ctrl+Shift+Enter**.

Додаток 3

Порядок знаходження оцінок параметрів економетричної моделі з використанням функції ЛИНЕЙН

1. Відмічаємо блок, де мають знаходитись розрахункові дані. Висота цього блоку завжди дорівнює 5−ти рядкам, а ширина - *числу оцінюваних параметрів*.
2. В діалоговому вікні **Мастер функций**, вибираємо категорію **СТАТИСТИЧЕСКИЕ** функцію **ЛИНЕЙН** і натискаємо на кнопку **Далее>**.
3. В наступному діалоговому вікні вводимо: в перший рядок блок даних показника; в другий рядок блок даних факторів; в третій рядок вводиться слово **ИСТИНА**, якщо a_0 не дорівнює нулю, і слово **ЛОЖЬ**, якщо a_0 дорівнює нулю; в четвертий рядок вводиться слово **ИСТИНА**,

якщо необхідно знайти не лише параметри регресії, а й додаткову регресійну статистику, і слово **ЛОЖЬ** якщо необхідно знайти лише параметри регресії. Після цього натискаємо кнопку **ГОТОВО**.

4. Для того щоб отримати на екрані значення всіх розрахункових даних, натискаємо клавіші **F2 і Ctrl+Shift+Enter**.

Таблиця розрахункових значень має вигляд (таблиця для трьох оцінюваних параметрів):

a_2	a_1	a_0
σ_{a2}	σ_{a1}	σ_{a0}
r^2	σ_{xy}	$\#Н/Д$
$F_{роз}$	k	$\#Н/Д$
$\sum\left(\hat{y}-\overline{y}\right)^2$	$\sum\left(\hat{y}_i-y_i\right)^2$	$\#Н/Д$

В першому рядку знаходяться оцінки економетричної моделі відповідно a_2, a_1, a_0.

В другому рядку знаходяться середні квадратичні відхилення оцінок параметрів σ_{a2}, σ_{a1}, σ_{a0}.

В третьому рядку в першій комірці знаходиться коефіцієнт детермінації, а в другій комірці - середнє квадратичне відхилення показника (стандартна похибка оцінки за рівнянням економетричної моделі).

В четвертому рядку в першій комірці знаходиться розрахункове значення F - статистики, в другій комірці - k - число ступенів вільності.

В п’ятому рядку в першій комірці знаходиться сума квадратів відхилень розрахункових значень показника від його середнього значення, в другій комірці - сума квадратів відхилень розрахункових значень показника від статистичних.

Додаток 4. Довідкові таблиці

Таблиця значень функції Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}dt$

Таблиця 4.1

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	**0,50**	0,1915	**1,00**	0,3413	**1,50**	0,4332	**2,00**	0,4772	**3,00**	0,49865
0,01	0,0040	**0,51**	0,1950	**1,01**	0,3438	**1,51**	0,4345	**2,02**	0,4783	**3,20**	0,49931
0,02	0,0080	**0,52**	0,1985	**1,02**	0,3461	**1,52**	0,4357	**2,04**	0,4793	**3,40**	0,49966
0,03	0,0120	**0,53**	0,2019	**1,03**	0,3485	**1,53**	0,4370	**2,06**	0,4803	**3,60**	0,499841
0,04	0,0160	**0,54**	0,2054	**1,04**	0,3508	**1,54**	0,4382	**2,08**	0,4812	**3,80**	0,499928
0,05	0,0199	**0,55**	0,2088	**1,05**	0,3531	**1,55**	0,4394	**2,10**	0,4821	**4,00**	0,499968
0,06	0,0239	**0,56**	0,2123	**1,06**	0,3554	**1,56**	0,4406	**2,12**	0,4830	**4,50**	0,499997
0,07	0,0279	**0,57**	0,2157	**1,07**	0,3577	**1,57**	0,4418	**2,14**	0,4838	**5,00**	0,499997
0,08	0,0319	**0,58**	0,2190	**1,08**	0,3599	**1,58**	0,4429	**2,16**	0,4846		
0,09	0,0359	**0,59**	0,2224	**1,09**	0,3621	**1,59**	0,4441	**2,18**	0,4854		
0,10	0,0398	**0,60**	0,2257	**1,10**	0,3643	**1,60**	0,4452	**2,20**	0,4861		
0,11	0,0438	**0,61**	0,2291	**1,11**	0,3665	**1,61**	0,4463	**2,22**	0,4868		
0,12	0,0478	**0,62**	0,2324	**1,12**	0,3686	**1,62**	0,4474	**2,24**	0,4875		
0,13	0,0517	**0,63**	0,2357	**1,13**	0,3708	**1,63**	0,4484	**2,26**	0,4881		
0,14	0,0557	**0,64**	0,2389	**1,14**	0,3729	**1,64**	0,4495	**2,28**	0,4887		
0,15	0,0596	**0,65**	0,2422	**1,15**	0,3749	**1,65**	0,4505	**2,30**	0,4893		
0,16	0,0636	**0,66**	0,2454	**1,16**	0,3770	**1,66**	0,4515	**2,32**	0,4898		
0,17	0,0675	**0,67**	0,2486	**1,17**	0,3790	**1,67**	0,4525	**2,34**	0,4904		
0,18	0,0714	**0,68**	0,2517	**1,18**	0,3810	**1,68**	0,4535	**2,36**	0,4909		
0,19	0,0753	**0,69**	0,2549	**1,19**	0,3830	**1,69**	0,4545	**2,38**	0,4913		
0,20	0,0793	**0,70**	0,2580	**1,20**	0,3849	**1,70**	0,4554	**2,40**	0,4918		
0,21	0,0832	**0,71**	0,2611	**1,21**	0,3869	**1,71**	0,4564	**2,42**	0,4922		
0,22	0,0871	**0,72**	0,2642	**1,22**	0,3883	**1,72**	0,4573	**2,44**	0,4927		
0,23	0,0910	**0,73**	0,2673	**1,23**	0,3907	**1,73**	0,4582	**2,46**	0,4931		
0,24	0,0948	**0,74**	0,2703	**1,24**	0,3925	**1,74**	0,4591	**2,48**	0,4934		
0,25	0,0987	**0,75**	0,2734	**1,25**	0,3944	**1,75**	0,4599	**2,50**	0,4938		
0,26	0,1026	**0,76**	0,2764	**1,26**	0,3962	**1,76**	0,4608	**2,52**	0,4941		
0,27	0,1064	**0,77**	0,2794	**1,27**	0,3980	**1,77**	0,4616	**2,54**	0,4945		
0,28	0,1103	**0,78**	0,2823	**1,28**	0,3997	**1,78**	0,4625	**2,56**	0,4948		
0,29	0,1141	**0,79**	0,2852	**1,29**	0,4015	**1,79**	0,4633	**2,58**	0,4951		
0,30	0,1179	**0,80**	0,2881	**1,30**	0,4032	**1,80**	0,4641	**2,60**	0,4953		
0,31	0,1217	**0,81**	0,2910	**1,31**	0,4049	**1,81**	0,4649	**2,62**	0,4956		
0,32	0,1255	**0,82**	0,2939	**1,32**	0,4066	**1,82**	0,4656	**2,64**	0,4959		
0,33	0,1293	**0,83**	0,2967	**1,33**	0,4082	**1,83**	0,4664	**2,66**	0,4961		
0,34	0,1331	**0,84**	0,2995	**1,34**	0,4099	**1,84**	0,4671	**2,68**	0,4963		
0,35	0,1368	**0,85**	0,3023	**1,35**	0,4115	**1,85**	0,4678	**2,70**	0,4965		
0,36	0,1406	**0,86**	0,3051	**1,36**	0,4131	**1,86**	0,4686	**2,72**	0,4967		
0,37	0,1443	**0,87**	0,3078	**1,37**	0,4147	**1,87**	0,4693	**2,74**	0,4969		
0,38	0,1480	**0,88**	0,3106	**1,38**	0,4162	**1,88**	0,4699	**2,76**	0,4971		
0,39	0,1517	**0,89**	0,3133	**1,39**	0,4177	**1,89**	0,4706	**2,78**	0,4973		
0,40	0,1554	**0,90**	0,3159	**1,40**	0,4192	**1,90**	0,4713	**2,80**	0,4974		

x	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**
0,41	0,1591	**0,91**	0,3186	**1,41**	0,4207	**1,91**	0,4719	**2,82**	0,4976		
0,42	0,1628	**0,92**	0,3212	**1,42**	0,4222	**1,92**	0,4726	**2,84**	0,4977		
0,43	0,1664	**0,93**	0,3238	**1,43**	0,4236	**1,93**	0,4732	**2,86**	0,4979		
0,44	0,1700	**0,94**	0,3264	**1,44**	0,4251	**1,94**	0,4738	**2,88**	0,4980		
0,45	0,1736	**0,95**	0,3289	**1,45**	0,4265	**1,95**	0,4744	**2,90**	0,4981		
0,46	0,1772	**0,96**	0,3315	**1,46**	0,4279	**1,96**	0,4750	**2,92**	0,4982		
0,47	0,1808	**0,97**	0,3340	**1,47**	0,4292	**1,97**	0,4756	**2,94**	0,4984		
0,48	0,1844	**0,98**	0,3365	**1,48**	0,4306	**1,98**	0,4761	**2,96**	0,4985		
0,49	0,1879	**0,99**	0,3389	**1,49**	0,4319	**1,99**	0,4767	**2,98**	0,4986		

Таблиця критичних точок розподілу Ст'юдента

Таблиця 4.2

Число ступенів вільності k	Рівень значимості **α** (двостороння критична область)					
	0,1	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,002**	**0,001**
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**	**0,0005**
	Рівень значимості **α** (одностороння критична область)					

Таблиця критичних точок розподілу хі-квадрат

Таблиця 4.3

Число ступенів вільності k	Рівень значимості α					
	0,01	**0,025**	**0,05**	**0,95**	**0,975**	**0,99**
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Значення статистики Дарбіна-Уотсона при рівні значимості $\alpha = 0,05$

Таблиця 4.4

n	K=1		K=2		K=3		K=4		K=5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
6	0,61	1,40	-	-	-	-	-	-	-	-
7	0,7	1,36	0,47	1,9	-	-	-	-	-	-
8	0,76	1,33	0,56	1,78	0,37	2,29	-	-	-	-
9	0,82	1,32	0,63	1,7	0,46	2,13	-	-	-	-
10	0,88	1,32	0,7	1,64	0,53	2,02	-	-	-	-
11	0,93	1,32	0,66	1,6	0,6	1,93	-	-	-	-
12	0,97	1,33	0,81	1,58	0,66	1,86	-	-	-	-
13	1,01	1,34	0,86	1,56	0,72	1,82	-	-	-	-
14	1,05	1,35	0,91	1,55	0,77	1,78	-	-	-	-
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	0,07	1,83

Значення F-критерію Фішера при рівні значущості α=0,05

Таблиця 4.5

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,45	199,50	215,72	224,57	230,17	233,97	238,89	243,91	249,04	254,32
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35

80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,65	1,31
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,64	1,28
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,63	1,26
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,60	1,21
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,59	1,18
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,57	1,14
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,55	1,10
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,54	1,07
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,54	1,06
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,53	1,03
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

Список рекомендованих джерел

ОСНОВНА ЛІТЕРАТУРА

1. Економіко-математичне моделювання: Навч. посібник / За ред. О.Т. Іващука. – Тернопіль: ТНЕУ, Економічна думка, 2008. – 704 с.
2. Березька К.М. Економетрія: основи теорії та комп'ютерний практикум. – Тернопіль, 2007. – 137 с.
3. Лук'яненко І.Г., Краснікова Л.І. Економетрика: Підручник. - К.: Знання, 1998. - 494 с.
4. Джонстон Дж. Эконометрические методы.-М.: Статистика, 1980.-444 с.
5. Толбатов Ю.А. Економетрика. - К.: Четверта хвиля, 1997.-320 с.
6. Кейн Э. Экономическая статистика и эконометрия. Введение в количественный экономический анализ. - М.: Статистика, 1977. -254 с.
7. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика: Учебник для вузов / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 311 с.
8. Іващук О.Т. Економетричні методи та моделі: Навч. посібник – ТАНГ, Економічна думка, 2002. – 348 с.

ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

1. Єлейко В. Основи економетрії. – Львів: „Марка ЛТД", 1995. – 191 с.
2. Грубер Й. Эконометрия.-К.: 1996.-Т.1.Введение в эконометрию.-400 с.
3. Маленво Э. Статистические методы эконометрии. – М.: Статистика, 1975. – 423 с.