Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 1, 1–15

УДК 517.52.

Багатовимірне узагальнення овальної теореми для періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду

Д.І. Боднар, М.М. Бубняк [1]

[1] *Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль, bodnar4755@ukr.net, mariabubnyak@gmail.com*

Означено $\overrightarrow{p}$-періодичні гіллясті ланцюгові дроби спеціального вигляду. Встановлено багатовимірний аналог овальної теореми збіжності, на основі якого одержано оцінки швидкості збіжності в овальних областях при певних умовах на параметри цих областей. Досліджено значення, до яких збігаються $\overrightarrow{p}$-періодичні гіллясті ланцюгові дроби спеціального вигляду.

$\overrightarrow{p}$-periodic branched continued fractions of the special form are defined. The multidimentional analog of the convergence oval theorem is proved and truncation error bounds are established if elements of this fractions belong to the oval regions and parameters of this regions satisfied some conditions. Values of $\overrightarrow{p}$-periodic branched continued fraction are investigated.

Определено $\overrightarrow{p}$-периодические ветвящиеся цепные дроби специального вида. Получено многомерный аналог овальной теоремы о сходимости, используя который получена оценка сходимости в овальных областях при некоторых дополнительных условиях на параметры этих областей. Исследованы значения, к которым сходятся $\overrightarrow{p}$-периодические ветвящиеся цепные дроби специального вида.

Вступ

Нехай

$$b_0 + \operatorname*{D}_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \dots \tag{1}$$

є неперервним дробом з комплексними елементами. При дослідженні множин збіжності цього дробу використовують множини елементів та множини значень. Для заданої послідовності множин $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ із $\widehat{\mathbb{C}}$ визначимо послідовність множин $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ за допомогою співвідношеннь: $\Omega_n = \{(a_n, b_n) \in \mathbb{C}^2 : a_n/(b_n + V_n) \subseteq V_{n-1}\}$. Послідовність $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ називають послідовністю множин елементів дробу (1), яка відповідає послідовності множин значень $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ [14, p.70]. Більше того, якщо умови $(a_n, b_n) \in \Omega_n$ $(n \geq 1)$ гарантують збіжність неперервного дробу, то Ω_n $(n \geq 1)$ називають множинами збіжності. Якщо $\Omega_n = \Omega$ $(n \geq 1)$, то множину Ω називають простою множиною збіжності. В 1865 році Worpitsky довів, що круг $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1/4\}$ є простою множиною збіжності неперервного дробу (1), де $b_n = 1$ $(n \geq 0)$. R. Lane in 1945 встановив, що послідовності кругів V_n, де $V_n = \{z \in \mathbb{C} : |z - \Gamma_n| \leq \rho_n\}$ $|\Gamma_n| < \rho_n$ $(n \geq 0)$ відповідає послідовність овальних множини елементів Ω_n, де $\Omega_n = \{(a_n, b_n) \in \mathbb{C}^2 : |a_n(\overline{b}_n + \overline{\Gamma}_n) - \Gamma_n(|b_n + \Gamma_n|^2 - \rho_n^2)| + |a_n|\rho_n \leq \rho_{n-1}(|b_n + \Gamma_n|^2 - \rho_n^2)\}$. Овальні множини збіжності досліджували H.L. Hillam, W.J. Thron [9], W.B. Jones, W.J. Thron [11], H. Waadeland [16], L. Lorentzen [14] та ін. Детальний огляд геометричних властивостей овальної області подано у статті [10]. У монографіях [8, 14] особливу увагу приділено застосуванню овальної теореми для встановлення оцінок швидкості збіжності дробу (1). Огляд досліджень, які стосуються овальної теореми, наведено в роботах [11, 14, 15, 17].

Періодичні дроби є важливим підкласом неперервних дробів. Дріб (1) називають p-періодичним, якщо послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ є p-періодичними $(p \geq 1)$, тобто $a_{n+p} = a_n$, $b_{n+p} = b_n$ $(n \geq 1)$. D. Bernoulli, E. Galois, O. Stolz, R. Lane, H.S. Wall, T. Tile, A. Pringsheim, O. Perron та інші досліджували питання збіжності цих дробів. Ознаки збіжності для періодичних неперервних дробів часто формулюються з використанням нерухомих точок дробово-лінійного відображення. Розглянемо дробово-лінійне відображення $t(\omega) = \dfrac{a\omega + b}{c\omega + d}$, де a, b, c, d, $\omega \in \mathbb{C}$ і $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$. Воно має дві нерухомі точки x та y. Точку x називають притягувальною (attracting), якщо $t^n(\omega) = t(t^{n-1}(\omega)) \to x$ при $n \to \infty$ для всіх $\omega \neq y$. Тоді y – відштовхувальна (repelling) точка цього відображення. Розглянемо відношення $k = \dfrac{cy+d}{cx+d}$. Якщо $|k| < 1$, тоді $t(\omega)$ називають дробово-лінійне відображення локсодронічного типу, якщо $|k| = 1$ – еліптичного, $k = 1$ – параболічного типу [14, с. 175]. Узагальненням періодичних дробів є гранично-періодичні неперервні дроби. Дріб $\underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \dfrac{a_n}{b_n}$ називають граничним-p-періодичним, якщо виконуються умови: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{np+m} = a^*_m$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_{np+m} = b^*_n$ $(m = 1, 2, \ldots, p)$. Скінченні дроби вигляду

$$h_n = b_n + \frac{a_n|}{|b_{n-1}} + \frac{a_{n-1}|}{|b_{n-2}} + \ldots + \frac{a_2|}{|b_1} \quad (n \geq 1; b_0 = 1)$$

називають зворотними (reversed) дробами гранично-періодичного неперервного дробу [14, с. 48]. Ознаки збіжності періодичних та гранично-періодичних неперервних дробів наведено в [14, 15, 17].

1 Означення та позначення

В. Я. Скоробогатько означив гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) з N вітками розгалуження. Задача відповідності між такими дробами і кратними степеневими рядами спонукала до появи двовимірних неперервних дробів (J. A. Murphy, M. O'Donohoe, Х. Й. Кучмінська, W. Siemaszko, A. Cuyt, О. М. Сусь та ін.). Труднощі при переході до n змінних привели до появи ГЛД з нерівнозначними змінними. Такі дроби при фіксованих значеннях змінних отримали назву ГЛД спеціального вигляду

$$\left(1 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1}\right)^{-1}, \tag{2}$$

де $a_{i(k)} \in \mathbb{C}$, $i(k) \in I$, $I = \{i_1 i_2 \ldots i_k \colon 1 \leq i_k \leq i_{k-1}; k \geq 1; i_0 = N\}$, N – фіксоване натуральне число. Вони були об'єктом досліджень Д. І. Боднара, Т. М. Антонової, Р. І. Дмитришина, О. Є. Баран та інших [1–5].

Дріб (2) назвемо $\overrightarrow{p}$-періодичним гіллястим ланцюговим дробом спеціального вигляду, де $\overrightarrow{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$ і $p_j \in \mathbb{N}$ $(j = \overline{1, N})$, якщо елементи цього дробу задовольняють умови: $a_{\underbrace{r\ldots r}_{q}} = a_{\underbrace{r\ldots r}_{s}}$, де $q \geq 1$ і $q = n \cdot p_r + s$; $r = \overline{1, N}$; $1 \leq s \leq p_r$, і $a_{i(m)\underbrace{r\ldots r}_{q}} = a_{\underbrace{r\ldots r}_{s}}$, де $m \geq 1$; $i(m) \in I$; $r < i_m$.

Позначимо $a_{\underbrace{r\ldots r}_{s}} = c_{r,s}$. Тоді дріб (2) можна записати у вигляді

$$\left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k,s}}{1}\right)^{-1}, \tag{3}$$

причому значення s, що залежать від поверху k та періоду p_{i_k}, одержуємо з наступних розкладів: $k = p_{i_k} n + s$, якщо $i_1 = i_2 = \ldots = i_k$, або $k - m = p_{i_k} n + s$, якщо $i_1 \geq i_2 \geq \ldots \geq i_m > i_{m+1} = \ldots = i_k$ $(n \geq 0)$.

Визначимо рекурентно залишки дробу (3)

$$R_n^{(1,j)} = 1 + \frac{c_{1,j+1}}{R_{n-1}^{(1,j+1)}}, \quad R_n^{(q,j)} = 1 + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{c_{k,1}}{R_{n-1}^{(k,2)}} + \frac{c_{q,j}}{R_{n-1}^{(q,j+1)}} \tag{4}$$

при початкових умовах: $R_0^{(q,j)} = 1$ ($q = \overline{1,N}$; $j \geq 1$). Назвемо $R_n^{(q,j)}$ – j-м залишком q-ої вітки n-го порядку. Вираз $F_n = \left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k,s}}{1}\right)^{-1}$, $n \geq 1$ ($F_0 = 1$). називають n-им підхідним дробом $\overrightarrow{p}$-періодичного дробу (3), зокрема, $F_n = \left(R_n^{(N,1)}\right)^{-1}$.

Для залишків $\overrightarrow{p}$-періодичного ГЛД виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} R_n^{(q,m)} &= R_n^{(q,s)} \quad (m = r_q \cdot p_q + s; 1 \leq s \leq p_q), \\ R_n^{(q,m)} &= R_n^{(q-1,1)} + \frac{c_{q,m}}{R_{n-1}^{(q,m+1)}} \quad (m + 1 \leq p_q). \end{aligned} \tag{5}$$

2 Основні результати

Встановимо формулу різниці двох підхідних дробів $\overrightarrow{p}$-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду.

Розглянемо p_j-періодичний неперервний дріб ($j \in \{1, 2, \ldots, N\}$), який є деякою віткою дробу (3),

$$1 + \frac{c_{j,1}|}{|1} + \frac{c_{j,2}|}{|1} + \ldots + \frac{c_{j,p_j}|}{|1} + \frac{c_{j,1}|}{|1} + \ldots. \tag{6}$$

Нехай $r_{j,s}$ – кількість повторів елемента $c_{j,s}$ в k_j-підхідному дробі неперервного дробу (6). Якщо $k_j = \lambda_j p_j + l_j$ $(0 \le l_j \le p_j - 1)$, то

$$r_{j,s} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } k_j = 0; \\ \lambda_j + 1, \text{ якщо } l_j \le p_j - 1; \\ \lambda_j, \text{ якщо } l_j = 0. \end{cases}$$

Очевидно, що $k_j = \sum_{s=1}^{p_j} r_{j,s}$. Визначимо множину індексів

$$J_{n+1}^{(N)} = \{k_1, k_2, \ldots, k_N : k_j \ge 0, \sum_{j=1}^{N} k_j = n+1\}, \quad n \ge 0.$$

Лема 2.1. *При умові, що $R_n^{(q,j)} \ne 0$ $(q = \overline{1,N};\ j = \overline{1,p_q};\ n \ge 1)$, справджується формула різниці двох підхідних дробів ГЛД (3)*

$$F_{n+m} - F_n = \frac{(-1)^{n+1}}{R_{n+m}^{(N,1)} \cdot R_n^{(N,1)}} \sum_{k \in J_{n+1}^{(N)}} \prod_{i=1}^{N} \frac{c_{i,1}^{r_{i,1}} \ldots c_{i,p_i}^{r_{i,p_i}}}{\prod_{j=1}^{k_i+1} \left(R_{m+l_i-j}^{(i,j+1)} \cdot \widehat{R}_{l_i-j}^{(i,j+1)} \right)}, \quad (7)$$

де $n \ge 0$, $m \ge 1$; $l_i = n - \sum_{t=i+1}^{N} k_t$; $\widehat{R}_n^{(i,j)} = R_n^{(i,j)}$, якщо $n \ge 0$, і $\widehat{R}_{-1}^{(i,j)} = 1$.

Доведення Послідовно використовуючи формули (5), отримаємо

$$R_{m+n-k}^{(\nu+1,j)} - R_{n-k}^{(\nu+1,j)} = \sum_{q=0}^{n-k} \prod_{i=1}^{q} \frac{c_{\nu+1,j+i-1}}{R_{n+m-k-i}^{(\nu+1,j+i)} \cdot R_{n-k-i}^{(\nu+1,j+i)}} \times$$
$$\left(R_{n+m-k-q}^{(\nu,1)} - R_{n-k-q}^{(\nu,1)} \right) + \prod_{i=1}^{n-k+1} \frac{c_{\nu+1,j+i-1}}{R_{n+m-k-i}^{(\nu+1,j+i)} \cdot \widehat{R}_{n-k-i}^{(\nu+1,j+i)}},$$

де $m > 0$, $n > 0$, $0 \le k \le n$, $j = \overline{1, n-k}$, $\nu = \overline{1, N-1}$.

Оскільки $F_n = 1/R_n^{(N,1)}$, то

$$F_{n+m} - F_n = -\left(R_{n+m}^{(N,1)} - R_n^{(N,1)} \right) / \left(R_{n+m}^{(N,1)} \cdot R_n^{(N,1)} \right).$$

Використовуючи метод математичної індукції по q, доведемо, що

$$R_{n+m}^{(q,1)} - R_n^{(q,1)} = (-1)^n \sum_{k \in J_{n+1}^{(q)}} \prod_{l=1}^{q} \frac{c_{l,1}^{r_{l,1}} \ldots c_{l,p_l}^{r_{l,p_l}}}{\prod_{j=1}^{k_l+1} \left(R_{m+g_l-j}^{(l,j+1)} \cdot \widehat{R}_{g_l-j}^{(l,j+1)} \right)}. \quad (8)$$

Якщо $q=1$, то $R_n^{(1,1)}$ – p_1-періодичний неперервний дріб. Враховуючи співвідношення (5) і рівності $R_k^{(1,p_1+1)} = R_k^{(1,1)}$ $(k \geq 1)$, маємо

$$R_{n+m}^{(1,1)} - R_n^{(1,1)} = \frac{(-1)^{\lambda_1 p_1} c_{1,1}^{\lambda_1} c_{1,2}^{\lambda_1} \ldots c_{1,p_1}^{\lambda_1}}{\prod_{j=1}^{\lambda_1 p_1} \left(R_{n+m-j}^{(1,j+1)} \cdot R_{n-j}^{(1,j+1)} \right)} (R_{n+m-\lambda_1 p_1}^{(1,\lambda_1 p_1+1)} - R_{n-\lambda_1 p_1}^{(1,\lambda_1 p_1+1)})$$

$$= \ldots = (-1)^n \frac{c_{1,1}^{r_{1,1}} \ldots c_{1,p_1}^{r_{1,p_1}}}{\prod_{j=1}^{n+1} \left(R_{n+m-j}^{(1,j+1)} \cdot \widehat{R}_{n-j}^{(1,j+1)} \right)} \quad (n, m > 0),$$

де $r_{1,j} = \lambda_1 + 1$, якщо $j \leq l_1 + 1$; $r_{1,j} = \lambda_1$, у решта випадків $(n = \lambda_1 p_1 + l_1,\ 0 \leq l_1 \leq p_1 - 1,\ j = \overline{1, p_1})$.

Припускаючи, що для $q = \nu$ виконується рівність (8), маємо

$$R_{n+m}^{(\nu+1,1)} - R_n^{(\nu+1,1)} = R_{n+m}^{(\nu,1)} - R_n^{(\nu,1)} +$$
$$\frac{-1 c_{\nu+1,1}}{R_{n+m-1}^{(\nu+1,2)} R_{n-1}^{(\nu+1,2)}} \left(R_{n+m-1}^{(\nu,1)} - R_{n-1}^{(\nu,1)} \right) + \ldots$$
$$+ \prod_{s=1}^{n} \frac{-c_{\nu+1,s}}{R_{n+m-s}^{(\nu+1,s+1)} R_{n-s}^{(\nu+1,s+1)}} \left(R_m^{(\nu,1)} - R_0^{(\nu,1)} \right)$$
$$- \prod_{i=1}^{n+1} \frac{-c_{\nu+1,s}}{R_{n+m-s}^{(\nu+1,s+1)} \cdot \widehat{R}_{n-s}^{(\nu+1,s+1)}}.$$

Враховуючи періодичність вздовж $\nu+1 : c_{\nu+1,k_{\nu+1}} = c_{\nu+1,s_{\nu+1}}$, де $k_{\nu+1} = u_{\nu+1} \cdot p_{\nu+1} + s_{\nu+1}$ $(1 \leq s_{\nu+1} \leq p_{\nu+1})$, маємо

$$R_{n+m}^{(\nu+1,1)} - R_n^{(\nu+1,1)} = (-1)^n \sum_{k \in J_{n+1}^{(\nu)}} \prod_{i=1}^{\nu} \frac{c_{i,1}^{r_{i,1}} \ldots c_{i,p_i}^{r_{i,p_i}}}{\prod_{j=1}^{k_\nu+1} \left(R_{m+l_i-j}^{(i,j+1)} \widehat{R}_{l_i-j}^{(i,j+1)} \right)} +$$
$$\frac{(-1)^n c_{\nu+1,1}}{R_{n+m-1}^{(\nu+1,2)} R_{n-1}^{(\nu+1,2)}} \sum_{k \in J_n^{(\nu)}} \prod_{i=1}^{\nu} \frac{c_{i,1}^{r_{i,1}} \ldots c_{i,p_i}^{r_{i,p_i}}}{\prod_{j=1}^{k_\nu+1} \left(R_{m+l_i-j}^{(i,j+1)} \widehat{R}_{l_i-j}^{(i,j+1)} \right)} + \ldots +$$
$$\frac{(-1)^n c_{\nu+1,1}^{r_{\nu+1,1}} \ldots c_{\nu+1,p_{\nu+1}}^{r_{\nu+1,p_{\nu+1}}}}{\prod_{s=1}^{n+1} R_{n+m-s}^{(\nu+1,s+1)} \cdot \widehat{R}_{n-s}^{(\nu+1,s+1)}}.$$

Після елементарних перетворень одержимо формулу (8) при $q = \nu+1$. Використовуючи формулу (8) для різниці залишків N-ої вітки, тобто $q = N$, одержимо (7).

Доведемо багатовимірне узагальнення овальної теореми для періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду.

Нехай існують скінчення границі $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(q,1)} = Z^{(q)}$ $(q = \overline{1,N})$. Розглянемо дробово-лінійні відображення: $s^{(q,j)}(\omega) = Z^{(q-1)} + c_{q,j}/\omega$ і $t^{(q,j)}(\omega) = c_{q,j}/(Z^{(q-1)} + \omega)$ $(j = \overline{1,p_q};\ Z^{(0)} = 1)$ та їх композицію $S^{(q)}(\omega) = s^{(q,1)} \circ s^{(q,2)} \circ \ldots \circ s^{(q,p_q)}(\omega)$ і $T^{(q)}(\omega) = t^{(q,1)} \circ t^{(q,2)} \circ \ldots \circ t^{(q,p_q)}(\omega)$ $(q = \overline{1,N})$. Позначимо $X^{(1)}$ – притягувальна нерухома точка дробово-лінійного відображення $S^{(1)}(\omega)$ та $Y^{(q)}$ – відштовхувальні нерухомі точки відображення $T^{(q)}(\omega)$ $(q = \overline{2,N})$.

Теорема 2.1. *Нехай елементи $c_{q,j}$ $(q = \overline{1,N};\ j = \overline{1,p_q})$ $\overrightarrow{p}$-періодичного ГЛД (3) належать овальним областям*

$$\mathcal{O}_q = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - d_q| + |z| \frac{\rho_q^*}{|1 + \overline{\Gamma}^*|} < \frac{\rho_q}{|\Gamma_q|} |d_q| \right\}, \quad q = \overline{1,N} \qquad (9)$$

де $\Gamma_q \in \mathbb{C}$, $\rho_q > 0$, $|\Gamma_q| < \rho_q$ $(q = \overline{1,N})$, $d_q = \Gamma_q (1 + \Gamma_q^*) \left(1 - \dfrac{\rho_q^{*2}}{|1 + \Gamma_q^*|^2}\right)$, $\Gamma_q^* = \sum_{j=1}^q \Gamma_j$, $\rho_q^* = \sum_{j=1}^q \rho_j$, $\rho_q^* < |1 + \Gamma_q^*|$ $(q = \overline{1,N})$,

Тоді

1. *Послідовності залишків $\{R_n^{(q,1)}\}_{n=1}^\infty$ $(q = \overline{1,N})$ цього дробу збігаються. Зокрема, дріб (3) збігається.*
2. *Якщо дробово-лінійні відображення $T^{(q)}(\omega)$ $(q = \overline{2,N})$ – локсодронічного типу, і $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(q,1)} = Z^{(q)}$, то $Z^{(q)} = \begin{cases} X^{(1)}, & \text{якщо } q = 1; \\ -Y^{(q)}, & \text{якщо } 2 \le q \le N; \end{cases}$ $(q = \overline{1,N})$ і $\lim\limits_{\nu\to\infty} F_n = F$, де $F = (Z^{(N)})^{-1}$.*
3. *n-ні підхідні дроби ГЛД (3) належать кругу*

$$K = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{\Gamma_N^*}{|1 + \Gamma_N^*|^2 - \rho_N^{*2}} \right| \le \frac{\rho_N^*}{|1 + \Gamma_N^*|^2 - \rho_N^{*2}} \right\}.$$

Доведення Нехай $\mathcal{B}(\Gamma_q, \rho_q) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \Gamma_q| \le \rho_q\}$, $q = \overline{1,N}$ – задані круги. Покажемо, що $R_n^{(q,j)} \in \mathcal{B}(1 + \Gamma_q^*, \rho_q^*)$ $(q = \overline{1,N};\ j = \overline{1,p_q};\ n \ge 1)$. Очевидно, що $1 + \sum_{j=1}^q \mathcal{B}(\Gamma_j, \rho_j) = \mathcal{B}(1 + \Gamma_q^*, \rho_q^*)$ $(q =$

$\overline{1,N}$) і $0\overline{\in}\mathcal{B}(1+\Gamma_q^*,\rho_q^*)$. Позначимо через C та R відповідно центр та радіус круга $\dfrac{c_{q,j}}{\mathcal{B}(1+\Gamma_q^*,\rho_q^*)}$ відповідно. Умова $\dfrac{c_{q,j}}{\mathcal{B}(1+\Gamma_q^*,\rho_q^*)}\subset\mathcal{B}(\Gamma_q,\rho_q)$ еквівалентна виконанню нерівності: $|\Gamma_q-C|+R\leq\rho_q$, що рівносильно: $\left|\dfrac{c_{q,j}(1+\overline{\Gamma}_q^*)}{|1+\Gamma_q^*|^2-\rho_q^{*2}}-\Gamma_q\right|+\dfrac{|c_{q,j}|\rho_q^*}{|1+\Gamma_q^*|^2-\rho_q^{*2}}\leq\rho_q$. Отже, $R_n^{(q,j)}\neq 0$ ($n\geq 1$; $q=\overline{1,N}$; $j=\overline{1,p_q}$).

Можна показати, використовуючи [14], що $\partial\mathcal{O}_q$ – це овал, який є симетричний відносно прямої $e^{\alpha_q i}\mathbb{R}$, де $\alpha_q=\arg\Gamma_q(1+\Gamma_q^*)$. Точки перетину овалу $\partial\mathcal{O}_q$ з прямою $e^{\alpha_q i}\mathbb{R}$ позначимо $v_{q,1}$ та $v_{q,2}$. Відомо, що

$$\begin{aligned} v_{q,1}&=(|\Gamma_q|-\rho_q)(|1+\Gamma_q^*|-\rho_q^*)e^{\arg\alpha_q},\\ v_{q,2}&=(|\Gamma_q|+\rho_q)(|1+\Gamma_q^*|-\rho_q^*)e^{\arg\alpha_q},\end{aligned}\tag{10}$$

де $v_{q,1}$, $v_{q,2}$ є малою та великою осями овалу $\partial\mathcal{O}_q$ Очевидно, що $\mathcal{B}(0,|v_{1,q}|)\subset\overline{\mathcal{O}}_q\subset\mathcal{B}(0,|v_{2,q}|)$ і $\mathcal{B}(d_q,|v_{2,q}|-|d_q|)\subset\overline{\mathcal{O}}_q\subset\mathcal{B}(d_q,|v_{1,q}|+|d_q|)$.

Доведемо, використовуючи метод математичної індукції по q, що послідовності залишків $\{R_n^{(q,1)}\}_{n=1}^{\infty}$ ($q=\overline{1,N}$) збігаються.

Оскільки $c_{1,j}\in\mathcal{O}_1$, то згідно з овальною теоремою 3.1 [10], послідовність $\{R_n^{(1,1)}\}_{n=1}^{\infty}$ збігається.

Припустимо, що для деякого k послідовності $\{R_n^{(s,1)}\}_{n=1}^{\infty}$ ($2\leq s\leq k$) збігаються.

Використовуючи багатовимірний аналог теореми Стільтьєса-Віталі, доведемо збіжність послідовності $\{R_n^{(k+1,1)}\}_{n=1}^{\infty}$. Побудуємо функціональний дріб, частинними чисельниками якого є комплексні змінні

$$1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{j_k=1}^{j_{k-1}}\frac{z_{j_k,s}}{1},\tag{11}$$

де $j_0=k+1$. Позначимо $\sigma_{k+1}=\sum_{j=1}^{k+1}p_j$ і $z^{(\sigma_{k+1})}=(z_{1,1},z_{1,2},\ldots,z_{1,p_1},\ldots,z_{k+1,1},z_{k+1,2}\ldots;z_{k+1,p_{k+1}})$, $f_n(z^{(\sigma_{k+1})})$ – n-ий підхідний дріб (11) та $R_n^{(k+1,j)}(z^{(\sigma_{k+1})})$ – його залишки ($n\geq 1$; $j=\overline{1,p_{k+1}}$). Зауважимо, що $R_n^{(k+1,1)}(z^{(\sigma_{k+1})})=f_n(z^{(\sigma_{k+1})})$. Визначимо множину

$$\mathcal{O}=\mathcal{O}_1^{p_1}\times\ldots\times\mathcal{O}_{k+1}^{p_{k+1}},$$

де $\mathcal{O}_q^{p_q} = \underbrace{\mathcal{O}_q \times \ldots \times \mathcal{O}_q}_{p_q}$ і $\mathcal{O}_q$ овальні області вигляду (9). Якщо $z_{q,j} \in \mathcal{O}_q$, то $R_n^{(q,j)}(z^{(\sigma_{k+1})}) \in \mathcal{B}(1 + \Gamma_q^*, \rho_q^*)$ $(q = \overline{1, k+1};\ j = \overline{1, p_q})$. Отже, послідовність $\{R_n^{(k+1,1)}(z^{(\sigma_{k+1})})\}_{n=1}^{\infty}$ є рівномірно-обмеженою в області $\mathcal{O}$.

Нехай $\mathfrak{D} = \{z^{(\sigma_{k+1})} \in \mathbb{C}^{\sigma_{k+1}} : |z_k| \le r(k = \overline{1, \sigma_{k+1}})\}$ – замкнений полікруг, що міститься в множині $\mathcal{O}$, де $r = \min\limits_{j=\overline{1,k+1}} \{\frac{1}{4N}; |v_{j,1}|\}$ і $v_{j,1}$– мала вісь овалу $\mathcal{O}_j$. Збіжність функціонального ГЛД на $\mathfrak{D}$ множини $\mathcal{O}$ випливає з узагальнення теореми Worpitsky для ГЛД спеціального вигляду [4].

Отже, функціональний дріб (11) рівномірно збігається на будь-якому компакті множини $\mathcal{O}$. Зокрема, в точці $M \in \mathcal{O}$ з координатами $z_{q,j} = c_{q,j}$ $(q = \overline{1, N}; j = \overline{1, p_q})$.

Знайдемо границі $Z^{(q)}$ послідовностей $\{R_n^{(q,1)}\}_{n=1}^{\infty}$ $(q = \overline{1, N})$. Якщо $q = 1$, то $R_n^{(1,1)}$– n-ий підхідний дріб p_1-періодичного неперервного дробу. Оскільки послідовність $\{R_n^{(1,1)}\}_{n=1}^{\infty}$ збіжна, то дробово-лінійне відображення $S^{(1)}(\omega)$ є локсодронічного або параболічного типу. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(q,1)} = Z^{(1)}$, де $Z^{(1)} = X^{(1)}$ – притягувальна цього відображення. Оскільки $dist(0, \partial\mathcal{O}_1) = |1 + \Gamma_1| - \rho_1 > 0$, то $Z^{(1)} \ne 0$.

Розглянемо залишки 2-ої вітки і запишемо їх у вигляді

$$R_n^{(2,1)} = R_n^{(1,1)} + \frac{c_{2,1}|}{|R_{n-1}^{(1,1)}} + \ldots + \frac{c_{2,s}|}{|R_0^{(1,1)}},$$

де $n = r \cdot p_2 + s$ $(1 \le s \le p_2)$. Оскільки послідовність елементів $c_{2,n}$ є p_2-періодичною послідовністю $(c_{2,n} = c_{2,s})$ і $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(1,1)} = Z^{(1)}$, то $R_n^{(2,1)}$ є n-ий підхідний дріб зворотного p_2-періодичного неперервного дробу.

Оскільки $T^{(2)}(\omega)$ локсодронічного типу, то згідно з пунктом C теореми 4.13 [14] маємо $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(2,1)} = Z^{(2)}$, де $Z^{(2)} = -Y^{(2)}$ і $Y^{(2)}$– відштовхувальна точка дробово-лінійного відображення $T^{(2)}(\omega)$. Оскільки $dist(0, \partial\mathcal{O}_2) = |1 + \Gamma_2^*| - \rho_2^* > 0$, то $Z^{(2)} \ne 0$.

Припустимо, що для деякого ν виконуються співвідношення: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(s,1)} = Z^{(s)}$, де $Z^{(s)} = -Y^{(s)}$ ($Y^{(s)}$– відштовхувальні точки дробово-лінійних відображень $T^{(s)}(\omega)$) і $Z^{(s)} \ne 0$ $(s = \overline{3\nu})$.

Запишемо залишки $\nu+1$ вітки вигляді

$$R_n^{(\nu+1,1)} = R_n^{(\nu,1)} + \frac{c_{\nu+1,1}|}{|R_{n-1}^{(\nu,1)}} + \cdots + \frac{c_{\nu+1,s}|}{|R_0^{(k,1)}},$$

де $n = r\cdot p_{\nu+1}+s$ $(1 \le s \le p_{\nu+1})$. Аналогічно, як і для 2-ої вітки маємо: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(\nu+1,1)} = Z^{(\nu+1)}$, де $Z^{(\nu+1)} = -Y^{(\nu+1)}$ і $Y^{(\nu+1)}$– відштовхувальна точка дробово-лінійного відображення $T^{(\nu+1)}(\omega)$ локсодронічного типу.

Оскільки, $F_n = 1/R_n^{(N,1)}$ і $|R_n^{(N,1)}| > \delta$, де $\delta = |1+\Gamma_N^*| - \rho_N^*$ $(n > 0)$, то послідовність $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається. Більше того, що дробово-лінійні відображення $T^{(q)}(\omega)$ $(q = \overline{2,N})$ – локсодронічного типу, то $\lim\limits_{n\to\infty} F_n = F$ і $F = (Z^{(N)})^{-1}$. Оскільки $R_n^{(N,1)} \in \mathcal{B}(1+\Gamma_N^*, \rho_N^*)$, то $F_n \in K$ $(n > 1)$,

Встановимо оцінки швидкості збіжності періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду.

Теорема 2.2. *Нехай елементи* $c_{q,j}$ $(q = \overline{1,N};\ j = \overline{1,p_q})$ $\overrightarrow{p}$-*періодичного ГЛД (3) належать овальним областям* $\mathcal{O}_q$: $c_{q,j} \in \mathcal{O}_q$ $(q = \overline{1,N})$, *де* $\mathcal{O}_q$ *визначають згідно з формулами (9).*

1. *Якщо виконуються умови:*

$$\rho_q < (|1+\Gamma_q^*| - |\Gamma_q| - \rho_{q-1}^*)/2,$$

де $\rho_0 = 0$, $q = \overline{1,N}$, *то справджуються оцінка швидкості збіжності дробу (3)*

$$|F - F_n| \le L \cdot C_{n+N-1}^{N-1} \cdot \zeta^{n+1} \quad (n \ge 1), \tag{A}$$

де $\zeta = \max\limits_{q=\overline{1,N}}\{\zeta_q\}$, $\zeta_q = \dfrac{\rho_q + |\Gamma_q|}{|1+\Gamma_q^*| - \rho_q^*}$.

2. *Якщо* Γ_q *і* ρ_q $(q = \overline{1,N})$ *задовольняють умови:*

$$\rho_q < (|1+\Gamma_q^*| - |\Gamma_q| - 3\rho_{q-1}^*)/2,$$

де $\rho_0 = 0$ *і* $q = \overline{1,N}$, *то справджується оцінка*

$$|F - F_n| \le L \cdot C_{n+N-1}^{N-1} \cdot \xi^{n+1} \quad (n \ge 1), \tag{B}$$

де $\xi = \max\limits_{q=\overline{1,N}}\{\eta_q\}$, $\xi_q = \dfrac{|\Gamma_q| + \rho_q^* + \rho_{q-1}^*}{|1+\Gamma_q^*| - \rho_q^*}$, $L = \dfrac{M}{(|1+\Gamma_N^*| - \rho_N^*)^2}$, $M = \max\limits_{q=\overline{1,N}}\{|1+\Gamma_q^*| - \rho_q^*\}$;

Доведення Для оцінок швидкості збіжності дробу (3) використаємо формулу (7). Якщо виконуються умови: $c_{q,j} \in \mathcal{O}_q$ $(q = \overline{1,N};\ j = \overline{1,p_q})$, то залишки $R_n^{(q,j)}$ належать відповідним кругам $\mathcal{B}(1+\Gamma_q^*, \rho_q^*)$. Тому, виконуються оцінки: $|R_n^{(q,j)}| \geq |1+\Gamma_q^*| - \rho_q^*$ $(q = \overline{1,N};\ j = \overline{1,p_q})$.

1. Оскільки $c_{q,j} \in \mathcal{O}_q$, то $|c_{q,j}| < |v_{2,q}|$ $(q = \overline{1,N};\ j = \overline{1,p_q})$. Отже, для $j = \overline{1,p_q}$, $1 \leq s \leq n+1$ маємо оцінку

$$\frac{|c_{q,j}|}{|R_{n+m-s}^{(q,j+1)}| \cdot |R_{n-s}^{(q,j+1)}|} \leq \frac{(\rho_q + |\Gamma_q|)(|1+\Gamma_q^*| - \rho_q^*)}{(|1+\Gamma_q^*| - \rho_q^*)^2}.$$

Позначимо $\zeta_q = \dfrac{\rho_q + |\Gamma_q|}{|1+\Gamma_q^*| - \rho_q^*}$ і $A_q = \dfrac{|c_{q,1}|^{k_{q,1}}|c_{q,2}|^{k_{q,2}} \ldots |c_{q,p_q}|^{k_{q,p_q}}}{\prod_{j=1}^{k_q+1} |R_{l_q+m-j}^{(q,j+1)}| \cdot |\widehat{R}_{l_q-j}^{(q,j+1)}|}$. Оскільки $k_{q,1} + \ldots + k_{q,p_q} = k_q$ $(q = \overline{1,N})$, то маємо оцінки: $A_q \leq \zeta_q^{k_q}$ $(k_q \leq n)$ і $A_q \leq (|1+\Gamma_q^*| - \rho_q^*)\zeta^k$ $(k = n+1)$. Враховуючи ці оцінки, маємо

$$|F_{m+n} - F_n| \leq \frac{1}{(|1+\Gamma_N^*| - \rho_N^*)^2} \sum_{k \in J_{n+1}^{(N)}} \zeta_1^{k_1}\zeta_2^{k_2} \ldots \zeta_N^{k_N} \leq L \cdot C_{n+N-1}^{N-1} \cdot \zeta^{n+1}.$$

При $m \to \infty$ одержимо (A).

2. Оскільки $c_{q,j} \in \mathcal{O}_q$ $(q = \overline{1,N};\ j = \overline{1,p_q})$, то враховуючи рекурентні співвідношення (5), одержимо: $\dfrac{c_{q,j}}{R_{n-1}^{(q,j+1)}} \in \mathcal{B}(\Gamma_q, \rho_q^* + \rho_{q-1}^*)$ $(n \geq 1;\ q = \overline{1,N};\ j = \overline{1,p_q})$. Отже, справджуються наступні оцінки $\left|\dfrac{c_{q,j}}{R_{n-1}^{(q,j+1)}}\right| \leq |\Gamma_q| + \rho_q^* + \rho_{q-1}^*$ і $\dfrac{|c_{q,j}|}{|R_{n+m-s}^{(q,j+1)}| \cdot |R_{n-s}^{(q,j+1)}|} \leq \dfrac{|\Gamma_q| + \rho_q^* + \rho_{q-1}^*}{|1+\Gamma_q^*| - \rho_q^*}$. Позначимо $\xi_q = \dfrac{|\Gamma_q| + \rho_q^* + \rho_{q-1}^*}{|1+\Gamma_q^*| - \rho_q^*}$ $(q = \overline{1,N})$. Використовуючи попередню схему доведення, маємо оцінку (B).

Теорему доведено.

Позначимо $\mathcal{W}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1/(4N)\}$ і $\mathcal{W}_q = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1/(4q)\}$ $(q = \overline{2,N})$. Багатовимірні узагальнення теореми Worpitsky'го [4] для періодичних ГЛД (3) формулюються наступним чином:

1. Нехай дріб (3) є 1-періодичним, тобто $\overrightarrow{p} = (1, 1, \ldots, 1)$. Якщо елементи $c_{q,1}$ $(q = \overline{1,N})$ цього дробу задовольняють умови:

$|c_{q,1}| \leq 1/(4N)$ ($q = \overline{1,N}$;), тобто $c_{q,1} \in \mathcal{W}_1$, то цей дріб збігається.

2. Нехай дріб (3) є $\overrightarrow{p}$-періодичним ($p_q \geq 1$; $q = \overline{1,N}$). Якщо елементи $c_{q,j}$ ($q = \overline{1,N}$; $j = \overline{1,p_q}$) такого дробу задовольняють умови: $|c_{q,1}| \leq 1/(4N)$ і $|c_{q,j}| \leq 1/(4q)$ ($q = \overline{1,N}$; $j = \overline{2,p_q}$), тобто $c_{q,1} \in \mathcal{W}_1$ і $c_{q,j} \in \mathcal{W}_q$, то ГЛД (3) збігається.

Приклад 2.1. *Розглянемо (2,1)-періодичний ГЛД з 2 вітками розгалуження вигляду*

$$\cfrac{c_{1,1}}{1+\cfrac{c_{1,2}}{1+\cfrac{c_{1,1}}{1+\cfrac{c_{1,2}}{1+\ddots}}}}+\cfrac{c_{2,1}}{1+\cfrac{c_{1,1}}{1+\cfrac{c_{1,2}}{1+\cfrac{c_{1,1}}{1+\ddots}}}+\cfrac{c_{2,1}}{1+\cfrac{c_{1,1}}{1+\cfrac{c_{1,2}}{1+\ddots}}+\cfrac{c_{2,1}}{1+\ddots}}}$$

Покладемо $\Gamma_1 = 0.15 + 0.15i$ *і* $\rho_1 = 0.25$, $\Gamma_2 = 0.1$ *і* $\rho_2 = 0.12$. *Умови теорем 1 та 2 при цих значеннях виконуються. Крім цього, оскільки великі осі овалів вигляду (9) рівні* $|v_{1,2}| \approx 0.42$ *і* $|v_{2,2}| \approx 0.195$, *то овали* $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ *не є підмножинами кругів Worpitsky'го для (2,1)-періодичного ГЛД (3).*

Задамо елементи $(2,1)$*-періодичного ГЛД:* $c_{1,1} = 0.1e^{\alpha i}$, $c_{1,2} = 0.4e^{\alpha i}$ ($\alpha = \arg\Gamma_1(1+\Gamma_1)$ *і* $\alpha = 0.915$), $c_{2,1} = 0.17$. *У таблиці подано результати обчислень залишків* $R_n^{(q,1)}$ ($q = \overline{1,2}$) *на основі рекурентних формул (5). Обчислимо значення границі послідовності залишків 1-ої вітки* $X_1 = \lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(1,1)}$. *Оскільки* $R_n^{(1,1)}$ – *n-ий підхідний дріб 2-періодичного неперервного дробу, то* $X^{(1)} = (\lambda - 2 * c_{1,2} + \sqrt{\lambda^2 - 4c_{1,2}\cdot c_{1,1}})/2$ ($\lambda = 1 + c_{1,1} + c_{1,2}$) *[14, с. 181]. При заданих елементах дробу маємо:* $X^{(1)} = 1.06991 + 0.0247775i$. *Розглянемо дробово-лінійне відображення* $T^{(2)}(\omega) = c_{2,1}/(X^{(1)} + \omega)$. *Його нерухомі точки знаходимо за формулами* $x = (-X^{(1)} + \sqrt{(-X^{(1)})^2 + 4c_{2,1}})/2$, $y = (-X^{(1)} - \sqrt{(-X^{(1)})^2 + 4c_{2,1}})/2$. *Вони рівні* $x = 0.14 - 0.002i$ *та* $y = -1.21032 - 0.00222i$. *Оскільки* $|k| = \left|\dfrac{y + X^{(1)}}{x + X^{(1)}}\right| = 0.116$, *то дробово-лінійне відображення* $T^{(2)}(\omega)$ – *локсодронічного типу. Отже,* $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(2,1)} = Z^{(2)}$, *де* $Z^{(2)} = -y$, *і значення цієї границі рівне* $1.21032 + 0.0222018i$.

n	$R_n^{(1,1)}$	$R_n^{(2,1)}$
1	1.089+0.044i	1.2597+0.044i
2	1.00415+0.023526i	1.1389+0.0187i
3	1.06999+0.025294i	1.2192+0.0228i
4	1.068853+0.023978i	1.2082+0.0213i
5	1.0699904+0.02478i	1.21056+0.02229i
6	1.069901+0.024753i	1.21028+0.02216i
7	1.0699085+0.024777i	1.21032+0.0222i
8	1.069908+0.024777i	1.210319+0.0222009i
9	1.0699087+0.0247774i	1.21032+0.0222019i
10	1.069908+0.024777i	1.2103202+0.0222017i
11	1.0699087+0.0247774i	1.2103202+0.0222018i
12	1.06990875+0.02477748i	1.210320205+0.02220181352i
13	1.06990875+0.02477748i	1.21032020575+0.02220181376i
14	1.06990875+0.02477748657i	1.21032020578+0.0222018137i
15	1.06990875+0.02477748656 i	1.2103202577+0.02220181337i

3 Висновки

Означено $\overrightarrow{p}$-періодичний гіллястий ланцюговий дріб спеціального вигляду, для нього встановлено формулу різниці підхідних дробів, використовуючи цю формулу доведено оцінки швидкості збіжності цих дробів. Досліджено овальні множини збіжності та встановлено оцінки похибок апроксимації в цих областях.

[1] Антонова Т. М. Багатовимірне узагальнення теореми про параболічні області збіжності неперервних дробів / Т. М. Антонова // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 1999. – 42, №4. – С. 7–12.

[2] Антонова Т. М. Області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду / Т. М. Антонова, Д. І. Боднар // Теорія наближення функцій та її застосування. Праці Ін-ту математики НАН України, 2000. – Т. 31. – С. 19–32.

[3] Антонова Т. М. Про прості кругові множини абсолютної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду /

Т. М. Антонова // Карпат. мат. публікації, 2012. – 4, № 2. – С. 165–174.

[4] Баран О. Є. Аналог ознаки збіжності Ворпіцького для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду / О. Є. Баран // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 1996. – 39, № 2. – С. 35–38.

[5] Баран О. Є. Деякі області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду / О. Є. Баран // Карпатські мат. публікації, 2013. – 5, № 1. – С. 4–13.

[6] Боднар Д. И. Ветвящиеся цепные дроби / Д. И. Боднар – К. : Наук. Думка, 1986. – 176 с.

[7] Боднар Д. І. Оцінки швидкості поточкової та рівномірної збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду / Д. І. Боднар, М. М. Бубняк // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2013. – 56, № 4. – С. 24–32.

[8] Cuyt A. Handbook of Continued Fractions of Special Functions / A. Cuyt, W.B. Jones, V.B. Petersen, B. Verdonk., H. Waadeland – Kluwer Academic Publisher, 2007. – 431 p.

[9] Hillam K.L. A General Convergence Criterion for Continued Fractions $K(a_n/b_n)$ / K.L. Hillam, W.J. Thron // Proc. Amer. Math. Soc, 1965. – 16, – P. 1256–1262.

[10] Jacobsen L. Oval Convergence Regions and Circular Limit Regions for Continued Fractions $K(a_n/1)$ / L. Jacobsen, W.J. Thron // "Analytic Theory of Continued Fractions"II, Lecture Notes in Mathematics 1199 (W.J. Thron ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1986. – P. 90–126.

[11] Jones W.B Continued Fractions: Analytic Theory and Applications, Encyclopedia of Mathematics and its Applications / W.B. Jones, W.J. Thron //Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1980. – 428 p.

[12] Lane R.E. The Convergence and Values of Periodic Continued Fractions / R.E. Lane // Bull. Amer. Math. Soc., 1945. – 51. – p. 246–250.

[13] Lorentzen L. Continued fractions with applications / L. Lorentzen, H. Waadeland. // Amsterdam : Elsevier Publishers B. V., 1992. – 606 p.

[14] Lorentzen L., Continued Fractions / L. Lorentzen, H. Waadeland // Atlantis Press / World Scientific, Amsterdam-Paris, 2008. – 308 p.

[15] Perron O. Die Lehre von den Kettenbruchen. / O. Perron // Stuttgard: B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1957. – Band 2. – 322 p.

[16] Waadeland H. On Continued Fractions $K(a_n/1)$, where all a_n are lying on a Cartesian Oval / H. Waadeland // Roucky Mountain Journal of Mathematics, 1992 – 22(3) – P. 1123–1138.

[17] Wall H.S. Analytic Theory of Continued Fractions / H.S. Wall // Van Nostrand. – New York, 1948. – 433 p.