Доклады
АКАДЕМИИ НАУК УКРАИНЫ
Математика, естествознание, технические науки

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.956.4

О. Г. ВОЗНЯК, С. Д. ІВАСИШЕН

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ З ВИРОДЖЕННЯМ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

(Представлено академіком НАН України)
Ю. Л. Далецьким)

Задача Коші та крайові задачі для рівномірно параболічних систем у даний час досліджені досить повно, що не можна сказати про параболічні рівняння і системи рівнянь з різними виродженнями. Нижче наводяться результати дослідження задачі Коші для параболічних систем з виродженнями на початковій гіперплощині. З попередніх робіт найближчими за об'єктом дослідження і результатами є роботи [1—3].

1. Нехай n, N і b — задані натуральні числа, $q \equiv \dfrac{2b}{2b-1}$, T — задане додатне число, $\Pi_H \equiv \{(t, x) \mid t \in H,\ x \in \mathbb{R}^n\}$, I — одинична матриця порядку N, $\mathbb{C}_{hp}$ — сукупність усіх матриць розміром $h \times p$, елементами яких є комплексні числа.

Розглянемо систему N рівнянь з частинними похідними

$$\left(\alpha(t)\, ID_t^1 - \beta(t) \sum_{0<|k|\leqslant 2b} a_k(t, x)\, D_x^k - \frac{a_0(t, x)}{\delta(t)}\right) u(t, x) =$$
$$= f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

де коефіцієнти $a_k : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}_{NN}$, $|k| \leqslant 2b$, такі, що диференціальний вираз $ID_t^1 - \sum\limits_{|k|\leqslant 2b} a_k D_x^k$ є рівномірно параболічним за Петровським у шарі $\Pi_{[0,T]}$; функції $\alpha : [0, T] \to \mathbb{R}$, $\beta : [0, T] \to \mathbb{R}$ і $\delta : [0, T] \to \mathbb{R}$ неперервні, причому функції β і δ монотонно неспадні і такі, що

$$\alpha(0)\, \beta(0)\, \delta(0) = 0, \quad \forall t \in (0, T] : \alpha(t) > 0, \quad \beta(t) > 0, \quad \delta(t) > 0.$$

Припускатимемо, крім того, що функції a_k, $|k| \leqslant 2b$, у шарі $\Pi_{[0,T]}$ обмежені, задовольняють рівномірну умову Гельдера за x з показником $\lambda \in (0, 1)$ і неперервні за t, причому неперервність функцій a_k, $|k| = 2b$, рівномірна за $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Фундаментальною матрицею розв'язків задачі Коші для системи (1) називатимемо функціональну квадратну матрицю порядку N $Z(t, x; \tau, \xi)$, $0 < \tau < t \leqslant T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, таку, що функція

$$u(t, x) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi, \quad (t, x) \in \Pi_{(\tau, T]}$$

є розв'язком однорідної системи (1), який задовольняє умову

$$u(t, x)|_{t=\tau} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

для будь-якого числа $\tau \in (0, T)$ і довільної неперервної та обмеженої функції $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}_{N1}$.

Одним з основних результатів цієї роботи є

Теорема 1. Нехай виконуються всі припущення з пункту 1. Тоді існує фундаментальна матриця розв'язків $Z(t, x; \tau, \xi)$, $0 < \tau < t \leqslant T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, задачі Коші для системи (1), для якої правильні оцінки

$$|D_x^k Z(t, x; \tau, \xi)| \leqslant C (B(t, \tau))^{-\frac{n+|k|}{2b}} E_c^\gamma (t, \tau, x - \xi),$$

$$0 < \tau < t \leqslant T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad |k| \leqslant 2b; \tag{2}$$

$$|D_x^k Z(t, x; \tau, \xi) - D_y^k Z(t, y; \tau, \xi)| \leqslant C |x - y|^\lambda \times$$

$$\times (B(t, \tau))^{-\frac{n+|k|+\lambda}{2b}} (E_c^\gamma (t, \tau, x - \xi) + E_c^\gamma (t, \tau, y - \xi)),$$

$$0 < \tau < t \leqslant T, \quad \{x, y, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad |k| \leqslant 2b, \tag{3}$$

де C, c і γ — деякі додатні сталі, $B(t, \tau) \equiv \int\limits_\tau^t \frac{\beta(\theta)\, d\theta}{\alpha(\theta)}$, $E_c^\gamma (t, \tau, x) \equiv$
$\equiv E_c(t, \tau, x)\, E^\gamma (t, \tau) \equiv \exp \{-c (B(t, \tau))^{1-q} |x|^q\} \exp \left\{\gamma \int\limits_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)\, \delta(\theta)}\right\}$.

Як для рівномірно параболічних систем [4, 5], побудова матриці Z здійснюється за допомогою методу Леві, згідно з яким вона відшукується у вигляді

$$Z(t, x; \tau, \xi) = Z_0(t, x; \tau, \xi; \xi) +$$

$$+ \int\limits_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_0(t, x; \theta, y; y)(\theta, y; \tau, \xi)\, dy,$$

$$0 < \tau < t \leqslant T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Тут, на відміну від випадку систем без виродження, матриця $Z_0(t, x; \tau, \xi; y)$, $0 < \tau < t \leqslant T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, є фундаментальною матрицею розв'язків задачі Коші для системи

$$\left(\alpha(t)\, I D_t^1 - \beta(t) \sum_{|k|=2b} a_k(t, y)\, D_x^k - \frac{1}{\delta(t)}\, a_0(t, y)\right) u(t, x) = 0,$$

$$(t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

З а у в а ж е н н я 1. Як стверджується в теоремі 1, у загальному випадку для матриці Z справджуються нерівності (2) і (3) з сталою $\gamma > 0$. Для деяких систем вони можуть виконуватись з $\gamma \leqslant 0$. Так, наприклад, це має місце для системи

$$\left(\alpha(t)\, I D_t^1 - \beta(t) \sum_{0 < |k| \leqslant 2b} a_k(t, x)\, D_x^k - \frac{a_0(t, x) - p}{\delta(t)}\right) u(t, x) =$$

$$= f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \tag{4}$$

для коефіцієнтів якої виконуються всі припущення з пункту 1, а комплексний параметр p такий, що $\operatorname{Re} p \geqslant \gamma$, де γ — стала з оцінок (2) і (3) для системи (1). Тут використовується формула

$$Z_p(t, x; \tau, \xi) = E^{-p}(t, \tau)\, Z(t, x; \tau, \xi), \quad 0 < \tau < t \leqslant T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

де Z і Z_p — фундаментальні матриці розв'язків задачі Коші відповідно для систем (1) і (4).

З а у в а ж е н н я 2. Крім властивостей, зазначених у теоремі 1, встановлено і деякі інші властивості матриці Z, аналогічні відповідним властивостям для систем без виродження [4, 5]. При цьому істотно розрізняються випадки слабкого (інтеграл $\int_0^T \frac{d\theta}{\alpha(\theta)\delta(\theta)}$ збігається) і сильного (цей інтеграл розбігається) вироджень.

Зауваження 3. Властивості фундаментальної матриці розв'язків дозволяють дослідити коректну розв'язність системи з початковою умовою

$$u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

у випадку слабкого виродження і без початкової умови, якщо має місце сильне виродження. Класи коректності при цьому складаються з функцій, які можуть зростати при $|x| \to \infty$ не швидше, ніж функція $\exp\{k(t, a)|x|^q\}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $k(t, a) \equiv c_0 a (c_0^{2b-1} - a^{2b-1}(T - B(T, t)))^{1-q}$, $0 \leqslant t \leqslant T$, де c_0 — фіксоване число з проміжку $(0, c)$, а число a таке, що $0 \leqslant a < c_0 T^{1-q}$. Тут c — стала з оцінок (2) і (3).

Відзначимо, що функція k і функція $k_0(t, a) \equiv c_0 a (c_0^{2b-1} - a^{2b-1} t)^{1-q}$, $0 \leqslant t < \left(\frac{c_0}{a}\right)^{2b-1}$, яка використовувалась у випадку параболічних систем без виродження [4, 5], зв'язані рівністю

$$k(t, a) = k_0(B(t, \tau), \quad k(\tau, a)), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T.$$

Користуватимемось позначеннями $K_R \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| \leqslant R\}$, $\Psi_\nu(t, x) \equiv \equiv \exp\{\nu k(t, a)|x|^q\}$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\nu = -1, 1$, та нерівністю

$$E_{c_0}(t, \tau, x - \xi)\, \Psi_1(\tau, \xi) \leqslant \Psi_1(t, x), \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

3. У випадку слабкого виродження оцінки (2) і (3) мають місце також для $\tau = 0$ і можна розглядати задачу Коші для системи (1) з початковою умовою (5) у звичайній постановці. Наведемо одну з теорем про коректну розв'язність такої задачі.

Теорема 2. Нехай $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}_{N1}$ — неперервна функція, для якої

$$\|\varphi\|^{k(0,a)} \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|\varphi(x)|\, \Psi_{-1}(0, x)) < \infty,$$

а функція $f: \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}_{N1}$ — неперервна і задовольняє умови

$$\forall R > 0 \ \exists L > 0 \exists \lambda \in (0, 1] \ \forall \tau \in (0, T] \ \forall \{x, \xi\} \subset K_R: |f(\tau, x) - \\ - f(\tau, \xi)| \leqslant L |x - \xi|^\lambda,$$
$$\|f\|^k \equiv \sup_{(t,x) \in \Pi_{(0,T]}} (|f(t, x)|\, \Psi_{-1}(t, x)) < \infty. \tag{7}$$

Тоді формулою

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi + \\ + \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi)\, f(\tau, \xi)\, d\xi, \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{8}$$

визначається єдиний розв'язок задачі (1), (5), для якого виконуються нерівності

$$|D_x^k u(t, x)| \leqslant C(\|\varphi\|^{k(0,a)} (B(t, 0))^{-\frac{|k|}{2b}} + \|f\|^k \Phi_{|k|}(t))\, \Psi_1(t, x), \\ (t, x) \in \Pi_{(0,T)}, \quad |k| < 2b, \tag{9}$$

де $\Phi_{|k|}(t) \equiv \int_0^t (B(t, \tau))^{-\frac{|k|}{2b}} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}$.

Якщо умову (7) замінити умовою

$$F(t) \equiv \int_0^t (B(t, \tau))^{\frac{2b-1}{2b}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|f(\tau, x)| \Psi_{-1}(\tau, x)) \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} < \infty, \quad t \in (0, T],$$

то для розв'язку u справджуються нерівності (9), в яких замість $\|f\|^k \Phi_{|k|}(t)$ стоїть $F(t)$.

4. Якщо має місце сильне виродження, то початкову умову (5) задовольнити, взагалі кажучи, не можна. У наступній теоремі наводяться умови, за яких існує єдиний розв'язок сильно виродженої системи (1) без початкових даних.

Теорема 3. Нехай функція $f : \Pi_{(0, T]} \to \mathbb{C}_{N1}$ неперервна і задовольняє такі умови:

$$\forall R > 0 \ \exists L > 0 \ \exists \lambda \in (0, 1] \ \forall t \in (0, T] \ \forall \{x, \xi\} \subset K_R:$$

$$: |f(t, x) - f(t, \xi)| \leqslant L \eta(t) |x - \xi|^{\lambda} E^{-\gamma}(T, t),$$

$$|f(t, x)| \leqslant F \eta(t) E^{-\gamma}(T, t) \Psi_1(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]},$$

де $F > 0$, γ — стала з оцінки (2), а функція $\eta : (0, T] \to (0, \infty)$ така, що $\int_0^T \frac{\eta(t)}{\alpha(t)} dt < \infty$. Тоді система (1) має єдиний розв'язок

$$u(t, x) = \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{10}$$

у класі функцій $u : \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}_{N1}$ з такою властивістю: існують стала $C > 0$ і функція $\varepsilon : (0, T] \to (0, \infty)$ такі, що $(\varepsilon(t) \to 0, \ t \to 0$, і

$$|u(t, x)| \leqslant C \varepsilon(t) E^{-\gamma}(T, t) \Psi_1(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{11}$$

Зауваження 4. У більш широкому класі функцій, ніж клас, який визначається нерівністю (11), відповідна системі (1) однорідна система може мати нетривіальні розв'язки. Розглянемо, наприклад, рівняння

$$\left(\alpha(t) D_t^1 - \beta(t) D_x^2 + \frac{1}{\delta(t)}\right) u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi^1_{(0,T]} \equiv (0, T] \times \mathbb{R},$$

припускаючи, що інтеграли $\int_0^T \frac{d\tau}{\alpha(\tau)\,\delta(\tau)}$ і $\int_0^T \frac{\beta(\tau)\, d\tau}{\alpha(\tau)}$ розбігаються. Фундаментальним розв'язком задачі Коші для цього рівняння є функція

$$Z(t, x; \tau, \xi) \equiv \frac{1}{2\sqrt{\pi B(t, \tau)}} E^{-1}_{\frac{1}{4}}(t, \tau, x - \xi),$$

$$0 < \tau < t \leqslant T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R},$$

а розв'язками — функція $u_1(t, x) \equiv E^1(T, t)$, $(t, x) \in \Pi^1_{(0,T]}$, а також функція $u_2(t, x) \equiv E^{\frac{1}{2}}(T, t) \exp\left\{\frac{x}{\sqrt{2}}\right\}$, $(t, x) \in \Pi^1_{(0,T]}$, якщо $\beta(t) = \delta(t) = 1$, $t \in (0, T]$. Функції u_1 і u_2 не належать до класу, що визначається нерівністю (11).

Доведення теорем 2 і 3 грунтуються на дослідженні властивостей потенціалів (8) і (10), при цьому використовуються нерівності (2) і (6).

Робота частково фінансована фондом фундаментальних досліджень Державного комітету України з питань науки та технологій.

1. *Калашников А. С.* О растущих решениях линейных уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Мат. заметки.— 1968.— 3, № 2.— С. 171—178.
2. *Калашников А. С.* Задача без начальных условий в классах растущих функций для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка // Вестн. МГУ. Сер. матем., механ.— 1971.— № 2, 3.— С. 42—48, 3—9.
3. *Глушак А. В., Шмулевич С. Д.* О некоторых коректных задачах для параболических уравнений высокого порядка, вырождающихся по временной переменной // Дифференц. уравнения.— 1986.— 22, № 6.— С. 1065—1068.
4. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы.— М. : Наука, 1964.— 443 с.
5. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\overrightarrow{2b}$-Параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу.— Киев, 1968.— № 1.— С. 3—175.

Інститут прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, Львів

Надійшло 22.10.93

Строятся и исследуются фундаментальные матрицы решений задачи Коши для параболических систем с вырождениями на начальной гиперплоскости. С их помощью устанавливается корректная разрешимость таких систем с обычным начальным условием в случае слабого вырождения и без начальных данных, если вырождение сильно.

The fundamental matrices of the solutions of the Cauchy problem for the parabolic systems with the degenerations on the initial hyperplane are constructed and investigated. The correct solvability of such systems with ordinary initial condition in the case of the weak degeneration and without initial data if degeneration is strong is determined with their help.

UDC 517.929

I. I. MALITSKIY

ON GENERALIZED TAYLOR SERIES FOR SOME CLASSES OF FUNCTIONS

(Presented by Academician of the NAS of Ukraine V. L. Rvachev))

V. A. Rvachev in [1] has formulated three problems on existence of generalized Taylor series (GTS) fon non-quasianalytic classes $\mathbf{H}(\mathbf{M})$ of functions $\varphi\in C^{(\infty)}(I)$ such that

$$\| \varphi^{(n)} \|_{C(I)} \leqslant C(\varphi) \cdot M_n, \quad n=0, 1, 2, \ldots, \quad I=[-1; 1],$$

where $M=\{M_n : M_n>0;\ n=0, 1, 2, \ldots\}$.

We state these problems.

Problems 1—3. A class $\mathbf{H}(\mathbf{M})$ is given. To find points $x_{n,k}$, $n=0$, 1, 2, ... ; $k\in N_n$, where N_n — some finite sets of integers, so that

a) if $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{H}(\mathbf{M})$ and $\varphi_1^{(n)}(x_{n,k}) = \varphi_2^{(n)}(x_{n,k})$,

then $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$;

b) there exist (unique according to condition a)) functions $\varphi_{n,k} \in \mathbf{H}(\mathbf{M})$ such that $\varphi_{r,k}^{(n)}(x_{m,s}) = \delta_n^m \cdot \delta_k^s$, where $\delta_n^m=0$, $n\neq m$; $\delta_n^n=1$;

c) any function $\varphi \in \mathbf{H}(\mathbf{M})$ can be expanded into series (GTS)

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k\in N_n} \varphi^{(n)}(x_{n,k}) \cdot \varphi_{n,k}(x), \tag{1}$$

where the series in right-hand side of (1) and series obtained from it