УДК 517.52

Д. І. Боднар[1], Р. А. Заторський[2]

УЗАГАЛЬНЕННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ. I

Побудовано новий алгебраїчний об'єкт – рекурентні дроби n-го порядку, які є n-вимірними узагальненнями неперервних дробів. Для зображення і дослідження таких дробів використано парадетермінанти і трикутні матриці.

На сьогодні відомі різні підходи до узагальнення обчислень раціональних наближень ланцюгових дробів [1–3, 6]. Історично першим таким підходом є матричний (Ойлер, Якобі, Пуанкаре, Брун, Перрон, Бернштейн, Пустильніков). Інший підхід базується на лінійних однорідних формах (Діріхле, Ерміт, Клейн, Мінковський, Вороний, Скубенко, Арнольд). Ряд алгоритмів було запропоновано також наступними аналітиками: Гурвіцем та Секерешем (на основі узагальнень дробів Фарея), Скоробагатьком (гіллясті ланцюгові дроби), Сявавком (інтегральні ланцюгові дроби) тощо.

Цікаве узагальнення ланцюгових дробів запропонував Фюрстенау [7] ще в 1874 році. Пізніше деякі достатні умови збіжності раціональних наближень дробів Фюрстенау дослідив Круковський [5]. Проте, незважаючи на природність і простоту цього узагальнення, воно залишилось непоміченим або забулось.

Важливими вимогами до узагальнення неперервних дробів є:

- побудова зручного в користуванні алгебраїчного об'єкту, зображення якого нагадувало б зображення неперервних дробів, дозволяло би природно ввести поняття їх порядку та виділити клас періодичних об'єктів, які б узагальнювали періодичні неперервні дроби;
- алгоритм обчислення значень раціональних вкорочень цих математичних об'єктів повинен бути простим в реалізації та бути ефективним;
- за аналогією з періодичними ланцюговими дробами довільні періодичні алгебраїчні об'єкти вищих порядків повинні слугувати зображеннями деяких алгебраїчних ірраціональностей вищих порядків.

Зображення, яким користувався для свого узагальнення дробів Фюрстенау, не є зручним для роботи з такими дробами. Пропонуємо для дробів Фюрстенау нове зображення за допомогою параперманентів трикутних матриць, яке не тільки є більш наочним, а й дозволяє підключити до дослідження цих дробів апарат числення трикутних матриць [4]. Крім того, цей підхід дозволяє природно ввести поняття порядку дробу і періодичного дробу та показати, що періодичні дроби вищих порядків зображують ірраціональності вищих порядків.

1. Допоміжні поняття та твердження. Нагадаємо деякі відомості з [4] про параперманенти трикутних матриць. Нехай задано деяке поле K.

Означення 1. Трикутну таблицю елементів із поля K вигляду

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \dots & \dots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\|_n \qquad (1)$$

називають *трикутною матрицею*, а число n – її порядком.

Кожному елементу a_{ij} матриці (1) поставимо у відповідність $i-j+1$ елементів a_{ik}, $k = j,\dots,i$, які називають *похідними елементами* матриці, породженими ключовим елементом a_{ij}. Добуток всіх похідних елементів, породжених елементом a_{ij}, позначають через $\{a_{ij}\}$ і називають *факторіальним добутком ключового елемента* a_{ij}, тобто $\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^{i} a_{ik}$.

Означення 2. Набір елементів матриці (1) називають *нормальним набором ключових елементів* цієї матриці, якщо вони породжують множину похідних елементів потужності n, жодні два з яких не лежать в одному стовпці цієї матриці.

Через $\mathcal{P}(n)$ позначимо множину всіх упорядкованих розбиттів натурального числа n у суму натуральних доданків. Відомо, що $|\mathcal{P}(n)| = 2^{n-1}$. Між нормальними наборами ключових елементів матриці (1) і упорядкованими розбиттями із множини $\mathcal{P}(n)$ існує взаємно однозначна відповідність:

$$(n_1, n_2, \ldots, n_r) \leftrightarrow (a_{N_1,N_0+1}, a_{N_2,N_1+1}, \ldots, a_{N_r,N_{r-1}+1}),$$

де $N_0 = 0$, $N_s = \sum_{i=1}^{s} n_i$, $s = 1, 2, \ldots, r$.

Означення 3. *Парапермантентом* трикутної матриці (1) називають елемент

$$\operatorname{pper}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_n = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)\in\mathcal{P}(n)} \prod_{s=1}^{r} \{a_{i(s),j(s)}\}$$

поля K, де $a_{i(s),j(s)}$ – ключовий елемент, який відповідає s-й компоненті розбиття $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$.

Означення 4. Кожному елементу a_{ij} трикутної матриці A, заданої формулою (1), поставимо у відповідність трикутну матрицю

$$R_{ij}(A) = \left\| \begin{matrix} a_{jj} & & & \\ a_{j+1,j} & a_{j+1,j+1} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{ii} \end{matrix} \right\|_{i-j+1},$$

яку назвемо *рогом заданої трикутної матриці.*

Вважатимемо, що $\operatorname{pper}(R_{01}(A)) = \operatorname{pper}(R_{n,n+1}(A)) = 1$.

Параперманенти можна розкладати за елементами першого стовпця або останнього рядка трикутної матриці відповідно за формулами:

$$\operatorname{pper}(A) = \sum_{r=1}^{n} \{a_{r1}\} \cdot \operatorname{pper}(R_{n,r+1}) = \sum_{s=1}^{n} \{a_{ns}\} \cdot \operatorname{pper}(R_{s-1,1}).$$

2. Означення рекурентних дробів.

Означення 5. *Рекурентним дробом* n-го порядку називаємо трикутну матрицю

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|ccccccc} a_{11} & & & & & & & \\ \frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} & & & & & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & & & & & \\ \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n-2,n-1}} & \frac{a_{n-2,n-1}}{a_{n-3,n-1}} & \cdots & a_{1,n-1} & & & & \\ \frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n}} & \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-2,n}} & \cdots & \frac{a_{2,n}}{a_{1,n}} & a_{1,n} & & & \\ 0 & \frac{a_{n,n+1}}{a_{n-1,n+1}} & \cdots & \frac{a_{3,n+1}}{a_{2,n+1}} & \frac{a_{2,n+1}}{a_{1,n+1}} & a_{1,n+1} & & \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{a_{4,n+2}}{a_{3,n+2}} & \frac{a_{3,n+2}}{a_{2,n+2}} & \frac{a_{2,n+2}}{a_{1,n+2}} & a_{1,n+2} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{array}\right]_{\infty}, \qquad (2)$$

де a_{ij} – натуральні числа.

Означення 6. m*-м раціональним вкороченням дробу* α називаємо раціональне число

$$\alpha_m = \frac{P_m}{Q_m}, \tag{3}$$

де P_m, Q_m – параперманенти відповідних трикутних матриць:

$$P_m = \left[\begin{array}{cccccccc}
a_{11} & & & & & & & \\
\frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} & & & & & & \\
\cdots & \cdots & \ddots & & & & & \\
\frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n}} & \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-2,n}} & \cdots & a_{1,n} & & & & \\
0 & \frac{a_{n,n+1}}{a_{n-1,n+1}} & \cdots & \frac{a_{2,n+1}}{a_{1,n+1}} & a_{1,n+1} & & & \\
0 & 0 & \cdots & \frac{a_{3,n+2}}{a_{2,n+2}} & \frac{a_{2,n+2}}{a_{1,n+2}} & a_{1,n+2} & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{a_{n,m}}{a_{n-1,m}} & \frac{a_{n-1,m}}{a_{n-2,m}} & \cdots & a_{1,m}
\end{array}\right]_m, \tag{4}$$

$$Q_m = \left[\begin{array}{cccccccc}
a_{12} & & & & & & & \\
\frac{a_{23}}{a_{13}} & a_{13} & & & & & & \\
\cdots & \cdots & \ddots & & & & & \\
\frac{a_{n-1,n}}{a_{n-2,n}} & \frac{a_{n-2,n}}{a_{n-3,n}} & \cdots & a_{1,n} & & & & \\
\frac{a_{n,n+1}}{a_{n-1,n+1}} & \frac{a_{n-1,n+1}}{a_{n-2,n+1}} & \cdots & \frac{a_{2,n+1}}{a_{1,n+1}} & a_{1,n+1} & & & \\
0 & \frac{a_{n,n+2}}{a_{n-1,n+2}} & \cdots & \frac{a_{3,n+2}}{a_{2,n+2}} & \frac{a_{2,n+2}}{a_{1,n+2}} & a_{1,n+2} & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{a_{n,m}}{a_{n-1,m}} & \frac{a_{n-1,m}}{a_{n-2,m}} & \cdots & a_{1,m}
\end{array}\right]_{m-1}. \tag{5}$$

Відношення цих параперманентів будемо позначати через

$$\frac{P_m}{Q_m} = \left[\begin{array}{c|ccccccc}
a_{11} & & & & & & & \\
\frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} & & & & & & \\
\cdots & \cdots & \ddots & & & & & \\
\frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n}} & \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-2,n}} & \cdots & a_{1,n} & & & & \\
0 & \frac{a_{n,n+1}}{a_{n-1,n+1}} & \cdots & \frac{a_{2,n+1}}{a_{1,n+1}} & a_{1,n+1} & & & \\
0 & 0 & \cdots & \frac{a_{3,n+2}}{a_{2,n+2}} & \frac{a_{2,n+2}}{a_{1,n+2}} & a_{1,n+1} & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{a_{n,m}}{a_{n-1,m}} & \frac{a_{n-1,m}}{a_{n-2,m}} & \cdots & a_{1,m}
\end{array}\right]_m.$$

Якщо границя $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{P_m}{Q_m}$ існує, то будемо називати її значенням рекурентного дробу α. Розкладаючи параперманенти (4), (5) за елементами останнього рядка, отримаємо лінійні рекурентні співвідношення n-го порядку

$$P_m = a_{1m}P_{m-1} + a_{2m}P_{m-2} + \ldots + a_{nm}P_{m-n}, \qquad m = 1,2,\ldots,$$

$$Q_m = a_{1m}Q_{m-1} + a_{2m}Q_{m-2} + \ldots + a_{nm}Q_{m-n}, \qquad m = 1,2,\ldots,$$

де

$$P_i = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 0, & i < 0, \end{cases} \qquad Q_i = \begin{cases} 1, & i = 1-n, \\ 0, & 2-n \le i \le 0, \end{cases} \qquad a_{n1} = 1,$$

які дають ефективний алгоритм обчислення значень раціональних вкорочень (3) рекурентних дробів n-го порядку (2). Звідси випливає, що рекурентний дріб другого порядку при $a_{1i} = q_i > 0$, $a_{2i} = p_i$, має вигляд

$$\left[\begin{array}{l|llllll} q_1 & & & & & & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & & \\ 0 & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & & & \\ 0 & 0 & \frac{p_4}{q_4} & q_4 & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q_m & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots \end{array}\right]_\infty$$

і є іншим зображенням неперервного дробу [8, 9]

$$q_1 + \mathop{\mathrm{K}}_{m=2}^{\infty} \frac{p_m}{q_m}. \tag{6}$$

Означення 7. Рекурентний дріб n-го порядку (2) назвемо *k-періодичним*, якщо $a_{i,rk+j} = a_{i,j}$, $i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,k$.

Означення 8. Два рекурентні дроби n-го порядку назвемо *однаковими*, якщо для всіх $m = 1,2,\ldots$ m-ті раціональні вкорочення обох дробів є однаковими.

Означення 9. Рекурентний дріб n-го порядку (2) назвемо *звичайним рекурентним дробом*, якщо виконуються рівності

$$a_{nn} = a_{n,n+1} = a_{n,n+2} = \ldots = 1.$$

3. Властивості рекурентних дробів. Нехай задано рекурентний дріб

$$\alpha = \left[\begin{array}{l|llllllllll} q_1 & & & & & & & & & & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & & & & & & \\ \frac{r_3}{p_3} & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & & & & & & & \\ 0 & \frac{r_4}{p_4} & \frac{p_4}{q_4} & q_4 & & & & & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q_{n-2} & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} & q_{n-1} & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{s\cdot r_n}{s\cdot p_n} & \frac{s\cdot p_n}{s\cdot q_n} & s\cdot q_n & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{s\cdot r_{n+1}}{s\cdot p_{n+1}} & \frac{s\cdot p_{n+1}}{q_{n+1}} & q_{n+1} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \frac{s\cdot r_{n+2}}{p_{n+2}} & \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} & q_{n+2} & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots \end{array}\right]_\infty.$$

Теорема 1. *Для кожного рекурентного дробу k-го порядку існує рівний йому звичайний рекурентний дріб k-го порядку.*

Д о в е д е н н я цієї теореми проілюструємо при $k = 3$ та $k = 4$. (У загальному випадку доведення аналогічне.) Перш за все, зазначимо, що значення параметра s не впливає на значення рекурентного дробу третього порядку, оскільки цей рекурентний дріб розглядається як формальне відношення параперманентів двох нескінченних трикутних матриць, в якому s скорочується. Отже, значення параметра s згідно з описаною процедурою можна вибрати так, щоб виконувалась рівність $sr_n = 1$. Причому, здійснивши послідовно цю процедуру для елементів $r_3, r_4, \dots, r_k$ рекурентного дробу, знайдемо значення відповідних параметрів $s_3, s_4, \dots, s_k$. Для цього достатньо послідовно розв'язати рівняння

$$s_3 r_3 = s_3 s_4 r_4 = s_3 s_4 s_5 r_5 = s_4 s_5 s_6 r_6 = s_5 s_6 s_7 r_7 = \dots = s_{k-2} s_{k-1} s_k r_k = 1$$

відносно змінних s_3, s_4, $\dots s_k$:

$$s_{3t} = \frac{r_5 r_8 \cdot \ldots \cdot r_{3t-1}}{r_3 r_6 \cdot \ldots \cdot r_{3t}}, \quad s_{3t+1} = \frac{r_3 r_6 \cdot \ldots \cdot r_{3t}}{r_4 r_7 \cdot \ldots \cdot r_{3t+1}}, \quad s_{3t+2} = \frac{r_4 r_7 \cdot \ldots \cdot r_{3t-2}}{r_5 r_8 \cdot \ldots \cdot r_{3t-1}},$$
$$t = 1, 2, \dots .$$

При зведенні рекурентних дробів 4-го порядку до звичайних рекурентних дробів 4-го порядку необхідно використати такі рівності:

$$t_{4k} = \frac{s_7 \cdot \ldots \cdot s_{4k-1}}{s_4 s_8 \cdot \ldots \cdot s_{4k}}, \qquad t_{4k+1} = \frac{s_4 s_8 \cdot \ldots \cdot s_{4k}}{s_5 s_9 \cdot \ldots \cdot s_{4k+1}},$$

$$t_{4k+2} = \frac{s_5 s_9 \cdot \ldots \cdot s_{4k+1}}{s_6 s_{10} \cdot \ldots \cdot s_{4k+2}}, \qquad t_{4k+3} = \frac{s_6 s_{10} \cdot \ldots \cdot s_{4k+2}}{s_7 \cdot \ldots \cdot s_{4k+3}}, \qquad k = 1, 2, \dots . \qquad \Diamond$$

Теорема 2. *Якщо для m-го раціонального вкорочення 1-періодичного рекурентного дробу другого порядку*

$$\left[\begin{array}{c|ccccc} a_1 & & & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & & \\ 0 & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{a_2}{a_1} & a_1 \end{array}\right]_m \tag{7}$$

існує скінченна ненульова границя при $m \to \infty$, то його значення є дійсним коренем квадратного рівняння $x^2 = a_1 x + a_2$.

Д о в е д е н н я. Твердження цієї теореми одразу випливає із того, що неперервні дроби (6) при $q_1 = q_2 = \dots = a_1$, $p_2 = p_3 = \dots = a_2$ є іншим зображенням рекурентного дробу (7). $\Diamond$

1-періодичний рекурентний дріб третього порядку має вигляд

$$\left[\begin{array}{c|ccccc} a_1 & & & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & & \\ \frac{a_3}{a_2} & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & \\ 0 & \frac{a_3}{a_2} & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ 0 & 0 & \frac{a_3}{a_2} & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{array}\right]_\infty . \tag{8}$$

Теорема 3. *Якщо для* m*-го раціонального вкорочення 1-періодичного рекурентного дробу третього порядку* (8) *існує скінченна ненульова границя при* $m \to \infty$, *то такий рекурентний дріб 3-го порядку є зображенням дійсного кореня кубічного рівняння*

$$x^3 = a_1 x^2 + a_2 x + a_3 . \tag{9}$$

Д о в е д е н н я. Розклавши параперманент, який є чисельником m-го раціонального вкорочення, за елементами першого стовпця, отримаємо рівність

$$P_m = a_1 P_{m-1} + a_2 P_{m-2} + a_3 P_{m-3} .$$

Оскільки $Q_m = P_{m-1}$, $m = 1, 2, \ldots$, то маємо

$$\frac{P_m}{Q_m} = a_1 + \frac{a_2}{\dfrac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}} + \frac{a_3}{\dfrac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \cdot \dfrac{P_{m-2}}{Q_{m-2}}} . \tag{10}$$

Нехай $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{P_m}{Q_m} = x \neq 0$. Тоді, перейшовши у рівності (10) до границі при $m \to \infty$, отримаємо рівняння, рівносильне рівнянню (9):

$$x = a_1 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{x^2} . \tag{11}$$

Зауважимо, що рівняння (11) можна записати у вигляді

$$x = a_1 + \frac{a_2 + \dfrac{a_3}{x}}{x} .$$

Використовуючи співвідношення

$$x_n = a_1 + \frac{a_2 + \dfrac{a_3}{x_{n+1}}}{x_{n+1}}, \qquad n = 1, 2, \ldots ,$$

за допомогою відповідних послідовних підстановок можна отримати вираз

$$x = x_1 = a_1 + \cfrac{a_2 + \cfrac{a_3}{a_1 + \cfrac{a_2 + \cfrac{a_3}{a_1 + \ldots}}{a_1 + \cfrac{a_2 + \ldots}{a_1 + \ldots}}}}{a_1 + \cfrac{a_2 + \cfrac{a_3}{a_1 + \cfrac{a_2 + \ldots}{a_1 + \ldots}}}{a_1 + \cfrac{a_2 + \cfrac{a_3}{a_1 + \ldots}}{a_1 + \cfrac{a_2 + \ldots}{a_1 + \ldots}}}} . \tag{12}$$

Такі ж багатоповерхові дроби можна побудувати за допомогою двох послідовностей рівностей

$$\left\{ x_n = a_1 + \frac{y_n}{x_{n+1}} \right\}_{n=1,2,\ldots}, \qquad \left\{ y_n = a_2 + \frac{a_3}{x_{n+1}} \right\}_{n=1,2,\ldots}$$

і відповідних підстановок [5]. Вирази (12) не є зручними для їх аналізу та практичних потреб, тому користуватимемося відповідними рівними їм рекурентними дробами 3-го порядку.

4. 2-періодичні та 3-періодичні рекурентні дроби третього порядку. Розглянемо 2-періодичний рекурентний дріб третього порядку

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} q_1 & & & & & & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & & \\ \frac{r_1}{p_1} & \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & & & \\ 0 & \frac{r_2}{p_2} & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & \\ 0 & 0 & \frac{r_1}{p_1} & \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \end{array}\right]_{\infty}. \qquad (13)$$

Розкладемо чисельник n-го раціонального вкорочення $\frac{P_n}{Q_n}$ цього рекурентного дробу за елементами першого стовпця:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{q_1 Q_n + p_2 P_{n-2} + r_1 Q_{n-2}}{Q_n} = q_1 + \frac{p_2}{\frac{Q_n}{P_{n-2}}} + \frac{r_1}{\frac{Q_n}{P_{n-2}} \cdot \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}}.$$

Розкладаючи знаменник Q_n цього раціонального вкорочення за елементами першого стовпця, отримаємо рівності

$$\frac{Q_n}{P_{n-2}} = \frac{q_2 P_{n-2} + p_1 Q_{n-2} + r_2 P_{n-4}}{P_{n-2}} = q_2 + \frac{p_1}{\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}} + \frac{r_2}{\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} \cdot \frac{Q_{n-2}}{P_{n-4}}}.$$

Нехай існують скінченні ненульові границі $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{Q_n}{P_{n-2}} = y$. Тоді

$$x = q_1 + \frac{p_2}{y} + \frac{r_1}{yx}, \qquad y = q_2 + \frac{p_1}{x} + \frac{r_2}{xy}.$$

З цієї системи рівнянь отримуємо кубічне рівняння

$$(q_2 p_2 + r_2)x^3 + (r_1 q_2 - p_2 q_1 q_2 - p_2^2 + p_1 p_2 - 2q_1 r_2)x^2 + (p_1 r_1 - p_1 p_2 q_1 -$$

$$- q_1 q_2 r_1 - 2p_2 r_1 + q_1^2 r_2)x - (r_1^2 + q_1 p_1 r_1) = 0. \qquad (14)$$

Теорема 4. *Нехай* $\frac{P_n}{Q_n}$ – n*-не раціональне вкорочення періодичного рекурентного рівняння* (13), *причому існують ненульові границі* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{Q_n}{P_{n-2}} = y$. *Тоді* x *є дійсним коренем кубічного рівняння* (14).

Аналогічно можна показати, що 3-періодичні рекурентні дроби третього порядку зображують дійсний корінь деякого кубічного рівняння і т. д.

Приклад. Нехай у 2-періодичному рекурентному дробі третього порядку (13) задано

$$q_1 = 5, \quad q_2 = -3, \quad p_1 = 1, \quad p_2 = -2, \quad r_1 = 3, \quad r_2 = -1.$$

Тоді

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{5}{1} = 5, \quad \frac{Q_2}{P_0} = \frac{-14}{5} = -2.8, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{-17}{-3} = 5.(6), \quad \frac{Q_3}{P_1} = \frac{47}{-17} \approx -2.764,$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{-77}{-14} = 5.5, \quad \frac{Q_4}{P_2} = \frac{212}{-77} \approx -2.7532, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{260}{47} \approx 5.5319,$$

$$\frac{Q_5}{P_3} = \frac{-716}{260} \approx -2.753846, \quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{1172}{212} \approx 5.5283, \quad \frac{Q_6}{P_4} = \frac{-3227}{1172} \approx -2.7534129\,,$$

$$\frac{P_5}{Q_5} = \frac{-3959}{-716} \approx 5.529329, \qquad \frac{Q_7}{P_5} = \frac{10901}{-3959} \approx -2.75347309\,,$$

$$\frac{P_6}{Q_6} = \frac{-17843}{-3227} \approx 5.529284, \qquad \frac{Q_8}{P_6} = \frac{49130}{-17843} \approx -2.75346076\,,$$

$$\frac{P_7}{Q_7} = \frac{60275}{10901} \approx 5.52930923, \qquad \frac{Q_9}{P_7} = \frac{-165965}{60275} \approx -2.75346329\,,$$

$$\frac{P_8}{Q_8} = \frac{271655}{49130} \approx 5.52930999, \qquad \frac{Q_{10}}{P_8} = \frac{-747992}{271655} \approx -2.753463032\,,$$

$$\frac{P_9}{Q_9} = \frac{-917672}{-165965} \approx 5.529310396\,.$$

Дріб є зображенням кореня

$$x = \frac{7}{3} + \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{55} + \frac{2}{15} \cdot \sqrt[3]{55^2} \approx 5.52931047609$$

кубічного рівняння

$$5x^3 - 35x^2 + 45x - 24 = 0\,.$$

1. *Боднар Д. І.* Багатовимірні узагальнення неперервних дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46,** № 3. – С. 32–39.
2. *Брюно А. Д.* Алгоритм обобщенной цепной дроби / Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша РАН. – Препр. – Москва, 2004. – 17 с.
   Те саме: *Bruno A. D.* Algorithm of the generalizationued continued fraction / Inst. Appl. Math. Russian Acad. Sci. – Prepr. – Moscow, 2004. – 17 c.
3. *Брюно А. Д., Парусников В. И.* Сравнение разных обобщений цепных дробей // Мат. заметки. – 1997. – **61**, № 3. – С. 339–348.
   Те саме: *Bryuno A. D., Parusnikov V. I.* Comparison of various generalizations of continued fractions // Math. Notes. – 1997. – **61**, No. 3. – P. 278–286.
4. *Заторський Р. А.* Числення трикутних матриць та його застосування. – Івано-Франківськ: Сімик, 2010. – 508 с.
5. *Круковський Б. В.* До теорії нескінченних неперервних дробів 2-го класу // Журн. Ін-ту математики УАН. – 1933. – № 1. – С. 195–206.
6. *Cuyt A., Verdonk B.* A review of branched continued fraction theory for the construction of multivariate rational approximations // Appl. Numer. Math. – 1988. – **4**. – P. 263–271.
7. *Fürshtenau E.* Über Kettenbruche höherer Ordnung // Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. – 1876. – S. 133–135.
8. *Jones W. B., Thron W. J.* Continued fractions: Analytic theory and applications. – Reading, MA.: Addison-Wesley Publ. Co., 1980. – 428 p.
9. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions. – Vol. 1: Convergence theory. – Amsterdam – Paris: Atlantis Press/Word Scientific, 2008. – 308 p.

ОБОБЩЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ. I

Построен новый алгебраический объект – рекуррентные дроби n-го порядка, являющиеся n-мерными обобщениями непрерывных дробей. Для изображения и исследования таких дробей использованы парадетерминанты и треугольные матрицы.

GENERALIZATION OF CONTINUED FRACTIONS. I

A new algebraic object, namely, recursion fractions of the n-th order being the n-th generalization of continued fractions is constructed. Paradeterminants and triangular matrices are used to represent and investigate these fractions.

[1] Тернопіль. нац. економ. ун-т, Тернопіль,
[2] Прикарпатськ. ун-т
ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ

Одержано
04.09.10