УДК 517.526

Д. І. Боднар

ПРО ЗБІЖНІСТЬ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ

Виконано огляд досліджень з теорії збіжності гіллястих ланцюгових дробів.

1. В аналітичній теорії неперервних дробів і їх багатовимірних узагальнень – гіллястих ланцюгових дробів – найважливішим є питання збіжності. Перші ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД) були сформульовані в перших опублікованих роботах з цієї тематики [22, 24] і підсумовані у монографії [15]. Основна ідея, яка використовувалась при обгрунтуванні цих ознак, запозичена в теорії неперервних дробів, де основні ознаки збіжності доведені за допомогою лінійних рекурентних формул для чисельників і знаменників підхідних дробів.

Розглянемо ГЛД з комплексними компонентами

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{a_{i(1)}}{b_{i(1)} + \sum\limits_{i_2=1}^{N} \cfrac{a_{i(2)}}{b_{i(2)} + \ddots}}, \tag{1}$$

де $i(k) = i_1, i_2, \ldots, i_k$ – скорочений запис мультиіндексу. Позначимо через f_n, A_n і B_n відповідно n-й підхідний дріб ГЛД (1), чисельник і знаменник цього дробу, тобто

$$f_n = \frac{A_n}{B_n} = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}.$$

ГЛД (1) збігається, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$.

Впорядкуємо частинні відношення $a_{i(n)}/b_{i(n)}$ n-го поверху дробу (1). Нехай r – довільне ціле число, $0 \le r \le N^n$, а $j_1, j_2, \ldots, j_r$ – довільний набір натуральних чисел таких, що $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_r \le N^n$, коли $r \ge 1$. Позначимо $\dfrac{a'_{i(n)}}{b'_{i(n)}} := \sum\limits_{i_{n+1}=1}^{N} \dfrac{a_{i(n+1)}}{b_{i(n+1)}}$. Тоді

$$A_{n+1} = \sum_{j(r)} A_n \begin{pmatrix} & 0 & \\ j_1 \; j_2 & \ldots & j_r \end{pmatrix} \prod_{i(n)} c_{i(n)},$$

$$B_{n+1} = \sum_{j(r)} B_n \begin{pmatrix} & 0 & \\ j_1 \; j_2 & \ldots & j_r \end{pmatrix} \prod_{i(n)} c_{i(n)}, \tag{2}$$

де $A_n \begin{pmatrix} & 0 & \\ j_1 \; j_2 & \ldots & j_r \end{pmatrix}$, $B_n \begin{pmatrix} & 0 & \\ j_1 \; j_2 & \ldots & j_r \end{pmatrix}$ – чисельник і знаменник n-го підхідного дробу ГЛД (1), у якому частинні відношення $a_{i(n)}/b_{i(n)}$, що мають порядкові номери $j_1, j_2, \ldots, j_r$, замінено відношенням $0/1$; $c_{i(n)} = a'_{i(n)}$, якщо $i(n)$ має один із порядкових номерів $j_1, j_2, \ldots, j_r$, і $c_{i(n)} = b'_{i(n)}$ у протилежному випадку. Підсумовування у співвідношеннях (2) виконується за всіма можливими r та $j_1, j_2, \ldots, j_r$, добуток – за всіма можливими $i_1, i_2, \ldots, i_n$.

Формулу (2) встановив і застосував при дослідженні збіжності ГЛД В. Я. Скоробогатько.

ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 1998. – 41, № 1. – С. 117-126.

Теорема 1 [22]. *ГЛД*

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}} \tag{3}$$

з додатними частинними знаменниками збігається, якщо

$$\prod_{i(n)} b'_{i(n)} > 1 + \frac{1}{B_n} \sum_{j(r)} B_n \begin{pmatrix} & 0 & \\ j_1 & j_2 \ \ldots & j_r \end{pmatrix} \prod_{i(n)} c_{i(n)}, \qquad n = \overline{1, \infty}.$$

Формулювання перших ознак збіжності ГЛД було дуже громіздким, умови збіжності – неефективними. На основі формули (2) не вдалося розробити методи дослідження збіжності ГЛД. Пошуки простішої формули для A_n і B_n закінчились безрезультатно.

Якісно інший підхід до дослідження збіжності ГЛД, що грунтується на формулі різниці підхідних дробів $f_n - f_m$, $n > m$, запропоновано в роботі [9]. Нехай $Q_{i(r)}^{(s)} := b_{i(r)} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=r+1}^{s} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}$ – залишки ГЛД (1). Тоді

$$f_n - f_m = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}=1}^{N} \frac{(-1)^m \prod_{r=1}^{m+1} a_{i(r)}}{\prod_{r=1}^{m+1} Q_{i(r)}^{(n)} \prod_{r=1}^{m} Q_{i(r)}^{(m)}}. \tag{4}$$

Сформулюємо перший результат, отриманий на підставі формули (4). Позначимо через

$$\alpha_k = \min\left\{b_{i(k)}\colon i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}\right\}, \quad \beta_k = \max\left\{b_{i(k)}\colon i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}\right\} \tag{5}$$

відповідно мінімальний і максимальний частинний знаменник ГЛД (3) на k-му поверсі.

Теорема 2 [9]. *ГЛД* (3) *з додатними частинними знаменниками збігається, якщо ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \alpha_{k+1}$ *розбігається, де* α_k *визначені згідно з* (5).

2. Методи, які використовують при дослідженні збіжності неперервних дробів, не переносяться на багатовимірний випадок. На підставі формули (4) розроблено методи дослідження збіжності ГЛД: метод мажорант, метод фундаментальних нерівностей, метод нерівностей типу середніх гармонічних.

При обгрунтуванні збіжності ГЛД з додатними компонентами застосовують деякі спеціальні нерівності, наприклад:

$$\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^{-1}\right)^{-1} + \left(\sum_{i=1}^{N} y_i^{-1}\right)^{-1} \le \left(\sum_{i=1}^{N} (x_i + y_i)^{-1}\right)^{-1},$$

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\delta_j + \sum_{i=1}^{N} \frac{x_j}{x_i}\right)^{-1} \le \frac{N}{N + \delta_{\text{сер}}}, \qquad \sum_{j=1}^{N} \left(\delta + \sum_{i=1}^{N} \frac{x_j}{x_i}\right)^{-1} > \frac{1}{1+\delta},$$

де $x_i > 0$, $y_i > 0$, $\delta_i > 0$, $i = \overline{1, N}$; $\delta > 0$; $\delta_{\text{сер}}$ – середнє гармонічне δ_i, $i = \overline{1, N}$ [6].

Гіллястий ланцюговий дріб

$$d_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N_1} \frac{c_{i(k)}}{d_{i(k)}} \tag{6}$$

з комплексними елементами та числом гілок розгалуження N_1 (часто $N_1 = 1$) називають мажорантою ГЛД (1), якщо існує такий номер n_0 і додатна стала M, що для всіх $n \ge n_0$ і $m \ge n_0$ справджуються нерівності

$$|f_n - f_m| \le M|g_n - g_m|,$$

де g_k – k-й підхідний дріб ГЛД (6). Наприклад, мажорантою ГЛД (1), елементи якого задовольняють умови

$$|b_{i(k)}| \ge N|a_{i(k)}| + 1, \quad k = \overline{1, \infty}, \quad i_p = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, k},$$

є ГЛД вигляду $b_0 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{i_k=1}^{N} \dfrac{-|a_{i(k)}|}{|b_{i(k)}|}$. Якщо мажоранта (6) ГЛД (1) збігається, то ГЛД (1) збігається абсолютно. Ідея методу мажорант вперше сформульована в роботі [5]. Свою інтерпретацію цього методу запропонував М. О. Недашковський [21]. Недоліком запропонованого методу є те, що він не дозволяє оцінити швидкість збіжності ГЛД.

Скажемо, що для ГЛД (1) виконуються фундаментальні нерівності, якщо всі залишки $Q_{i(k)}^{(s)} \ne 0$ та існують додатні сталі ρ_k, $k = \overline{1, \infty}$, такі, що

$$\sum_{i_1=1}^{N} \left| \frac{a_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(s)}} \right| \le \rho_1, \quad s = \overline{1, \infty},$$

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{N} \left| \frac{a_{i(k+1)}}{Q_{i(k+1)}^{(s)}} \right| \le \rho_{k+1} \left| b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{a_{i(k+1)}}{Q_{i(k+1)}^{(s)}} \right|, \quad s = \overline{k+1, \infty},$$

$$i_p = \overline{1, N}, \; p = \overline{1, k}.$$

Якщо для ГЛД (1) виконуються фундаментальні нерівності й $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \rho_k = 0$, то цей дріб збігається до деякого значення f, причому $|f - f_n| \le \prod\limits_{k=1}^{n+1} \rho_k$.

Цей метод був вперше застосований до дослідження збіжності ГЛД з дійсними елементами в роботі [19]. Т. М. Антонова розвинула цей метод для ГЛД та інтегральних ланцюгових дробів з комплексними елементами [1, 2]. Для оцінок залишків і областей значень ГЛД вона встановила формули для дійсних і уявних частин залишків:

$$\operatorname{Re} Q_{i(k)}^{(s)} = |b_{i(k)}| \cos\varphi_{i(k)} + \sum_{m=k+1}^{s} \sum_{i_{k+1},\dots,i_m=1}^{N} |b_{i(m)}| \cos\varphi_{i(m)} \prod_{p=k+1}^{m} \left| \frac{a_{i(p)}}{Q_{i(p)}^{(s)}} \right|,$$

$$\operatorname{Im} Q_{i(k)}^{(s)} = |b_{i(k)}| \sin\varphi_{i(k)} + \sum_{m=k+1}^{s} (-1)^{m-k} \sum_{i_{k+1},\dots,i_m=1}^{N} |b_{i(m)}| \sin\varphi_{i(m)} \prod_{p=k+1}^{m} \left| \frac{a_{i(p)}}{Q_{i(p)}^{(s)}} \right|,$$

припускаючи, що всі $Q_{i(k)}^{(s)} \ne 0$, $\varphi_{i(k)} = \arg b_{i(k)}$.

При доведенні збіжності ГЛД використовують також загальний метод дослідження збіжності послідовності аналітичних функцій, що базується на теоремі Стілтьєса – Віталі та її багатовимірному узагальненні [6].

3. Сформулюємо ознаки збіжності ГЛД з невід'ємними компонентами.

Теорема 3 [6]. *ГЛД (3) з додатними частинними знаменниками розбігається, якщо ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \tag{7}$$

збігається, де β_k визначаються згідно з (5).

Теорема 4 [10]. *Нехай елементи ГЛД (1) є невід'ємні дійсні числа $a_{i(k)} \ge 0$, $b_{i(k)} > 0$. Тоді цей дріб збігається, якщо виконується одна з двох умов:*

1) існує такий номер k, що $a_{i(k)} = 0, \quad i_p = \overline{1,\ N}, \quad p = \overline{1,\ k};$

2) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\delta_k$ *розбігається, де*

$$\delta_k = \min\left\{b_{i(k)}b_{i(k+1)}/a_{i(k)}:\ i_p = \overline{1,\ N},\ p = \overline{1,\ k+1}\right\}, \tag{8}$$

причому ті набори індексів, для яких $a_{i(k)} = 0$, *при мінімізації* (8) *не розглядаються.*

Теорема 5 [6]. *Якщо для ГЛД* (3) *з додатними частинними знаменниками існує така стала* $M > 0$, *що* $\beta_k \le M\alpha_k$, $k = \overline{1,\ \infty}$, *де* α_k, β_k *визначаються згідно з* (5), *то ГЛД* (3) *збігається тоді й лише тоді, коли ряд* (7) *розбігається.*

Серед останніх результатів в цьому напрямку відмітимо теорему, встановлену М. І. Паньків, яка стосується порівняння збіжності ГЛД.

Теорема 6. *ГЛД* (1) *і* (3) *з додатними дійсними елементами збігаються одночасно, якщо для довільної послідовності індексів* $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$, $1 \le i_k \le N$, *збігається ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\prod\limits_{p=1}^{k} a_{i(p)}^{(-1)^{k+p-1}} - 1\right|$.

Огляд результатів, присвячених збіжності ГЛД з невід'ємними компонентами, наведено в [6, 10, 26]. Зауважимо, що вже понад 25 років залишається відкритою гіпотеза про те, що збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ є достатньою умовою збіжності ГЛД з додатними компонентими.

4. Серед ознак збіжності ГЛД з комплексними елементами важливе місце займають ознаки типу Прінгсгейма.

Теорема 7 [6]. *Якщо для ГЛД*

$$\left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{1}\right)^{-1}, \tag{9}$$

де $a_{i(k)}$ – *комплексні числа, які задовольняють умови* $\left|a_{i(k)}\right| \le \alpha = t(1-t)/N$, $0 \le t \le 1/2$, $i_p = \overline{1,\ N}$, $p = \overline{1,\ k}$, $k = \overline{1,\ \infty}$, *то*

1) ГЛД (9) *збігається;*

2) мають місце непокращувані оцінки швидкості збіжності

$$|f - f_n| \le \frac{(1-2t)t^n}{(1-t)^{n+1} - t^{n+1}}, \qquad \text{якщо}\quad 0 < t < \frac{1}{2},$$

$$|f - f_n| \le \frac{2}{n+1}, \qquad \text{якщо}\quad t = \frac{1}{2};$$

3) значення дробу (9) *і всіх його підхідних дробів належать області*

$$|z - (1-t^2)^{-1}| \le t(1-t^2)^{-1};$$

4) гранична стала $\alpha = 1/(4N)$ *і відповідна область значень є найкращими, тобто сталу* α *не можна збільшити, область зменшити.*

Теорема 7 є багатовимірним аналогом ознаки збіжності неперервних дробів Ворпіцького. Дослідженню областей значень дробу (9) при виконанні умов теореми 7 присвячена робота H. Waadeland [33].

Теорема 8 [1]. *ГЛД* (1) *з комплексними елементами збігається абсолютно, якщо існують такі числа* $g_{i(k)} > 0$, $k = \overline{1,\ \infty}$, $i_p = \overline{1,\ N}$, $p = \overline{1,\ k}$, *що* $|b_{i(k)}| \ge g_{i(k)} + \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N}\frac{|a_{i(k+1)}|}{g_{i(k+1)}}$, $k = \overline{1,\ \infty}$, $i_p = \overline{1,\ N}$, $p = \overline{1,\ k}$.

Значення дробу (1) і всіх його підхідних дробів належать області

$$|z - b_0| \le \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|a_{i_1}|}{g_{i_1}}.$$

При різних способах вибору чисел $g_{i(k)}$: $g_{i(k)} = |a_{i(k)}|$, $g_{i(k)} = 1$, $g_{i(k)} = N|a_{i(k)}|$, – можна отримати аналоги теореми Слешинського – Прінгсгейма для ГЛД [1, 6, 21].

Підсилення теореми типу Прінгсгейма можна отримати, розглядаючи ГЛД з дійсними елементами і враховуючи кількість від'ємних значень частинних чисельників [7].

5. Окремим розділом у теорії збіжності як неперервних, так і гіллястих ланцюгових дробів є параболічні теореми [2, 6, 14].

Теорема 9 [6]. *Нехай елементи* $a_{i(k)}$, $k = \overline{1, \infty}$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, k}$, *ГЛД (9) належать параболічній області*

$$P_{\varepsilon,\gamma} = \left\{z \in \mathbb{C}:\ |z| - \mathrm{Re}(z \exp(-2\gamma i)) \le (2N)^{-1}(1-\varepsilon)\cos^2\gamma\right\},$$

де $-\pi/2 < \gamma < \pi/2$, $0 < \varepsilon < 1$. *Тоді*

1) *існують скінченні границі парних і непарних підхідних дробів ГЛД (9);*

2) *ГЛД (9) збігається, якщо виконуються одна з двох умов: або існує такий номер* k, *що всі* $a_{i(k)} = 0$, $k = \overline{1, \infty}$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, k}$,

або ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\max\left\{|a_{i(k)}|:\ i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}\right\}\right)^{-1}$ *розбігається;*

3) *область значень ГЛД (9) належить кругу* $|z - \exp(-i\gamma)/\cos\gamma| \le 1/\cos\gamma$.

Серед інших необмежених областей збіжності розглядають кутові області та зовнішності кругів.

Теорема 10 [6]. *Нехай всі частинні знаменники* $b_{i(k)}$ *ГЛД (3), де* $b_0 = 0$, *належать області*

$$G_\varepsilon = \left\{z \in \mathbb{C}:\ z \ne 0,\ |\arg z| < \pi/2 - \varepsilon\right\}, \tag{10}$$

де $0 < \varepsilon < \pi/2$. *Тоді*

1) *підхідні дроби ГЛД (3)* $f_n \in G_\varepsilon$, $n = \overline{1, \infty}$;

2) *існують скінченні границі парних і непарних підхідних дробів;*

3) *ГЛД (3) збігається, якщо при введенні позначень*

$$\alpha_k = \min\left\{|b_{i(k)}|:\ i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}\right\},\quad \beta_k = \max\left\{|b_{i(k)}|:\ i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}\right\} \tag{11}$$

виконується одна з двох умов:

а) *розбігається ряд* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{k+1}(\alpha_k + N^{-1}\alpha_{k-2} + N^{-2}\alpha_{k-4} + \ldots + N^{-r}\alpha_{k-2r})$;

б) $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\sum_{k=2}^{2m+1}\alpha_{k-1}\left(\alpha_k + \frac{N}{\beta_{k+1}} + \frac{N}{\alpha_{k+2}} + \ldots + \frac{N}{\alpha_s}\right) = \infty$,

де $r = \left[\dfrac{k-1}{2}\right]$, $s = 2m + k - 2\left[\dfrac{k}{2}\right]$.

Ця теорема є багатовимірним аналогом ознаки збіжності неперервних дробів Ван Флека.

Як показали дослідження, наведені Є. А. Болтаровичем [16], є такі теореми про необмежені області збіжності неперервних дробів, які в принципі, не переносяться на ГЛД. Це стосується, зокрема, теореми Лейтона – Уолла про спарені області збіжності, де одна область круг, друга – зовнішність круга. Аналогічне твердження не є вірне для ГЛД, бо для довільних як завгодно малого $\varepsilon > 0$ і як завгодно великого $M > 0$ області $|z| < \varepsilon$ і $|z| > M$

не є спареними областями збіжності ГЛД, оберненого до (9). Про це свідчить наступний приклад.

Приклад [16]. Розглянемо ГЛД, обернений до (9), де $N = 2$, і покладемо $a_{i(2n)} = \varepsilon$, $a_{i(2n)2} = -\varepsilon$, $a_{i(2n)12} = -M$, $a_{i(2n)22} = M + \varepsilon$, $a_{i(2n+1)1} = M - 1$, $n = \overline{0, \infty}$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, 2n+1}$. Тоді $f_{4n-3} = f_{4n} = 0$, $f_{4n-2} = f_{4n-1} = \infty$. Аналог теореми Лейтона – Уолла для ГЛД набуває якісно іншого вигляду.

Теорема 11 [16]. *Нехай для ГЛД, оберненого до* (9), $N > 1$ *і виконуються умови*

1) $|a_{i(2n-1)}| \le \alpha/N$, $n = \overline{1, \infty}$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, 2n-1}$;

2) для кожного натурального n *існує єдиний індекс* j_{2n}, $1 \le j_{2n} \le N$, *що*

$|a_{i(2n-1)j_{2n}}| \ge R$, $n = \overline{1, \infty}$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, 2n-1}$,

$|a_{i(2n)}| \le r/(N-1)$, $n = \overline{1, \infty}$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, 2n}$, $i_{2n} \ne j_{2n}$,

де α, r, R *– довільні дійсні числа такі, що* $0 \le \alpha \le 1/4$, $0 \le r < \infty$,

$R > (1+\alpha)(r+2-2\alpha)/(1-\alpha)$, $\quad (1-\alpha)^2\left(R/(1+\alpha) - r/(1-\alpha) - 1\right)^2 > \alpha(R+r)$.

Тоді цей ГЛД збігається.

6. Відкритою залишається проблема встановлення необхідних ознак збіжності ГЛД з комплексними компонентами. В теорії неперервних дробів це питання вирішує теорема Штерна – Штольца. За аналогією з цією теоремою необхідну ознаку збіжності ГЛД (3) з комплексними частинними знаменниками можна сформулювати так: ГЛД (3) розбігається, якщо збігається ряд (7), де β_k визначаються згідно з (11). Однак, як показали дослідження, проведені в [11], це твердження не є вірне. Незрозуміло навіть, як сформулювати необхідну ознаку збіжності ГЛД. Єдиним результатом у цьому напрямку є теорема, встановлена Т. М. Антоновою.

Теорема 12 [3]. *ГЛД* (3), *де* $b_0 = 0$, $b_{i(k)} \in \mathbb{C}$, *розбігається, якщо виконуються умови*

1) $\arg b_{i(k)} \in [-\varphi_k, \varphi_k]$, *де* $\{\varphi_k\}$ *– монотонно незростаюча послідовність дійсних чисел така, що* $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k < \pi/4$;

2) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{2n+1} \beta_{i-1}\left(\beta_i + \frac{N}{\alpha_{i+1}} + \frac{N\cos 2\varphi_{i+1}}{\beta_{i+2}} + \frac{N}{\alpha_{i+3}} + \ldots + \frac{N\cos 2\varphi_{s-1}}{\beta_s}\right) < \infty,$$

де α_k, β_k *визначаються згідно з* (11); $s = 2n + 1 - 2[i/2]$.

7. Паралельно з дослідженнями ГЛД загального вигляду вивчалися також деякі спеціальні конструкції гіллястих ланцюгових дробів: двовимірні ланцюгові дроби (ДЛД) і ГЛД з нерівнозначними змінними. Існують дві конструкції ДЛД:

$$1 + \Phi_0 + \underset{i=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \frac{c_{ii} z_1 z_2}{1 + \Phi_i}, \qquad \Phi_i = \underset{j=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \frac{c_{i+j,i} z_1}{1} + \underset{j=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \frac{c_{i,i+j} z_2}{1}, \tag{12}$$

$$1 + F_{00} + \underset{i=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \frac{b_{i0} z_1}{1 + F_{i0}} + \underset{i=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \frac{b_{0i} z_2}{1 + F_{0i}}, \qquad F_{ij} = \underset{p=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \frac{b_{i+p,j+p} z_1 z_2}{1}.$$

Перший тип ДЛД досліджувався в роботах Х. Й. Кучмінської [18], J. Murphy і M. O'Donohoe [30], A. Cuyt, B. Verdonk [28, 29], а другий – у роботах W. Siemaszko [31, 32]. ГЛД з нерівнозначними змінними

$$b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}$$

вивчались у роботах [4, 23]. Особливістю запропонованих вище спеціальних конструкцій ГЛД є також вибір їх підхідних дробів. Так, n-й підхідний дріб ДЛД (12) – це скінченний дріб, що містить всі ті елементи, сума індексів яких не більша ніж n.

Для ДЛД встановлено аналоги теорем Ворпіцького, Слешинського – Прінгсгейма, параболічні теореми та ін. [8, 14, 25]. Огляд досліджень з теорії збіжності ДЛД і ГЛД виконано в [27]. Сформулюємо деякі результати, які враховують специфіку ДЛД.

Розглянемо ДЛД (12) при $z_1 = z_2 = 1$. Скажемо, що для цього дробу виконуються фундаментальні нерівності, якщо існують такі дійсні числа $r_{ij} > 0$, $i, j = \overline{0, \infty}$, і γ, $0 < \gamma < 1/2$, що

а) $r_{ii}|1 + a_{i+1,i} + a_{i,i+1}| > 2r_{ii}\max(\sqrt{|a_{ii}|}, \sqrt{|a_{i+1,i+1}|}) + \max(|a_{i+1,i}|, |a_{i,i+1}|)$;

б) $r_{i+1,i}|1 + a_{i+2,i}| \ge |a_{i+2,i}| + \gamma^{-1} r_{i+1,i}|a_{i+1,i}| + |a_{i+3,i}|$;

в) $r_{i+j,i}|1 + a_{i+j,i} + a_{i+j+1,i}| \ge r_{i+j,i}\, r_{i+j-2,i}|a_{i+j,i}| + |a_{i+j+1,i}|$, $j \ge 3$;

г) $|a_{ii}| \le (1 - 2\gamma)^2/4$, $i = \overline{0, \infty}$.

Теорема 13 [8]. *Якщо для ДЛД (12) при $z_1 = z_2 = 1$ виконуються фундаментальні нерівності, то його парна та непарна частини збігаються абсолютно.*

Теорема 14 [25]. *Якщо у ДЛД*

$$\underset{i=0}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \frac{1}{\Phi_i}, \qquad \Phi_i = d_{ii} + \underset{j=i+1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \frac{1}{d_{ji}} + \underset{j=i+1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \frac{1}{d_{ij}}, \tag{13}$$

всі Φ_i збігаються та існують такі сталі B_i, $i = \overline{0, \infty}$, що

1) $|\Phi_i^{(n-2i-1)}| = \left| d_{ii} + \underset{j=i+1}{\overset{n-2i-1}{\mathrm{D}}} \frac{1}{d_{ji}} + \underset{j=i+1}{\overset{n-2i-1}{\mathrm{D}}} \frac{1}{d_{ij}} \right| \le B_i$, $n = \overline{1, \infty}$, $i = \overline{0, [(n-1)/2]}$;

2) $\sum_{i=0}^{\infty} B_i < \infty$;

3) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left| \Phi_i^{(m-2i-1)} - \Phi_i^{(n-2i-1)} \right| = 0$, $m > n$,

то ДЛД (13) розбігається.

8. Багатовимірні g- і J-дроби – найбільш вивчені класи функціональних ГЛД.

Багатовимірним g-дробом називають ГЛД вигляду

$$\frac{1}{1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)} z_{i_1}}{1} + \dots + \sum_{i_k=1}^{N} \frac{g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)}) z_{i_k}}{1} + \dots, \tag{14}$$

де $0 < g_{i(k)} < 1$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$.

Перші результати, присвячені цим дробам, наведені в [6]. Р. І. Дмитришин встановив зв'язок ГЛД вигляду (14) з кратними степеневими рядами та багатовимірними ланцюговими послідовностями, дослідив області збіжності, встановив оцінки похибок апроксимацій для таких дробів.

Теорема 15 [12]. *Якщо $z \in P_{\alpha,\varepsilon}$, де*

$$P_{\alpha,\varepsilon} = \left\{ z \in \mathbb{C}^N : |z_k| - \mathrm{Re}(z_k \exp(-2\alpha i)) < 2N^{-1}(1-\varepsilon)^2 \cos^2\alpha, \quad k = \overline{1, N} \right\}, \tag{15}$$

$-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, $0 < \varepsilon < 1$, *то ГЛД (14) збігається до аналітичної в області (15) функції, причому збіжність є рівномірною на компактах області.*

Теорема 16 [17]. *Багатовимірний g-дріб (14) збігається в області $D = \left\{ z \in \mathbb{C}^N : \sum_{i=1}^{N} (3|z_i| - 2\mathrm{Re}\, z_i) < 4 \right\}$ до голоморфної функції $f(z)$, і для похибок апроксимацій мають місце оцінки:*

$$|f(z) - f_k(z)| \le 16\left(4 - 2\sum_{i=1}^{N}|z_i| - \operatorname{Re} z_i\right)^{-k}\left(\sum_{i=1}^{N}|z_i|\right)^{k}, \quad k = \overline{1, \infty}.$$

Багатовимірним J-дробом називають ГЛД вигляду

$$\left(b_0 + z_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{-a_{i(k)}^2}{b_{i(k)} + z_{i_k}}\right)^{-1}, \tag{16}$$

де b_0, $b_{i(k)}$, $a_{i(k)}$ – комплексні сталі; z_0, z_{i_k} – комплексні змінні. Основні результати, що стосуються збіжності дробів (16) і близьких до них додатно визначених ГЛД, наведено в [6].

Теорема 17 [6]. *Якщо для ГЛД (16) $b_0 = 0$, всі $b_{i(k)} = 0$, $a_{i(k)} \in \mathbb{R}$, причому існують дійсні сталі $g_{i(k)}$, $0 \le g_{i(k)} \le 1$, $k = \overline{0, \infty}$, $i_0 = 0$, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, k}$, такі, що $a_{i(k)}^2 \le N^{-1}(1 - g_{i(k-1)})g_{i(k)}$, то ГЛД (16) рівномірно збігається на кожному компакті з $\mathbb{C}^{N+1}$, віддаль якого до області $\operatorname{Im} z_k = 0$, $|\operatorname{Re} z_k| < 1$, $k = \overline{0, N}$, є додатною.*

Спеціальні конструкції функціональних ГЛД виникають при розвиненні відношення гіпергеометричних функцій Аппеля і Лаурічелли [13, 20].

Розглянемо гіпергеометричну функцію Аппеля

$$F_3(a, a', b, b';\ c;\ z) = \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_m (a')_n (b)_m (b')_n}{(c)_{m+n}\ m!\ n!}\ z_1^m z_2^n,$$

де a, a', b, b', $c \in \mathbb{C}$, $c \ne 0, -1, -2, \ldots$, $z \in \mathbb{C}^2$, $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$.

Теорема 18 [20]. *Відношення гіпергеометричних функцій Аппеля F_3 має розвинення у ГЛД*

$$\frac{F_3(a, a', b, b';\ c;\ z)}{F_3(a+1, a', b, b';\ c+1;\ z)} = \gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{2}\frac{u_{i(1)}}{1} + \frac{v_{i(1)}}{1} + \sum_{i_2=1}^{2}\frac{u_{i(2)}}{1} + \frac{v_{i(2)}}{1} + \ldots,$$

де $\gamma_0 = -Ac^{-1}$, $v_{i(n)} = \begin{cases}(a+p)A^{-1}z_1, & \text{якщо } i_n = 1,\\ (a' + n - p - 1)A^{-1}z_2, & \text{якщо } i_n = 2,\end{cases}$

$$u_{i(1)} = \begin{cases} b\,c^{-1}(1 - z_1), & \text{якщо } i_1 = 1,\\ b'\,c^{-1}, & \text{якщо } i_1 = 2,\end{cases}$$

$$u_{i(n)} = \begin{cases} -(b + p - 1)A^{-1}(1 - z_1), & \text{якщо } i_{n-1} = i_n = 1,\\ -(b' + n - p - 1)A^{-1}, & \text{якщо } i_{n-1} = 1,\ i_n = 2,\\ -(b + p - 1)A^{-1}, & \text{якщо } i_{n-1} = 2,\ i_n = 1,\\ -(b' + n - p - 1)A^{-1}(1 - z_2), & \text{якщо } i_{n-1} = i_n = 2,\end{cases}$$

$n = \overline{2, \infty}$, $i_k = 1, 2$, $k = \overline{1, n}$, $A = b' + b - c$; p – *кількість одиниць в мультиіндексі* $i(n)$.

ГЛД (17) збігається, якщо $z_1 < 0$, $z_2 < 0$ і параметри функції Аппеля F_3 задовольняють умови $a > -1$, a', b, b', $c \in \mathbb{R}_+$, $b + b' - c < 0$, причому має місце оцінка швидкості збіжності

$$|f_{n+1} - f_n| \le c\prod_{k=1}^{[n/2]}\frac{2}{2 + \delta_k},$$

де c – стала, $\delta_k = \min\left\{v_{i(k)}^{-1}:\ i_p = 1, 2,\ p = \overline{1, k}\right\}$, якщо k парне, і $\delta_k = \min\left\{u_{i(k)}^{-1}:\ i_p = 1, 2,\ p = \overline{1, k}\right\}$, якщо k непарне.

Парною частиною ГЛД, у який розвивається відношення гіпергеометричних функцій Лаурічелли

$$\frac{F_D^{(N)}(a,\ b_1,\ \ldots,\ b_N;\ c;\ z)}{F_D^{(N)}(a+1,\ b_1+1,\ \ldots,\ b_N;\ c+1;\ z)},$$

де $F_D^{(N)}(a,\ b_1,\ \ldots,\ b_N;\ c;\ z) = \sum\limits_{i_1,\ldots,i_N=1}^{\infty} \frac{(a)_{i_1+\ldots+i_N}(b_1)_{i_1}\ldots(b_N)_{i_N}}{(c)_{i_1+\ldots+i_N}} \frac{z_1^{i_1}\ldots z_N^{i_N}}{i_1!\ldots i_N!}$

є ГЛД вигляду

$$d_0(z) + a_0\left(b_0(z) + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}(z)}{b_{i(k)}(z)}\right)^{-1}, \tag{18}$$

причому $d_0(z) = \frac{a}{c}(1-z_1)$, $a_0 = 1-\frac{a}{c}$, $b_0(z) = 1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} \frac{b_{i_1}+p_{i(1)}}{a(1-z_{i_1})} z_{i_1}$, $a_{i(n)}(z) =$
$= -\frac{(c-a-n)(b_{i_n}+p_{i(n)})}{a^2(1-z_{i_n})^2} z_{i_n}$, $b_{i(n)}(z) = 1 + \frac{c-a+n}{a(1-z_{i_n})} + \sum\limits_{i_{n+1}=1}^{N} \frac{b_{i_{n+1}}+p_{i(n+1)}}{a(1-z_{i_{n+1}})} z_{i_{n+1}}$,

$p_{i(n)} = \alpha_{i(n)} + \delta_{i_n}^1$; $\alpha_{i(1)} = 0$, $\alpha_{i(n)}$ – кількість чисел i_n в мультиіндексі $i(n-1)$, якщо $n \geq 2$; δ_i^j – символ Кронекера.

Теорема 19 [13]. *Існують такі додатні дійсні сталі r, β, що ГЛД (18) рівномірно й абсолютно збігається в області*

$$D = \left\{ z' \in \mathbb{C}^N:\ z_i' \in \{|1-z_i| > r\} \cap \left\{ \frac{|z_i|}{|1-z_i|^2} \leq \frac{\beta^2}{8N(1+|c-a|)(1+|b_i|)} \right\},\ i = \overline{1,\ N} \right\}$$

при умові, що $a - \sum_{j=1}^{N} b_j \notin \mathbb{N}$.

1. *Антонова Т. М.* Достатні ознаки збіжності і стійкості інтегральних ланцюгових дробів: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 1996. – 141 с.
2. *Антонова Т. М.* Один багатовимірний аналог теореми про рівномірну просту параболічну область збіжності ланцюгових дробів // Волин. мат. вісник. – 1996. – Вип. 2. – С. 6–8.
3. *Антонова Т. М., Боднар Д. І.* Необхідні умови збіжності гіллястих ланцюгових дробів // Матеріали VII Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука. – Київ, 1998. – С. 23.
4. *Баран О. С.* Аналог ознаки збіжності Ворпіцького для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1996. – **39**, № 2. – С. 35–38.
5. *Боднар Д. И.* Аналог признака сходимости Ворпитского для ветвящихся цепных дробей // Мат. сб. – К.: Наук. думка, 1976. – С. 40–43.
6. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
7. *Боднар Д. И.* Признаки сходимости типа Прингсгейма для ветвящихся цепных дробей // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 11. – С. 1559–1563.
8. *Боднар Д. И., Кучминская Х. И.* Абсолютная сходимость четной и нечетной части двумерной соответствующей цепной дроби // Мат. методы и физ.-мех. поля.– 1983. – Вып. 18. – С. 30–34.
9. *Боднар Д. И., Олексив И. Я.* О сходимости ветвящихся цепных дробей с неотрицательными членами // Укр. мат. журн. – 1976.– **28**, № 3. – С. 373–377.
10. *Боднар Д. І.* Ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів з невід'ємними компонентами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, № 2. – С. 7–13.
11. *Боднар Д. І.* Про ознаку збіжності Кох для гіллястих ланцюгових дробів // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1992. – Вып. 36. – С. 10–13.
12. *Боднар Д. І., Дмитришин Р. І.* Про багатовимірне узагальнення g-дробів // Доп. НАН України. – 1997. – № 12. – С. 11–17.

13. *Боднар Д. І., Гоєнко Н. П.* Про збіжність парної частини розвинення у гіллястий ланцюговий дріб відношення гіпергеометричних функцій Лаурічелли $F_D^{(N)}$ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, № 4. – С. 7–9.
14. *Боднар Д. І., Кучмінська Х. Й.* Параболічна область збіжності для двовимірних неперервних дробів // Мат. студії. – 1995. – Вип. 4. – С. 29–36.
15. *Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. – К.: Наук. думка, 1974. – 272 с.
16. *Болтарович Е. А.* Аналог признака сходимости Лейтона – Уолла для ветвящихся цепных дробей // Методы исслед. дифференц. и интегр. операторов. – Киев: Наук. думка. – 1989. – С. 32–36.
17. *Дмитришин Р. І.* Апріорні оцінки похибок апроксимацій багатовимірного g-дробу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, № 4. – С. 10–12.
18. *Кучмінська Х. Й.* Відповідний і приєднаний гіллясті ланцюгові дроби для подвійного степеневого ряду // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1978. – № 7. – С. 614–618.
19. *Кучминская Х. И., Боднар Д. И.* Вычислительная устойчивость разложений функций многих переменных в ветвящиеся цепные дроби // Однородные цифровые вычисл. и интегрирующие структуры. – 1977. – Вып. 8. – С. 145–151.
20. *Манзій О. С.* Розвинення відношення гіпергеометричних функцій Аппеля у гіллястий ланцюговий дріб // Матеріали VII Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука. – Київ, 1998. – С. 317.
21. *Недашковский Н. А.* Достаточные признаки сходимости ветвящихся цепных дробей // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1984. – Вып. 19. – С. 29–33.
22. *Скоробогатько В. Я.* Ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1972. – № 1. – С. 27–29.
23. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применения в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
24. *Скоробогатько В. Я., Дронюк Н. С., Бобик О. І., Пташник Б. Й.* Гіллясті ланцюгові дроби // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1967. – № 2. – С. 131–133.
25. *Сусь О. М.* Деякі питання аналітичної теорії двовимірних ланцюгових дробів: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 1996. – 123 с.
26. *Bodnar D.* Sur la convergence des fractions continues branchées avec des termes positifs // Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab, Skrifter. – 1994. – N 1. – P. 1–21.
27. *Bodnar D., Kuchmins'ka Kh., Sus' O.* A survey of analytic theory of branched continued fractions // Commun. Analytic Theory of Continued Fractions. – 1993. – **2**. – P. 4–23.
28. *Cuyt A., Verdonk B.* A review of branched continued fraction theory for the construction of multivariate rational approximations // Appl. Numer. Math. – 1988. – **4**. – P. 263–271.
29. *Cuyt A., Verdonk B.* Multivariate rational interpolation // Computing. – 1985. – **34**. – P. 41–61.
30. *Murphy J., O'Donohoe M.* A two-variable generalizations of the Stieltjes-type continued fractions // J. Comput. and Appl. Math. – 1978. – № 4. – P. 181–190.
31. *Siemaszko W.* Branched continued fractions for double power series // Ibid. – 1980. – **6**, № 2. – P. 121–125.
32. *Siemaszko W.* Thiele-type branched continued fractions for two-variable functions // Ibid. – 1983. – **9**. – P. 137–153.
33. *Waadeland H.* A Worpitzky boundary theorem for N-branched continued fractions // Commun. Analytic Theory of Continued Fractions. – 1993. – **2**. – P. 24–29.

О СХОДИМОСТИ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

Приведен обзор исследований по теории сходимости ветвящихся цепных дробей.

ON THE CONVERGENCE OF BRANCHED CONTINUED FRACTIONS

An overview of investigations on convergence theory of the branched continued fractions is carried out.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
25.05.98