УДК 517.524

Д. І. Боднар

БАГАТОВИМІРНІ С-ДРОБИ

Розглянуто аналоги регулярних і нерегулярних С-дробів для функцій багатьох змінних, побудовано алгоритми розвинення в такі дроби кратних степеневих рядів і відношення гіпергеометричних функцій Аппеля.

1. Вступ. Важливим класом функціональних неперервних дробів є С-дроби

$$c_0 + \frac{c_1 z^{n_1}}{1} + \frac{c_2 z^{n_2}}{1} + \cdots + \frac{c_k z^{n_k}}{1} + \cdots, \tag{1}$$

де $n_k \in \mathbb{N}$, c_k — відмінні від нуля комплексні числа, $k = 1, 2, \ldots$; $z \in \mathbb{C}$. Саме в такі дроби розкладаються більшість елементарних і спеціальних функцій математичної фізики [6, 14]. У вигляді С-дробів подано розв'язки інтегральних рівнянь [8]. Існує взаємно однозначна відповідність між неперервними дробами (1) і формальними степеневими рядами $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q_k z^k$, де $q_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \ldots$; $z \in \mathbb{C}$.

С-дріб вигляду

$$c_0 + \frac{c_1 z}{1} + \frac{c_2 z}{1} + \cdots + \frac{c_k z}{1} + \cdots \tag{2}$$

називається правильним або регулярним С-дробом.

Регулярним багатовимірним С-дробом назвемо гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) вигляду

$$c_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)} z_{i_k}}{1} := c_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{c_{i(1)} z_{i_1}}{1 + \sum\limits_{i_2=1}^{N} \cfrac{c_{i(2)} z_{i_2}}{1 + \ddots}}, \tag{3}$$

де $i(k) = i_1, i_2, \ldots, i_k$ — скорочений запис мультиіндексу; $c_{i(k)}$ — відмінні від нуля комплексні числа, $k = 1, 2, \ldots$; $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{1, k}$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$. Позначення (3) вперше запропонував H.Waadeland [18]. З нашої точки зору ГЛД (3) є найбільш природним узагальненням регулярних С-дробів (2) для функцій N змінних. Нерегулярність може мати дві причини: або деякі частинні чисельники є поліномами вище першого степеня, або деякі коефіцієнти $c_{i(k)}$ у ГЛД (3) дорівнюють нулю.

2. Відповідні неперервні дроби для подвійного степеневого ряду. Нехай задано формальний подвійний степеневий ряд

$$Q = \sum_{m,n=0}^{\infty} q_{m,n}\, z_1^m\, z_2^n, \tag{4}$$

де $q_{m,n} \in \mathbb{C}$, $m, n = 0, 1, \ldots$; $q_{0,0} = 1$; $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. ГЛД називається відповідним до ряду (4), якщо розвинення кожного його n-го підхідного дробу, $n = 1, 2, \ldots$, у формальний степеневий ряд збігається з вихідним рядом, включно до членів степеня n.

Існують різні конструкції відповідних двовимірних неперервних дробів. Двовимірним С-дробам вигляду

$$1+\Phi_0+\mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{\infty}\frac{c_{ii}\,z_1 z_2}{1+\Phi_i},\qquad \Phi_i=\mathop{\mathrm{K}}_{j=1}^{\infty}\frac{c_{i+j,i}\,z_1}{1}+\mathop{\mathrm{K}}_{j=1}^{\infty}\frac{c_{i,i+j}\,z_2}{1} \tag{5}$$

присвятили свої роботи J. A. Murphy, M. R. O'Donohoe [15], Х. Й. Кучмінська [7], A. Coyt, B. Verdonk [11, 12], а вигляду

$$1+F_{00}+\mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{\infty}\frac{b_{i0}\,z_1}{1+F_{i0}}+\mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{\infty}\frac{b_{0i}\,z_2}{1+F_{0i}},\qquad F_{ij}=\mathop{\mathrm{K}}_{p=1}^{\infty}\frac{b_{i+p,j+p}\,z_1 z_2}{1} \tag{6}$$

— W. Siemaszko [16]. Відповідні ГЛД з лінійними частинними чисельниками і нерівноправними змінними

$$b_0+F_0(z_2)+\mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{\infty}\frac{b_{i0}\,z_1}{1+F_k(z_2)},\qquad F_k(z_2)=\mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{\infty}\frac{b_{ki}\,z_2}{1} \tag{7}$$

розглядались W.Siemaszko [17]. ГЛД вигляду (5)–(7) є нерегулярними двовимірними С-дробами. В [4] автором побудовано регулярні двовимірні С-дроби вигляду (3). Для знаходження 2^k коефіцієнтів $c_{i(k)}$, розташованих на k-му поверсі дробу (3), з умов відповідності можемо отримати лише $k+1$ рівняння. Отже, елементи $c_{i(k)}$ ГЛД (3) визначаються неоднозначно. Оскільки коефіцієнти $q_{m,n}$ ряду (4) залежать від двох параметрів, а коефіцієнти $c_{i(k)}$ дробу (3) мають також два цілком природних параметри: m — кількість одиниць, n — кількість двійок у мультиіндексі $i(k)$, то, поклавши $c_{i(k)}=a_{m,n}$, де $a_{m,n}$ — невідомі, приходимо до дробу (3), у якого на k-му поверсі є різних лише $k+1$ коефіцієнтів $a_{m,n}$. У роботі [4] встановлений рекурентний алгоритм для знаходження цих коефіцієнтів при $N=2$.

Розглянемо іншу інтерпретацію цього ж алгоритму, яка допускає його багатовимірне узагальнення. Позначимо через $\mathcal{I}:=\{p,q:\ p,q\in\mathbb{Z}_+\}$ сукупність подвійних індексів. На множині $\mathcal{I}$ визначимо покомпонентно арифметичні операції: $i+j$, ki, де $i,j\in\mathcal{I}$, $k\in\mathbb{Z}_+$. Нехай $e_1=1,0$, $e_2=0,1$ — елементи $\mathcal{I}$. Позначимо $e_{i_1}=:\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_k^*:=\mathbf{i}_1+\mathbf{i}_2+\cdots+\mathbf{i}_k=me_1+ne_2$. Тоді $a_{\mathbf{i}_k^*}=a_{m,n}$ і ГЛД (3) у випадку $N=2$ набирає вигляду

$$1+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{2}\frac{a_{\mathbf{i}_k^*}\,z_{i_k}}{1}=1+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{2}\frac{a_{m,n}\,z_{i_k}}{1}. \tag{8}$$

Нехай, як і раніше, $m,n=i_k^*$. Позначимо через

$$Q_{m,n}^*:=\sum_{i,j=0}^{\infty}q_{i,j}^{m,n}\;z_1^i\,z_2^j \tag{9}$$

ряд, відповідний до дробу

$$1+\mathop{\mathrm{K}}_{r=k+1}^{\infty}\sum_{i_r=1}^{2}\frac{a_{\mathbf{i}_r^*}\,z_{i_r}}{1}.$$

Нехай ряд $P_{m,n}^*:=\sum\limits_{i,j=0}^{\infty}p_{i,j}^{m,n}\;z_1^i\,z_2^j$ є оберненим до ряду (9), тобто $P_{m,n}^*Q_{m,n}^*\equiv 1$. Виходячи з рекурентних формул

$$Q_{m,n}=1+\frac{a_{m+1,n}\,z_1}{Q_{m+1,n}}+\frac{a_{m,n+1}\,z_2}{Q_{m,n+1}},$$

отримаємо

$$q_{i,j}^{m,n} = a_{m+1,n} p_{i-1,j}^{m+1,n} + a_{m,n+1} p_{i,j-1}^{m,n+1}, \tag{10}$$

де $q_{i,j}^{0,0} = q_{i,j}$, $p_{0,0}^{m,n} = q_{0,0}^{m,n} = 1$, $p_{i,j}^{m,n} = q_{i,j}^{m,n} = 0$, якщо $i < 0$ або $j < 0$. Із співвідношення (10) випливає, що

$$q_{1,0}^{m,n} = a_{m+1,n}, \qquad q_{0,1}^{m,n} = a_{m,n+1}. \tag{11}$$

Для коефіцієнтів $p_{i,j}^{m,n}$, $q_{i,j}^{m,n}$, як коефіцієнтів обернених рядів, справджуються співвідношення

$$p_{i,j}^{m,n} = -q_{i,j}^{m,n} + \delta_{i,j}^{m,n}, \tag{12}$$

де $\delta_{1,0}^{m,n} = \delta_{0,1}^{m,n} = 0$, і

$$\delta_{i,j}^{m,n} := - \sum_{\substack{u+r=i,\\ v+s=j}} p_{u,v}^{m,n}\, q_{r,s}^{m,n}, \tag{13}$$

причому $u + v \geq 1$, $r + s \geq 1$. Визначимо рекурентно величини $\mu_{i,j}$:

$$\mu_{i,j} = a_{i-1,j}\mu_{i-1,j} + a_{i,j-1}\mu_{i,j-1}, \qquad i,j = 0,1,\dots \tag{14}$$

враховуючи початкові умови: $a_{0,0} = \mu_{0,0} = 1$, $\mu_{i,j} = 0$, якщо $i < 0$ або $j < 0$. Нехай

$$\Delta_{i,j}^{(r)} := \sum_{m+n=r} a_{m,n}\mu_{m,n}\delta_{i-m,j-n}^{m,n}, \qquad r = 1,2,\dots,i+j-2. \tag{15}$$

Тоді для $i + j \geq 3$ коефіцієнти $a_{i,j}$ ГЛД (8) обчислюються за рекурентним алгоритмом

$$a_{i,j} = \mu_{i,j}^{-1} \left\{ (-1)^{i+j+1} q_{i,j} + \sum_{r=1}^{i+j-2} (-1)^{r+i+j+1} \Delta_{i,j}^{(r)} \right\}. \tag{16}$$

Виходячи з (10), для $i + j = 1$, $m = n = 0$ отримаємо

$$q_{1,0} = a_{1,0}, \qquad q_{0,1} = a_{0,1}.$$

На другому кроці, враховуючи (10), де $i + j = 2$, $m = n = 0$, а також (11) і (12), знаходимо

$$q_{2,0} = a_{1,0}p_{1,0}^{1,0} = -a_{1,0}q_{1,0}^{1,0} = -a_{1,0}a_{2,0},$$

$$q_{1,1} = a_{1,0}p_{0,1}^{1,0} + a_{0,1}p_{1,0}^{0,1} = -a_{1,0}q_{0,1}^{1,0} - a_{0,1}q_{1,0}^{0,1} = -a_{1,1}(a_{1,0} + a_{0,1}),$$

$$q_{0,2} = a_{0,1}p_{0,1}^{0,1} = -a_{0,1}q_{0,1}^{0,1} = -a_{0,1}a_{0,2}.$$

Звідки

$$a_{2,0} = -\frac{q_{2,0}}{a_{1,0}}, \qquad a_{1,1} = -\frac{q_{1,1}}{a_{1,0} + a_{0,1}}, \qquad a_{0,2} = -\frac{q_{0,2}}{a_{0,1}}.$$

Починаючи з третього кроку, коефіцієнти $a_{i,j}$ обчислюємо за формулою (16). Зокрема, для $i + j = 3$ маємо

$$a_{i,j} = \mu_{i,j}^{-1}\left(q_{i,j} - \Delta_{i,j}^{(1)}\right),$$

де

$$\mu_{1,0} = \mu_{0,1} = 1, \qquad \mu_{2,0} = a_{1,0}, \qquad \mu_{1,1} = a_{1,0} + a_{0,1},$$

$$\mu_{0,2} = a_{0,1}, \qquad \mu_{3,0} = a_{2,0}a_{1,0}, \qquad \mu_{2,1} = a_{2,0}a_{1,0} + a_{1,1}(a_{1,0} + a_{0,1}),$$

$$\mu_{1,2} = a_{0,2}a_{0,1} + a_{1,1}(a_{1,0} + a_{0,1}), \qquad \mu_{0,3} = a_{0,2}a_{0,1},$$

i

$$\Delta_{3,0}^{(1)} = a_{1,0}\mu_{1,0}\delta_{2,0}^{1,0}, \qquad \Delta_{2,1}^{(1)} = a_{1,0}\mu_{1,0}\delta_{1,1}^{1,0} + a_{0,1}\mu_{0,1}\delta_{2,0}^{0,1},$$

$$\Delta_{1,2}^{(1)} = a_{1,0}\mu_{1,0}\delta_{0,2}^{1,0} + a_{0,1}\mu_{0,1}\delta_{1,1}^{0,1}, \qquad \Delta_{0,3}^{(1)} = a_{0,1}\mu_{0,1}\delta_{0,2}^{0,1},$$

$$\delta_{2,0}^{m,n} = p_{1,0}^{m,n} q_{1,0}^{m,n} = -a_{m+1,n}^2, \qquad \delta_{0,2}^{m,n} = p_{0,1}^{m,n} q_{0,1}^{m,n} = -a_{m,n+1}^2,$$

$$\delta_{1,1}^{m,n} = p_{1,0}^{m,n} q_{0,1}^{m,n} + p_{0,1}^{m,n} q_{1,0}^{m,n} = -2a_{m+1,n}a_{m,n+1}.$$

Крім того, щоб виконати четвертий крок алгоритму, на третьому кроці потрібно обчислити ще $p_{i,j}^{m,n}$, $q_{i,j}^{m,n}$ такі, що $i + j + m + n = 3$. Враховуючи співвідношення (12), достатньо порахувати лише $q_{i,j}^{m,n}$. З (10) випливає, що

$$q_{1,0}^{2,0} = a_{3,0}, \quad q_{0,1}^{2,0} = q_{1,0}^{1,1} = a_{2,1}, \quad q_{0,1}^{0,2} = a_{0,3}, \quad q_{1,0}^{0,2} = q_{0,1}^{1,1} = a_{1,2}.$$

Враховуючи рівності (11) і (12), маємо

$$q_{2,0}^{1,0} = -a_{2,0}q_{1,0}^{2,0} = -a_{3,0}a_{2,0},$$

$$q_{2,0}^{0,1} = -a_{1,1}q_{1,0}^{1,1} = -a_{2,1}a_{1,1},$$

$$q_{0,2}^{1,0} = -a_{1,1}q_{0,1}^{1,1} = -a_{1,2}a_{1,1},$$

$$q_{0,2}^{0,1} = -a_{0,2}q_{0,1}^{0,2} = -a_{0,2}a_{0,3},$$

$$q_{1,1}^{1,0} = -a_{2,0}q_{0,1}^{2,0} - a_{1,1}q_{1,0}^{1,1} = -a_{2,1}\left(a_{2,0} + a_{1,1}\right),$$

$$q_{1,1}^{0,1} = -a_{1,1}q_{0,1}^{1,1} - a_{0,2}q_{1,0}^{0,2} = -a_{1,2}\left(a_{1,1} + a_{0,2}\right)$$

і т.д.

3. Відповідні регулярні С-дроби для N-кратного степеневого ряду. Запропонований вище алгоритм легко переноситься на N-кратні степеневі ряди. Нехай

$$Q = \sum_{|m(N)|=0}^{\infty} q_{m(N)}\, z^{m(N)} \tag{17}$$

— формальний N-кратний степеневий ряд, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$, $q_{m(n)} \in \mathbb{C}$, $m(N) = m_1, m_2, \ldots, m_N$ — скорочений запис мультиіндекса, $m_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, 2, \ldots, N$; $|m(N)| = m_1 + m_2 + \cdots + m_N$, $z^{m(N)} = z_1^{m_1} z_2^{m_2} \ldots z_N^{m_N}$, причому $q_{0(N)} = q_{0,0,\cdots,0} = 1$. Позначимо через

$$\mathcal{I} := \{j(N) = j_1, j_2, \ldots, j_N, \quad j_p \in \mathbb{Z}_+, \quad p = 1, 2, \ldots, N\},$$

сукупність мультиіндексів. Впровадимо на $\mathcal{I}$ покомпонентно арифметичні операції. Нехай $e_k = \delta_{k,1}, \delta_{k,2}, \ldots, \delta_{k,N}$ — елементи $\mathcal{I}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера; $\mathbf{i}_k := e_{i_k}$, $\mathbf{i}_k^* := \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \cdots + \mathbf{i}_k = j_1 e_1 + j_2 e_2 + \cdots + j_N e_N = j(N)$, $i_k = 1, 2, \ldots, N$, $k = 1, 2, \ldots$. Відповідний гіллястий ланцюговий дріб до ряду (1) шукатимемо у вигляді

$$1 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{\mathbf{i}_k^*} z_{i_k}}{1}. \tag{18}$$

Нехай $j(N) = \mathbf{i}_k^* \in \mathcal{I}$ і

$$Q_{j(N)}^* := \sum_{|m(N)|=0}^{\infty} q_{m(N)}^{j(N)}\, z^{m(N)} \tag{19}$$

— ряд, відповідний до дробу

$$Q_{j(N)} := 1 + \mathop{\mathrm{K}}_{r=k+1}^{\infty} \sum_{i_r=1}^{N} \frac{a_{\mathbf{i}_r^*} z_{i_r}}{1}$$

і

$$P^*_{j(N)} := \sum_{|m(N)|=0}^{\infty} p^{j(N)}_{m(N)} z^{m(N)}$$

— ряд, обернений до (19). За аналогією із співвідношення (10) маємо

$$q^{j(N)}_{m(N)} = \sum_{i=1}^{N} a_{j(N)+e_i} p^{j(N)-e_i}_{m(N)+e_i},$$

де $p^{j(N)}_{0(N)} = q^{j(N)}_{O(N)} = 1$, $p^{j(N)}_{r(N)} = q^{j(N)}_{r(N)} = 0$, якщо існує індекс r_k мультиіндексу $r(N)$ такий, що $r_k < 0$. Коефіцієнти рядів $Q^*_{j(N)}$ і $P^*_{j(N)}$ зв'язані співвідношенням

$$p^{j(N)}_{m(N)} = -q^{j(N)}_{m(N)} + \delta^{j(N)}_{m(N)},$$

де

$$\delta^{j(N)}_{m(N)} := \sum_{s(N)+r(N)=m(N)} p^{j(N)}_{s(N)} q^{j(N)}_{r(N)},$$

причому $s(N), r(N) \in \mathcal{I}$, $s(N), r(N) \neq 0(N)$. Визначимо рекурентно величини $\mu_{m(N)}$:

$$\mu_{m(N)} = \sum_{k=1}^{N} a_{m(N)-e_k} \mu_{m(N)-e_k},$$

з початковими умовами $a_{0(N)} = \mu_{0(N)} = 1$, $\mu_{j(N)} = 0$, якщо існує індекс j_k мультиіндексу $j_{(N)}$ такий, що $j_k < 0$. Нехай

$$\Delta^{(r)}_{m(N)} := \sum_{|j(N)|=r} a_{j(N)} \mu_{j(N)} \delta^{j(N)}_{m(N)-j(N)}, \qquad r = 1, 2, \ldots, |m(N)| - 2.$$

Тоді коефіцієнти ГЛД (18) визначаються за рекурентним алгоритмом

$$a_{m(N)} = \mu^{-1}_{m(N)} \left\{ (-1)^{|m(N)|} q_{m(N)} + \sum_{r=1}^{|m(N)|-2} (-1)^{r+|m(N)|+1} \Delta^{(r)}_{m(N)} \right\}.$$

4. Розвинення гіпергеометричних функцій Аппеля в гіллясті ланцюгові дроби. Гіпергеометричні функції є найважливішим класом спеціальних функцій у застосуваннях. Використовуючи розвинення відношення цих функцій у неперервні дроби, побудовано ефективні алгоритми розвинення у С-дроби багатьох елементарних і спеціальних функцій математичної фізики [6, 14]. Аппель означив гіпергеометричні ряди від двох змінних і переніс на них багато відомих в одновимірному випадку результатів. Ці дослідження підсумовані в монографії [9]. Розглянемо означені Аппелем чотири подвійні ряди:

$$F_1(a, b, b'; c; z_1, z_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b)_m (b')_n}{(c)_{m+n}} \frac{z_1^m z_2^n}{m!n!}, \tag{20}$$

$$F_2(a, b, b'; c, c'; z_1, z_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b)_m (b')_n}{(c)_m (c')_n} \frac{z_1^m z_2^n}{m!n!}, \tag{21}$$

$$F_3(a,a',b,b';c;z_1,z_2)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_m(a')_n(b)_m(b')_n}{(c)_{m+n}}\frac{z_1^m z_2^n}{m!n!}, \tag{22}$$

$$F_4(a,b;c,c';z_1,z_2)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_{m+n}}{(c)_m(c')_n}\frac{z_1^m z_2^n}{m!n!}, \tag{23}$$

де a, a', b, b', c, c' — комплексні сталі, z_1, z_2 — комплексні змінні, причому c, $c'\neq 0,-1,-2,\ldots$, $(d)_k=d(d+1)\ldots(d+k-1)$ — символ Похгаммера.

В роботі [3] наведено розвинення відношення гіпергеометричних функцій (21) у нерегулярний двовимірний С-дріб

$$\frac{F_2(a,b,b';c,c';z_1,z_2)}{F_2(a+1,b,b';c+1,c';z_1,z_2)}=1-\sum_{i_1=1}^{2}\cfrac{u_{i(1)}z_{i_1}}{1-\cfrac{v_{i(1)}z_{i_1}}{1-\sum\limits_{i_2=1}^{2}\cfrac{u_{i(2)}z_{i_2}}{1-\cfrac{v_{i(2)}z_{i_2}}{1-\ddots}}}}, \tag{24}$$

досліджено відповідність цього дробу.

Побудуємо аналогічний розклад у ГЛД відношення гіпергеометричних функцій (23). Мають місце тотожності

$$F_4(a,b;c,c';z_1,z_2)=F_4(a+1,b;c+1,c';z_1,z_2)-\frac{(c-a)b}{c(c+1)}z_1\times$$
$$F_4(a+1,b+1;c+2,c';z_1,z_2)-\frac{b}{c'}z_2F_4(a+1,b+1;c+1,c'+1;z_1,z_2), \tag{25}$$

$$F_4(a,b;c,c';z_1,z_2)=F_4(a,b+1;c+1,c';z_1,z_2)-\frac{(c-b)a}{c(c+1)}z_1\times$$
$$F_4(a+1,b+1;c+2,c';z_1,z_2)-\frac{a}{c'}z_2F_4(a+1,b+1;c+1,c'+1;z_1,z_2), \tag{26}$$

$$F_4(a,b;c,c';z_1,z_2)=F_4(a+1,b;c,c+1';z_1,z_2)-\frac{(c'-a)b}{c'(c'+1)}z_2\times$$
$$F_4(a+1,b+1;c,c'+2;z_1,z_2)-\frac{b}{c}z_1F_4(a+1,b+1;c+1,c'+1;z_1,z_2), \tag{27}$$

$$F_4(a,b;c,c';z_1,z_2)=F_4(a,b+1;c,c+1';z_1,z_2)-\frac{(c'-b)a}{c'(c'+1)}z_2\times$$
$$F_4(a+1,b+1;c,c'+2;z_1,z_2)-\frac{a}{c}z_1F_4(a+1,b+1;c+1,c'+1;z_1,z_2). \tag{28}$$

Введемо скорочені позначення:

$$X_{p,q}=\frac{F_4\left(a+(p+q)/2+1,b+(p+q+1)/2;c+p+1,c'+q;z_1,z_2\right)}{F_4\left(a+(p+q+1)/2,b+(p+q)/2;c+p,c'+q;z_1,z_2\right)},$$

$$p,q=0,1,\ldots,$$

$$X'_{p,q}=\frac{F_4\left(a+(p+q)/2+1,b+(p+q+1)/2;c+p+1,c'+q;z_1,z_2\right)}{F_4\left(a+(p+q+1)/2,b+(p+q)/2;c+p+1,c'+q-1;z_1,z_2\right)},$$

$$p=0,1,2,\ldots,\qquad q=1,2,\ldots,$$

де $[d]$ — найбільша ціла частина числа d. З тотожностей (25)-(28) випливає, що

$$X_{p,q} = \left(1 - a_{p,q} z_1 X_{p+1,q} - b'_{p,q} z_2 X'_{p,q+1}\right)^{-1},$$

$$X'_{p,q} = \left(1 - b_{p,q} z_1 X_{p+1,q} - a'_{p,q} z_2 X'_{p,q+1}\right)^{-1}, \tag{29}$$

$p, q = 0, 1, 2, \ldots,$ де

$$a_{p,q} = \frac{[c - a + (p-q)/2]\,[b + (p+q)/2]}{(c+p)(c+p+1)}, \qquad b_{p,q} = \frac{b + (p+q)/2}{c+p+1},$$

$$a'_{p,q} = \frac{[c' - a + (q-p)/2]\,[b + (p+q)/2]}{(c'+q-1)(c'+q)}, \qquad b'_{p,q} = \frac{b + (p+q)/2}{c'+q},$$

якщо $p+q$ — парне, $p, q = 0, 1, 2, \ldots,$ і

$$a_{p,q} = \frac{[c - b + (p-q+1)/2]\,[a + (p+q+1)/2]}{(c+p)(c+p+1)}, \qquad b_{p,q} = \frac{a + (p+q+1)/2}{c+p+1},$$

$$a'_{p,q} = \frac{[c' - b + (q-p-1)/2]\,[a + (p+q+1)/2]}{(c'+q-1)(c'+q)}, \qquad b'_{p,q} = \frac{a + (p+q+1)/2}{c'+q},$$

якщо $p+q$ — непарне, $p, q = 0, 1, 2, \ldots$. Послідовно вкладаючи одна в одну тотожності (29), отримаємо розвинення у ГЛД відношення функцій Аппеля (23)

$$\frac{F_4(a, b; c, c'; z_1, z_2)}{F_4(a+1, b; c+1, c'; z_1, z_2)} = 1 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{2} \frac{-c_{i(k)} z_{i_k}}{1},$$

де $c_1 = a_{0,0}$, $c_2 = b'_{0,0}$ і для $k \geq 2$

$$c_{i(k)} = \begin{cases} a_{p,q}, & \text{якщо} \quad i_{k-1} = i_k = 1, \\ a'_{p,q}, & \text{якщо} \quad i_{k-1} = i_k = 2, \\ b_{p,q}, & \text{якщо} \quad i_{k-1} = 2, i_k = 1, \\ b'_{p,q}, & \text{якщо} \quad i_{k-1} = 1, i_k = 2, \end{cases}$$

p — кількість одиниць, q — кількість двійок в мультиіндексі $i(k-1)$. Використовуючи тотожність [9]

$$F_1(\alpha, \beta, \beta'; \gamma; x, y) = x^{\beta'} y^{-\beta'} F_1(\beta + \beta', \alpha, \beta'; \gamma, \beta + \beta'; x, 1 - x/y),$$

маємо

$$\frac{F_1(\alpha, \beta, \beta'; \gamma; x, y)}{F_1(\alpha+1, \beta, \beta'; \gamma+1; x, y)} = \frac{F_2(a, b, b'; c, c'; z_1' z_2)}{F_2(a, b+1, b'; c+1, c'; z_1, z_2)},$$

де $a = \beta + \beta'$, $b = \alpha$, $b' = \beta'$, $c = \gamma$, $c' = \beta + \beta'$, $z_1 = x$, $z_2 = 1 - x/y$. Враховуючи розвинення (24), можна побудувати розвинення відношення гіпергеометричних функцій Аппеля (20) у двовимірний С-дріб. У [5] запропоновано інший підхід для розвинення відношення цих функцій у дещо специфічний ГЛД, деякі частинні знаменники якого дорівнюють нулю. Для гіпергеометричних функцій (22) розкладу у ГЛД не знайдено. Залишається відкритим питання збіжності побудованих розкладів. Аналогічні результати можна встановити також і для гіпергеометричних функцій від N змінних Lauricella [13].

Огляд результатів, присвячених збіжності двовимірних С-дробів (5) наведено в [10], ГЛД (6) — в [16]. У роботі [1] встановлено необхідну й достатню умову збіжності дробу (6) і його N-вимірного узагальнення для випадку позитивних елементів. В [2, 4, 10] наведено ознаки збіжності як регулярних, так і нерегулярних N-вимірних С-дробів.

1. *Боднар Д. И.* Исследование сходимости одного класса ветвящихся цепных дробей // Цепные дроби и их применение. – К.: ИМ АН УССР. – 1976. – С. 41–44.
2. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наук. думка, 1986. – 176 с.
3. *Боднар Д. И.* Разложение отношения гипергеометрических функций двух переменных в ветвящиеся цепные дроби // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1990. – Вып. 32. – С. 40–44.
4. *Боднар Д. И.* Соответствующие ветвящиеся цепные дроби с линейными частными числителями для двойного степенного ряда // Укр. мат. журнал. – 1991. – **43**, № 4. – С. 474–482.
5. *Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. – К.: Наук. думка, 1974. – 272 с.
6. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
7. *Кучминская Х. И.* Соответствующая и присоединенная ветвящиеся цепные дроби для двойного степенного ряда // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1978. – № 7. – С. 614–617.
8. *Сявавко М. С.* Інтегральні ланцюгові дроби. – К.: Наук. думка, 1994. – 205 с.
9. *Appell P., Kampe de Feriet* Fonction hypergeometriques et hyperspheriques. Polynommes d'Hermite. – Paris: Gouthier-Villars, 1926. – 434 p.
10. *Bodnar D., Kuchmins'ka Kh. Sus' O.* A survey of analytic theory of branched continued fractions // Communications in the Analytic Theory of Continued Fractions. – 1993. – **2**. – P. 4–23.
11. *Cuyt A., Verdonk B.* Multivariate rational interpolation // Computing. – 1985. – **34**. – P. 41–61.
12. *Cuyt A., Verdonk B.* A review of branched continued fraction theory for the construction of multivariate rational approximants // Applied Numerical Mathematics. – 1988. – **4**. – P. 263–271.
13. *Lauricella G.* Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili // Rend. Circ. Mat. Palermo. – 1893. – **7**. – P. 111–113.
14. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued Fractions with Application. – Amsterdam: North-Holland, 1992, – 606 p.
15. *Murphy J., O'Donohoe M.* A two-variable generalizations of the Stieltjes-type continued fractions // J. Comp.and Appl. Math. – 1978. – N:4. – P. 181–190.
16. *Siemaszko W.* Branched continued fractions for double power series // J.Comp. and Appl. Math. – 1980. – **6**, N:2. – P. 121–125.
17. *Siemaszko W.* On some conditions for convergence of branched continued fractions // Lecture Notes in Math. – 1982.– **888**. – P. 367–370.
18. *Waadeland H.* A Worpitzky boundary theorem for N-branched continued fractions // Communications in the Analytic Theory of Continued Fractions. – 1993. – **2**. – P. 24–29.

МНОГОМЕРНЫЕ С-ДРОБИ

Рассмотрены аналоги регулярных и нерегулярных С-дробей для функций многих переменных, построены алгоритмы разложений в эти дроби кратных степенных рядов и отношения гипергеометрических функций Аппеля.

THE MULTIVARIABLE C-FRACTIONS

The analogs of regular and non-regular C-fractions for multivariable functions are considered and the algoritms for the expansion of the multiple power series and ratio of the Appell hypergeometric functions into these fractions are constructed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Отримано
12.10.94