Тернопільський національний економічний університет

І.Я. Співак, С.Я. Крепич

Прикладні аспекти інтервальних обчислень

Навчальний посібник

Тернопіль, 2019

УДК.519.6

Прикладні аспекти інтервальних обчислень. Навчальний посібник / За ред. *Співак І.Я., Крепич І.Я./* для магістрів галузі знань 12 «Інформаційні технології», спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» та спеціалізації «Математичне та програмне забезпечення комп'ютерних систем». – Тернопіль: ФОП Паляниця В.А., 2019. - 153 с.

Відповідальний за випуск: Пукас Андрій Васильович, д.т.н., професор., завідувач кафедри комп'ютерних наук ТНЕУ

Рецензенти: доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри програмної інженерії Тернопільського національного технічного університету імені І.Пулюя Петрик М.Р.

доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп'ютерних систем та мереж Тернопільського національного технічного університету імені І.Пулюя Лупенко С.А.

кандидат технічних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук Тернопільського національного педагогічного університету імені В.Гнатюка Франко Ю.П.

Інтервальні обчислення є теоретичною основою усіх інтервальних методів моделювання. Своєю чергою інтервальні обчислення побудовані на базі методів інтервального аналізу.

Методи інтервального аналізу дозволяють враховувати похибки введення вхідних даних, які у даному випадку набувають вигляду скінчених інтервалів, а також похибки заокруглень при обчисленнях на ПК. При цьому результат розрахунків подається в інтервальному вигляді.

Методи інтервального аналізу та їхній розвиток створили передумови розвитку трьох напрямків наукової та практичної діяльності, пов'язаної з математичним моделюванням об'єктів на основі інтервальних даних – математичного, комп'ютерного прикладного.

Розглянуто та рекомендовано до друку на засіданні кафедри комп'ютерних наук ТНЕУ (протокол № 3 від 23 жовтня 2019 року)

Затверджено на засіданні групи забезпечення спеціальності «Інженерія програмного забезпечення» (протокол № 2 від 23 жовтня 2019 року)

Затверджено на засіданні вченої ради факультету комп'ютерних інформаційних технологій (протокол № 3 від 20 листопада 2019 року)

Затверджено на засіданні вченої ради Тернопільського національного економічного університету (протокол № 4 від 27 листопада 2019 року)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Інтервальні обчислення є теоретичною основою усіх інтервальних методів моделювання. Своєю чергою інтервальні обчислення побудовані на базі методів інтервального аналізу.

Основи інтервального аналізу були розроблені на вимогу часу – як засіб урахування похибок при розрахунках на ЕОМ.

Методи інтервального аналізу дозволяють враховувати похибки введення вхідних даних, які у даному випадку набувають вигляду скінчених інтервалів, а також похибки заокруглень при обчисленнях на ЕОМ. При цьому результат розрахунків подається в інтервальному вигляді.

При реалізації інтервальних обчислень виникають значні проблеми, коли традиційні чисельні методи безпосередньо переносяться на інтервальні числа. В результаті такого перенесення відбувається значне розширення результуючого інтервалу. Інші проблеми, які стосуються інтервальних обчислень, пов’язані із виконанням операції ділення на інтервали, які включають нуль. Внаслідок розширення інтервалів при реалізації обчислень, такі ситуації виникають досить часто.

Проблеми, пов’язані із застосуванням класичної інтервальної арифметики, часто вдається подолати із застосуванням розширених інтервальних арифметик.

Ширина результуючого інтервалу в інтервальних обчисленнях залежить від порядку виконання операцій.

В математичній енциклопедії інтервальний аналіз розглядається як наукова дисципліна, що застосовується для врахування похибок заокруглень при розрахунках на ЕОМ. У довідковій літературі по математичних методах, поняття інтервального аналізу часто хибно трактується як “арифметика інтервалів”. Однак розвиток методів інтервального аналізу призвів до певної еволюції його наукової термінології та самого трактування. Наприклад, у низці робіт інтервальний аналіз розглядається у більш ширшому трактуванні - як теоретико-множинний підхід. У межах інтервального аналізу зручно виділити методи аналізу інтервальних даних, під якими розуміють методи, направлені на розв'язування задач моделювання з інтервальними невизначеностями в експериментальних даних, дослідження механізмів впливу невизначеностей на їх формування, отримання та дослідження математичних моделей об'єктів з множинними оцінками параметрів.

Методи інтервального аналізу створили передумови розвитку трьох напрямків наукової та практичної діяльності:

- дослідження математичних проблем інтервальних обчислень;
- дослідження питань створення та використання інтервальних обчислень;
- використання методів інтервального аналізу і відповідних комп'ютерних засобів для побудови та дослідження математичних моделей широкого класу об'єктів.

РОЗДІЛ 1
ДІЙСНА ТА КОМПЛЕКСНА ІНТЕРВАЛЬНА АРИФМЕТИКА

1.1 Дійсна інтервальна арифметика

Основна ідея інтервальних обчислень полягає у наведені дійсного числа не одним машинним числом, а двома, які задають його гарантовані межі. Позначимо множину дійсних чисел через R, а малі літери a, b,c,…,x, y, z будуть використовуватись для позначення її елементів. Підмножина A множини R така, що

$$A=[a_1,\, a_2]=\{t|a_1\le t\le a_2,\; a_1,a_2\in R\},$$

буде називатись **закритим дійсним інтервалом** або просто **інтервалом**.

Множина всіх закритих дійсних інтервалів позначається через множину I(R), а великі літери A, B, C,…,X, Y, Z позначають її елементи. Будь-яке дійсне число x з R може рахуватись особливим елементом з I(R), яке має вигляд $[x,\, x]$, що часто називається точковим інтервалом.

Визначення. Два інтервала $A=[a_1,\, a_2]$ та $B=[b_1,\, b_2]$ називаються **рівними** (записуються: A=B), якщо вони рівні в теоретико-множинному розумінні, а саме

$$A=B\Leftrightarrow a_1=b_1,\; a_2=b_2\,.$$

Арифметику дійсних чисел можна узагальнити, ввівши бінарні операції над елементами з I(R) [1].

Визначення. Нехай $*\in\{+,\,-,\,\times,\,\div\}$ - бінарна операції на множині дійсних чисел. Якщо $A,B\in I(R)$, то відношення

$$A*B=\{z=a*b|\;\; a\in A,\, b\in B\}$$

визначає бінарну операцію на I(R).

Результат операцій над інтервалами $A=[a_1, a_2]$ та $B=[b_1, b_2]$ можна представити наявно за допомогою формул:

$$
\begin{aligned}
&A+B=[a_1+b_1;\ a_2+b_2],\\
&A-B=[a_1-b_2;\ a_2-b_1],\\
&A\cdot B=[\min\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\},\ \max\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}]\\
&A\div B=[a_1, a_2]\cdot[1/b_2, 1/b_1]
\end{aligned}
$$

Операції інтервальної арифметики можуть бути доповнені іншими традиційними, в основному унарними, операціями над інтервалами. Прикладами таких унарних операцій можуть слугувати $X^k\,(k\in R), e^x, \ln X, \sin X, \cos X$ і т.д.

До найбільш важливих <u>властивостей операцій над інтервалами</u> $A=[a_1, a_2]$ та $B=[b_1, b_2]$ на множині I(R) відносять:

- $\left.\begin{aligned} &A+B=B+A\\ &A\cdot B=B\cdot A\end{aligned}\right\}$ *комутативність*

- $\left.\begin{aligned} &(A+B)+C=A+(B+C)\\ &(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)\end{aligned}\right\}$ *асоціативність*

- $\left.\begin{aligned} &a\cdot(B+C)=a\cdot B+a\cdot C,\\ &\qquad \text{де } a\in R,\\ &A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C,\\ &\qquad \text{якщо } b\cdot c\ge 0\ \ \forall\, b\in B,\ c\in C\end{aligned}\right\}$ *дистрибутивність*

- $X=[0, 0]$ та $Y=[1, 1]$ - *єдині нейтральні елементи відповідно додавання та множення*, а саме

$$A = [0,\, 0] + A = A + [0,\, 0]$$
$$A = [1,\, 1] \cdot A = A \cdot [1,\, 1] \;.$$

Example

Обчислити, використовуючи правила інтервальної арифметики.

Solution

$$[-7,\, 3] + [0,\, 5] = [-7+0,\, 3+5] = [-7,\, 8]$$

$$[-7,\, 3] - [0,\, 5] = [-7-5,\, 3-0] = [-12,\, 3]$$

$$[-7,\, 3] \cdot [0,\, 5] = [min\{(-7\cdot 0),(-7\cdot 5),(3\cdot 0),(3\cdot 5)\},\; max\{(-7\cdot 0),(-7\cdot 5),(3\cdot 0),(3\cdot 5)\}] =$$
$$= [min\{0,\, -35,\, 0,\, 15\}, max\{0,\, -35,\, 0,\, 15\}] = [-35,\; 15]$$

$$[-7,\, 3] \div [2,\, 5] = [-7,\, 3] \cdot [\frac{1}{5},\, \frac{1}{2}] = [min\{(-7\cdot\frac{1}{5}),(-7\cdot\frac{1}{2}),(3\cdot\frac{1}{5}),(3\cdot\frac{1}{2})\},$$
$$max\{(-7\cdot\frac{1}{5}),(-7\cdot\frac{1}{2}),(3\cdot\frac{1}{5}),(3\cdot\frac{1}{2})\}] =$$
$$= [min\{-\frac{7}{5},-\frac{7}{2},\frac{3}{5},\frac{3}{2}\}, max\{-\frac{7}{5},-\frac{7}{2},\frac{3}{5},\frac{3}{2}\}] = [-\frac{7}{2},\frac{3}{2}]$$

1.2 Розв’язок лінійного інтервального рівняння

Розглянемо знаходження розв’язку лінійного рівняння, в якому всі змінні представлені в інтервальному вигляді:

$$[a_1,\, a_2] \cdot [x_1,\, x_2] = [b_1,\, b_2],$$

при цьому $[a_1, a_2] \neq [0, 0]$ та $[x_1, x_2] \in I(R)$. У якому випадку дане рівняння має розв'язок?

Відповідь на це запитання дає правило, яке побудоване на допоміжній функції χ Ратшека:

$$\chi(A) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{a_1}{a_2}, & \text{якщо } |a_1| \leq |a_2| \\ \dfrac{a_2}{a_1}, & \text{в інших випадках} \end{array} \right\}.$$

Рівняння $[a_1, a_2] \cdot [x_1, x_2] = [b_1, b_2]$ має розв'язок відносно $[x_1, x_2]$, якщо $\chi(A) \geq \chi(B)$.

При цьому розв'язок не єдиний, якщо $\chi(A) = \chi(B) \leq 0$.

Що означає розв'язок $[x_1; x_2]$ рівняння $[a_1, a_2] \cdot [x_1, x_2] = [b_1, b_2]$? Це означає, що необхідно скласти систему рівнянь для визначення верхньої та нижньої меж невідомого інтервала$[x_1, x_2]$:

$$\begin{cases} min\{a_1x_1,\, a_1x_2,\, a_2x_1,\, a_2x_2\} = b_1 \\ max\{a_1x_1,\, a_1x_2,\, a_2x_1,\, a_2x_2\} = b_2 \end{cases}.$$

Проте в інтервальному аналізі існує поняття «алгебраїчного» розв'язку лінійного рівняння у вигляді $[x_1, x_2]_{alg} = [b_1, b_2]/[a_1, a_2]$ і при цьому справедливим є наступне включення:

$$[x_1, x_2] \subseteq [x_1, x_2]_{a\lg}.$$

Як видно, алгебраїчний розв'язок включає інтервал, який забезпечує виконання умови $[a_1, a_2] \cdot [x_1, x_2] = [b_1, b_2]$.

Example

Оцінити за числом Ратшека розв’язок рівняння $[4,5]\cdot[x]=[2,4]$. Знайти його алгебраїчний розв’язок.

Solution

1) Шукаємо число Ратшека:

$$1)\ 4<5,\ \textit{тоді}\ \ \chi(A)=\frac{a_1}{a_2}=\frac{4}{5};$$

$$2)\ 2<4,\ \textit{тоді}\ \ \chi(B)=\frac{b_1}{b_2}=\frac{1}{2}.$$

2) Порівнюємо $\chi(A)$ та $\chi(B)$:

$$\frac{4}{5}>\frac{1}{2}\ -\ \textit{рівняння має розв'язок}.$$

3) Складаємо систему для визначення невідомого інтервала $[x]$:

$$\begin{cases}\min\{4x_1,4x_2,5x_1,5x_2\}=2\\ \max\{4x_1,4x_2,5x_1,5x_2\}=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x_1=2\\ 5x_2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}\\ x_2=\dfrac{4}{5}\end{cases}.$$

4) Шукаємо алгебраїчний розв’язок рівняння:

$$[x]_{a\lg}=\frac{[b]}{[a]}=\frac{[2,4]}{[4,5]}=[2,4]\cdot[\frac{1}{5},\frac{1}{4}]=[\min\{\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5},1\},\ \max\{\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5},1\}]=[\frac{1}{2},1]$$

5) Перевірка

$$[\frac{1}{2}, \frac{4}{5}] \subset [\frac{1}{2}, 1] - \textit{включення відбувається}.$$

1.3. Метрики інтервалів: відстань між двома інтервалами, абсолютна величина інтервалу, ширина та середина інтервалу

Введемо поняття відстані на множині дійсних інтервалів.

Визначення. **Відстань** (q) між двома інтервалами $A = [a_1, a_2]$ та $B = [b_1, b_2]$, такими, що належать множині $I(R)$, визначається рівністю:

$$q(A, B) = max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}.$$

Визначення. Нехай $A = [a_1, a_2]$ належить $I(R)$. **Абсолютною величиною** $|\ |$ даного інтервалу називається величина:

$$|A| = q([a_1, a_2],[0, 0]) = max\{|a_1|, |a_2|\}.$$

Очевидно, що якщо $A = [a_1, a_2]$ та $B = [b_1, b_2]$ належать $I(R)$, то

$$A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|.$$

Визначення. **Шириною** (wid) інтервалу $A = [a_1, a_2]$ називається величина:

$$wid(A) = a_2 - a_1 \geq 0.$$

Із визначення ширини інтервалу отримуємо наступні властивості:

1. $A \subseteq B \Rightarrow wid(A) \le wid(B)$,
2. $wid(A \pm B) = wid(A) + wid(B)$,
3. $wid(AB) \le wid(A) \cdot |B| + |A| \cdot wid(B)$,
4. $wid(AB) \ge \max\{|A| \cdot wid(B),\ |B| \cdot wid(A)\}$,
5. $wid(aB) = |a| \cdot wid(B),\ a \in R$,
6. $wid(A) = |A - A|$,
7. $A \subseteq B \Rightarrow \frac{1}{2}(wid(B) - wid(B)) \le q(A, B) \le wid(B) - wid(A)$.

Визначення. **Серединою** (mid) інтервалу $A = [a_1, a_2]$ називається величина:

$$mid(A) = \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Example

Знайти відстань між інтервалами $[a]\cdot[b]$ та $[a]\cdot[c]$ та ширину (wid) інтервалу $[a]^2 + [b]\cdot[c] + [c]^2$ при A=[3, 5], B=[-2, 6], C=[-1, 1].

Solution

1) Знаходимо інтервал $[h] = [a]\cdot[b]$:

$$[h] = [3, 5]\cdot[-2, 6] = [\min\{-6, -10, 18, 30\}, \max\{-6, -10, 18, 30\}] = [-10, 30].$$

2) Знаходимо інтервал $[g] = [a]\cdot[c]$:

$$[g]=[3,5]\cdot[-1,1]=[\min\{-3,3,-5,5\},\max\{-3,3,-5,5\}]=[-5,5].$$

3) Знаходимо відстань між інтервалами $[h]$ та $[g]$:

$$\delta([h],[g])=\delta([-10,30],[-5,5])=\max\{|-10-(-5)|,|30-5|\}=\max\{5,25\}=25.$$

4) Знаходимо інтервал $[a]^2$:

$$[3,5]^2=[3,5]\cdot[3,5]=[\min\{9,15,15,25\},\max\{9,15,15,25\}]=[9,25].$$

5) Знаходимо інтервал $[b]\cdot[c]$:

$$[-2,6]\cdot[-1,1]=[\min\{2,-2,-6,6\},\max\{2,-2,-6,6\}]=[-6,6].$$

6) Знаходимо інтервал $[c]^2$:

$$[-1,1]^2=[-1,1]\cdot[-1,1]=[\min\{1,-1,-1,1\},\max\{1,-1,-1,1\}]=[-1,1].$$

7) Знаходимо інтервал $[a]^2+[b]\cdot[c]+[c]^2$:

$$[9,25]+[-6,6]+[-1,1]=[9-6-1,\ 25+6+1]=[2,32].$$

8) Знаходимо ширину wid інтервалу $[a]^2+[b]\cdot[c]+[c]^2$:

$$wid([2,32])=32-2=30.$$

1.4 Комплексна інтервальна арифметика

Тепер розглянемо так звану комплексну інтервальну арифметику. Більшість властивостей та результатів, отриманих для дійсної інтервальної арифметики, можна перенести на випадок комплексної. Щоб це зробити, необхідно визначити множину комплексних чисел, яка буде використовуватись у якості комплексних інтервалів.

Визначення. Нехай A_1 та A_2 - довільні елементи з I(R). Тоді множина комплексних чисел

$$A = \{a = a_1 + ia_2 \,|\, a_1 \in A_1, a_2 \in A_2,\ i = \sqrt{-1}\}$$

називається **комплексним інтервалом**.

Визначені таким чином множини комплексних чисел можуть бути зображені на комплексній площині у вигляді прямокутників із сторонами, паралельними осям координат. Множину всіх таких інтервалів позначають через R(C), а великі літери A, B, C,…,X, Y, Z використовують для позначення її елементів.

Комплексне число $a = a_1 + ia_2$ можна розглядати як точковий комплексний інтервал

$$A = [a_1, a_1] + i[a_2, a_2] \in R(C),$$

а кожний елемент A_1 з I(R) – як суму $A = A_1 + i[0,0]$.

Визначення. Нехай $A = A_1 + iA_2$ та $B = B_1 + iB_2$ - два елементи з R(C). Тоді A та B вважаються рівними (A=B) якщо

$$A_1 = B_1,\ \ A_2 = B_2.$$

Дане відношення рівності рефлексивне, симетричне та транзитивне.

Узагальнимо арифметику комплексних чисел.

Визначення. Нехай $* = \{+, -, \cdot, \div\}$ - бінарна операція над елементами з I(R). Тоді, якщо $A = A_1 + iA_2$ та $B = B_1 + iB_2$ маємо:

$$
\begin{aligned}
&A \pm B = A_1 \pm B_1 + i(A_2 \pm B_2) \\
&A \cdot B = A_1 B_1 - A_2 B_2 + i(A_1 B_2 + A_2 B_1) \quad . \\
&A \div B = \frac{A_1 B_1 + A_2 B_2}{B_1^2 + B_2^2} + \frac{i(A_2 B_1 - A_1 B_2)}{B_1^2 + B_2^2}
\end{aligned}
$$

Вираз $B_1^2 + B_2^2$ слід вираховувати за правилом

$$B_1^2 + B_2^2 = \{b_1^2 \,|\, b_1 \in B_1\} + \{b_2^2 \,|\, b_2 \in B_2\}.$$

Example

Застосувати правила інтервальної арифметики для таких комплексних інтервалів $A = [2,\ 4] + i[1,\ 2]$ та $B = [-3,\ 5] + i[-2,\ 2]$.

Solution

Визначаємо дійсні інтервали, складові комплексних:

$$A_1 = [2,\ 4], \quad A_2 = [1,\ 2], \quad B_1 = [-3,\ 5], \ B_2 = [-2,\ 2]$$

$$A + B = A_1 + B_1 + i(A_2 + B_2) = ([2,\ 4] + [-3,\ 5]) + i([1,\ 2] + [-2,\ 2]) = [-1,\ 9] + i[-1,\ 4].$$

$$A - B = A_1 - B_1 + i(A_2 - B_2) = ([2,4] - [-3,5]) + i([1,2] - [-2,2]) = [-3,7] + i[-1,4].$$

$$\begin{aligned} A \cdot B &= A_1B_1 - A_2B_2 + i(A_1B_2 + A_2B_1) = ([2,4]\cdot[-3,5] - [1,2]\cdot[-2,2]) + \\ &+ i([2,4]\cdot[-2,2] + [-3,5]\cdot[1,2]) = ([-12,20] - [-4,4]) + i([-8,8] + [-6,10]) = . \\ &= [-16,24] + i[-14,18] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{A_1B_1 + A_2B_2}{B_1^2 + B_2^2} + \frac{i(A_2B_1 - A_1B_2)}{B_1^2 + B_2^2} = \frac{[2,4]\cdot[-3,5] + [1,2]\cdot[-2,2]}{([-3,5])^2 + ([-2,2])^2} + \\ &+ i\left(\frac{[-3,5]\cdot[1,2] - [2,4]\cdot[-2,2]}{([-3,5])^2 + ([-2,2])^2}\right) = \frac{[-12,20] + [-4,4]}{[9,25] + [4,4]} + i\left(\frac{[-6,10] - [-8,8]}{[9,25] + [4,4]}\right) = \\ &= \frac{[-16,24]}{[13,29]} + i\left(\frac{[-14,18]}{[13,29]}\right) = [-1.23,\ 1.85] + i[-1.08,\ 1.38] \end{aligned}$$

Програмна реалізація обчислень виразів та рівнянь, заданих в інтервальному вигляді, мовою програмування Java

Розробити програмну систему для обчислення комплексних інтервальних виразів. Програма повинна:

- обчислювати інтервальні вирази за відомими арифметичними операціями (+, -, *, /);
- основи 2 комплексних інтервалів, необхідних для виконання ЛИШЕ арифметичних операцій, повинні формуватись із виразів, введених вручну користувачем або зчитані з файлу;
- введені вирази повинні містити НЕ МЕНШЕ 6 інтервалів, між якими проставлені арифметичні операції та дужки, які визначають пріоритетність виконання цих операцій;
- отримані результати обчислень двох введених виразів стають відповідно основами комплексних інтервалів А та В, а комплексна частина інтервалів формується шляхом ділення основи навпіл.

Обчислення виразу 1:

$$[1,1]/[1,1]+[5,6]/[5,7]-([-5,0]\cdot[-1,8])=[1,1]+[0.71,1.2]-[-40,5]=$$
$$=[1.71,2.2]-[-40,5]=[-3.29,42.2]$$

Обчислення виразу 2:

$$[1,2]/[1,2]+[4,6]/[5,5]-([-4,1]\cdot[-5,4])=[0.5,2]+[0.8,1.2]-[-16,20]=$$
$$=[1.3,3.2]-[-16,20]=[-18.7,19.2]$$

Комплексний інтервал 1: $\left[-3.29,\ 42.2\right]+i\left[-1.65,\ 21.1\right]$

Комплексний інтервал 2: $\left[-18.7,\ 19.2\right]+i\left[-9.35,\ 9.6\right]$

Обчислення суми комплексних інтервалів:

$$([-3.29,42.2]+i[-1.65,21.1])+([-18.7,19.2]+i[-9.35,9.6])=$$
$$=([-3.29,42.2]+[-18.7,19.2])+i([-1.65,21.1]+[-9.35,9.6])=$$
$$=[-21.99,6.14]+i[-11,30.7]$$

Обчислення різниці комплексних інтервалів:

$$([-3.29,42.2]+i[-1.65,21.1])-([-18.7,19.2]+i[-9.35,9.6])=$$
$$=([-3.29,42.2]-[-18.7,19.2])+i([-1.65,21.1]-[-9.35,9.6])=$$
$$=[-23.12,60.9]+i[-11.25,30.45]$$

Обчислення добутку комплексних інтервалів:

$$([-3.29,42.2]+i[-1.65,21.1])\times([-18.7,19.2]+i[-9.35,9.6])=$$
$$=([-3.29,42.2]\times[-18.7,19.2])-([-1.65,21.1]\times[-9.35,9.6])+$$
$$+i([-3.29,42.2]\times[-9.35,9.6]+-1.65,21.1]\times[-18.7,19.2])=$$
$$=[-991.7,1007.52]+i[-798.14,810.24]$$
$$=[-21.99,6.14]+i[-11,30.7]$$

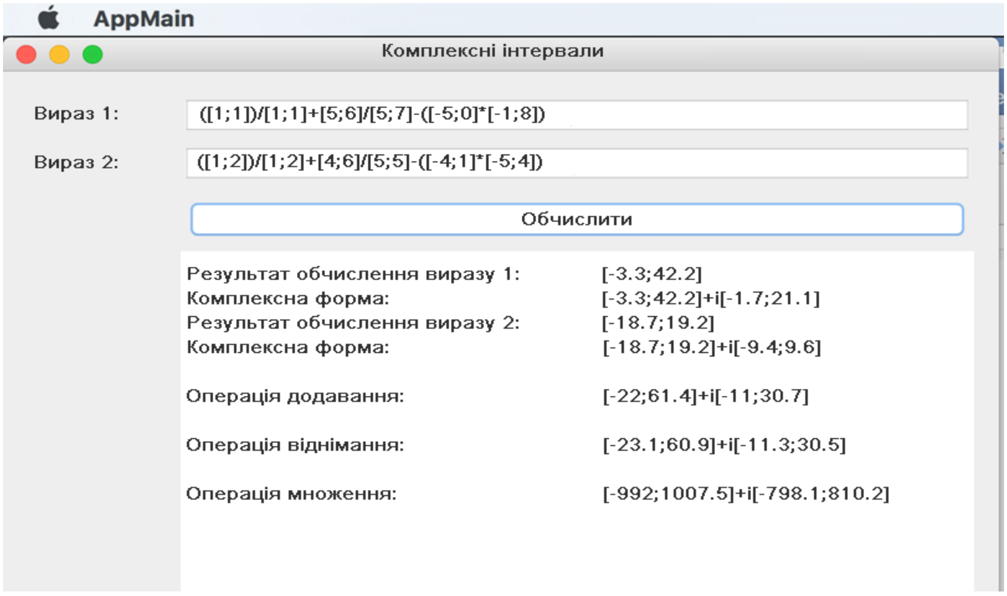


Рисунок 1.1 – Екранна форма програмної системи

Код програми, який ілюструє обчислення основних операцій над інтервалами:

- <u>операції над звичайними інтервалами</u>:

```
importjava.util.Arrays;
importjava.util.Collections;
importjava.util.List;
publicclassOperation {
publicOperation(IntervalintervalA, IntervalintervalB) {
this.intervalA = intervalA;
this.intervalB = intervalB;
    }
publicIntervalintervalA;
publicIntervalintervalB;
publicIntervaladd(){
returnnewInterval(this.intervalA.getA() + this.intervalB.getA(), this.intervalA.getB() + this.intervalB.getB());
    }
publicIntervalminus(){
returnnewInterval(this.intervalA.getA() - this.intervalB.getB(), this.intervalA.getB() - this.intervalB.getA());
    }
publicIntervalmultiplication(){
List<Double>values =this.getMultiSet();
returnnewInterval(Collections.min(values), Collections.max(values));
    }
publicIntervaldivision(){
List<Double>values =this.getDivSet();
returnnewInterval(Collections.min(values), Collections.max(values));
    }
privateList<Double>getMultiSet(){
returnArrays.asList(
this.intervalA.getA() * this.intervalB.getA(),
this.intervalA.getA() * this.intervalB.getB(),
this.intervalA.getB() * this.intervalB.getA(),
this.intervalA.getB() * this.intervalB.getB()
        );
    }
privateList<Double>getDivSet(){
```

```
returnArrays.asList(
this.intervalA.getA() / this.intervalB.getA(),
this.intervalA.getA() / this.intervalB.getB(),
this.intervalA.getB() / this.intervalB.getA(),
this.intervalA.getB() / this.intervalB.getB()
    );    }    }
```

- операції над комплексними інтервалами:

```
publicclassComplexOperation {
privateComplexIntervalintervalA;
privateComplexIntervalintervalB;
publicComplexOperation(ComplexIntervalintervalA, ComplexIntervalintervalB) {
this.intervalA = intervalA;
this.intervalB = intervalB;
  }
publicComplexIntervalgetIntervalA() {
returnintervalA;
  }
publicvoidsetIntervalA(ComplexIntervalintervalA) {
this.intervalA = intervalA;
  }

publicComplexIntervalgetIntervalB() {
returnintervalB;
  }
publicvoidsetIntervalB(ComplexIntervalintervalB) {
this.intervalB = intervalB;
  }
publicComplexIntervaladd(){
    //calcbase
OperationbaseOperation = newOperation(this.intervalA.getBase(), this.intervalB.getBase());
OperationimageOperation = newOperation(this.intervalA.getImg(), this.intervalB.getImg());
returnnewComplexInterval(baseOperation.add(), imageOperation.add());
  }
publicComplexIntervalminus(){
    //calcbase
OperationbaseOperation = newOperation(this.intervalA.getBase(), this.intervalB.getBase());
OperationimageOperation = newOperation(this.intervalA.getImg(), this.intervalB.getImg());

returnnewComplexInterval(baseOperation.minus(), imageOperation.minus());
  }
publicComplexIntervalmultiplication(){
Operation baseOperation11 = newOperation(this.intervalA.getBase(), this.intervalB.getBase());
Operation imageOperation22 = newOperation(this.intervalA.getImg(), this.intervalB.getImg());
OperationbaseOperationMain = newOperation(baseOperation11.multiplication(), imageOperation22.multiplication());
Operation baseImageOperation12 = newOperation(this.intervalA.getBase(), this.intervalB.getImg());
Operation imageBaseOperation21 = newOperation(this.intervalA.getImg(), this.intervalB.getBase());
OperationimageOperationMain = newOperation(baseImageOperation12.multiplication(),
imageBaseOperation21.multiplication());
returnnewComplexInterval(baseOperationMain.minus(), imageOperationMain.add());
    }  }
```

Питання для самоконтролю

1. Яка ознака рівності двох інтервалів?
2. Які основні операції інтервальної арифметики?
3. Які основні властивості операцій над інтервалами?
4. Яке призначення допоміжної функції Ратшека?
5. Як визначається абсолютна величина інтервалу?
6. Як визначається відстань між інтервалами?

7. Як визначається ширина інтервалу?
8. Як формується комплексний інтервал?
9. Як проводиться операція ділення комплексних інтервалів?
10. Які основні властивості операцій над комплексними інтервалами?

Варіанти завдань для самостійної роботи

№ п/п	№ виразу	Вираз	Формування комплексної частини інтервальних виразів
1	1	$[1,4]-[-3,5]\cdot([4,5]+[8,9])-[-1,1]/[4,5]$	Ділення основ на 3
	2	$[0,8]-[-4,1]\cdot([3,5]+([-1,2]/[4,5]-[0,2]))$	
2	1	$[3,6]\cdot[-1,1]+([0,3]-[-3,5])/[-2,7]-[2,9]$	Множення основ на 2
	2	$([3,8]-[0,4])\cdot([-1,1]-[-3,3])-[0,3]/[-2,2]$	
3	1	$[3,4]+(([5,6]/[2,3]-[0,8])/[-1,1]+[2,3])$	Відняти від основ інтервал $[-3,3]$
	2	$[-4,1]+[-7,1]\cdot([3,5]-([-1,2]\cdot[4,5]-[0,2]))$	
4	1	$[-7,7]+[-13,4]/[-1,1]\cdot([0,3]+[-2,7]-[-3,4])$	Додати до основ інтервал $[-2,2]$
	2	$([3,8]+[0,4])\cdot([-1,1]+[-3,3])+[0,3]/[-2,2]$	
5	1	$([3,4]-[2,4])\cdot([-4,1]-[-3,4])-[-3,3]/[-2,6]$	Поділити основи на інтервал $[-1,1]$
	2	$[-7,7]-[-13,4]\cdot[-1,1]/([0,3]+[-2,7]-[-3,4])$	
6	1	$[-4,1]+[-7,1]\cdot([3,5]-([-1,2]\cdot[4,5]-[0,2]))$	Помножити основи на інтервал $[0,2]$
	2	$[1,4]+[-3,5]\cdot([4,5]-[8,9])+[-1,1]/[4,5]$	
7	1	$[0,4]+(([-5,6]/[2,6]-[-1,2])/[-1,3]+[4,5])$	Додати до основ інтервал $[-2,2]$
	2	$[3,6]\cdot[-1,1]+([0,3]-[-3,5])/[-2,7]-[2,9]$	
8	1	$[3,6]\cdot[-1,1]+([0,3]-[-3,5])/[-2,7]-[2,9]$	Поділити основи на інтервал $[-1,1]$
	2	$[-1,4]+(([0,6]/[2,3]-[4,8])/[-5,1]-[2,6])$	
9	1	$([3,8]+[0,4])\cdot([-1,1]+[-3,3])+[0,3]/[-2,2]$	Помножити основи на інтервал $[0,2]$
	2	$[-1,6]\cdot[-1,6]+([-3,3]-[1,5])/[-2,7]-[2,6]$	
10	1	$[0,8]-[-4,1]\cdot([3,5]+([-1,2]/[4,5]-[0,2]))$	Ділення основ на 3
	2	$[0,8]-[-2,1]/([3,5]+([-1,2]/[3,7]-[-2,2]))$	
11	1	$([3,8]+[0,4])\cdot([-1,1]+[-3,3])+[0,3]/[-2,2]$	Відняти від основ інтервал $[-3,3]$
	2	$[0,4]+(([1,6]/[-2,3]+[0,8])/[-1,5]+[2,3])$	
12	1	$[3,6]\cdot[-1,1]+([0,3]-[-3,5])/[-2,7]-[2,9]$	Додати до основ інтервал $[-2,2]$
	2	$[3,6]\cdot[-1,1]+([0,3]-[-3,5])/[-2,7]-[2,9]$	
13	1	$[1,4]-[-3,5]/([4,5]+[8,9])-[-1,1]\cdot[4,5]$	Множення основ на 2
	2	$[0,4]+(([-5,6]/[2,6]-[-1,2])/[-1,3]+[4,5])$	
14	1	$[-4,1]+[-7,1]\cdot([3,5]-([-1,2]\cdot[4,5]-[0,2]))$	Поділити основи на інтервал $[-1,1]$
	2	$([-3,4]-[2,6])\cdot([-1,7]-[-1,3])-[0,4]/[-2,5]$	
15	1	$[0,4]+(([-5,6]/[2,6]-[-1,2])/[-1,3]+[4,5])$	Помножити основи на інтервал $[0,2]$
	2	$[5,8]+[-1,1]\cdot([4,7]-([-1,2]/[4,5]+[0,2]))$	
16	1	$[-1,6]\cdot[-1,6]+([-3,3]-[1,5])/[-2,7]-[2,6]$	Додати до основ інтервал $[-2,2]$
	2	$([3,8]-[0,4])/([-1,1]-[-3,3])-[0,3]\cdot[-2,2]$	

17	1	$[3,6]\cdot[-1,1]+([0,3]-[-3,5])/[-2,7]-[2,9]$	Відняти від основ інтервал $[-3,3]$
	2	$[-3,5]/([4,5]+[8,9])-[-1,1]/[4,5]+[1,4]$	
18	1	$([3,8]-[0,4])/([-1,1]-[-3,3])-[0,3]\cdot[-2,2]$	Поділити основи на інтервал $[-1,1]$
	2	$[1,4]-[-3,5]\cdot([4,5]+[8,9])-[-1,1]/[4,5]$	
19	1	$[3,8]+[0,1]\cdot([3,5]+([-1,2]/[4,5]+[0,2]))$	Помножити основи на інтервал $[0,2]$
	2	$[-7,7]+[-13,4]/[-1,1]\cdot([0,3]+[-2,7]-[-3,4])$	
20	1	$[0,4]+(([-5,6]/[2,6]-[-1,2])/[-1,3]+[4,5])$	Ділення основ на 3
	2	$[3,6]\cdot[-1,1]-([0,3]+[-3,5])/[-2,7]+[2,9]$	
21	1	$[-1,7]+[0,4]/[-1,1]\cdot([0,3]+[3,7]-[-3,5])$	Додати до основ інтервал $[-2,2]$
	2	$[3,6]/[-1,1]+([0,3]-[-3,5])\cdot[-2,7]-[2,9]$	
22	1	$([3,8]+[0,4])/([-1,1]+[-3,3])+[0,3]\cdot[-2,2]$	Множення основ на 2
	2	$[-7,7]-[-13,4]/[-1,1]/([0,3]-[-2,7]+[-3,4])$	
23	1	$[-1,6]\cdot[-1,6]+([-3,3]-[1,5])/[-2,7]-[2,6]$	Помножити основи на інтервал $[0,2]$
	2	$[1,4]+[-3,5]\cdot([4,5]+[8,9])+[4,5]/[-1,1]$	
24	1	$[-4,1]+[-7,1]\cdot([3,5]-([-1,2]\cdot[4,5]-[0,2]))$	Відняти від основ інтервал $[-3,3]$
	2	$[3,4]-(([5,6]\cdot[2,3]+[0,8])\cdot[-1,1]-[2,3])$	
25	1	$[5,8]+[-1,1]\cdot([4,7]-([-1,2]/[4,5]+[0,2]))$	Поділити основи на інтервал $[-1,1]$
	2	$([3,8]+[0,4])\cdot([-1,1]+[-3,3])+[0,3]/[-2,2]$	
26	1	$[3,4]+(([5,6]\cdot[2,3]-[0,8])\cdot[-1,1]+[2,3])$	Додати до основ інтервал $[-2,2]$
	2	$[-1,6]\cdot[-1,6]+([-3,3]-[1,5])/[-2,7]-[2,6]$	
27	1	$[3,6]/[-1,1]+([0,3]-[-3,5])\cdot[-2,7]-[2,9]$	Множення основ на 2
	2	$([3,8]-[0,4])\cdot([-1,1]-[-3,3])-[0,3]/[-2,2]$	
28	1	$[-1,1]/([4,5]+[1,4]-[-3,5]\cdot([4,5]+[8,9]))$	Поділити основи на інтервал $[-1,1]$
	2	$[0,4]+(([-5,6]/[2,6]-[-1,2])/[-1,3]+[4,5])$	
29	1	$([3,8]-[0,4])/([-1,1]-[-3,3])-[0,3]\cdot[-2,2]$	Відняти від основ інтервал $[-3,3]$
	2	$[3,4]-(([5,6]/[2,3]+[0,8])/[-1,1]-[2,3])$	
30	1	$[3,6]/[-1,1]+([0,3]-[-3,5])\cdot[-2,7]-[2,9]$	Ділення основ на 3
	2	$[-4,1]+[-7,1]\cdot([3,5]-([-1,2]\cdot[4,5]-[0,2]))$	

РОЗДІЛ 2
ІНТЕРВАЛЬНІ ВЕКТОРИ ТА МАТРИЦІ

2.1 Основні визначення та твердження

Визначення. **Інтервальний вектор** – це впорядкований кортеж інтервалів, який розміщується вертикально (вектор-стовпчик) або горизонтально (вектор-стрічка).

Таким чином, якщо $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - деякі інтервали, то

$$[a] = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \text{ - інтервальний вектор-стовпчик,}$$

$$[a] = [A_1, A_2, \ldots, A_n] \text{ - інтервальний вектор-стрічка.}$$

Визначення. **Інтервальна матриця** $[A] = [A_{ij}]$ – це прямокутна таблиця, складена з інтервалів IR або KR:

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}.$$

Як і в класичній лінійній алгебрі, інтервальні вектори утотожнюються з інтервальними матрицями розміру $n \times 1$ (вектор-стовпці) або $1 \times n$ (вектор-стрічки).

У випадку, коли нульові та ненульові елементи в інтервальній матриці $[A] = [A_{ij}]$ структуровані певним чином, по відношенню до $[A] = [A_{ij}]$ вживаються ті ж терміни, що і в традиційній лінійній алгебрі. Наприклад,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \text{ та } \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

це інтервальні верхньотрикутна та нижньотрикутна матриці відповідно (іноді їх називають правою трикутною та лівою трикутною матрицями).

Якщо $[a]=[A_1, A_2,..., A_n]$ - інтервальний вектор, то a^- та a^+ - точкові вектори, утворені відповідно з нижніх та верхніх меж інтервалів $A_1, A_2,..., A_n$:

$$a^- = (A_1^-, A_2^-,..., A_n^-) \text{ та } a^+ = (A_1^+, A_2^+,..., A_n^+).$$

Таким самим чином визначають точкові матриці A^- та A^+ як матриці, утворені відповідно елементами A_{ij}^- та A_{ij}^+ інтервальної матриці $[A]$.

Операції взяття середини інтервалу, його радіусу та ширини до інтервальних векторів та матриць застосовуються покомпонентно та поелементно:

$$mid\,([A]) = \frac{1}{2}(A_{ij}^- + A_{ij}^+)$$

$$wid\,([A]) = (A_{ij}^+ - A_{ij}^-)$$

$$rad\,([A]) = \frac{1}{2} wid([A]) = \frac{1}{2}(A_{ij}^+ - A_{ij}^-).$$

Операції $\bigcup$ та $\bigcap$ по відношенню до інтервальних векторів та матриць також застосовуються покомпонентно та поелементно, для прикладу:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \bigcup \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \bigcup B_1 \\ A_2 \bigcup B_2 \\ \vdots \\ A_n \bigcup B_n \end{bmatrix} \text{ та } \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \bigcap \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \bigcap B_1 \\ A_2 \bigcap B_2 \\ \vdots \\ A_n \bigcap B_n \end{bmatrix}.$$

Аналогічно, в покомпонентному та поелементному змісті розуміються відношення «$\leq$», «$\geq$», «<» та «>» як для точкових, так і для інтервальних векторів та матриць.

<u>Визначення</u>. Дві інтервальні матриці $[A]=[A_{ij}]$ та $[B]=[B_{ij}]$ розмірності $m \times n$ рівні, якщо рівні їх відповідні компоненти:

$$[A]=[B] \Leftrightarrow [A_{ij}]=[B_{ij}], \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

<u>Визначення</u>. Нехай $[A]=[A_{ij}]$ та $[B]=[B_{ij}]$ - інтервальні матриці розмірності $m \times n$. Тоді

$$[A] \subseteq [B] \Leftrightarrow [A_{ij}] \subseteq [B_{ij}].$$

Відношення $[A] \subset [B]$ вводиться аналогічним поелементним визначенням. Якщо при цьому $A_p = (a_{ij})$ - точкова матриця, то $A_p \in [B]$. Кожну інтервальну матрицю можна розглядати як множину точкових матриць. Відношення $\subseteq$ та $\subset$ між множинами точкових матриць розуміють у звичайному теоретико-множинному змісті.

<u>Визначення</u>. Нехай $[A]=[A_{ij}]$ та $[B]=[B_{ij}]$ - інтервальні матриці розмірності $m \times n$. Тоді операції додавання та віднімання з інтервальними матрицями проводяться покомпонентно та поелементно:

$$[A] \pm [B] = \left([A_{ij}] \pm [B_{ij}]\right).$$

Визначення. Нехай $[A]=[A_{ij}]$ - інтервальна матриця розмірності $m\times r$ та $[B]=[B_{ij}]$ - інтервальна матриця розмірності $r\times n$. Тоді відношення

$$[A]\cdot[B]=\left(\sum_{k=1}^{r}[A_{ik}]\cdot[B_{kj}]\right)$$

визначає множення інтервальних матриць.

Для інтервальної матриці $[A]=[A_{ij}]$ розмірності $n\times r$ та інтервального вектора $[u]=[U_i]$ розмірності r маємо

$$[A]\cdot[u]=\sum_{v=1}^{r}[A_{iv}]\cdot[U_v].$$

Властивості операцій над інтервальними матрицями:

1. $[A]+[B]=[B]+[A]\ -\ \textit{комутативність}$

2. $[A]+([B]+[C])=([A]+[B])+[C]\ -\ \textit{асоціативність}$

3. $[A]+O_p=O_p+[A]=[A]\quad O_p-\textit{нульова точкова матриця}$

4. $[A]\cdot I_p=I_p\cdot[A]=[A]\qquad I_p-\textit{одинична точкова матриця}$

5. $([A]+[B])\cdot C_p=[A]\cdot C_p+[B]\cdot C_p\ -\textit{дистрибутивність}$

Однією з особливостей операцій над інтервальними матрицями є відсутність властивостей комутативності та асоціативності множення (якої немає і у точковому варіанті) та дистрибутивності множення матриць по сумі.

Визначення. Нехай $[A]=[A_{ij}]$ та $[B]=[B_{ij}]$ - інтервальні матриці. Тоді

- дійсна невід'ємна матриця

$$wid([A])=(wid[A_{ij}])$$

називається **шириною інтервальної матриці** $[A]=[A_{ij}]$;

- дійсна невід'ємна матриця

$$\left|[A]\right|=\left(\left|[A_{ij}]\right|\right)$$

називається матрицею абсолютних величин або **абсолютною величиною інтервальної матриці** $[A]=[A_{ij}]$;

- дійсна невід'ємна матриця

$$mid([A])=(mid[A_{ij}])$$

називається **серединою інтервальної матриці** $[A]=[A_{ij}]$;

- дійсна невід'ємна матриця

$$rad([A])=\frac{1}{2}wid([A])=\left(\frac{1}{2}wid[A_{ij}]\right)$$

називається **радіусом інтервальної матриці** $[A]=[A_{ij}]$;

- дійсна невід'ємна матриця

$$q([A],[B]) = (q([A_{ij}],[B_{ij}]))$$

називається **матрицею відстаней** або відстаню між матрицями $[A]$та $[B]$.

Example

Дано дві інтервальні матриці $[A]$ та $[B]$ розмірності 3x3. Необхідно:

1) визначити середину, радіус, ширину, абсолютну величину матриці $[A]$;

2) знайти відстань між матрицями;

3) провести операції перетину, об'єднання, додавання, віднімання та множення двох матриць.

Solution

$$[A] = \begin{pmatrix} [2,\ 5] & [2,\ 7] & [-4,\ 4] \\ [-3,\ 5] & [2,\ 8] & [2,\ 6] \\ [-1,\ 6] & [-3,\ 3] & [5,\ 7] \end{pmatrix},\ [B] = \begin{pmatrix} [1, 2] & [0,\ 1] & [1,\ 4] \\ [0,\ 2] & [-2,\ 1] & [-1,\ 2] \\ [-1,\ 1] & [3,\ 5] & [0,\ 3] \end{pmatrix}$$

<u>визначення середини інтервальної матриці $[A]$</u>

$$mid([A]) = (mid[A_{ij}]) = \begin{pmatrix} mid[A_{11}^-,\ A_{11}^+] & mid[A_{12}^-,\ A_{12}^+] & mid[A_{13}^-,\ A_{13}^+] \\ mid[A_{21}^-,\ A_{21}^+] & mid[A_{22}^-,\ A_{22}^+] & mid[A_{23}^-,\ A_{23}^+] \\ mid[A_{31}^-,\ A_{31}^+] & mid[A_{32}^-,\ A_{32}^+] & mid[A_{33}^-,\ A_{33}^+] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}^- + A_{11}^+}{2} & \dfrac{A_{12}^- + A_{12}^+}{2} & \dfrac{A_{13}^- + A_{13}^+}{2} \\ \dfrac{A_{21}^- + A_{21}^+}{2} & \dfrac{A_{22}^- + A_{22}^+}{2} & \dfrac{A_{23}^- + A_{23}^+}{2} \\ \dfrac{A_{31}^- + A_{31}^+}{2} & \dfrac{A_{32}^- + A_{32}^+}{2} & \dfrac{A_{33}^- + A_{33}^+}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mid[2, 5] & mid[2, 7] & mid[-4, 4] \\ mid[-3, 5] & mid[2, 8] & mid[2, 6] \\ mid[-1, 6] & mid[-3, 3] & mid[5, 7] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{2+5}{2} & \dfrac{2+7}{2} & \dfrac{-4+4}{2} \\ \dfrac{-3+5}{2} & \dfrac{2+8}{2} & \dfrac{2+6}{2} \\ \dfrac{-1+6}{2} & \dfrac{-3+3}{2} & \dfrac{5+7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 & 4.5 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2.5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

визначення ширини інтервальної матриці $[A]$

$$wid([A]) = (wid[A_{ij}]) = \begin{pmatrix} wid[A_{11}^-, A_{11}^+] & wid[A_{12}^-, A_{12}^+] & wid[A_{13}^-, A_{13}^+] \\ wid[A_{21}^-, A_{21}^+] & wid[A_{22}^-, A_{22}^+] & wid[A_{23}^-, A_{23}^+] \\ wid[A_{31}^-, A_{31}^+] & wid[A_{32}^-, A_{32}^+] & wid[A_{33}^-, A_{33}^+] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}^+ - A_{11}^- & A_{12}^+ - A_{12}^- & A_{13}^+ - A_{13}^- \\ A_{21}^+ - A_{21}^- & A_{22}^+ - A_{22}^- & A_{23}^+ - A_{23}^- \\ A_{31}^+ - A_{31}^- & A_{32}^+ - A_{32}^- & A_{33}^+ - A_{33}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} wid[2, 5] & wid[2, 7] & wid[-4, 4] \\ wid[-3, 5] & wid[2, 8] & wid[2, 6] \\ wid[-1, 6] & wid[-3, 3] & wid[5, 7] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5-2 & 7-2 & 4+4 \\ 5+3 & 8-2 & 6-2 \\ 6+1 & 3+3 & 7-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 8 & 6 & 4 \\ 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

визначення радіусу інтервальної матриці $[A]$

$$rad([A]) = (rad[A_{ij}]) = \begin{pmatrix} rad[A_{11}^-, A_{11}^+] & rad[A_{12}^-, A_{12}^+] & rad[A_{13}^-, A_{13}^+] \\ rad[A_{21}^-, A_{21}^+] & rad[A_{22}^-, A_{22}^+] & rad[A_{23}^-, A_{23}^+] \\ rad[A_{31}^-, A_{31}^+] & rad[A_{32}^-, A_{32}^+] & rad[A_{33}^-, A_{33}^+] \end{pmatrix} =$$

$$
=\begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}^{+}-A_{11}^{-}}{2} & \dfrac{A_{12}^{+}-A_{12}^{-}}{2} & \dfrac{A_{13}^{+}-A_{13}^{-}}{2} \\ \dfrac{A_{21}^{+}-A_{21}^{-}}{2} & \dfrac{A_{22}^{+}-A_{22}^{-}}{2} & \dfrac{A_{23}^{+}-A_{23}^{-}}{2} \\ \dfrac{A_{31}^{+}-A_{31}^{-}}{2} & \dfrac{A_{32}^{+}-A_{32}^{-}}{2} & \dfrac{A_{33}^{+}-A_{33}^{-}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rad[2,5] & rad[2,7] & rad[-4,4] \\ rad[-3,5] & rad[2,8] & rad[2,6] \\ rad[-1,6] & rad[-3,3] & rad[5,7] \end{pmatrix} =
$$

$$
=\begin{pmatrix} \dfrac{5-2}{2} & \dfrac{7-2}{2} & \dfrac{4+4}{2} \\ \dfrac{5+3}{2} & \dfrac{8-2}{2} & \dfrac{6-2}{2} \\ \dfrac{6+1}{2} & \dfrac{3+3}{2} & \dfrac{7-5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & 2.5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3.5 & 3 & 1 \end{pmatrix}
$$

або

$$
rad([A]) = \frac{1}{2}(wid[A_{ij}]) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 8 & 6 & 4 \\ 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & 2.5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3.5 & 3 & 1 \end{pmatrix}
$$

<u>визначення абсолютної величини інтервальної матриці $[A]$</u>

$$
|[A]| = \left(|[A_{ij}]|\right) = \begin{pmatrix} |[A_{11}^{-}, A_{11}^{+}]| & |[A_{12}^{-}, A_{12}^{+}]| & |[A_{13}^{-}, A_{13}^{+}]| \\ |[A_{21}^{-}, A_{21}^{+}]| & |[A_{22}^{-}, A_{22}^{+}]| & |[A_{23}^{-}, A_{23}^{+}]| \\ |[A_{31}^{-}, A_{31}^{+}]| & |[A_{32}^{-}, A_{32}^{+}]| & |[A_{33}^{-}, A_{33}^{+}]| \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} \max\{|A_{11}^{-}|, |A_{11}^{+}|\} & \max\{|A_{12}^{-}|, |A_{12}^{+}|\} & \max\{|A_{13}^{-}|, |A_{13}^{+}|\} \\ \max\{|A_{21}^{-}|, |A_{21}^{+}|\} & \max\{|A_{22}^{-}|, |A_{22}^{+}|\} & \max\{|A_{23}^{-}|, |A_{23}^{+}|\} \\ \max\{|A_{31}^{-}|, |A_{31}^{+}|\} & \max\{|A_{32}^{-}|, |A_{32}^{+}|\} & \max\{|A_{33}^{-}|, |A_{33}^{+}|\} \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} \max\{|2|,|5|\} & \max\{|2|,|7|\} & \max\{|-4|,|4|\} \\ \max\{|-3|,|5|\} & \max\{|2|,|8|\} & \max\{|2|,|6|\} \\ \max\{|-1|,|6|\} & \max\{|-3|,|3|\} & \max\{|5|,|7|\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 5 & 8 & 6 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}
$$

визначення відстані між інтервальними матрицями

$$q\ ([A],[B]) = (q\ ([A_{ij}],[B_{ij}])) =$$

$$\left(q\begin{pmatrix} [A_{11}^-, A_{11}^+] & [A_{12}^-, A_{12}^+] & [A_{13}^-, A_{13}^+] \\ [A_{21}^-, A_{21}^+] & [A_{22}^-, A_{22}^+] & [A_{23}^-, A_{23}^+] \\ [A_{31}^-, A_{31}^+] & [A_{32}^-, A_{32}^+] & [A_{33}^-, A_{33}^+] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [B_{11}^-, B_{11}^+] & [B_{12}^-, B_{12}^+] & [B_{13}^-, B_{13}^+] \\ [B_{21}^-, B_{21}^+] & [B_{22}^-, B_{22}^+] & [B_{23}^-, B_{23}^+] \\ [B_{31}^-, B_{31}^+] & [B_{32}^-, B_{32}^+] & [B_{33}^-, B_{33}^+] \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \max\{|A_{11}^- - B_{11}^-|, |A_{11}^+ - B_{11}^+|\} & \max\{|A_{12}^- - B_{12}^-|, |A_{12}^+ - B_{12}^+|\} & \max\{|A_{13}^- - B_{13}^-|, |A_{13}^+ - B_{13}^+|\} \\ \max\{|A_{21}^- - B_{21}^-|, |A_{21}^+ - B_{21}^+|\} & \max\{|A_{22}^- - B_{22}^-|, |A_{22}^+ - B_{22}^+|\} & \max\{|A_{23}^- - B_{23}^-|, |A_{23}^+ - B_{23}^+|\} \\ \max\{|A_{31}^- - B_{31}^-|, |A_{31}^+ - B_{31}^+|\} & \max\{|A_{32}^- - B_{32}^-|, |A_{32}^+ - B_{32}^+|\} & \max\{|A_{33}^- - B_{33}^-|, |A_{33}^+ - B_{33}^+|\} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(q\begin{pmatrix} [2, 5] & [2, 7] & [-4, 4] \\ [-3, 5] & [2, 8] & [2, 6] \\ [-1, 6] & [-3, 3] & [5, 7] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [1, 2] & [0, 1] & [1, 4] \\ [0, 2] & [-2, 1] & [-1, 2] \\ [-1, 1] & [3, 5] & [0, 3] \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \max\{|2-1|, |5-2|\} & \max\{|2-0|, |7-1|\} & \max\{|-4-1|, |4-4|\} \\ \max\{|-3-0|, |5-2|\} & \max\{|2-(-2)|, |8-1|\} & \max\{|2-(-1)|, |6-2|\} \\ \max\{|-1-(-1)|, |6-1|\} & \max\{|-3-3|, |3-5|\} & \max\{|5-0|, |7-3|\} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \max\{1,3\} & \max\{2,6\} & \max\{5,0\} \\ \max\{3,3\} & \max\{4,7\} & \max\{3,4\} \\ \max\{0,5\} & \max\{6,2\} & \max\{5,4\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

операція перетину двох інтервальних матриць

$$[A] \cap [B] = \begin{pmatrix} [A_{11}^-, A_{11}^+] & [A_{12}^-, A_{12}^+] & [A_{13}^-, A_{13}^+] \\ [A_{21}^-, A_{21}^+] & [A_{22}^-, A_{22}^+] & [A_{23}^-, A_{23}^+] \\ [A_{31}^-, A_{31}^+] & [A_{32}^-, A_{32}^+] & [A_{33}^-, A_{33}^+] \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} [B_{11}^-, B_{11}^+] & [B_{12}^-, B_{12}^+] & [B_{13}^-, B_{13}^+] \\ [B_{21}^-, B_{21}^+] & [B_{22}^-, B_{22}^+] & [B_{23}^-, B_{23}^+] \\ [B_{31}^-, B_{31}^+] & [B_{32}^-, B_{32}^+] & [B_{33}^-, B_{33}^+] \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} [A_{11}^-, A_{11}^+] \cap [B_{11}^-, B_{11}^+] & [A_{12}^-, A_{12}^+] \cap [B_{12}^-, B_{12}^+] & [A_{13}^-, A_{13}^+] \cap [B_{13}^-, B_{13}^+] \\ [A_{21}^-, A_{21}^+] \cap [B_{21}^-, B_{21}^+] & [A_{22}^-, A_{22}^+] \cap [B_{22}^-, B_{22}^+] & [A_{23}^-, A_{23}^+] \cap [B_{23}^-, B_{23}^+] \\ [A_{31}^-, A_{31}^+] \cap [B_{31}^-, B_{31}^+] & [A_{32}^-, A_{32}^+] \cap [B_{32}^-, B_{32}^+] & [A_{33}^-, A_{33}^+] \cap [B_{33}^-, B_{33}^+] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} [2, 5] \cap [1, 2] & [2, 7] \cap [0, 1] & [-4, 4] \cap [1, 4] \\ [-3, 5] \cap [0, 2] & [2, 8] \cap [-2, 1] & [2, 6] \cap [-1, 2] \\ [-1, 6] \cap [-1, 1] & [-3, 3] \cap [3, 5] & [5, 7] \cap [0, 3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [2, 2] & \varnothing & [1, 4] \\ [0, 2] & \varnothing & [2, 2] \\ [-1, 1] & [3, 3] & \varnothing \end{pmatrix}$$

операція об'єднання двох інтервальних матриць

$$[A]\bigcup[B]=\begin{pmatrix}[A_{11}^-, A_{11}^+] & [A_{12}^-, A_{12}^+] & [A_{13}^-, A_{13}^+]\\ [A_{21}^-, A_{21}^+] & [A_{22}^-, A_{22}^+] & [A_{23}^-, A_{23}^+]\\ [A_{31}^-, A_{31}^+] & [A_{32}^-, A_{32}^+] & [A_{33}^-, A_{33}^+]\end{pmatrix}\bigcup\begin{pmatrix}[B_{11}^-, B_{11}^+] & [B_{12}^-, B_{12}^+] & [B_{13}^-, B_{13}^+]\\ [B_{21}^-, B_{21}^+] & [B_{22}^-, B_{22}^+] & [B_{23}^-, B_{23}^+]\\ [B_{31}^-, B_{31}^+] & [B_{32}^-, B_{32}^+] & [B_{33}^-, B_{33}^+]\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}[A_{11}^-, A_{11}^+]\bigcup[B_{11}^-, B_{11}^+] & [A_{12}^-, A_{12}^+]\bigcup[B_{12}^-, B_{12}^+] & [A_{13}^-, A_{13}^+]\bigcup[B_{13}^-, B_{13}^+]\\ [A_{21}^-, A_{21}^+]\bigcup[B_{21}^-, B_{21}^+] & [A_{22}^-, A_{22}^+]\bigcup[B_{22}^-, B_{22}^+] & [A_{23}^-, A_{23}^+]\bigcup[B_{23}^-, B_{23}^+]\\ [A_{31}^-, A_{31}^+]\bigcup[B_{31}^-, B_{31}^+] & [A_{32}^-, A_{32}^+]\bigcup[B_{32}^-, B_{32}^+] & [A_{33}^-, A_{33}^+]\bigcup[B_{33}^-, B_{33}^+]\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}[2, 5]\bigcup[1, 2] & [2, 7]\bigcup[0, 1] & [-4, 4]\bigcup[1, 4]\\ [-3, 5]\bigcup[0, 2] & [2, 8]\bigcup[-2, 1] & [2, 6]\bigcup[-1, 2]\\ [-1, 6]\bigcup[-1, 1] & [-3, 3]\bigcup[3, 5] & [5, 7]\bigcup[0, 3]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[1, 5] & [0, 7] & [-4, 4]\\ [-3, 5] & [-2, 8] & [-1, 6]\\ [-1, 6] & [-3, 5] & [0, 7]\end{pmatrix}$$

операція додавання двох інтервальних матриць

$$[A]+[B]=\begin{pmatrix}[A_{11}^-, A_{11}^+] & [A_{12}^-, A_{12}^+] & [A_{13}^-, A_{13}^+]\\ [A_{21}^-, A_{21}^+] & [A_{22}^-, A_{22}^+] & [A_{23}^-, A_{23}^+]\\ [A_{31}^-, A_{31}^+] & [A_{32}^-, A_{32}^+] & [A_{33}^-, A_{33}^+]\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}[B_{11}^-, B_{11}^+] & [B_{12}^-, B_{12}^+] & [B_{13}^-, B_{13}^+]\\ [B_{21}^-, B_{21}^+] & [B_{22}^-, B_{22}^+] & [B_{23}^-, B_{23}^+]\\ [B_{31}^-, B_{31}^+] & [B_{32}^-, B_{32}^+] & [B_{33}^-, B_{33}^+]\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}[A_{11}^-+B_{11}^-, A_{11}^++B_{11}^+] & [A_{12}^-+B_{12}^-, A_{12}^++B_{12}^+] & [A_{13}^-+B_{13}^-, A_{13}^++B_{13}^+]\\ [A_{21}^-+B_{21}^-, A_{21}^++B_{21}^+] & [A_{22}^-+B_{22}^-, A_{22}^++B_{22}^+] & [A_{23}^-+B_{23}^-, A_{23}^++B_{23}^+]\\ [A_{31}^-+B_{31}^-, A_{31}^++B_{31}^+] & [A_{32}^-+B_{32}^-, A_{32}^++B_{32}^+] & [A_{33}^-+B_{33}^-, A_{33}^++B_{33}^+]\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}[2, 5]+[1, 2] & [2, 7]+[0, 1] & [-4, 4]+[1, 4]\\ [-3, 5]+[0, 2] & [2, 8]+[-2, 1] & [2, 6]+[-1, 2]\\ [-1, 6]+[-1, 1] & [-3, 3]+[3, 5] & [5, 7]+[0, 3]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[3, 7] & [2, 8] & [-3, 8]\\ [-3, 7] & [0, 7] & [1, 8]\\ [-2, 7] & [0, 8] & [5, 10]\end{pmatrix}$$

операція віднімання двох інтервальних матриць

$$[A]-[B]=\begin{pmatrix}[A_{11}^-, A_{11}^+] & [A_{12}^-, A_{12}^+] & [A_{13}^-, A_{13}^+]\\ [A_{21}^-, A_{21}^+] & [A_{22}^-, A_{22}^+] & [A_{23}^-, A_{23}^+]\\ [A_{31}^-, A_{31}^+] & [A_{32}^-, A_{32}^+] & [A_{33}^-, A_{33}^+]\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}[B_{11}^-, B_{11}^+] & [B_{12}^-, B_{12}^+] & [B_{13}^-, B_{13}^+]\\ [B_{21}^-, B_{21}^+] & [B_{22}^-, B_{22}^+] & [B_{23}^-, B_{23}^+]\\ [B_{31}^-, B_{31}^+] & [B_{32}^-, B_{32}^+] & [B_{33}^-, B_{33}^+]\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} [A_{11}^- - B_{11}^+,\ A_{11}^+ - B_{11}^-] & [A_{12}^- - B_{12}^+,\ A_{12}^+ - B_{12}^-] & [A_{13}^- - B_{13}^+,\ A_{13}^+ - B_{13}^-] \\ [A_{21}^- - B_{21}^+,\ A_{21}^+ - B_{21}^-] & [A_{22}^- - B_{22}^+,\ A_{22}^+ - B_{22}^-] & [A_{23}^- - B_{23}^+,\ A_{23}^+ - B_{23}^-] \\ [A_{31}^- - B_{31}^+,\ A_{31}^+ - B_{31}^-] & [A_{32}^- - B_{32}^+,\ A_{32}^+ - B_{32}^-] & [A_{33}^- - B_{33}^+,\ A_{33}^+ - B_{33}^-] \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} [2,5]-[1,2] & [2,7]-[0,1] & [-4,4]-[1,4] \\ [-3,5]-[0,2] & [2,8]-[-2,1] & [2,6]-[-1,2] \\ [-1,6]-[-1,1] & [-3,3]-[3,5] & [5,7]-[0,3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0,4] & [1,7] & [-8,3] \\ [-5,5] & [1,10] & [0,7] \\ [-2,7] & [-8,0] & [2,7] \end{pmatrix}$$

операція множення двох інтервальних матриць

$$[A]\cdot[B]=\begin{pmatrix} [A_{11}^-, A_{11}^+] & [A_{12}^-, A_{12}^+] & [A_{13}^-, A_{13}^+] \\ [A_{21}^-, A_{21}^+] & [A_{22}^-, A_{22}^+] & [A_{23}^-, A_{23}^+] \\ [A_{31}^-, A_{31}^+] & [A_{32}^-, A_{32}^+] & [A_{33}^-, A_{33}^+] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [B_{11}^-, B_{11}^+] & [B_{12}^-, B_{12}^+] & [B_{13}^-, B_{13}^+] \\ [B_{21}^-, B_{21}^+] & [B_{22}^-, B_{22}^+] & [B_{23}^-, B_{23}^+] \\ [B_{31}^-, B_{31}^+] & [B_{32}^-, B_{32}^+] & [B_{33}^-, B_{33}^+] \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} [C_{11}^-, C_{11}^+] & [C_{12}^-, C_{12}^+] & [C_{13}^-, C_{13}^+] \\ [C_{21}^-, C_{21}^+] & [C_{22}^-, C_{22}^+] & [C_{23}^-, C_{23}^+] \\ [C_{31}^-, C_{31}^+] & [C_{32}^-, C_{32}^+] & [C_{33}^-, C_{33}^+] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2,26] & [-34,32] & [-17,46] \\ [-12,32] & [-13,48] & [-20,54] \\ [-14,25] & [8,47] & [-10,51] \end{pmatrix}$$

$$[C_{11}^-, C_{11}^+] = \left([A_{11}^-, A_{11}^+]\cdot[B_{11}^-, B_{11}^+]\right) + \left([A_{12}^-, A_{12}^+]\cdot[B_{21}^-, B_{21}^+]\right) + \left([A_{13}^-, A_{13}^+]\cdot[B_{31}^-, B_{31}^+]\right) =$$
$$=([2,5]\cdot[1,2]) + ([2,7]\cdot[0,2]) + ([-4,4]\cdot[-1,1]) = \left[{}^{\min}_{\max}\{2,5,4,10\}\right] + \left[{}^{\min}_{\max}\{0,4,12\}\right] +$$
$$+\left[{}^{\min}_{\max}\{4,-4\}\right] = [2,10]+[0,12]+[-4,4]=[-2,26]$$

$$[C_{21}^-, C_{21}^+] = \left([A_{21}^-, A_{21}^+]\cdot[B_{11}^-, B_{11}^+]\right) + \left([A_{22}^-, A_{22}^+]\cdot[B_{21}^-, B_{21}^+]\right) + \left([A_{23}^-, A_{23}^+]\cdot[B_{31}^-, B_{31}^+]\right) =$$
$$=([-3,5]\cdot[1,2]) + ([2,8]\cdot[0,2]) + ([2,6]\cdot[-1,1]) = \left[{}^{\min}_{\max}\{-3,5,-6,10\}\right] + \left[{}^{\min}_{\max}\{0,4,16\}\right] +$$
$$+\left[{}^{\min}_{\max}\{-2,-6,2,6\}\right] = [-6,10]+[0,16]+[-6,6]=[-12,32]$$

$$[C_{31}^-, C_{31}^+] = \left([A_{31}^-, A_{31}^+]\cdot[B_{11}^-, B_{11}^+]\right) + \left([A_{32}^-, A_{32}^+]\cdot[B_{21}^-, B_{21}^+]\right) + \left([A_{33}^-, A_{33}^+]\cdot[B_{31}^-, B_{31}^+]\right) =$$
$$=([-1,6]\cdot[1,2]) + ([-3,3]\cdot[0,2]) + ([5,7]\cdot[-1,1]) = \left[{}^{\min}_{\max}\{-1,6,-1,12\}\right] + \left[{}^{\min}_{\max}\{0,-6,6\}\right] +$$
$$+\left[{}^{\min}_{\max}\{-5,-7,5,7\}\right] = [-1,12]+[-6,6]+[-7,7]=[-14,25]$$

Наступні шість елементів $[C_{12}],[C_{22}],[C_{32}],[C_{13}],[C_{23}],[C_{33}]$ матриці $[C]$ шукаємо за правилом $[C_{ij}] = \sum_{k=1}^{3}([A_{ik}]\cdot[B_{kj}])$.

2.2 Норми інтервальних векторів та матриць

Традиційним атрибутом більшості лінійних просторів, який використовується в практиці математичного моделювання, є поняття норми вектора. Воно є узагальненням на багатовимірний випадок поняття абсолютної величини числа та формалізує такі інтуїтивно зрозумілі властивості як «довжина» вектора, «розмір» об’єкта і т.д.

Лінійний простір, в якому задана норма, називається **нормованим**.

Наведемо приклади норм:

1) $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$ - *l –норма*;

2) $\|x\|_2 = \left(\sum_i |x_i|^2\right)^{1/2}$ - *евклідова норма*;

3) $\|x\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p}$ - *норма Гельдера* або l_p -*норма*;

4) $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ - *чебишевська норма* або *c –норма*.

На множині дійсних чисел l–норма, евклідова норма та c–норма еквівалентні.

Визначення. **Нормою інтервального вектора** називають дійсну величину $\|[a]\|$, яка визначається як:

$$\|[a]\|_l = |[A_1]| + |[A_2]| + \ldots + |[A_n]|$$

або

$$\|[a]\|_\infty = \max_i |[A_i]|$$ - чебишевська норма або максимум-норма.

Норма точкового вектора називається **абсолютною**, якщо вона залежить тільки від абсолютних значень його компонент.

Норма називається **монотонною**, якщо з покомпонентної нерівності $|a| \le |b|$ випливає нерівність норм $\|[a]\| \le \|[b]\|$ для будь-яких векторів a та b, і ця властивість є рівносильною абсолютності норми.

Визначення. **Нормою інтервальної матриці** називають дійсну величину $\|[A]\|$, яка визначається як

$$\|[A]\|_l = \max_j \left(\sum_i |[A_{ij}]| \right)$$

або

$$\|[A]\|_\infty = \max_i \left(\sum_j |[A_{ij}]| \right).$$

Норма інтервальної матриці володіє наступними властивостями:

1) $\|[A]\| \ge 0$ - *невід'ємність*;

2) $\|\alpha[A]\| = |\alpha| \cdot \|[A]\|, \quad для\ \alpha \in R$ - *абсолютна однорідність*;

3) $\|[A]+[B]\| \le \|[A]\| + \|[B]\|$ - *«нерівність трикутника»*;

4) $\|A][B]\| \le \|[A]\| \cdot \|[B]\|$ - *субмультиплікативність*.

Визначення. Інтервальна матриця $[A]=[A_{ij}]$ називається **неособливою**, якщо неособливі всі її точкові матриці $A=(a_{ij}) \in [A]=[A_{ij}]$.

Інтервальна матриця називається **особливою**, якщо вона містить хоча б одну особливу точкову матрицю.

Інтервальна матриця $[A]=[A_{ij}]$ неособлива тоді, коли визначники її крайніх матриць мають однаковий знак, тобто

$$(\det A^{-})(\det A^{+})>0.$$

Інтервальна матриця $[A]=[A_{ij}]$ особлива тоді, коли система нерівностей

$$\left|(mid([A]))x\right|\le (rad([A]))|x|,\quad x\in R^{n}$$

має ненульове рішення.

Нехай інтервальна матриця така, що її середина $mid\,[A]$ неособлива та

$$\rho\left(\left|(mid([A]))^{-1}\right|\cdot rad([A])\right)<1.$$

Тоді матриця $[\mathrm{A}]=[\mathrm{A}_{ij}]$ - неособлива (відповідно до ознаки Ріса-Бека).

Example

Визначити норму та особливість інтервальної матриці
$$[A]=\begin{pmatrix}[2,\,5] & [2,\,7] & [-4,\,4]\\ [-3,\,5] & [2,\,8] & [2,\,6]\\ [-1,\,6] & [-3,\,3] & [5,\,7]\end{pmatrix}$$

Solution

$$\|[A]\|_{l}=\max_{j}\left(\sum_{i}\begin{pmatrix}\|[2,\,5]\| & \|[2,\,7]\| & \|[-4,\,4]\|\\ \|[-3,\,5]\| & \|[2,\,8]\| & \|[2,\,6]\|\\ \|[-1,\,6]\| & \|[-3,\,3]\| & \|[5,\,7]\|\end{pmatrix}\right)=\max_{j}\left(\sum_{i}\begin{pmatrix}5 & 7 & 4\\ 5 & 8 & 6\\ 6 & 3 & 7\end{pmatrix}\right)=$$
$$=\max_{j}\left(16\ 18\ 17\right)=18$$

або

$$\|[A]\|_\infty = \max_i\left(\sum_j\begin{pmatrix} \|[2,5]\| & \|[2,7]\| & \|[-4,4]\| \\ \|[-3,5]\| & \|[2,8]\| & \|[2,6]\| \\ \|[-1,6]\| & \|[-3,3]\| & \|[5,7]\| \end{pmatrix}\right) = \max_i\left(\sum_j\begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 5 & 8 & 6 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \max_i\begin{pmatrix} 16 \\ 19 \\ 16 \end{pmatrix} = 19$$

Для визначення особливості інтервальної матриці для початку сформуємо її крайні точкові матриці, як матриці нижніх та верхніх меж інтервалів:

$$A^- = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \text{ та } A^+ = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 5 & 8 & 6 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Наступний крок – знаходження визначників матриць A^- та A^+.

$$\det(A^-) = \det\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} = (2\cdot 2\cdot 5) + ((-4)\cdot(-3)\cdot(-3)) + (2\cdot 2\cdot(-1)) -$$

$$-(2\cdot(-4)\cdot(-1)) - (2\cdot 2\cdot(-3)) - (2\cdot 5\cdot(-3)) = 14$$

$$\det(A^+) = \det\begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 5 & 8 & 6 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} = (5\cdot 8\cdot 7) + (5\cdot 3\cdot 4) + (7\cdot 6\cdot 6) - (4\cdot 8\cdot 6) - (6\cdot 5\cdot 3) -$$

$$-(5\cdot 7\cdot 7) = 65$$

Оскільки $(\det A^-)(\det A^+) = 14\cdot 65 = 910 > 0$ - інтервальна матриця неособлива.

Програмна реалізація арифметичних операцій над інтервальними матрицями мовою програмування Java

Розробити програмну систему для обчислення інтервального виразу $Q = B \times C - A$

Матриця А: Матриця В: Матриця С:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 10 & 13 & 16 \\ 11 & 14 & 17 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 19 & 22 & 25 \\ 20 & 23 & 26 \\ 21 & 24 & 27 \end{pmatrix},$$

де номери в матриці це комплексні вирази виду:

1. [-1;1]+i [Остання_цифра_студ_квитка ± 3];
2. [День_народження ± 10]+ i [-4;0];
3. [-2;2] + i [((Поряд_№_в _журналі+Поряд_№_на _лаб) ± 4)/5];
4. [Місяць_народження ± 5]+ i [0;1];
5. [-3;3] + i [((Остання_цифра_студ_квитка+Остан_цифра_заліковки) ± 6)/4];
6. [(День+місяць народження)/2 ± 5] + i [-2;2];
7. [-4;4] + i [День_народження ± 10];
8. [((День+місяць народження) ± 5)/4] + i [0;3];
9. [-5;5] + i [Поряд_№_в _журналі ± 2];
10. [0;1] + i [Місяць_народження ± 5];
11. [Остання_цифра_заліковки ± 2]+ i [-1;0];
12. [0;2] + i [(Поряд_№_в _журналі+Поряд_№_на _лаб)/3 ± 4];
13. [Остання_цифра_студ_квитка ± 3] + i [0;5];
14. [0;3] + i [(День+місяць народження)/2 ± 5];
15. [(Остання_цифра_студ_квитка+Остан_цифра_заліковки)/2 ± 4] + i [-1;1];
16. [0;4] + i [Поряд_№_на_лабораторній ± 5];
17. [((Остан_цифра_студ_квитка+Остан_цифра_заліковки) ± 6)/4] + i [-4;4];
18. [0;5] + i [((День+місяць народження) ± ± 5)/4];
19. [-5;0] + i [(Остання_цифра_студ_квитка+Остан_цифра_заліковки)/2 ± 4];
20. [Поряд_№_в _журналі ± 2] + i [0;2];
21. [-4;0] + i [Остання_цифра_заліковки ± 2];
22. [Поряд_№_на_лабораторній ± 5] + i [-3;3];
23. [-3;0] +i [-5;0];

24. [(Поряд_№_в _журналі+Поряд_№_на _лаб)/3 ± 4] + i [-2;0];
25. [-2;0] + i [-5;5];
26. [((Поряд_№_в _журналі+Поряд_№_на _лаб) ± 4)/5] + i [0;4];
27. [-1;0] + i [-3;0].

Приклад заповнення матриць для набору вхідних даних:

День народження – 19

Остання цифра студентського квитка – 4

Місяць народження -12

Порядковий номер в журналі – 4

Остання цифра заліковки – 7

Порядковий номер на лабораторній роботі – 4

Інтервальна матриця А:

$$\begin{pmatrix} [-1, 1]+i[[1, 7] & [7, 17]+i[0, 1] & [-4, 4]+i[9, 29] \\ [9, 29]+i[-4, 0] & [-3, 3]+i[1.25, 4.25] & [6.5, 9]+i[0, 3] \\ [-2, 2]+i[0.8, 2.4] & [10.5, 20.5]+i[-2, 2] & [-5, 5]+i[2, 6] \end{pmatrix}$$

Інтервальна матриця В:

$$\begin{pmatrix} [0, 1]+i[7, 17] & [1, 7]+i[0, 5] & [0, 4]+[-1, 9] \\ [5, 9]+i[-1, 0] & [0, 3]+i[10.5, 20.5] & [1.25, 4.25]+i[-4, 4] \\ [0, 2]+i[-1.33, 6.67] & [1.5, 9.5]+i[-1, 1] & [0, 5]+i[6.5, 9] \end{pmatrix}$$

Інтервальна матриця С:

$$\begin{pmatrix} [-5,0]+i[1.5,9.5] & [-1,9]+i[-3,3] & [-2,0]+i[-5,5] \\ [2,6]+i[0,2] & [-3,0]+i[-5,0] & [0.8,2.4]+i[0,4] \\ [-4,0]+i[5,9] & [-1.33,6.67]+i[-2,0] & [-1,0]+i[-3,0] \end{pmatrix}$$

Операція множення матриць $B\times C$:

$$([0;1]+i[7;17])\times([-5;0]+i[1.5;9.5])+([1;7]+i[0;5])\times([2;6]+i[0;2])+([0;4]+[-1;9])\times([-4;0]+i[5;9])$$
$$([5;9]+i[-1;0])\times([-5;0]+i[1.5;9.5])+([0;3]+i[10.5;20.5])\times([2;6]+i[0;2])+([1.25;4.25]+i[-4;4])\times([-4;0]+i[5;9])$$
$$([0;2]+i[-1.33;6.67])\times([-5;0]+i[1.5;9.5])+([1.5;9.5]+i[-1;1])\times([2;6]+i[0;2])+([0;5]+i[6.5;9])\times([-4;0]+i[5;9])$$

$$([0;1]+i[7;17])\times([-1;9]+i[-3;3])+([1;7]+i[0;5])\times([-3;0]+i[-5;0])+([0;4]+[-1;9])\times([-1.33;6.67]+i[-2;0])$$
$$([5;9]+i[-1;0])\times([-1;9]+i[-3;3])+([0;3]+i[10.5;20.5])\times([-3;0]+i[-5;0])+([1.25;4.25]+i[-4;4])\times([-1.33;6.67]+i[-2;0])$$
$$([0;2]+i[-1.33;6.67])\times([-1;9]+i[-3;3])+([1.5;9.5]+i[-1;1])\times([-3;0]+i[-5;0])+([0;5]+i[6.5;9])\times([-1.33;6.67]+i[-2;0])$$

$$([0;1]+i[7;17])\times([-2;0]+i[-5;5])+([1;7]+i[0;5])\times([0.8;2.4]+i[0;4])+([0;4]+[-1;9])\times([-1;0]+i[-3;0])$$
$$([5;9]+i[-1;0])\times([-2;0]+i[-5;5])+([0;3]+i[10.5;20.5])\times([0.8;2.4]+i[0;4])+([1.25;4.25]+i[-4;4])\times([-1;0]+i[-3;0])$$
$$([0;2]+i[-1.33;6.67])\times([-2;0]+i[-5;5])+([1.5;9.5]+i[-1;1])\times([0.8;2.4]+i[0;4])+([0;5]+i[6.5;9])\times([-1;0]+i[-3;0])$$

Для наочності обчислюємо окремо кожний елемент матриці $B\times C$:

$$\begin{aligned}&\mathrm{BC}_{11}=([0;1]+i[7;17])\times([-5;0]+i[1.5;9.5])+([1;7]+i[0;5])\times([2;6]+i[0;2])+([0;4]+[-1;9])\times([-4;0]+i[5;9])=\\&=([0;1]\times[-5;0]-[7;17]\times[1.5;9.5]+i([0;1]\times[1.5;9.5]+[7;17]\times[-5;0]))+([1;7]\times[2;6]-[0;5]\times[0;2]+i([1;7]\times[0;2]+\\&+[0;5]\times[2;6]))+([0;4]\times[-4;0]-[-1;9]\times[5;9]+i([0;4]\times[5;9]+[-1;9]\times[-4;0]))=([-5;0]-[10.5;161.5]+i([0;9.5]+\\&+[-85;0]))+([2;42]-[0;10]+i([0;14]+[0;30]))+([-16;0]-[-9;81]+i([0;36]+[-36;4]))=([-166.5;-10.5]+[-8;42]+\\&+[-97;9])+i([-85;9.5]+[0;44]+[-36;40])=[-271.5;40.5]+i[-121;93.5]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&BC_{21}=([5;9]+i[-1;0])\times([-5;0]+i[1.5;9.5])+([0;3]+i[10.5;20.5])\times([2;6]+i[0;2])+([1.25;4.25]+i[-4;4])\times\\&\times([-4;0]+i[5;9])=([5;9]\times[-5;0]-[-1;0]\times[1.5;9.5]+i([5;9]\times[1.5;9.5]+[-1;0]\times[-5;0]))+([0;3]\times[2;6]-\\&[10.5;20.5]\times[0;2]+i([0;3]\times[0;2]+[10.5;20.5]\times[2;6]))+([1.25;4.25]\times[-4;0]-[-4;4]\times[5;9]+i([1.25;4.25]\times[5;9]+\\&[-4;4]\times[-4;0]))=([-45;0]-[-9.5;0]+i([7.5;85.5]+[0;5]))+([0;18]-[0;41]+i([0;6]+[21;123]))+([-17;0]-[-36;36]+\\&+i([6.25;38.25]+[-16;16]))=([-45;9.5]+[-41;18]+[-53;36]+i([7.5;90.5]+[21;129]+[-9.75;54.25])=\\&=[-139;63.5]+i[18.75;273.75]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&BC_{31}=([0;2]+i[-1.33;6.67])\times([-5;0]+i[1.5;9.5])+([1.5;9.5]+i[-1;1])\times([2;6]+i[0;2])+([0;5]+i[6.5;9])\times\\&\times([-4;0]+i[5;9])=([0;2]\times[-5;0]-[-1.33;6.67]\times[1.5;9.5]+i([0;2]\times[1.5;9.5]+[-1.33;6.67]\times[-5;0]))+([1.5;9.5]\times\\&\times[2;6]-[-1;1]\times[0;2]+i([1.5;9.5]\times[0;2]+[-1;1]\times[2;6]))+([0;5]\times[-4;0]-[6.5;9]\times[5;9]+i([0;5]\times[5;9]+[6.5;9]\times\\&\times[-4;0]))=([-10;0]-[-12.635;63.365]+i([0;19]+[-33.35;6.65]))+([3;57]-[-2;2]+i([0;19]+[-6;6]))+([-20;0]-\\&-[32.5;81]+i([0;45]+[-36;0]))=([-73.365;12.635]+[1;59]+[-101;-32.5]+i([-33.35;25.65]+[-6;25]+[-36;45])=\\&=[-173.365;39.135]+i[-75.35;95.65]\end{aligned}$$

$$BC_{12} = ([0;1]+i[7;17])\times([-1;9]+i[-3;3])+([1;7]+i[0;5])\times([-3;0]+i[-5;0])+([0;4]+[-1;9])\times([-1.33;6.67]+i[-2;0]) =$$
$$= ([0;1]\times[-1;9]-[7;17]\times[-3;3]+i([0;1]\times[-3;3]+[7;17]\times[-1;9]))+([1;7]\times[-3;0]-[0;5]\times[-5;0]+i([1;7]\times[-5;0]+[0;5]\times$$
$$\times[-3;0]))+([0;4]\times[-1.33;6.67]-[-1;9]\times[-2;0]+i([0;4]\times[-2;0]+[-1;9]\times[-1.33;6.67])) = ([-1;9]-[-51;51]+i([-3;3]+$$
$$+[-17;153]))+([-21;0]-[-25;0]+i([-35;0]+[-15;0]))+([-5.32;26.68]-[-18;2]+i([-8;0]+[-11.97;60.03])) = ([-52;60]+$$
$$+[-21;25]+[-7.32;44.68])+i([-20;156]+[-50;0]+[-19.97;60.03]) = [-80.32;129.68]+i[-89.97;216.03]$$

$$BC_{22} = ([5;9]+i[-1;0])\times([-1;9]+i[-3;3])+([0;3]+i[10.5;20.5])\times([-3;0]+i[-5;0])+([1.25;4.25]+i[-4;4])\times([-1.33;6.67]+$$
$$+i[-2;0]) = ([5;9]\times[-1;9]-[-1;0]\times[-3;3]+i([5;9]\times[-3;3]+[-1;0]\times[-1;9]))+([0;3]\times[-3;0]-[10.5;20.5]\times[-5;0]+$$
$$+i([[0;3]\times[-5;0]+[10.5;20.5]\times[-3;0]))+([1.25;4.25]\times[-1.33;6.67]-[-4;4]\times[-2;0]+i([1.25;4.25]\times[-2;0]+[-4;4]\times$$
$$\times[-1.33;6.67])) = ([-9;81]-[-3;3]+i([-27;27]+[-9;1]))+([-9;0]-[-102.5;0]+i([-15;0]+[-61.5;0]))+$$
$$+([-5.6525;28.3475]-[-8;8]+i([-8.5;0]+[-26.68;26.68])) = ([-12;84]+[-9;102.5]+[-13.6525;36.3475])+i([-36;28]+$$
$$+[-76.5;0]+[-35.18;26.68]) = [-34.6525;222.8475]+i[-147.68;54.68]$$

$$BC_{32} = ([0;2]+i[-1.33;6.67])\times([-1;9]+i[-3;3])+([1.5;9.5]+i[-1;1])\times([-3;0]+i[-5;0])+([0;5]+i[6.5;9])\times([-1.33;6.67]+$$
$$+i[-2;0]) = ([0;2]\times[-1;9]-[-1.33;6.67]\times[-3;3]+i([0;2]\times[-3;3]+[-1.33;6.67]\times[-1;9]))+([1.5;9.5]\times[-3;0]-[-1;1]\times[-5;0]+$$
$$+i([1.5;9.5]\times[-5;0]+[-1;1]\times[-3;0]))+([0;5]\times[-1.33;6.67]-[6.5;9]\times[-2;0]+i([0;5]\times[-2;0]+[6.5;9]\times[-1.33;6.67])) =$$
$$= ([-2;18]-[-20.01;20.01]+i([-6;6]+[-11.97;60.03]))+([-28.5;0]-[-5;5]+i([-47.5;0]+[-3;3]))+([-6.65;33.35]-$$
$$-[-18;0]+i([-10;0]+[-11.97;60.03])) = ([-22.01;38.01]+[-33.5;5]+[-6.65;51.35])+i([-17.97;66.03]+[-50.5;3]+$$
$$+[-21.97;60.03]) = [-62.16;94.36]+i[-90.44;129.06]$$

$$BC_{13} = ([0;1]+i[7;17])\times([-2;0]+i[-5;5])+([1;7]+i[0;5])\times([0.8;2.4]+i[0;4])+([0;4]+[-1;9])\times([-1;0]+i[-3;0]) =$$
$$= ([0;1]\times[-2;0]-[7;17]\times[-5;5]+i(|[0;1]\times[-5;5]+[7;17]\times[-2;0]))+([1;7]\times[0.8;2.4]-[0;5]\times[0;4]+i([1;7]\times[0;4]+$$
$$+[0;5]\times[0.8;2.4]))+([0;4]\times[-1;0]-[-1;9]\times[-3;0]+i([0;4]\times[-3;0]+[-1;9]\times[-1;0])) = ([-2;0]-[-85;85]+i([-5;5]+$$
$$+[-34;0]))+([0.8;16.8]-[0;20]+i([0;28]+[0;12]))+([-4;0]-[-27;3]+i([-12;0]+[-9;1])) = ([-87;85]+[-19.2;16.8]+$$
$$+[-7;27])+i([-39;5]+[0;40]+[-21;1]) = [-113.2;128.8]+i[-60;46]$$

$$BC_{23} = ([5;9]+i[-1;0])\times([-2;0]+i[-5;5])+([0;3]+i[10.5;20.5])\times([0.8;2.4]+i[0;4])+([1.25;4.25]+i[-4;4])\times([-1;0]+$$
$$+i[-3;0]) = ([5;9]\times[-2;0]-[-1;0]\times[-5;5]+i([5;9]\times[-5;5]+[-1;0]\times[-2;0]))+([0;3]\times[0.8;2.4]-[10.5;20.5]\times[0;4]+$$
$$+i([0;3]\times[0;4]+[10.5;20.5]\times[0.8;2.4]))+([1.25;4.25]\times[-1;0]-[-4;4]\times[-3;0]+i([1.25;4.25]\times[-3;0]+[-4;4]\times[-1;0])) =$$
$$= ([-18;0]-[-5;5]+i([-45;45]+[0;2]))+([0;7.2]-[0;82]+i([0;12]+[8.4;49.2]))+([-4.25;0]-[-12;12]+i([-12.75;0]+$$
$$+[-4;4])) = ([-23;5]+[-82;7.2]+[-16.25;12])+i([-45;47]+[8.4;61.2]+[-16.75;4]) = [-121.25;24.2]+i[-53.35;112.2]$$

$$BC_{33} = ([0;2]+i[-1.33;6.67])\times([-2;0]+i[-5;5])+([1.5;9.5]+i[-1;1])\times([0.8;2.4]+i[0;4])+([0;5]+i[6.5;9])\times([-1;0]+$$
$$+i[-3;0]) = ([0;2]\times[-2;0]-[-1.33;6.67]\times[-5;5]+i([0;2]\times[-5;5]+[-1.33;6.67]\times[-2;0]))+([1.5;9.5]\times[0.8;2.4]-$$
$$-[-1;1]\times[0;4]+i([1.5;9.5]\times[0;4]+[-1;1]\times[0.8;2.4]))+([0;5]\times[-1;0]-[6.5;9]\times[-3;0]+i([0;5]\times[-3;0]+[6.5;9]\times$$
$$\times[-1;0])) = ([-4;0]-[-33.35;33.35]+i([-10;10]+[-13.34;2.66]))+([1.2;22.8]-[-4;4]+i([0;38]+[-2.4;2.4]))+([-5;0]-$$
$$-[-27;0]+i([-15;0]+[-9;0]) = ([-37.35;33.35]+[-2.8;26.8]+[-5;27])+i([-23.34;12.66]+[-2.4;40.4]+[-24;0]) =$$
$$= [-45.15;87.15]+i[-49.74;53.06]$$

Інтервальна матриця BC:

$$\begin{pmatrix} [-271.5;40.5]+i[-121;93.5] & [-80.32;129.68]+i[-89.97;216.03] & [-113.2;128.8]+i[-60;46] \\ [-139;63.5]+i[18.75;273.75] & [-34.6525;222.8475]+i[-147.68;54.68] & [-121.25;24.2]+i[-53.35;112.2] \\ [-173.365;39.135]+i[-75.35;95.65] & [-62.16;94.36]+i[-90.44;129.06] & [-45.15;87.15]+i[-49.74;53.06] \end{pmatrix}$$

Для наочності обчислюємо окремо кожний елемент матриці $Q = BC - A$, отриманої при виконанні операції віднімання:

$$Q_{11} = ([-271.5,\ 40.5] + i[-121,\ 93.5]) - ([-1,\ 1] + i[1,\ 7]) = [-272.5,\ 41.5] + i[-128,\ 92.5]$$

$$Q_{21} = ([-139,\ 63.5] + i[18.75,\ 273.75]) - ([9,\ 29] + i[-4,\ 0]) = [-168,\ 72.5] + i[18.75,\ 277.75]$$

$$Q_{31} = ([-173.37,\ 39.14] + i[-75.35,\ 95.65]) - ([-2,\ 2] + i[0.8,\ 2.4]) =$$
$$= [-175.37,\ 41.14] + i[-77.75,\ 94.85]$$

$$Q_{12} = ([-80.32,\ 129.68] + i[-89.97,\ 216.03]) - ([7,\ 17] + i[0,\ 1]) =$$
$$= [-97.32,\ 122.68] + i[-90.97,\ 216.03]$$

$$Q_{22} = ([-34.65,\ 222.85] + i[-147.68,\ 54.68]) - ([0,\ 3] + i[10.5,\ 20.5]) =$$
$$= [-37.65,\ 222.85] + i[-168.18,\ 44.18]$$

$$Q_{32} = ([-62.16,\ 94.36] + i[-90.44,\ 129.06]) - ([10.5,\ 20.5] + i[-2,\ 2]) =$$
$$= [-82.66,\ 83.86] + i[-92.44,\ 131.06]$$

$$Q_{13} = ([-113.2,\ 128.8] + i[-60,\ 46]) - ([-4,\ 4] + i[9,\ 29]) = [-117.2,\ 132.8] + i[-89,\ 37]$$

$$Q_{23} = ([-121.25,\ 24.2] + i[-53.35,\ 112.2]) - ([6.5,\ 9] + i[0,\ 3]) =$$
$$= [-130.25,\ 17.7] + i[-56.35,\ 112.2]$$

$$Q_{33} = ([-45.15,\ 87.15] + i[-49.74,\ 53.06]) - ([-5,\ 5] + i[2,\ 6]) =$$
$$= [-50.15,\ 92.15] + i[-55.74,\ 51.06]$$

Результат:

$$\begin{pmatrix} [-272.5;41.5] + i[-177;62] & [-97.32;122.68] + i[-90.97;216.03] & [-117.2;132.8] + i[-89;37] \\ [-168;72.5] + i[18.75;277.75] & [-37.6525;222.8475] + i[-168.18;44.18] & [-130.25;17.7] + i[-56.35;112.2] \\ [-175.365;106.135] + i[-77.75;94.85] & [-82.66;83.86] + i[-92.44;131.06] & [-50.15;92.15] + i[-55.74;51.06] \end{pmatrix}$$

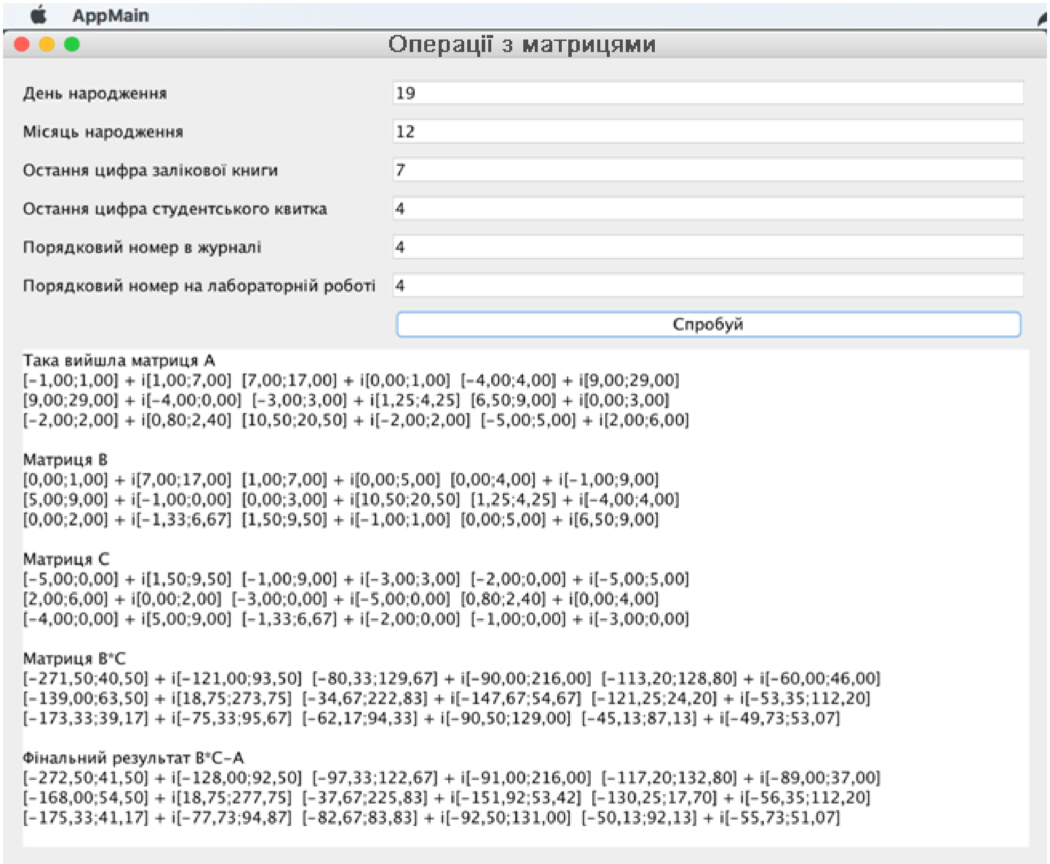


Рисунок 2.1 – Екранна форма програмної системи

Код програми, який ілюструє основні операції із матрицями:

- приклад заповнення матриці даними:

```
private ComplexMatrix initA(){
    ComplexMatrix cm = new ComplexMatrix(3);
    int stNumber = Integer.parseInt(sBField.getText());
    int birthDay = Integer.parseInt(dayField.getText());
    int journalNumber = Integer.parseInt(journalField.getText());
    int labNumber = Integer.parseInt(labField.getText());
    int monthNumber = Integer.parseInt(monthField.getText());
    int markBookNumber = Integer.parseInt(mBField.getText());
    cm.push(new ComplexInterval(new Interval(-1, 1), new Interval(stNumber - 3, stNumber + 3)));
    cm.push(new ComplexInterval(new Interval(monthNumber - 5, monthNumber + 5), new Interval(0, 1)));
    cm.push(new ComplexInterval(new Interval(-4, 4), new Interval(birthDay - 10, birthDay + 10)));
    cm.push(new ComplexInterval(new Interval(birthDay - 10, birthDay +10), new Interval(-4, 0)));
    cm.push(new ComplexInterval(new Interval(-3, 3), new Interval(new Double(stNumber + markBookNumber - 6)/4, new
Double(stNumber + markBookNumber + 6)/4)));
    cm.push(new ComplexInterval(new Interval(new Double(birthDay + monthNumber - 5)/4,new Double(birthDay +
monthNumber + 5)/4 ), new Interval(0, 3)));
    cm.push(new ComplexInterval(new Interval(-2, 2), new Interval(new Double(journalNumber + labNumber -4)/5, new
Double(journalNumber + labNumber + 4)/5)));
    cm.push(new ComplexInterval(new Interval((new Double(birthDay + monthNumber)/2) - 5, (new Double(birthDay +
monthNumber)/2) + 5), new Interval(-2, 2)));
    cm.push(new ComplexInterval(new Interval(-5, 5), new Interval(journalNumber - 2, journalNumber + 2)));
    return cm;
}
```

- приклад формування інтервальної матриці:

```
public class ComplexMatrix {
    public int getSize() {
        return size;
    }
    private int size;
    private ComplexInterval[][] body;
    private int i = 0;
    private int j = 0;
```

```
    public ComplexMatrix(int size) {
        this.size = size;
        this.body = new ComplexInterval[this.size][this.size];
    }
    public void setValue(int i, int j, ComplexInterval val) {
        this.body[i][j] = val;
    }
    public ComplexInterval getValue(int i, int j) {
        return this.body[i][j];
    }
    public ComplexInterval[] getColumn(int index){
        ComplexInterval [] column = new ComplexInterval[this.size];
        for (int i = 0; i < this.size; i++){
            column[i] = this.body[i][index];
        }
        return column;
    }
    public ComplexInterval[] getRow(int index){
        ComplexInterval [] row = new ComplexInterval[this.size];
        for (int i = 0; i < this.size; i++){
            row[i] = this.body[index][i];
        }
        return row;
    }
   public void push(ComplexInterval interval) {
        if (this.j == this.size) {
            this.i++;
            this.j = 0;
        }
        if (this.i == this.size) {
            this.i = 0;
            this.j = 0;
        }
        this.body[this.i][this.j] = interval;
        this.j++;
    }

    @Override
    public String toString() {
        String text = "";
        for (int i = 0; i < this.size; i++){
            for (int j = 0; j < this.size; j++){
                text += this.body[i][j].toString() + "  ";
            }
            text += "\n";
        }
        return text;
    }
}
```

- приклад виконання операцій над інтервальними матрицями:

```
public class ComplexMatrixOperation {
    private ComplexMatrix matrixA;
    private ComplexMatrix matrixB;
    public ComplexMatrixOperation(ComplexMatrix matrixA, ComplexMatrix matrixB) {
        this.matrixA = matrixA;
        this.matrixB = matrixB;
    }
    public ComplexMatrix getMatrixA() {
        return matrixA;
    }
    public void setMatrixA(ComplexMatrix matrixA) {
        this.matrixA = matrixA;
    }
    public ComplexMatrix getMatrixB() {
        return matrixB;
    }
    public void setMatrixB(ComplexMatrix matrixB) {
        this.matrixB = matrixB;
    }
    public ComplexMatrix minus(){
        ComplexMatrix res = new ComplexMatrix(3);
        for (int i = 0; i < res.getSize(); i++){
            for (int j = 0; j < res.getSize(); j++){
                ComplexOperation iOp = new ComplexOperation(matrixA.getValue(i, j), matrixB.getValue(i, j));
                res.push(iOp.minus());
            }
        }
        return res;
```

```
    }
    public ComplexMatrix multiplication(){
        ComplexMatrix res = new ComplexMatrix(3);
        for (int i = 0; i < res.getSize(); i++){
            for (int j = 0; j < res.getSize(); j++){
                ComplexInterval [] row = matrixA.getRow(i);
                ComplexInterval [] column = matrixB.getColumn(j);

                ComplexInterval [] multiRes = new ComplexInterval[row.length];
                for (int k = 0; k < row.length; k++){
                    ComplexOperation iOp = new ComplexOperation(row[k], column[k]);
                    multiRes[k] = iOp.multiplication();
                    //System.out.println("(" + row[k] + ") + (" + column[k] + ") -> " + multiRes[k] );
                }
                for (int k = 1; k < row.length; k++){
                    ComplexOperation iOp = new ComplexOperation(multiRes[0], multiRes[k]);
                    multiRes[0] = iOp.add();
                }
                res.push(multiRes[0]);
            }
        }
        return res;
    }
}
```

Питання для самоконтролю

1. Інтервальний вектор – це…?
2. Інтервальна матриця – це…?
3. Які основні операції над інтервальними векторами та матрицями?
4. Які особливості операцій над інтервальними векторами та матрицями?
5. В результаті яких операцій над інтервальними матрицями на виході отримують точкові матриці?
6. Норма інтервальної матриці – це…?
7. Норма інтервального вектора – це…?
8. Як визначається особливість інтервальної матриці?
9. Які норми є еквівалентними?
10. Що означає монотонність норми?

Варіанти завдань для самостійної роботи

Завдання: 1) провести додавання, віднімання та множення інтервальних матриць; 2) визначити **mid**, **rad**, **wid**, **| |** та **q** для матриці на вибір; 3) визначити особливість першої матриці та норму другої матриці.

	$\begin{pmatrix} [2,5] & [2,7] & [-4,4] \\ [-3,5] & [2,8] & [2,6] \\ [-1,6] & [-3,3] & [5,7] \end{pmatrix}$ 1 $\begin{pmatrix} [0,5] & [2,3] & [0,4] \\ [-5,-3] & [-2,8] & [-2,6] \\ [1,6] & [3,9] & [-5,7] \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} [-2,5] & [-2,7] & [-4,10] \\ [3,5] & [-2,8] & [-2,6] \\ [1,6] & [-1,3] & [-5,7] \end{pmatrix}$ 2 $\begin{pmatrix} [0,5] & [2,3] & [0,4] \\ [-5,-3] & [-2,8] & [-2,6] \\ [1,6] & [3,9] & [5,7] \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} [2,5] & [2,7] & [-4,4] \\ [-3,5] & [2,8] & [2,6] \\ [-1,6] & [-3,3] & [5,7] \end{pmatrix}$ 3 $\begin{pmatrix} [-3,5] & [-2,3] & [0,4] \\ [-5,3] & [-2,0] & [2,6] \\ [0,6] & [-3,9] & [-5,7] \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} [-2,5] & [2,10] & [-4,4] \\ [3,5] & [2,4] & [-2,6] \\ [-1,9] & [-3,3] & [3,7] \end{pmatrix}$ 4 $\begin{pmatrix} [0,5] & [2,3] & [0,4] \\ [-5,-3] & [-2,8] & [-2,6] \\ [1,6] & [3,9] & [-5,7] \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} [2,5] & [2,7] & [-4,4] \\ [-3,5] & [2,8] & [2,6] \\ [-1,6] & [-3,3] & [5,7] \end{pmatrix}$ 5 $\begin{pmatrix} [-5,5] & [-2,3] & [-6,4] \\ [-7,-2] & [-2,0] & [2,12] \\ [1,9] & [3,5] & [5,7] \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} [0,5] & [2,7] & [-1,4] \\ [-3,5] & [-2,8] & [2,6] \\ [-4,6] & [-9,3] & [-5,7] \end{pmatrix}$ 6 $\begin{pmatrix} [4,5] & [-2,3] & [0,4] \\ [-5,-3] & [-2,8] & [-2,6] \\ [-1,6] & [3,9] & [5,7] \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} [-2,5] & [-2,7] & [-4,4] \\ [-3,5] & [-2,8] & [-2,6] \\ [-1,6] & [-3,3] & [-5,7] \end{pmatrix}$ 7 $\begin{pmatrix} [0,5] & [2,3] & [0,4] \\ [-5,-3] & [-2,8] & [-2,6] \\ [1,6] & [3,9] & [5,7] \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} [2,5] & [2,7] & [-4,4] \\ [-3,5] & [2,8] & [2,6] \\ [-1,6] & [-3,3] & [5,7] \end{pmatrix}$ 8 $\begin{pmatrix} [-1,5] & [-2,3] & [-2,4] \\ [-5,-3] & [-2,8] & [-2,6] \\ [-1,6] & [-3,9] & [-5,7] \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} [2,5] & [2,7] & [-4,0] \\ [-3,5] & [2,8] & [2,6] \\ [-1,0] & [-3,0] & [5,7] \end{pmatrix}$ 9 $\begin{pmatrix} [0,5] & [2,3] & [0,4] \\ [-5,-3] & [-2,8] & [-2,6] \\ [1,6] & [3,9] & [-5,7] \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} [2,5] & [2,7] & [-4,4] \\ [-3,5] & [2,8] & [2,6] \\ [-1,6] & [-3,3] & [5,7] \end{pmatrix}$ 10 $\begin{pmatrix} [0,5] & [2,3] & [0,4] \\ [-5,0] & [-2,0] & [-2,0] \\ [1,6] & [3,9] & [5,7] \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} [2,5] & [2,7] & [-4,4] \\ [-3,5] & [2,8] & [2,6] \\ [-1,6] & [-3,3] & [5,7] \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} [0,5] & [0,3] & [0,4] \\ [-5,-3] & [-2,8] & [-2,6] \\ [0,6] & [3,9] & [0,7] \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} [2,5] & [0,7] & [-4,4] \\ [0,5] & [2,8] & [2,6] \\ [-1,6] & [-3,3] & [0,7] \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} [0,5] & [2,3] & [0,4] \\ [-5,-3] & [-2,8] & [-2,6] \\ [1,6] & [3,9] & [5,7] \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} [2,5] & [2,7] & [-4,4] \\ [-3,5] & [2,8] & [2,6] \\ [-1,6] & [-3,3] & [5,7] \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} [-3,5] & [2,3] & [0,4] \\ [-5,-3] & [-2,8] & [-2,6] \\ [-1,6] & [3,9] & [0,7] \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} [2,5] & [2,7] & [-4,4] \\ [-3,5] & [-2,8] & [-2,6] \\ [-1,6] & [-3,3] & [5,7] \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} [0,5] & [2,3] & [0,4] \\ [-5,-3] & [-2,8] & [-2,6] \\ [1,6] & [3,9] & [5,7] \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} [2,5] & [2,7] & [-4,4] \\ [-3,5] & [2,8] & [2,6] \\ [-1,6] & [-3,3] & [5,7] \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} [0,5] & [2,3] & [-2,4] \\ [-5,-3] & [-2,8] & [-2,6] \\ [-8,-6] & [-3,9] & [5,7] \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} [0,5] & [2,7] & [-4,4] \\ [-3,5] & [0,8] & [2,6] \\ [-1,6] & [-3,3] & [0,7] \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} [0,5] & [2,3] & [0,4] \\ [-5,-3] & [-2,8] & [-2,6] \\ [1,6] & [3,9] & [5,7] \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} [2,5] & [2,7] & [-4,4] \\ [-3,5] & [2,8] & [2,6] \\ [-1,6] & [-3,3] & [5,7] \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} [0,5] & [2,3] & [0,4] \\ [-5,-3] & [0,8] & [-2,6] \\ [1,6] & [3,9] & [0,7] \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} [2,5] & [2,7] & [0,4] \\ [-3,5] & [0,8] & [2,6] \\ [0,6] & [-3,3] & [5,7] \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} [0,5] & [2,3] & [0,4] \\ [-5,-3] & [-2,8] & [-2,6] \\ [1,6] & [3,9] & [5,7] \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} [2,5] & [2,7] & [-4,4] \\ [-3,5] & [2,8] & [2,6] \\ [-1,6] & [-3,3] & [5,7] \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} [-5,5] & [2,3] & [-3,4] \\ [-5,-3] & [-2,8] & [-2,6] \\ [-1,6] & [3,9] & [-5,7] \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} [-2,5] & [2,7] & [-4,4] \\ [-3,5] & [-2,8] & [2,6] \\ [-1,6] & [-3,3] & [-5,7] \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} [0,5] & [2,3] & [0,4] \\ [-5,-3] & [-2,8] & [-2,6] \\ [1,6] & [3,9] & [5,7] \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} [2,5] & [2,7] & [-4,4] \\ [-3,5] & [2,8] & [2,6] \\ [-1,6] & [-3,3] & [5,7] \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} [0,5] & [0,3] & [0,4] \\ [-5,-3] & [-2,8] & [-5,6] \\ [1,6] & [0,9] & [5,7] \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} [-3,5] & [2,7] & [5,12] \\ [-3,5] & [-3,8] & [2,6] \\ [1,6] & [-3,3] & [-3,7] \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} [0,5] & [2,3] & [0,4] \\ [-5,-3] & [-2,8] & [-2,6] \\ [1,6] & [3,9] & [5,7] \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} [2,5] & [2,7] & [-4,4] \\ [-3,5] & [2,8] & [2,6] \\ [-1,6] & [-3,3] & [5,7] \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} [1,5] & [2,3] & [-3,4] \\ [-5,-3] & [1,8] & [-2,6] \\ [-3,6] & [3,9] & [1,7] \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} [-2,5] & [2,7] & [-4,4] \\ [0,5] & [-2,8] & [2,6] \\ [-1,6] & [0,3] & [-2,7] \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} [0,5] & [2,3] & [0,4] \\ [-5,-3] & [-2,8] & [-2,6] \\ [1,6] & [3,9] & [5,7] \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} [2,5] & [2,7] & [-4,4] \\ [-3,5] & [2,8] & [2,6] \\ [-1,6] & [-3,3] & [5,7] \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} [0,5] & [0,3] & [0,4] \\ [-5,0] & [-2,8] & [-2,0] \\ [1,6] & [0,9] & [5,7] \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} [2,5] & [-3,7] & [-4,4] \\ [-3,5] & [2,8] & [-3,6] \\ [-1,6] & [-3,3] & [5,7] \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} [0,5] & [2,3] & [0,4] \\ [-5,-3] & [-2,8] & [-2,6] \\ [1,6] & [3,9] & [5,7] \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} [2,5] & [2,7] & [-4,4] \\ [-3,5] & [2,8] & [2,6] \\ [-1,6] & [-3,3] & [5,7] \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} [-5,5] & [2,3] & [-5,4] \\ [-5,-3] & [-2,8] & [-2,6] \\ [-5,6] & [3,9] & [-5,7] \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} [-4,5] & [2,7] & [-4,4] \\ [2,5] & [2,8] & [2,6] \\ [-3,6] & [-3,3] & [-3,7] \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} [0,5] & [2,3] & [0,4] \\ [-5,-3] & [-2,8] & [-2,6] \\ [1,6] & [3,9] & [5,7] \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} [2,5] & [2,7] & [-4,4] \\ [-3,5] & [2,8] & [2,6] \\ [-1,6] & [-3,3] & [5,7] \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} [0,5] & [-4,3] & [0,4] \\ [-5,0] & [-2,8] & [-2,6] \\ [1,6] & [-4,9] & [5,7] \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} [2,5] & [2,7] & [-4,4] \\ [3,5] & [-2,8] & [2,6] \\ [-1,6] & [1,3] & [3,7] \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} [0,5] & [2,3] & [0,4] \\ [-5,-3] & [-2,8] & [-2,6] \\ [1,6] & [3,9] & [5,7] \end{pmatrix}$

РОЗДІЛ 3
ЛОКАЛІЗАЦІЯ НУЛІВ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

3.1 Загальна постановка задачі

В даному розділі розглядаються методи локалізації нулів дійсної функції $f(x)$ однієї дійсної змінної x. Ці методи дозволяють знаходити множину інтервалів найменшої можливої ширини, таких, що кожен інтервал включає один або декілька нулів функції із заданого початкового інтервалу. При розробці таких методів звертають увагу на дві обставини. З однієї сторони, методи повинні мати застосування до широкого класу функцій при умовах, які можна легко перевірити. З іншої сторони - повинна бути гарантована локалізація нулів і в тому випадку, коли дані методи реалізуються на комп'ютері, де замість звичайної інтервальної арифметики виникає машинна інтервальна арифметика. Прості реалізації таких методів задаються за допомогою так званих методів ділення. Це - інтервальні варіанти методу двійкового пошуку або інших методів пошуку. Коротко опишемо таку процедуру. Для її реалізації необхідно лише існування інтервального обчислення функції $f(x)$ на інтервалі X_0. Щоб покращити локалізацію нулів (звузити інтервал X_0**)**, його ділять навпіл точкою

$$m(X_0)=\frac{(x_{1,0}+x_{2,0})}{2}$$

на два інтервали U_0 та V_0, такі, що

$$X_0=U_0\cup V_0=[x_{1,0},m(X_0)]\cup[m(X_0),x_{2,0}].$$

Якщо $0\in f(U_0)$, то U_0 включає нуль функції $f(x)$, і тому процедура половинного поділу повторюється для інтервалу U_0. Або, якщо $0 \in f(V_0)$, то процедура поділу повторюється для V_0. В протилежних випадках відкидаємо відповідні інтервали. Дана процедура породжує послідовність підінтервалів, які належать X_0 і можуть містити нулі функції $f(x)$. Ширина цих інтервалів прямує до нуля, так як вона зменшується вдвічі на кожному кроці. Дана процедура може призвести до породження великої кількості підінтервалів, що є її основним недоліком. Тому, щоб уникнути цього, на кожному кроці пропонується розглядати або тільки праву, або тільки ліву половину інтервалу.

3.2 Методи ньютонівського типу

Метод Ньютона є фундаментальним інструментом у чисельному аналізі, дослідженні опепацій та оптимізації. В даному розділі розглянемо інтервальні модифікації методу Ньютона (методу ітерацій). Для цього будемо використовувати неперервну функцію $f(x)$, яка має нуль на заданому інтервалі $X_0 = [x_{1,0}; x_{2,0}]$. Нехай

$$f(x_{1,0}) < 0 \text{ та } f(x_{2,0}) > 0$$

для межових точок інтервалу X_0 та m_1 і m_2 – межі різницевих відношень

$$0 < m_1 \le \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \frac{f(x)}{x - \xi} \le m_2 < \infty, \quad \xi \ne x \in X_0 .$$

Ці межі визначають інтервал $M = [m_1; m_2] \in I(R)$. Аналогічне справджується для випадку $f(x_{1,0}) > 0$, $f(x_{2,0}) < 0$ та $m_2 < 0$.

Очевидно, що для заданих допущень функція $f(x)$ не має інших розв'язків на інтервалі X_0.

Починаючи із вихідного локалізаційного інтервалу $\xi \in X_0$ обчислюються ітераційно нові інтервали $X_k, k \geq 1$ відповідно до такої процедури:

$$X_{k+1} = \left\{ m(X_k) - \frac{f(m(X_k))}{M} \right\} \cap X_k, \;\; k \geq 0, \tag{3.1}$$

де $m(X_k) \in X_k$.

Формулу 3.1 можна записати і без використання інтервальних операцій:

$$x_{1,k+1} = \begin{Bmatrix} \max\left\{ x_{1,k}, m(X_k) - \dfrac{f(m(X_k))}{m_1} \right\}, & \textit{якщо} \quad f(m(X_k)) \geq 0 \\ m(X_k) - \dfrac{f(m(X_k))}{m_2}, & \textit{якщо} \quad f(m(X_k)) \leq 0 \end{Bmatrix} \tag{3.2}$$

$$x_{2,k+1} = \begin{Bmatrix} m(X_k) - \dfrac{f(m(X_k))}{m_2}, & \textit{якщо} \quad f(m(X_k)) \geq 0 \\ \min\left\{ x_{2,k}, m(X_k) - \dfrac{f(m(X_k))}{m_1} \right\}, & \textit{якщо} \quad f(m(X_k)) \leq 0 \end{Bmatrix} \tag{3.3}$$

Слід зауважити *важливу властивість послідовності ітерацій* $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$, яка обчислена по формулам (3.1)-(3.3):

якщо $m(X_k) = \dfrac{x_{1,k} + x_{2,k}}{2}$, то для послідовності

наближень $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$ вірна нерівність

$$wid(X_{k+1}) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) wid(X_k).$$

Дана властивість показує, що якщо для обчислень вибрати середину початкового заданого інтервалу, то ширина локалізаційного інтервалу буде зменшуватись вдвічі на кожній ітерації.

Зауважимо, що інтервал $[m_1;m_2]$ можна локалізувати для випадку неперервно диференційованої функції $f(x)$ найменшим та найбільшим значенням її першої похідної

$$M=[\min f(x), \max f(x)].$$

Example

Дано $f(x)=x^3-2x-5$, $X_0=[2,3]$. Знайти розв’язок методом Ньютона.

Solution

Обчислюємо похідну функції:

$$f'(x)=3x^2-2$$

Знаходимо інтервал M з фіксованими межами $[m_1,m_2]$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2)=3\cdot 2^2-2=10 \\ f'(3)=3\cdot 3^2-2=25 \end{array}\right\rangle \Rightarrow M=[10,25].$$

Перша ітерація.

Знаходимо середину інтервалу X_0:

$$m(X_0)=\frac{1}{2}(2+3)=2.5$$

Знаходимо значення функції в середній точці:

$$f(m(X_0)) = f(2,5) = 2,5^3 - 2\cdot 2,5 - 5 = 5.625$$

Знаходимо наступне наближення X_1 до розв'язку:

$$X_1 = \{m(X_0) - \frac{f(m(X_0))}{M}\} \cap X_0 = \{(2,5) - \frac{5.625}{[10,\ 25]}\} \cap [2,\ 3] =$$
$$= \{(2.5) - [0.225,\ 0.563]\} \cap [2,\ 3] = [1.937,\ \ 2.275] \cap [2,\ 3] = [2,\ \ 2.275]$$

Проводимо перевірку:

$$wid(X_1) \le \frac{1}{2}(1 - \frac{m_1}{m_2})wid(X_0)$$
$$wid(X_1) = 0.275;\ \ wid(X_0) = 1;$$
$$\frac{1}{2}(1 - \frac{m_1}{m_2})wid(X_0) = 0.3.$$
умова виконується, процедура пошуку продовжується

Друга ітерація.

Знаходимо середину інтервалу $X_1 = 2.138$.

Знаходимо значення функції в середній точці $f(m(X_1)) = f(2.138) = 0.497$.

Знаходимо наступне наближення X_2 до розв'язку:

$$X_2 = \{m(X_1) - \frac{f(m(X_1))}{M}\} \cap X_1 = \{(2.138) - \frac{0.497}{[10,\ 25]}\} \cap [2,\ \ 2.275] = [2.088,\ \ 2.118].$$

Проводимо перевірку:

$$wid(X_2) \le \frac{1}{2}(1-\frac{m_1}{m_2})wid(X_1)$$

$$wid(X_2)=0.03; \qquad wid(X_1)=0.275;$$

$$\frac{1}{2}(1-\frac{m_1}{m_2})wid(X_1)=0.083.$$

умова виконується, процедура пошуку продовжується

Третя ітерація.

Знаходимо середину інтервалу $X_2 = 2.103$.

Знаходимо значення функції в середній точці $f(m(X_2)) = f(2.103) = 0.094$.

Знаходимо наступне наближення X_3 до розв'язку:

$$X_3 = \{m(X_2) - \frac{f(m(X_2))}{M}\} \cap X_2 = \{(2.103) - \frac{0.094}{[10,\ 25]}\} \cap [2.088,\ 2.188] = [2.094,\ 2.099]$$

Проводимо перевірку:

$$wid(X_3) \le \frac{1}{2}(1-\frac{m_1}{m_2})wid(X_2)$$

$$wid(X_3)=0.005; \qquad wid(X_2)=0.03;$$

$$\frac{1}{2}(1-\frac{m_1}{m_2})wid(X_2)=0.009.$$

умова виконується, процедура пошуку продовжується

Четверта ітерація.

Знаходимо середину інтервалу $X_3 = 2.097$.

Знаходимо значення функції в середній точці $f(m(X_3)) = f(2.097) = 0.026$.

Знаходимо наступне наближення X_4 до розв'язку:

$$X_4 = \{m(X_3) - \frac{f(m(X_3))}{M}\} \cap X_3 = \{(2.097) - \frac{0.026}{[10,\ 25]}\} \cap [2.094,\ 2.099] = [2.094,\ 2.096]$$

Проводимо перевірку:

$$wid(X_4) \le \frac{1}{2}(1 - \frac{m_1}{m_2})wid(X_3)$$

$$wid(X_4) = 0.002; \qquad wid(X_3) = 0.005;$$

$$\frac{1}{2}(1 - \frac{m_1}{m_2})wid(X_3) = 0.0015.$$

процедура пошуку завершується

В методі ітерацій використовується фіксована пара m_1, m_2 меж для різницевих відношень функції $f(x)$. Ця процедура відповідає інтервальному варіанту спрощеного методу Ньютона.

Якщо ж допустити, що $f(x)$ неперервно диференційована і для похідної $f'(x)$ є інтервальна оцінка $f'(X)$, то можна визначити інтервальний варіант і для звичайного методу Ньютона. Нову процедуру можна отримати шляхом модифікації методу ітерацій, якщо замінити інтервал M на інтервал

$$M_k = f'(X_k) \tag{3.4}$$

на k-ому кроці ітерації. Якщо відомі апріорні оцінки

$$0 < l_1 \le f'(x) \le l_2,$$

то можна гарантувати оцінку $m_1 > 0$ і використовувати вираз

$$M_k = [m_{1,k}, m_{2,k}] = f'(X_k) \cap L, \quad L = [l_1, l_2]. \tag{3.5}$$

Таким чином отримуємо

$$X_{k+1} = \left\{ m(X_k) - \frac{f(m(X_k))}{M_k} \right\} \cap X_k. \tag{3.6}$$

Модифікуємо даний метод далі. Відмітимо, що якщо $f(m(X_k)) > 0$ (відповідно $f(m(X_k)) < 0$), то шуканий нуль ξ повинен належати інтервалу $\lfloor x_{1,k}, m(X_k) \rfloor$ (відповідно $\lfloor m(X_k), x_{2,k} \rfloor$. Якщо $f(m(X_k)) = 0$, то $m(X_k) = \xi$, і ітераційний процес пошуку нуля функції завершується. Тому у формулі (3.6) досить прийняти

$$M_k = f(Y_k) \cap L, \quad L = [l_1, l_2],$$

де

$$Y_k = \begin{cases} [x_{1,k}, m(X_k)], & \textit{якщо } f(m(X_k)) > 0, \\ [m(X_k), x_{2,k}], & \textit{якщо } f(m(X_k)) < 0, \\ X_k & \textit{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Якщо $0 \in f'(X_0)$, то процедуру пошуку X_{k+1} неможливо навіть почати. Для цього перед початком ітерацій необхідно виконати декілька кроків методу розбиття інтервалів (інтервальні варіанти методу подвійного пошуку або інших методів пошуку). Таким чином буде знайдено інтервал $Y_0 \subset X_0$, для якого вірно $0 \notin f'(Y_0)$.

Проте існує ще одна модифікація методу Ньютона, яка застосовується навіть у випадку, коли $0 \in f'(X_0)$. У такому випадку інтервал X_0 розбивається на підінтервали

$$U_1 = \left[x_{1,0}, m(X_0) - \frac{|f(m(X_0))|}{m_{2,0}} \right],$$
$$V_1 = \left[m(X_0) + \frac{|f(m(X_0))|}{m_{2,0}}, x_{2,0} \right].$$

поклавши, що $f(m(X_0)) \neq 0$. Всі нулі функції $f(x)$ на інтервалі X_0 повинні належати також і $U_1 \bigcup V_1$.

Тепер процедуру пошуку нулів функції можна повторити для підінтервалів U_1 та V_1 і т.д. Сумарна ширина цих інтервалів наближається до нуля. Якщо $f(x)$ має на інтервалі X_0 тільки прості нулі, то після деякого кроку ітерації всі вони виявляться у інтервалах, які не перетинаються. Потім, після деякого кроку процедура перетворюється в ітерацію квадратично збіжного методу (3.6). Після цього або підінтервали наближаються до інтервала, який містить нуль, або в деякий момент отримується пустий перетин.

3.3 Інтерполяційні методи

У противагу описаним вище методам використовують інтерполяційні методи на основі розділених різностей Ньютона. Коротко опишемо.

Припустимо, що функція подвійно неперервно диференційована на інтервалі X та має на цьому інтервалі єдиний та простий нуль ξ. Після цього отримуємо інтервали H,K, які відповідають умовам

$$\begin{aligned} &f'(x) \in H, \quad x \in X, \ \ \text{де } 0 \notin H \\ &f''(x) \in K, \quad x \in X \end{aligned}.$$

Інтервальна інтерпретація ітераційного методу regula falsi (RF) (хибної підстави) має наступний алгоритм:

$$X_0 = X,\;\; x_0 = m(X_0) \quad (\textit{середина інтервалу } X_0),$$
$$X_1 = \left\{ x_0 - \frac{f(x_0)}{H} \right\} \cap X_0$$

$$x_k = m(X_k) \quad (\textit{середина інтервалу } X_k),$$
$$Z_{k+1} = \left\{ x_k - \frac{f(x_k)}{H} \right\} \cap X_k,$$
$$X_{k+1} = \begin{cases} \textit{якщо } \; f(x_k) \neq 0 \\ \left\{ x_k - \dfrac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \left(f(x_k) + \dfrac{1}{2} K(Z_{k+1} - x_k)(Z_{k+1} - x_{k-1}) \right) \right\} \cap Z_{k+1} \\ \textit{в протилежному випадку} \\ Z_{k+1} \end{cases}$$

Модифікації інтервального методу RF мають вищий порядок збіжності, хоча використовують значення тільки самої функції. В них задається параметр $p \geq 1$ - ціле число. Тоді параметричний метод RF (pRF) має наступний алгоритм реалізації:

$$X_0 = X,\;\; x_0 = m(X_0) \quad (\textit{середина інтервалу } X_0),$$
$$X_1 = \left\{ x_0 - \frac{f(x_0)}{H} \right\} \cap X_0,$$
$$\textit{для } k \geq 1 \textit{ обчислюються наближення за наступними формулами:}$$
$$x_k = m(X_k) \quad (\textit{середина інтервалу } X_k),$$
$$X_{k+1,0} = \left\{ x_k - \frac{f(x_k)}{H} \right\} \cap X_k,$$

$$X_{k+1,1}=\begin{cases} \textit{якщо}\quad f(x_k)\neq 0 \\ \left\{x_k-\dfrac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}\left(f(x_k)+\dfrac{1}{2}K\big(X_{k+1,0}-x_k\big)\big(X_{k+1,0}-x_{k-1}\big)\right)\right\}\cap X_{k+1,0}, \\ \textit{в протилежному випадку} \\ X_{k+1,0} \end{cases}$$

після проводять обчислення для $i=2,3,\ldots,p$ (*тільки для* $p\succ 1$)

$z_i=m(X_{k+1,i-1})$;

$$X_{k+1,i}=\begin{cases} \textit{якщо}\quad f(x_k)\neq 0 \\ \left\{z_i-\dfrac{z_i-x_k}{f(z_i)-f(x_k)}\left(f(z_i)+\dfrac{1}{2}K\big(X_{k+1,i-1}-z_i\big)\big(X_{k+1,i-1}-x_k\big)\right)\right\}\cap X_{k+1,i-1}, \\ \textit{в протилежному випадку} \\ X_{k+1,i-1} \end{cases}$$

$X_{k+1}=X_{k+1,p}$

Example

Дано $f(x)=x^3-2x-5$, $X_0=[2,3]$. Знайти розв’язок методом RegulaFalsi.

Solution

Знаходимо першу та другу похідну від функції:

$$f'(x)=(x^3-2x-5)'=3x^2-2$$

$$f''(x)=(3x^2-2)'=6x$$

Перша ітерація

Знаходимо середину інтервалу x_0:

$$x_0=\frac{2+3}{2}=2.5.$$

Знаходимо $Z_1 = \left\{ x_0 - \dfrac{f(x_0)}{H_0} \right\} \bigcap X_0$.

Спочатку обчислимо $H_0 = [f'(X_0^-); f'(X_0^+)] = [10, 25]$ та $f(x_0) = 5.625 \neq 0$.

$$Z_1 = \left\{ 2.5 - \frac{5.625}{[10, 25]} \right\} \bigcap [2, 3] = \{2.5 - [0.225, 0.5625]\} \bigcap [2, 3] =$$
$$= [1.9375, \; 2.275] \bigcap [2, 3] = [2, \; 2.275]$$
$$X_1 = Z_1 = [2, \; 2.275]$$

Друга ітерація

Знаходимо середину інтервалу x_1:

$$x_1 = \frac{2 + 2.275}{2} = 2.1375.$$

Знаходимо $Z_2 = \left\{ x_1 - \dfrac{f(x_1)}{H_1} \right\} \bigcap X_1$.

Спочатку обчислимо $H_1 = [f'(X_1^-); f'(X_1^+)] = [10, 13.53]$ та $f(x_1) = 0.49 \neq 0$.

$$Z_2 = \left\{ 2.1375 - \frac{0.49}{[10, \; 13.53]} \right\} \bigcap [2, \; 2.275] = \{2.1375 - [0.04, \; 0.05]\} \bigcap [2, \; 2.275] =$$
$$= [2.0875, \; 2.0975] \bigcap [2, \; 2.275] = [2.0875, \; 2.0975]$$

$$K_1 = [f''(X_1^-); f''(X_1^+)] = [12, 13.65]$$

$$X_2 = \{x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \cdot (f(x_1) + \frac{1}{2}K_1(Z_2 - x_1)(Z_2 - x_0)\} \bigcap Z_2 =$$

$$= \{2.1375 - \frac{2.1375 - 2.5}{0.49 - 5.625} \times (0.49 + \frac{1}{2}[12, 13.65]([2.0875,\ 2.0975] - 2.1375) \times$$

$$\times ([2.0875,\ 2.0975] - 2.5)\} \bigcap [2.0875,\ 2.0975] =$$

$$= \{2.1375 - \frac{-0.3625}{-5.135}(0.49 + [6, 6.825] \cdot [-0.05,\ -0.04] \times$$

$$\times [-0.41,\ -0.4]\} \bigcap [2.0875, 2.0975] =$$

$$= \{2.1375 - 0.07 \cdot (0.49 + [6,\ 6.825] \cdot [0.016,\ 0.02])\} \bigcap [2.0875,\ 2.0975] =$$

$$= \{2.1375 - 0.07 \cdot (0.49 + [0.11,\ 0.12])\} \bigcap [2.0875,\ 2.0975] =$$

$$= \{2.1375 - 0.07 \cdot [0.6,\ 0.61]\} \bigcap [2.0875,\ 2.0975] =$$

$$= \{2.1375 - [0.042,\ 0.043]\} \bigcap [2.0875,\ 2.0975] =$$

$$= [2.0945,\ 2.0955] \bigcap [2.0875,\ 2.0975] = [2.0945,\ 2.0955]$$

Програмна реалізація задачі пошуку мінімуму функції на основі методу Ньютона мовою програмування PHP

Розробити програмну систему для знаходження мінімуму функції $f(x) = \sin^3(e^{5x^3}) - 0.7$ на заданому проміжку $X_0 = [0.16;0.4]$ із використанням інтервального методу Ньютона.

Обчислюємо похідну функції: $f'(x) = 45\sin^2(e^{5x^3})\cos(e^{5x^3})e^{5x^3}x^2$.

Ітерація 1.

Знаходимо інтервал $M[m_1, m_2]$, який складається з верхньої та нижньої меж значень похідної функції у вхідному інтервалі X_0.

$$f'(X_0^-) = 45\sin^2(e^{5\cdot 0.16^3})\cos(e^{5\cdot 0.16^3})e^{5\cdot 0.16^3}0.16^2 =$$

$$= 45 \cdot 0.7273 \cdot 0.5222 \cdot 1.021 \cdot 0.0256 = 0.44$$

$$f'(X_0^+) = 45\sin^2(e^{5\cdot 0.4^3})\cos(e^{5\cdot 0.4^3})e^{5\cdot 0.4^3}0.4^2 = \qquad \Longrightarrow \qquad M[0.44;1.7274].$$

$$= 45 \cdot 0.9683 \cdot 0.178 \cdot 1.39 \cdot 0.16 = 1.7274$$

Знаходимо середину інтервалу X_0 - точку $m(X_0)$: $m(X_0)=\dfrac{0.16+0.4}{2}=0.28$.

Знаходимо значення функції в точці $m(X_0)$:

$$f(m(X_0))= f(0.28)=\sin^3(e^{5\cdot 0.28^3})-0.7=0.029\ .$$

Знаходимо наступне наближення X_1 до розв'язку:

$$X_1=\left\{m(X_0)-\frac{f(m(X_0))}{M}\right\}\cap X_0=\left\{(0.28)-\frac{0.029}{[0.44;1.7274]}\right\}\cap[0.16;0.4]=$$
$$=\{(0.28)-[0.017;0.066]\}\cap[0.16;0.4]=[0.214;0.263]\cap[0.16;0.4]=[0.214;0.263]$$

Проводимо перевірку:

$$d(X_1)\le\frac{1}{2}(1-\frac{m_1}{m_2})\cdot d(X_0)$$

$d(X_1)=0.263-0.214=0.049$ $\quad$ $d(X_0)=0.4-0.16=0.24$

$\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{0.44}{1.7274})\cdot 0.24=0{,}089$ $\quad$ $0.049<0.089$ - умова виконується

Ітерація 2.

Знаходимо середину інтервалу X_1 - точку $m(X_1)$: $m(X_1)=\dfrac{0.214+0.263}{2}=0.24$.

Знаходимо значення функції в точці $m(X_1)$:

$$f(m(X_1))= f(0.24)=\sin^3(e^{5\cdot 0.24^3})-0.7=-0{,}02\ .$$

Знаходимо наступне наближення X_2 до розв'язку:

$$X_2 = \left\{ m(X_1) - \frac{f(m(X_1))}{M} \right\} \cap X_1 = \left\{ (0.24) - \frac{-0,02}{[0.44,\ 1.7274]} \right\} \cap [0.214;0.263] =$$
$$= \{(0.24) - [-0.045;-0.012]\} \cap [0.214;0.263] = [0.252;0.285] \cap [0.214;0.263] =$$
$$= [0.252;0.263]$$

Проводимо перевірку:

$d(X_2) = 0.263 - 0.252 = 0.011$ $\qquad d(X_1) = 0.049$

$\frac{1}{2}(1 - \frac{0.44}{1.7274}) \cdot 0.049 = 0.018$ $\qquad 0.011 < 0.018$ - умова виконується

Ітерація 3.

Знаходимо серединку інтервалу X_2 - точку $m(X_2)$: $m(X_2) = \frac{0.252 + 0.263}{2} = 0.26$.

Знаходимо значення функції в точці $m(X_2)$:

$$f(m(X_2)) = f(0.26) = \sin^3(e^{5 \cdot 0.26^3}) - 0.7 = 0,002 .$$

Знаходимо наступне наближення X_3 до розв'язку:

$$X_3 = \left\{ m(X_2) - \frac{f(m(X_2))}{M} \right\} \cap X_2 = \left\{ (0.26) - \frac{0,002}{[0.44;1.7274]} \right\} \cap [0.252;0.263] =$$
$$= \{(0.26) - [0.0011;0.005]\} \cap [0.252;0.263] = [0.255;0.259] \cap [0.252;0.263] =$$
$$= [0.255;0.259]$$

Проводимо перевірку:

$$d(X_3) = 0.259 - 0.255 = 0.004 \qquad d(X_2) = 0.011$$

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{0.44}{1.7274}\right) \cdot 0.011 = 0.004 \qquad 0.004 < 0.011$$ - умова виконується.

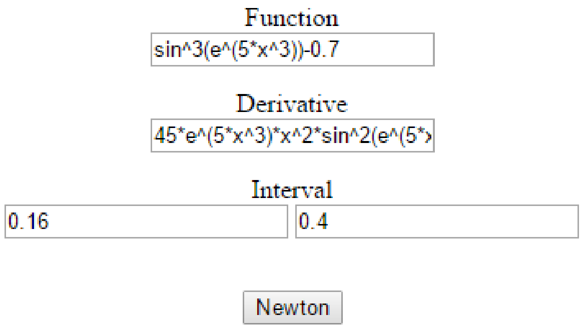
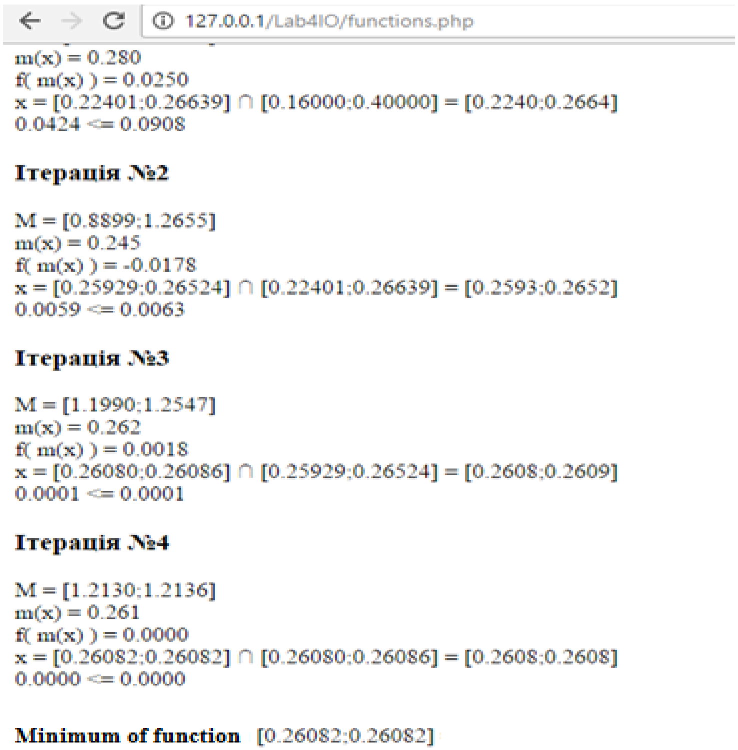


Рисунок 3.1 – Вікно для введення початкових даних



m(x) = 0.280
f(m(x)) = 0.0250
x = [0.22401;0.26639] ∩ [0.16000;0.40000] = [0.2240;0.2664]
0.0424 <= 0.0908

Ітерація №2

M = [0.8899;1.2655]
m(x) = 0.245
f(m(x)) = -0.0178
x = [0.25929;0.26524] ∩ [0.22401;0.26639] = [0.2593;0.2652]
0.0059 <= 0.0063

Ітерація №3

M = [1.1990;1.2547]
m(x) = 0.262
f(m(x)) = 0.0018
x = [0.26080;0.26086] ∩ [0.25929;0.26524] = [0.2608;0.2609]
0.0001 <= 0.0001

Ітерація №4

M = [1.2130;1.2136]
m(x) = 0.261
f(m(x)) = 0.0000
x = [0.26082;0.26082] ∩ [0.26080;0.26086] = [0.2608;0.2608]
0.0000 <= 0.0000

Minimum of function [0.26082;0.26082]

Рисунок 3.2 – Результат виконання програми пошуку мінімуму функції за методом Ньютона

Код програми, який ілюструє основну функціональність методів:

```
<?php
define('appId','9HLKK2-Y5P3T483VP');
$function = $_POST['function'];
$derivative = $_POST['derivative'];
$interval_start = $_POST['interval_start'];
$interval_end = $_POST['interval_end'];
$x[0] = $interval_start;
$x[1] = $interval_end;
sortInterval($x0);
printf("f(x) = %s <br>", $function);
printf("f(x)' = %s <br>", $derivative);
printf("x<sub>0</sub> = [%.2f;%.2f] <br><br>", $x[0], $x[1]);
$r = TRUE;
$cnt = 0;
while($r) {
    $cnt++;
echo "<h3>Ітерація №$cnt</h3>";
    $M = countM($x[0], $x[1], $derivative);
printf("M = [%.4f;%.4f] <br>", $M[0], $M[1]);
    $m_from_x_0 = count_m_from_x($x[0], $x[1]);
printf("m(x) = %.3f <br>", $m_from_x_0);
   $f_from_m0 = countExpression($function, $m_from_x_0);
printf("f( m(x) ) = %.4f <br>", $f_from_m0);
    $newX = countX($m_from_x_0, $f_from_m0, $M, $x);
printf("x = [%.5f;%.5f] &#8745; [%.5f;%.5f] = ", $newX[0], $newX[1], $x[0], $x[1]);
    $newX = intersection($newX, $x);
if($newX == null) {
echo " emptyset";
break;
    }
printf("[%.4f;%.4f] <br>", $newX[0], $newX[1]);
    $r = compare($newX, $M, $x);
    $x = $newX;
}
functioncompare($x, $M, $x0)
{
    $left = $x[1] - $x[0];
   $right = 0.5 * (1 - $M[0] / $M[1]) * ($x0[1] - $x0[0]);
if($left<= $right) {
printf("%.4f <= %.4f", $left, $right);
returntrue;
    } else {
printf("%.4f > %.4f", $left, $right);
return FALSE;
    }
}
functionintersection($I1, $I2)
{
if ($I1[0] < $I2[0] && $I2[0] < $I2[1] && $I2[1] < $I1[1]) {
return $I2;
    } elseif ($I2[0] < $I1[0] && $I1[0] < $I1[1] && $I1[1] < $I2[1]) {
return $I1;
    } elseif ($I2[0] < $I1[0] && $I1[0] < $I2[1] && $I2[1] < $I1[1]) {
        $newI = [];
        $newI[0] = $I1[0];
        $newI[1] = $I2[1];
return $newI;
    } elseif ($I1[0] < $I2[0] && $I2[0] < $I1[1] && $I1[1] < $I2[1]) {
        $newI = [];
        $newI[0] = $I1[1];
        $newI[1] = $I2[0];
return $newI;
    } else {
returnnull;
    }
functioncountX($m_from_x_0, $f_from_m0, $M)
{
    $I = [];
    $I[0] = $m_from_x_0 - ( $f_from_m0 / $M[0] );
    $I[1] = $m_from_x_0 - ( $f_from_m0 / $M[1] );
sortInterval($I);
return $I;
}
functionsortInterval(&$I)
{
if($I[0] > $I[1]) {
        $tmp = $I[0];
        $I[0] = $I[1];
        $I[1] = $tmp;
```

```
    }
}
functioncountM($interval_start, $interval_end, $derivative)
{
    $M = [];
    $M[0]  = countExpression($derivative, $interval_start);
    $M[1]  = countExpression($derivative, $interval_end);
return $M;
}
functioncount_m_from_x($interval_start, $interval_end)
{
    $m = ($interval_start + $interval_end) / 2;
return $m;
}
functioncountExpression($function, $x)
{
    $engine = newWolframAlphaEngine( appId );
    $expression = $function . " , x = " . round($x, 5);
    $response = $engine->getResults($expression);
    $xml = newSimpleXMLElement($response->rawXML);
    $y = explode("~", $xml->pod[1]->subpod->plaintext);
    $y = filter_var(array_pop($y), FILTER_SANITIZE_NUMBER_FLOAT, FILTER_FLAG_ALLOW_FRACTION);
return $y;
}
```

Питання для самоконтролю

1. Яка загальна постановка задачі локалізації нулів функції?
2. Якими методами проводиться локалізація нулів функції?
3. Який основний зміст методу ітерацій?
4. Які існують модифікації методу Ньютона?
5. Яка важлива властивість послідовності ітерацій?
6. Яка умова збіжності методу ітерацій?
7. В чому полягає особливість застосування інтерполяційних методів локалізації нулів функції?
8. Який основний зміст методу хибної підстави?
9. Яка існує модифікація методу хибної підстави?
10. Яка умова збіжності методу хибної підстави?

Варіанти завдань для самостійної роботи

Знайти мінімум функції методом Ньютона з точністю більше 10^{-6}:

Функція	Початковий інтервал
$f(x)=2\sin^2(2x)-8x^3-\dfrac{1}{4}$	[0,05;0,4]
$f(x)=tg^2(x-1)^3-x^2$	[1,85;2,1]
$f(x)=\ln(x)\cos(x)-\sqrt{\dfrac{1}{x}}$	[4,7;5,2]
$f(x)=2\sin^2(x)-4x^3\cos(2x)-0{,}5$	[0,1;0,9]
$f(x)=-arctg(2^{8x^2})+1$	[–0,6;–0,1]
$f(x)=\dfrac{x^{\cos^2 x^2}-4\cos x}{2}-3$	[2,8;3,05]
$f(x)=\sin^3(e^{5x^3})$	[–0,58;0.68]
$f(x)=\ln\cos^2 e^{4x\sin x}+x^3$	[0;0,55]
$f(x)=5^{3x^2\cos 5x+1}-20$	[0,5;1,3]
$f(x)=\cos(e^{3x^4}\ln x^6-x^2)$	[0,2;0,55]
$f(x)=(3x-6)^{(x^2-10)^2}-3$	[3,2;3,4]
$f(x)=\sqrt[10]{\cos^7\ln^3 x^4}-1$	[0,75;1]
$f(x)=3x^3(\ln^5(3^x)-2x^4)$	[1;2]
$f(x)=10\sqrt[9]{\cos^7(x^4-6\sin 2x)}+\dfrac{1}{2}$	[–1,9;–1,5]
$f(x)=(6^{4x^3-3x+4}+3)^3-x^2$	[–6;–4]
$f(x)=tg(\sin 3^x)+x^x-4$	[1;2]
$f(x)=\left\lvert 5^{x^3-1}-1\right\rvert-10$	[1,1;1,38]
$f(x)=\log_2(x^{\sin 2x})$	[2,6;4]
$f(x)=\sin^4(x^3)\cdot\ln(x^2)$	[0,5;1,25]
$f(x)=3^{\sin x^2\cos x}-1$	[1;1,7]

$f(x) = tg^2(\cos(\sin(x))) - 0{,}5$	[–4,7;–3,3]
$f(x) = \ln(e^{5\cos x})$	[–3;–1]
$f(x) = \ln(e^{x^2}) + \cos(x^2) - 2$	[1,2;2,6]
$f(x) = arctg(\frac{1}{x}) \cdot e^{\sin x} - 1$	[1;4]
$f(x) = \sin(tgx^4) - 8\cos^2(x)$	[–1,41;–1,2]
$f(x) = x^3\cos(3x^2) - 4x\sin(\frac{1}{x}) + 0{,}5$	[0,25;0,8]
$f(x) = \sin x^3 + \cos(e^x)$	[1,6;1,9]
$f(x) = \ln(\cos(x)) + \frac{\sin(x)}{x} + 2$	[4,8;6,1]
$f(x) = \frac{\sin x \cos 3x}{3^x}$	[–2,05;–1,2]
$f(x) = 3^{\cos 4x} - \frac{1}{2}$	[2,4;3,1]

РОЗДІЛ 4
МЕТОДИ РІШЕННЯ ІНТЕРВАЛЬНИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

4.1 Прямі методи рішення інтервальних систем лінійних алгебраїчних рівнянь (ІСЛАР)

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Ax = b, \tag{4.1}$$

де $b = (b_i)$ - відомий вектор вихідних значень даної системи,
$A = (a_{ij})$ - відома невироджена матриця вхідних значень системи.
Тоді $x = A^{-1}b$ - рішення системи.

Нехай в силу похибок $[A] = [A_{ij}]$ - інтервальна матриця, а $[b] = [B_i]$ - інтервальний вектор, обернення A_p^{-1} існує для всіх $A_p \in [A]$. Необхідно знайти множину:

$$\Omega = \{x_p \mid A_p x_p = b_p,\ A_p \in [A], b_p \in [b]\}.$$

Дана множина в загальному випадку не має простого опису. Тому обмежуються її локалізацією за допомогою інтервального вектора $[x] = [X_i]$.

Самим простим способом рішення ІСЛАР виду (4.1) є метод Крамера. Дійсно, для системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) $A = (a_{ij}), b = (b_i), i, j = 1,2$ рішення знаходиться за формулами

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{4.2}$$

де

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$
$$\Delta_1 = b_1 a_{22} - b_2 a_{21},$$
$$\Delta_2 = a_{11}b_2 - a_{12}b_1.$$

Для рішення ІСЛАР виконується інтервальне розширення формул Крамера.

Example

Знайти розв'язок ІСЛАР з двома невідомими параметрами методом Крамера.

$$\begin{bmatrix} 2 & [-1{,}0] \\ [-1{,}0] & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ -1.2 \end{bmatrix}.$$

Solution

$$\begin{aligned} \Delta &= A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 2 \cdot 2 - ([-1{,}0])^2 = [3{,}4] \\ \Delta_1 &= B_1 A_{22} - B_2 A_{21} = 1{,}2 \cdot 2 - (-1.2) \cdot [-1{,}0] = [1.2,\ 2.4] \\ \Delta_2 &= A_{11}B_2 - A_{12}B_1 = 2 \cdot (-1.2) - [-1{,}0] \cdot 1.2 = [-2.4,\ -1.2] \end{aligned} .$$

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{[1.2,\ 2.4]}{[3,\ 4]} = [0.3,\ 0.8] \\ X_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{[-2.4,\ -1.2]}{[3,\ 4]} = [-0.8,\ -0.3] \end{aligned} \right\rangle \Rightarrow [x] = \begin{bmatrix} [0.3,\ 0.8] \\ [-0.8,\ -0.3] \end{bmatrix}.$$

Example

Знайти розв’язок ІСЛАР з трьома невідомими параметрами методом Крамера.

$$\begin{bmatrix} [3.7,\,4.3] & [-1.5,\,-0.5] & 0 \\ [-1.5,\,-0.5] & [3.7,\,4.3] & [-1.5,\,-0.5] \\ 0 & [-1.5,\,-0.5] & [3.7,\,4.3] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-14,\,14] \\ [-9,\,9] \\ [-3,\,3] \end{bmatrix}.$$

Solution

$$\Delta = A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{21}A_{32}A_{13} - A_{13}A_{22}A_{31} - A_{12}A_{21}A_{33} - A_{11}A_{32}A_{23} =$$
$$= \left([3.7,\,4.3]\right)^3 - \left(\left([-1.5,\,-0.5]\right)^2 \cdot [3.7,\,4.3]\right) - \left(\left([-1.5,\,-0.5]\right)^2 \cdot [3.7,\,4.3]\right) = [31.29,\,77.65]$$

$$\Delta_1 = B_1A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}B_3 + B_2A_{32}A_{13} - A_{13}A_{22}B_3 - A_{12}B_2A_{33} - B_1A_{32}A_{23} =$$
$$= [-14,\,14] \cdot \left([3.7,\,4.3]\right)^2 + \left([-1.5,\,-0.5]\right)^2 \cdot [-3,\,3] - \left([-1.5,\,-0.5]\right)^2 \cdot [-14,\,14] -$$
$$- [-9,\,9] \cdot [-1.5,\,-0.5] \cdot [3.7,\,4.3] = [-355.16,\,355.16]$$

$$\Delta_2 = A_{11}B_2A_{33} + B_1A_{23}A_{31} + A_{21}B_3A_{13} - A_{13}B_2A_{31} - B_1A_{21}A_{33} - A_{11}B_3A_{23} =$$
$$= \left([3.7,\,4.3]\right)^2 \cdot [-9,\,9] - \left([-1.5,\,-0.5]\right)^2 \cdot [3.7,\,4.3] = [-185.77,\,164.55]$$

$$\Delta_3 = A_{11}A_{22}B_3 + A_{12}B_2A_{31} + A_{21}A_{32}B_1 - B_1A_{22}A_{31} - A_{12}A_{21}B_3 - A_{11}A_{32}B_2 =$$
$$= \left([3.7,\,4.3]\right)^2 \cdot [-3,\,3] + \left([-1.5,\,-0.5]\right)^2 \cdot [-14,\,14] - \left([-1.5,\,-0.5]\right)^2 \cdot [-3,\,3] -$$
$$- [-9,\,9] \cdot [-1.5,\,-0.5] \cdot [3.7,\,4.3] = [-151.77,\,151.77]$$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{[-355.16,\,355.16]}{[31.29,\,77.65]} = [-11.35,\,11.35] \\ X_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{[-185.77,\,-164.55]}{[31.29,\,77.65]} = [-5.94,\,5.26] \\ X_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{[-151.77,151.77]}{[31.29,\,77.65]} = [-4.85,\,4.85] \end{array}\right\rangle \Rightarrow [x] = \begin{bmatrix} [-11.35,\,11.35] \\ [-5.94,\,5.26] \\ [-4.85,\,4.85] \end{bmatrix}.$$

Проте застосовувати формули Крамера для рішення систем великої розмірності не раціонально. При обчисленнях для таких випадків використовують прямі методи Гауса та $LU-$розкладу.

4.2. Метод Гауса

Інтервальний метод Гауса являє собою інтервальне розширення методу Гауса для СЛАР.

Нехай ІСЛАР побудована наступним чином:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot [x] = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Метод Гауса складається з двох напрямів пошуку розв'язку: прямого та зворотнього. Під час прямого пошуку за допомогою елементарних перетворень початково задана матриця вхідних значень $[A]$ системи (4.3) покроково зводиться до верхньотрикутного виду:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22}^* & \cdots & A_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2^* \\ \vdots \\ B_n^* \end{bmatrix},$$

застосовуючи такі формули

$$[A_{1j}^*] = [A_{1j}], \quad 1 \le j \le n,$$

$$[A_{i1}^*] = 0, \quad 2 \le i \le n,$$

$$[A_{ij}^*]=[A_{ij}]-[A_{1j}]\left(\frac{[A_{i1}]}{[A_{11}]}\right),\quad 2\le i,\ j\le n,$$

$$[B_1^*]=[B_1],$$

$$[B_i^*]=[B_i]-[B_1]\left(\frac{[A_{i1}]}{[A_{11}]}\right),\ 2\le i\le n.$$

Зворотній пошук методу Гауса: використовуючи формули

$$[X_n]=\frac{[B_n^*]}{[A_{nn}^*]},$$

$$[X_i]=\frac{\left([B_i^*]-\sum\limits_{j=i+1}^{n}[A_{ij}^*][X_j]\right)}{[A_{ii}^*]},1\le i\le n-1\quad ,$$

отримуємо інтервальний вектор $[x]=[X_i]$, який задовольняє умові:

$$\left\{x_p\ \middle|\ A_p x_p=b_p,\quad A_p\in[A],\ b_p\in[b]\right\}\subseteq[x].$$

Example

Знайти розв'язок ІСЛАР з двома невідомими параметрами методом Гауса.

$$\begin{bmatrix}2 & [-1,0]\\ [-1,0] & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.2\\ -1.2\end{bmatrix}.$$

Solution

Маючи вихідну матрицю $[A]$ виду $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ зведемо її до верхньотрикутної $\begin{bmatrix} A_{11}^{*} & A_{12}^{*} \\ 0 & A_{22}^{*} \end{bmatrix}$. Застосувавши прямий хід методу, отримаємо:

$$\left.\begin{aligned} &A_{11}^{*} = A_{11} = 2 \\ &A_{12}^{*} = A_{12} = [-1, 0] \\ &A_{21}^{*} = 0 \\ &A_{22}^{*} = A_{22} - A_{12}\left(\frac{A_{21}}{A_{11}}\right) = [1.5, 2] \end{aligned}\right\rangle \Rightarrow [A^{*}] = \begin{bmatrix} 2 & [-1, 0] \\ 0 & [1.5, 2] \end{bmatrix}.$$

$$\left.\begin{aligned} &B_{1}^{*} = B_{1} = 1.2 \\ &B_{2}^{*} = B_{2} - B_{1}\frac{A_{21}}{A_{11}} = [-1.2, -0.6] \end{aligned}\right\rangle \Rightarrow [b^{*}] = \begin{bmatrix} 1.2 \\ [-1.2, -0.6] \end{bmatrix}.$$

При зворотньому ході отримаємо невідомі параметри системи:

$$\left.\begin{aligned} &X_{2} = \frac{B_{2}^{*}}{A_{22}^{*}} = \frac{[-1.2, -0.6]}{[1.5, 2]} = [-0.8, -0.3] \\ &X_{1} = \frac{B_{1}^{*} - A_{12}^{*} \cdot X_{2}}{A_{11}^{*}} = \frac{1.2 - ([-1, 0] \cdot [-0.8, -0.3])}{2} = [0.2, 0.6] \end{aligned}\right\rangle \Rightarrow [x] = \begin{bmatrix} [0.2, 0.6] \\ [-0.8, -0.3] \end{bmatrix}.$$

Example

Знайти розв’язок ІСЛАР з трьома невідомими параметрами методом Гауса.

$$\begin{bmatrix} [3.7,\ 4.3] & [-1.5,\ -0.5] & 0 \\ [-1.5,\ -0.5] & [3.7,\ 4.3] & [-1.5,\ -0.5] \\ 0 & [-1.5,\ -0.5] & [3.7,\ 4.3] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-14,14] \\ [-9,9] \\ [-3,3] \end{bmatrix}.$$

Solution

Маючи вихідну матрицю $[A]$ виду $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ зведемо її до верхньотрикутної $\begin{bmatrix} A_{11}^{*} & A_{12}^{*} & A_{13}^{*} \\ 0 & A_{22}^{*} & A_{23}^{*} \\ 0 & 0 & A_{33}^{*} \end{bmatrix}$. Застосувавши прямий хід методу, отримаємо:

$$A_{11}^{(1)} = A_{11} = [3.7,\ 4.3]$$
$$A_{12}^{(1)} = A_{12} = [-1.5,\ -0.5]$$
$$A_{13}^{(1)} = A_{13} = 0$$
$$A_{21}^{(1)} = 0$$
$$A_{31}^{(1)} = 0$$
$$A_{22}^{(1)} = A_{22} - A_{12}\left(\frac{A_{21}}{A_{11}}\right) = [3.08,\ 4.24]$$
$$A_{23}^{(1)} = A_{23} - A_{13}\left(\frac{A_{21}}{A_{11}}\right) = [-1.5,\ -0.5]$$
$$A_{32}^{(1)} = A_{32} - A_{12}\left(\frac{A_{31}}{A_{11}}\right) = [-1.5,\ -0.5]$$
$$A_{33}^{(1)} = A_{33} - A_{13}\left(\frac{A_{31}}{A_{11}}\right) = [3.7,\ 4.3]$$

$$[A^{(1)}] = \begin{bmatrix} [3.7,\ 4.3] & [-1.5,\ -0.5] & 0 \\ 0 & [3.08,\ 4.24] & [-1.5,\ -0.5] \\ 0 & [-1.5,\ -0.5] & [3.7,\ 4.3] \end{bmatrix}.$$

$$A_{32}^{(2)} = 0$$

$$A_{33}^{(2)} = A_{33}^{(1)} - A_{23}^{(1)}\left(\frac{A_{32}^{(1)}}{A_{22}^{(1)}}\right) = [2.96,\ 4.24]$$

$$[A^*] = \begin{bmatrix} [3.7,\ 4.3] & [-1.5,\ -0.5] & 0 \\ 0 & [3.08,\ 4.24] & [-1.5,\ -0.5] \\ 0 & 0 & [2.96,\ 4.24] \end{bmatrix}.$$

$$\left.\begin{aligned} B_1^* &= B_1 = [-14, 14] \\ B_2^* &= B_2 - B_1\frac{A_{21}}{A_{11}} = [-14.67, 14.67] \\ B_3^* &= B_3 - B_1\frac{A_{31}}{A_{11}} = [-3, 3] \end{aligned}\right\rangle \Rightarrow [b^*] = \begin{bmatrix} [-14, 14] \\ [-14.67, 14.67] \\ [-3, 3] \end{bmatrix}.$$

При зворотньому ході отримаємо невідомі параметри системи:

$$\left.\begin{aligned} X_3 &= \frac{B_3^*}{A_{33}^*} = [-1.01, 1.01] \\ X_2 &= \frac{B_2^* - A_{23}^* X_3}{A_{22}^*} = [-5.26,\ 5.26] \\ X_1 &= \frac{B_1^* - (A_{12}^* X_2 + A_{13}^* X_3)}{A_{11}^*} = [-5.92,\ 5.92] \end{aligned}\right\rangle \Rightarrow [x] = \begin{bmatrix} [-5.92,\ 5.92] \\ [-5.26,\ 5.26] \\ [-1.01, 1.01] \end{bmatrix}.$$

4.3. LU − розклад матриці на трикутні

Матрицю $[A]$ також можна представити у вигляді добутку двох трикутних матриць $[L]$ (верхньо трикутної) та $[U]$ (нижньо трикутної) відповідно до методу Холецького:

$$[L]=\begin{bmatrix} L_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix}, \quad [U]=\begin{bmatrix} 1 & U_{12} & \cdots & U_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & U_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Зауважимо, що на головній діагоналі матриці $[U]$ стоять одиниці. Це в свою чергу означає, що визначник матриці $[A]$ дорівнює добутку діагональних елементів L_{ii} матриці $[L]$:

$$\det[U]=1,\ \det[L]=L_{11}L_{22}\cdot\ldots\cdot L_{nn},\ \det[A]=\det[L].$$

Коефіцієнти матриць $[L]$ та $[U]$ знаходяться за формулами:

$$[L_{i1}]=[A_{i1}],\ \ i=\overline{1,n}$$
$$[U_{1j}]=\frac{[A_{1j}]}{[A_{11}]},\ \ j=\overline{2,n}$$

Тоді справедливі наступні рекурентні співвідношення:

$$\begin{aligned} &[L_{ij}]=[A_{ij}]-\sum_{k=1}^{j-1}[L_{ik}][U_{kj}],\ \ i=\overline{2,n};\quad j=\overline{2,i} \\ &[U_{ij}]=\frac{1}{[L_{ii}]}\left([A_{ij}]-\sum_{k=1}^{i-1}[L_{ik}][U_{kj}]\right),\ \ i=\overline{2,j} \end{aligned}.$$

Коли матриці $[L]$ та $[U]$ побудовані, знаходження розв'язку ІСЛАР проводиться за наступним алгоритмом:

1) спочатку розв'язується допоміжна система відповідно до рекурентних співвідношень

$$[L]\cdot[y]=[b]$$

$$[Y_1]=\frac{[B_1]}{[L_{11}]},$$

$$[Y_2]=\frac{[B_2]-[L_{21}][Y_1]}{[L_{22}]},$$

$$\vdots$$

$$[Y_i]=\frac{[B_i]-\sum\limits_{s=1}^{i-1}[L_{is}][Y_s]}{[L_{ii}]}.$$

2) після отримання значень вектора $[y]$ знаходимо рішення ІСЛАР за допомогою трикутної матриці $[U]$:

$$[U]\cdot[x]=[y],$$

$$[X_n]=[Y_n],$$

$$[X_i]=[Y_i]-\sum_{s=i+1}^{n}[U_{is}][X_s].$$

Найчастіше використання методу LU – розкладу відбувається тоді, коли СЛАР необхідно розв’язувати для різних правих частин. Тоді просто достатньо один раз знайти матриці L та U, а потім використовувати зворотній хід для знаходження векторів Y та X.

Example

Знайти розв'язок ІСЛАР з двома невідомими параметрами методом LU – розкладу.

$$\begin{bmatrix} 2 & [-1,0] \\ [-1,0] & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ -1.2 \end{bmatrix}.$$

Solution

Маючи вихідну матрицю $[A]$ виду $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ розкладемо її на дві трикутні $\begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$ та $\begin{bmatrix} 1 & U_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, застосувавши відповідні співвідношення:

$$\left.\begin{array}{l} L_{11} = A_{11} = 2 \\ L_{21} = A_{21} = [-1,\ 0] \\ U_{12} = \dfrac{A_{12}}{L_{11}} = [-0.5,\ 0] \\ L_{22} = \left(A_{22} - L_{21}U_{12}\right) = [1.5,\ 2] \end{array}\right\rangle \Rightarrow \begin{array}{c} [L] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ [-1,\ 0] & [1.5,\ 2] \end{bmatrix} \\ \hline \\ [U] = \begin{bmatrix} 1 & [-0.5,\ 0] \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 = \dfrac{B_1}{L_{11}} = 0.6 \\ Y_2 = \dfrac{B_2 - L_{21}Y_1}{L_{22}} = [-0.8,\ -0.3] \end{array}\right\rangle \Rightarrow [y] = \begin{bmatrix} 0.6 \\ [-0.8,\ -0.3] \end{bmatrix}.$$

$$\left.\begin{array}{l} X_2 = Y_2 = [-0.8,\ -0.3] \\ X_1 = Y_1 - U_{12}X_2 = [0.2,\ 0.45] \end{array}\right\rangle \Rightarrow [x] = \begin{bmatrix} [0.2,\ 0.45] \\ [-0.8,\ -0.3] \end{bmatrix}.$$

Example

Знайти розв'язок ІСЛАР з трьома невідомими параметрами методом LU – розкладу.

$$\begin{bmatrix} [3.7,\, 4.3] & [-1.5,\, -0.5] & 0 \\ [-1.5,\, -0.5] & [3.7,\, 4.3] & [-1.5,\, -0.5] \\ 0 & [-1.5,\, -0.5] & [3.7,\, 4.3] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-14,\, 14] \\ [-9,\, 9] \\ [-3,\, 3] \end{bmatrix}.$$

Solution

Маючи вихідну матрицю $[A]$ виду $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ розкладемо її на дві трикутні $\begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}$ та $\begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, застосувавши відповідні співвідношення:

$$L_{11} = A_{11} = [3.7,\, 4.3]$$
$$L_{21} = A_{21} = [-1.5,\, -0.5]$$
$$L_{31} = A_{31} = 0$$
$$U_{12} = \frac{A_{12}}{L_{11}} = [-0.41,\, -0.12]$$
$$U_{13} = \frac{A_{13}}{L_{11}} = 0$$
$$L_{22} = A_{22} - L_{21}U_{12} = [3.08,\, 4.24]$$
$$U_{23} = \frac{1}{L_{22}} \cdot \left(A_{23} - L_{21}U_{13}\right) = [-0.49,\, -0.12]$$
$$L_{32} = A_{32} - L_{31}U_{12} = [-1.5,\, -0.5]$$
$$L_{33} = A_{33} - (L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23}) = [2.96,\, 4.24]$$

$$\begin{bmatrix} [3.7,\ 4.3] & 0 & 0 \\ [-1.5,\ -0.5] & [3.08,\ 4.24] & 0 \\ 0 & [-1.5,\ -0.5] & [2.96,\ 4.24] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-14,\ 14] \\ [-9,\ 9] \\ [-3,\ 3] \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 = \dfrac{B_1}{L_{11}} = [-3.78,\ 3.78] \\ Y_2 = \dfrac{B_2 - L_{21}Y_1}{L_{22}} = [-4.76,\ 4.76] \\ Y_3 = \dfrac{B_3 - (L_{31}Y_1 + L_{32}Y_2)}{L_{33}} = [-3.43,\ 3.43] \end{array}\right\rangle \Rightarrow [y] = \begin{bmatrix} [-3.78,\ 3.78] \\ [-4.76,\ 4.76] \\ [-3.43,\ 3.43] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & [-0.41,\ -0.12] & 0 \\ 0 & 1 & [-0.49,\ -0.12] \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-3.78,\ 3.78] \\ [-4.76,\ 4.76] \\ [-3.43,\ 3.43] \end{bmatrix}.$$

$$\left.\begin{array}{l} X_3 = Y_3 = [-3.43,\ 3.43] \\ X_2 = Y_2 - U_{23}X_3 = [-6.44,\ 6.44] \\ X_1 = Y_1 - (U_{12}X_2 + U_{13}X_3) = [-6.42,\ 6.42] \end{array}\right\rangle \Rightarrow [x] = \begin{bmatrix} [-6.42,\ 6.42] \\ [-6.44,\ 6.44] \\ [-3.43,\ 3.43] \end{bmatrix}.$$

Програма система для обчислення інтервальних систем лінійних алгебричних рівнянь мовою програмування PHP

Розробити програмну систему для обчислення інтервальних систем лінійних алгебричних рівнянь за методом Гауса та LU-розкладу.

Метод Гауса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \qquad \pm 0.3\%(\textit{параметри}) \qquad \pm 5\%(\textit{вихід}) \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} [1.994,\ 2.006] & [0.997,1.003] & [-1.003,-0.997] \\ [-1.003,-0.997] & [-1.003,0.997] & [1.994,\ 2.006] \\ [0.997,1.003] & [-3.009,\ -2.991] & [1.994,\ 2.006] \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} [3.8,\ 4.2] \\ [2.85,\ 3.15] \\ [6.65,\ 7.35] \end{bmatrix}$$

$$A'_{11}=[1.994,\ 2.006] \qquad A'_{21}=A'_{31}=0$$

$$A'_{12}=[0.997,1.003]$$

$$A'_{13}=[-1.003,-0.997]$$

$$A'_{22}=A_{22}-A_{12}\frac{A_{21}}{A_{11}}=[-1.003,-0.997]-[0.997,1.003]\cdot\frac{[-1.003,-0.997]}{[1.994,\ 2.006]}=$$
$$=[-1.003,-0.997]-[0.997,1.003]\cdot[-0.503,-0.497]=$$
$$=[-1.003,-0.997]-[-0.505,-0.496]=[-0.507,-0.492]$$

$$A'_{23}=A_{23}-A_{13}\frac{A_{21}}{A_{11}}=[1.994,\ 2.006]-[-1.003,-0.997]\cdot[-0.503,-0.497]=$$
$$=[1.994,\ 2.006]-[0.496,\ 0.505]=[1.489,1.51]$$

$$A'_{32}=A_{32}-A_{12}\frac{A_{31}}{A_{11}}=[-3.009,-2.991]-[0.997,1.003]\cdot\frac{[0.997,1.003]}{[1.994,\ 2.006]}=$$
$$=[-3.009,-2.991]-[0.997,1.003]\cdot[0.497,\ 0.503]=$$
$$=[-3.009,-2.991]-[0.496,\ 0.505]=[-3.514,-3.487]$$

$$A'_{33}=A_{33}-A_{13}\frac{A_{31}}{A_{11}}=[1.994,\ 2.006]-[-1.003,-0.997]\cdot[0.497,\ 0.503]=$$
$$=[1.994,\ 2.006]-[-0.505,-0.496]=[2.49,\ 2.511]$$

$$A'=\begin{bmatrix} [1.994,\ 2.006] & [0.997,1.003] & [-1.003,-0.997] \\ 0 & [-0.507,-0.492] & [1.489,1.51] \\ 0 & [-3.514,\ -3.487] & [2.49,\ 2.511] \end{bmatrix}$$

$$B_2' = B_2 - B_1 \frac{A_{21}}{A_{11}} = [2.85,\ 3.15] - [3.8,\ 4.2] \cdot [-0.503,\ -0.497] =$$
$$= [2.85,\ 3.15] - [-2.113,\ -1.889] = [4.739,\ 5.263]$$

$$B_3' = B_3 - B_1 \frac{A_{31}}{A_{11}} = [6.65,\ 7.35] - [3.8,\ 4.2] \cdot [0.497,\ 0.503] =$$
$$= [6.65,\ 7.35] - [1.889,\ 2.113] = [4.537,\ 5.461]$$

$$\tilde{A}_{33} = A_{33}' - A_{23}' \frac{A_{32}'}{A_{22}'} = [2.49,\ 2.511] - [1.489,\ 1.51] \cdot \frac{[-3.514,\ -3.487]}{[-0.507,\ -0.492]} =$$
$$= [2.49,\ 2.511] - [1.489,\ 1.51] \cdot [6.88,\ 7.14] =$$
$$= [2.49,\ 2.511] - [10.24,\ 10.78] = [-8.29,\ -7.73]$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [1.994,\ 2.006] & [0.997,\ 1.003] & [-1.003,\ -0.997] \\ 0 & [-0.507,\ -0.492] & [1.489,\ 1.51] \\ 0 & 0 & [-8.29,\ -7.73] \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \frac{B_3'}{\tilde{A}_{33}} = \frac{[4.537,\ 5.461]}{[-8.29,\ -7.73]} = [-0.706,\ -0.55]$$

$$x_2 = \frac{B_2' - \tilde{A}_{23} x_3}{\tilde{A}_{22}} = \frac{[4.739,\ 5.263] - [1.489,\ 1.51] \cdot [-0.706,\ -0.55]}{[-0.507,\ -0.492]} =$$
$$= \frac{[4.739,\ 5.263] - [-1.07,\ -0.82]}{[-0.507,\ -0.492]} = \frac{[5.56,\ 6.33]}{[-0.507,\ -0.492]} = [-12.87,\ -10.97]$$

$$x_1 = \frac{B_1' - (\tilde{A}_{12}x_2 + \tilde{A}_{13}x_3)}{\tilde{A}_{11}} =$$

$$\frac{[3.8,\ 4.2] - ([0.997,\ 1.003]\cdot[-12.87,\ -10.97] + [-1.003,\ -0.997]\cdot[-0.706,\ -0.55])}{[1.994,\ 2.006]} =$$

$$= \frac{[3.8,\ 4.2] - ([-12.9,\ -10.94] + [0.55,\ 0.708])}{[1.994,\ 2.006]} = \frac{[3.8,\ 4.2] - [-12.35,\ -10.23]}{[1.994,\ 2.006]} =$$

$$= \frac{[14.03,\ 16.55]}{[1.994,\ 2.006]} = [6.99,\ 8.3]$$

Метод LU-розкладу

$$A = \begin{bmatrix} [1.994,\ 2.006] & [0.997,\ 1.003] & [-1.003,\ -0.997] \\ [-1.003,\ -0.997] & [-1.003,\ 0.997] & [1.994,\ 2.006] \\ [0.997,\ 1.003] & [-3.009,\ -2.991] & [1.994,\ 2.006] \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} [3.8,\ 4.2] \\ [2.85,\ 3.15] \\ [6.65,\ 7.35] \end{bmatrix}$$

$$L_{11} = A_{11} = [1.994,\ 2.006]$$

$$L_{21} = A_{21} = [-1.003,\ -0.997]$$

$$L_{31} = A_{31} = [0.997,\ 1.003]$$

$$U_{11} = U_{22} = U_{33} = 1$$

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{A_{11}} = \frac{[0.997,\ 1.003]}{[1.994,\ 2.006]} = [0.497,\ 0.503]$$

$$U_{13} = \frac{A_{13}}{A_{11}} = \frac{[-1.003,\ -0.997]}{[1.994,\ 2.006]} = [-0.503,\ -0.497]$$

$$L_{22} = A_{22} - \sum_{k=1}^{1} L_{21}U_{12} = [-1.003,\ -0.997] - [-1.003,\ -0.997]\cdot[0.497,\ 0.503] =$$

$$= [-1.003,\ -0.997] - [-0.505,\ -0.496] = [-0.507,\ -0.492]$$

$$L_{32} = A_{32} - \sum_{k=1}^{1} L_{31}U_{12} = [-3.009, -2.991] - [0.997, 1.003] \cdot [0.497, 0.503] =$$
$$= [-3.009, -2.991] - [0.496, 0.505] = [-3.514, -3.487]$$

$$U_{23} = \frac{A_{23} - \sum_{k=1}^{1} L_{21}U_{13}}{L_{22}} = \frac{[1.994, 2.006] - [-1.003, -0.997] \cdot [-0.503, -0.497]}{[-0.507, -0.492]} =$$
$$= \frac{[1.994, 2.006] - [0.496, 0.505]}{[-0.507, -0.492]} = \frac{[1.489, 1.51]}{[-0.507, -0.492]} = [-3.07, -2.937]$$

$$L_{33} = A_{33} - \sum_{k=1}^{2} L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} =$$
$$= [1.994, 2.006] - ([0.997, 1.003] \cdot [-0.503, -0.497] + [-3.514, -3.487] \times$$
$$\times [-3.07, -2.937]) = [1.994, 2.006] - ([-0.505, -0.496] + [10.24, 10.79]) =$$
$$= [1.994, 2.006] - [9.735, 10.294] = [-8.3, -7.73]$$

$$L = \begin{pmatrix} [1.994, 2.006] & 0 & 0 \\ [-1.003, -0.997] & [-0.507, -0.492] & 0 \\ [0.997, 1.003] & [-3.514, -3.487] & [-8.3, -7.73] \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & [0.497, 0.503] & [-0.503, -0.497] \\ 0 & 1 & [-3.07, -2.937] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \frac{B_1}{L_{11}} = \frac{[3.8, 4.2]}{[1.994, 2.006]} = [1.89, 2.106]$$

$$y_2 = \frac{B_2 - L_{21}y_1}{L_{22}} = \frac{[2.85, 3.15] - [-1.003, -0.997] \cdot [1.89, 2.106]}{[-0.507, -0.492]} =$$
$$= \frac{[2.85, 3.15] - [-2.11, -1.88]}{[-0.507, -0.492]} = \frac{[4.73, 5.26]}{[-0.507, -0.492]} = [-10.69, -9.33]$$

$$y_3 = \frac{B_3 - (L_{31}y_1 + L_{32}y_2)}{L_{33}} =$$

$$= \frac{[6.65,\ 7.35] - ([0.997, 1.003]\cdot[1.89,\ 2.106] + [-3.514,\ -3.487]\cdot[-10.69,\ -9.33])}{[-8.3,\ -7.73]} =$$

$$= \frac{[6.65,\ 7.35] - ([1.88,\ 2.11] + [32.53,\ 37.56])}{[-8.3,\ -7.73]} = \frac{[6.65,\ 7.35] - [34.41,\ 39.67]}{[-8.3,\ -7.73]} =$$

$$= \frac{[-33.02,\ -27.06]}{[-8.3,\ -7.73]} = [3.26,\ \ 4.27]$$

$$x_3 = y_3 = [3.26,\ 4.27]$$

$$x_2 = y_2 - U_{23}x_3 = [-10.69,\ -9.33] - [-3.07,\ -2.937]\cdot[3.26,\ 4.27] =$$
$$= [-10.69,\ -9.33] - [-13.11,\ -9.57] = [-1.12,\ 3.78]$$

$$x_1 = y_1 - (U_{12}x_2 + U_{13}x_3) =$$
$$= [1.89,\ 2.106] - ([0.497,\ 0.503]\cdot[-1.12,\ 3.78] + [-0.503,\ -0.497]\cdot[3.26,\ 4.27]) =$$
$$= [1.89,\ 2.106] - ([-0.56, 1.9] + [-2.15,\ -1.62]) = [1.61,\ 4.82]$$

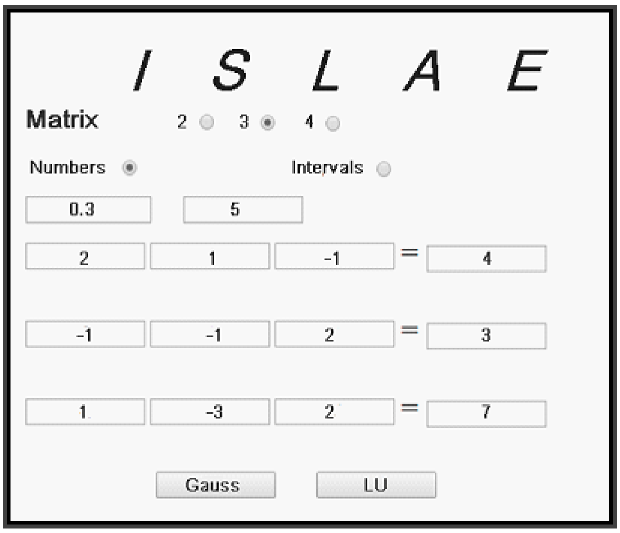


Рисунок 3.1 – Екранна форма введення інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

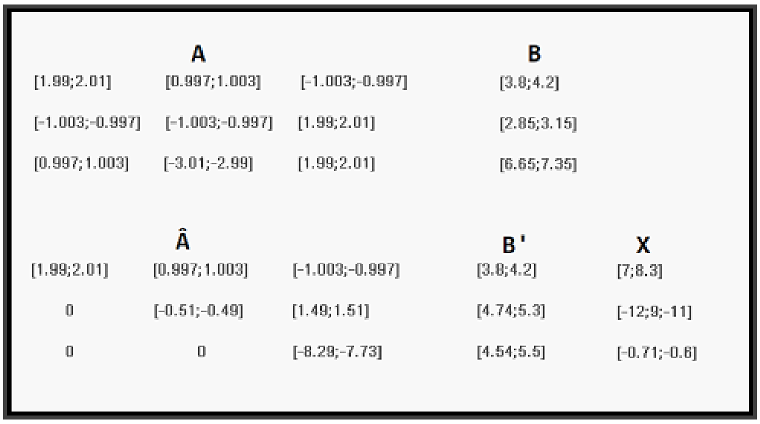


Рисунок 4.2 – Рішення ІСЛАР методом Гауса

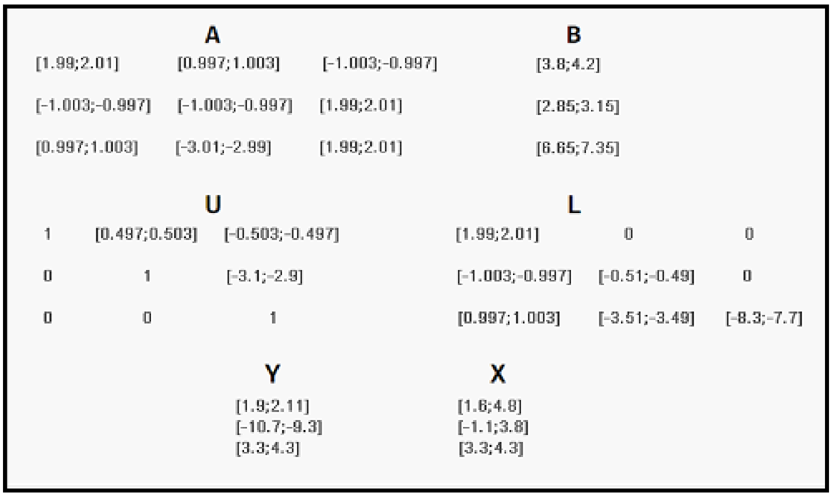


Рисунок 4.3 – Рішення ІСЛАР методом LU-розкладу

Код програми, який ілюструє основну функціональність методів:

- основні обчислення для методу LU-розкладу

```
$L[0][0] = $matrix[0][0];
   $L[1][0] = $matrix[1][0];
   $L[2][0] = $matrix[2][0];
if(size == 4) {
      $L[3][0] = $matrix[3][0];
      $U[3][3] = $emptyInterval;
   }
   $U[0][0] = $emptyInterval;
   $U[1][1] = $emptyInterval;
   $U[2][2] = $emptyInterval;
for($i=1; $i<size; $i++) {
      $U[0][$i] = Interval::division($matrix[0][$i], $matrix[0][0]);
   }
for($i=1; $i<size; $i++) {
      $mult = Interval::multiplication($L[$i][0], $U[0][1]);
      $L[$i][1] = Interval::subtraction($matrix[$i][1], $mult);
   }
for ($i = 1; $i <size; $i++) {
for ($j = 1; $j <size; $j++) {
if ($i >= $j) {
            $sum = newInterval(0, 0);
for ($k = 0; $k < $j; $k++) {
               $sum = Interval::addition($sum, Interval::multiplication($L[$i][$k], $U[$k][$j]));
```

```
            }
            $L[$i][$j] = Interval::subtraction($matrix[$i][$j], $sum);
        } else {
            $sum = newInterval(0, 0);
for ($k = 0; $k < $i; $k++) {
                $sum = Interval::addition($sum, Interval::multiplication($L[$i][$k], $U[$k][$j]));
            }
            $U[$i][$j] = Interval::division(Interval::subtraction($matrix[$i][$j], $sum), $L[$i][$i]);
        }      }    }
    $Y[0] = Interval::division($B[0], $L[0][0]);
for($i = 1; $i <size; $i++) {
        $sum = newInterval(0, 0);
for($j = 0; $j < $i; $j++) {
            $sum = Interval::addition($sum, Interval::multiplication($L[$i][$j], $Y[$j]));
        }
        $Y[$i] = Interval::division(Interval::subtraction($B[$i], $sum), $L[$i][$i]);
    }
    $X[size - 1] = $Y[size - 1];
for($i = size - 2; $i >= 0; $i--) {
        $sum = newInterval(0, 0);
for($j = $i + 1; $j <size; $j++) {
            $sum = Interval::addition($sum, Interval::multiplication($U[$i][$j], $X[$j]));
        }
        $X[$i] = Interval::subtraction($Y[$i], $sum);
    }}
```

- основні обчислення для методу Гауса:

```
functioncountX()
{
global $newA;
global $newB;
    $X = [];
for($i=size; $i>0; $i--) {
        $sum = newInterval(0, 0);
for($j=$i; $j<size; $j++) {
            $t = Interval::multiplication($newA[$i-1][$j], $X[$j]);
            $sum = Interval::addition($sum, $t);
        }
        $temp = Interval::subtraction($newB[$i-1], $sum);
        $X[$i-1] = Interval::division($temp, $newA[$i-1][$i-1]);
    }
return $X;
}
functiongenerateB()
{
global $B;
global $B_tick;
    $newB = [
        $B[0],
        $B_tick[1],
    ];
if(size>= 3) {
        $newB[2] = $B_tick[2];
    }
if (size == 4) {
        $newB[3] = $B_tick[3];
    }
return $newB;
}
functiongenerateA()
{
global $matrix;
global $A_tick;
global $A_tilde;
    $A1 = $matrix[0];

    $emptyInterval = newInterval(0, 0);
    $A2 = $A_tick[1];
    $A2[0] = $emptyInterval;
    $newA = [
        0 => $A1,
        1 => $A2,
    ];
if(size>= 3) {
        $A3 = $A_tilde[2];
        $A3[0] = $emptyInterval;
        $A3[1] = $emptyInterval;
       $newA[2] = $A3;
    }
```

```
if(size == 4) {
      $div = Interval::division($A_tilde[3][2], $A_tilde[2][2]);
      $mult = Interval::multiplication($A_tilde[2][3], $div);
      $A4[3]= Interval::subtraction($A_tilde[3][3], $mult);
      $A4[0] = $emptyInterval;
      $A4[1] = $emptyInterval;
      $A4[2] = $emptyInterval;
      $newA[3] = $A4;
   }
return $newA;
}
functioncountAwithTilde()
{
global $A_tick;
   $A_tilde = [];
for($i=2; $i<size; $i++) {
for($j=2; $j<size; $j++) {
         $div = Interval::division($A_tick[$i][1], $A_tick[1][1]);
         $mult = Interval::multiplication($A_tick[1][$j], $div);
         $A_tilde[$i][$j] = Interval::subtraction($A_tick[$i][$j], $mult);
      }   }
return $A_tilde;
}
functioncountA()
{
global $matrix;
   $A_tick = [];
for($i=0; $i<size-1; $i++) {
for($j=0; $j<size-1; $j++) {
         $div = Interval::division($matrix[$i+1][0], $matrix[0][0]);
         $mult = Interval::multiplication($matrix[0][$j+1], $div);
         $A_tick[$i+1][$j+1] = Interval::subtraction($matrix[$i+1][$j+1], $mult);
      }   }
return $A_tick;
}
functioncountB()
{
global $B;
global $matrix;
   $B_tick = [];
for($i=0; $i<size-1; $i++) {
      $div = Interval::division($matrix[$i+1][0], $matrix[0][0]);
      $mult = Interval::multiplication($B[0], $div);
      $B_tick[$i+1] = Interval::subtraction($B[$i+1], $mult);
   }
return $B_tick;}
```

Питання для самоконтролю

1. Які існують види представлень систем лінійних алгебраїчних рівнянь?

2. Які умови знаходження розв’язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь?

3. Алгоритм пошуку розв’язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь з використанням прямих методів?

4. Які недоліки прямих методів знаходження розв’язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь?

5. Алгоритм пошуку розв’язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь з використанням методу Гауса?

6. Алгоритм пошуку розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь з використанням методу LU-розкладу?

7. В чому полягає зміст зворотнього пошуку методом Гауса?

8. Який суттєвий недолік методу Гауса?

9. Які операції з інтервалами використовуються при застосуванні методів знаходження розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь?

10. Чи існують умови збіжності методів знаходження розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь?

Варіанти завдань для самостійної роботи

1. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 14 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ -x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 9 \end{cases}$

$\pm 2\%$ на параметри $\pm 10\%$ на вихід

2. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 10 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$

$\pm 1{,}5\%$ на параметри $\pm 8\%$ на вихід

3. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 8x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 10 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

$\pm 2{,}5\%$ на параметри $\pm 15\%$ на вихід

4. $\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 13 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$

$\pm 2\%$ на параметри $\pm 10\%$ на вихід

5. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 9x_3 = -8 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 10 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

$\pm 1\%$ на параметри $\pm 7\%$ на вихід

6. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 12 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - 6x_3 = 9 \end{cases}$

$\pm 3\%$ на параметри $\pm 18\%$ на вихід

7. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \end{cases}$

$\pm 2\%$ на параметри $\pm 10\%$ на вихід

8. $\begin{cases} 7x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ -x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 9 \end{cases}$

$\pm 1{,}5\%$ на параметри $\pm 8\%$ на вихід

9. $\begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 8x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \end{cases}$

$\pm 2{,}5\%$ на параметри $\pm 15\%$ на вихід

10. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 10 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$

$\pm 2\%$ на параметри $\pm 10\%$ на вихід

11. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 8x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 7 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 9 \end{cases}$

$\pm 1\%$ на параметри $\pm 7\%$ на вихід

12. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 5x_3 = -10 \\ -x_1 - 5x_2 + x_3 = -8 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 11 \end{cases}$

$\pm 3\%$ на параметри $\pm 18\%$ на вихід

13. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 8x_3 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$

$\pm 2\%$ на параметри $\pm 10\%$ на вихід

14. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 13 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$

$\pm 1{,}5\%$ на параметри $\pm 8\%$ на вихід

15. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 9x_3 = -8 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 7 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

$\pm 2{,}5\%$ на параметри $\pm 15\%$ на вихід

16. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 8x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_2 - 6x_3 = 9 \end{cases}$

$\pm 2\%$ на параметри $\pm 10\%$ на вихід

17. $\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$

$\pm 1\%$ на параметри $\pm 7\%$ на вихід

18. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 12 \\ -x_1 - 3x_2 - 7x_3 = -8 \\ 4x_1 - x_2 + 6x_3 = 2 \end{cases}$

$\pm 3\%$ на параметри $\pm 18\%$ на вихід

19. $\begin{cases} -x_1+3x_2-8x_3=-4 \\ 2x_1+x_2+3x_3=-1 \\ -x_1+2x_2-6x_3=2 \end{cases}$

$\pm 2\%$ на параметри $\pm 10\%$ на вихід

20. $\begin{cases} x_1-x_2-2x_3=-1 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=10 \\ -x_1+3x_2-2x_3=-5 \end{cases}$

$\pm 1{,}5\%$ на параметри $\pm 8\%$ на вихід

21. $\begin{cases} x_1-3x_2-8x_3=14 \\ 4x_1-x_2+3x_3=5 \\ -x_1+3x_2-6x_3=10 \end{cases}$

$\pm 2{,}5\%$ на параметри $\pm 15\%$ на вихід

22. $\begin{cases} -x_1+4x_2+5x_3=8 \\ x_1-5x_2+x_3=8 \\ -3x_1-4x_2+x_3=10 \end{cases}$

$\pm 2\%$ на параметри $\pm 10\%$ на вихід

23. $\begin{cases} 3x_1-x_2+6x_3=15 \\ 2x_1+5x_2-6x_3=10 \\ 3x_1+2x_2-x_3=3 \end{cases}$

$\pm 1\%$ на параметри $\pm 7\%$ на вихід

24. $\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=1 \\ -2x_1+x_2-3x_3=1 \\ 5x_1-3x_2-x_3=-9 \end{cases}$

$\pm 3\%$ на параметри $\pm 18\%$ на вихід

25. $\begin{cases} 3x_1-x_2+7x_3=-8 \\ -x_1+x_2+4x_3=10 \\ -x_1+3x_2-x_3=4 \end{cases}$

$\pm 2\%$ на параметри $\pm 10\%$ на вихід

26. $\begin{cases} -2x_1+3x_2-8x_3=-12 \\ x_1-2x_2+3x_3=3 \\ x_1+x_2-6x_3=9 \end{cases}$

$\pm 1{,}5\%$ на параметри $\pm 8\%$ на вихід

27. $\begin{cases} 5x_1-3x_2-x_3=2 \\ -2x_1-x_2+3x_3=4 \\ x_1-3x_2-4x_3=5 \end{cases}$

$\pm 2{,}5\%$ на параметри $\pm 15\%$ на вихід

28. $\begin{cases} 4x_1-x_2+2x_3=12 \\ -3x_1+3x_2+7x_3=8 \\ 2x_1-x_2+6x_3=9 \end{cases}$

$\pm 2\%$ на параметри $\pm 10\%$ на вихід

29. $\begin{cases} x_1+3x_2-8x_3=4 \\ 2x_1-x_2-3x_3=-1 \\ x_1+3x_2+2x_3=8 \end{cases}$

$\pm 1\%$ на параметри $\pm 7\%$ на вихід

30. $\begin{cases} 4x_1+x_2-2x_3=1 \\ -x_1-2x_2+4x_3=10 \\ -x_1-3x_2+x_3=-5 \end{cases}$

$\pm 3\%$ на параметри $\pm 18\%$ на вихід

РОЗДІЛ 5

ОЦІНЮВАННЯ ДОПУСКІВ НА ПАРАМЕТРИ ЕЛЕМЕНТІВ СИСТЕМИ ПРИ РІШЕННІ ЗАДАЧ СИНТЕЗУ СТАТИЧНИХ СИСТЕМ

Існує множина визначень поняття «система». Виділимо з них окрему пару, а саме ту, яка найбільш повно розкриває основні властивості наведеного терміну. Отже,

- система є визначеною множиною взаємопов’язаних елементів, які утворюють стійку єдність та цілісність, що характеризується інтегральними властивостями та закономірностями;
- система є набором об’єктів, які мають певні властивості та набір зв’язків між об’єктами і їх властивостями тощо [45].

В загальному будемо користуватися поняттям системи, яке враховує такі важливі складові будь-якого матеріального об’єкту як елемент, зв'язок, взаємодія та цілеспрямованість (див. рис. 5.1.).

Рисунок 5.1 – Схема компонентів системи [45]

До основних властивостей систем варто віднести наступні [41]:

- цілісність – кожний елемент системи відіграє певну роль в реалізації цільової функції системи;
- організованість – наявність структури та функціонування (поведінки) системи;
- функціональність – прояв певних властивостей (функцій) при взаємодії із навколишнім середовищем;
- структурність – упорядкованість системи, визначений набір та розміщення елементів та зв’язків між ними;
- стійкість – здатність системи протистояти зовнішнім впливам тощо.

Даний ряд властивостей притаманний будь-яким системам різного типу та призначення. Однак для спрощення дослідження систем їх класифікують за різноманітним ознакам та в залежності від типу поставленої задачі.

В залежності від ступеня зміни властивостей технологічні та технічні системи поділяються на статичні та динамічні. До статичних як класу безінерційних систем відносять системи, вихідні характеристики яких у будь-який момент залежать лише від значень вхідних параметрів системи і її поточного стану. Зв'язок між вхідними параметрами та вихідними характеристиками описується алгебричними рівняннями [13,18,22].

Задача аналізу полягає у визначенні реакції системи на задану зовнішню дію. Початковими даними для аналізу є принципова схема статичної системи, моделі компонентів схеми та визначення їх параметрів, а також задана зовнішня дія. Очевидно, що дослідник вибирає такі моделі компонентів, які дають змогу враховувати вплив саме тих зовнішніх факторів, які необхідно проаналізувати [12].

Задача аналізу дозволяє оцінити відповідність проектного рішення (визначеної дослідником початкової схеми системи) поставленим вимогам та його функціональну придатність. За результатами аналізу можна змінити досліджувану схему, розглядаючи різні варіанти її модифікації, та обрати той, який краще за інші задовільняє обраний критерій [28]. Задача синтезу систем [29,31,42] є суттєво складнішою від задачі аналізу, оскільки передбачає багаторазове розв'язування задач аналізу. Задача синтезу, на відміну від задачі аналізу, полягає не тільки в оцінці чи характеристики системи для заданих параметрів знаходяться в певних межах, а й у визначенні значень цих параметрів.

Однак під час виробництва та використання статичних систем через відхилення значень параметрів елементів від номінальних, відбувається відхилення від номінальних значень характеристик систем. Для того, щоб забезпечити допустимі відхилення значень характеристик системи, потрібно встановити вимоги до допускових відхилень параметрів елементів системи, які забезпечили б працездатність виготовленої системи із вказаною імовірністю. Допустимими характеристиками системи приймаються ті значення параметрів, за яких остання залишається функціонально придатною. Таким чином, оцінивши допустимі відхилення параметрів елементів системи, ми зможемо забезпечити функціональну придатність останньої із заданою імовірністю. Дана задача називається задачею синтезу допусків.

5.1. Метод допускового еліпсоїдного оцінювання в задачі синтезу статичних систем

Кожна i-та характеристика y_i системи являється функцією параметрів елементів, що задають модель системи. Дані параметри елементів системи утворюють вектор $\vec{b} = (b_1,...,b_j,...,b_m)^T$. При дослідженні функціонування системи використовують моделі вигляду нелінійних залежностей вихідних характеристик системи від її параметрів. Звідси слідує, що кожна i-та характеристика y_i, $i = \overline{1,N}$ є функцією $g_i(\vec{b})$ векторного аргументу параметрів $\vec{b} = (b_1,..,b_m)^T$. Для початку проектування системи знаходять вектор номінальних значень параметрів $\vec{b}_0 = (b_{01},..,b_{0m})^T$, який забезпечує номінальні значення вихідних характеристик $y_{0i} = g_i(\vec{b}_0)$.

В процесі виробництва та експлуатації між номінальними значеннями параметрів системи, які шукаються за допомогою певних розрахунків, та реальними значеннями, які відомі після виготовлення, існують певні відхилення. При цьому точність функціонування та працездатності системи тим менша, чим більші відхилення реальних вихідних значень від номінальних. Якщо підійти з практичної точки зору оцінки вихідних характеристик, точне забезпечення номінальних значень усіх y_{0i} є неможливим. За таких умов задають допустимі інтервали виходів $y_{0i} \in [y_i^-, y_i^+]$ і визначають множину допустимих значень вектора параметрів системи із розв'язку інтервальної системи зазначеної нижче:

$$y_i^- \le g_i(\vec{b}) \le y_i^+, \quad i = \overline{1, N}, \tag{5.1}$$

За використання розкладу функцій $g_i(\vec{b})$ в ряд Тейлора в околі вектора номінальних значень параметрів $\vec{b}_0$ та з вибором першого члена розкладу приходимо до такої лінійної системи:

$$y_i^- \le y_{i0} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_i(\vec{b})}{\partial b_j}\bigg|_{\vec{b}=\vec{b}_{0j}} \cdot (b_j - b_{0j}) \le y_i^+, \; i = \overline{1, N} \tag{5.2}$$

Досить часто в практичних умовах при розв'язанні задачі синтезу допусків на параметри використовують не самі обмеження на характеристики системи, а відхилення цих характеристик від номінальних: $\delta y_i^- = y_i^- - y_{i0}$, $\delta y_i^+ = y_i^+ - y_{i0}$. Звідси вимоги до точності характеристик та функціональної придатності системи, взамін системи (5.2) можна подати у вигляді системи, що задає точність та функціональну придатність через відхилення значень параметрів від номінальних.

Система (5.2) є нелінійною і одним з основних методів дослідження нелінійних систем являється метод лінеаризації. З цією метою попередньо застосуємо до нелінійних у загальному випадку характеристик пристрою $g_i(\vec{b}_0)$ лінеаризацію по логарифмічних значеннях параметрів в околі точки $(\ln(b_{o1}),...,\ln(b_{om}))$ в результаті чого система (5.2) набуде вигляду:

$$y_i^- \le y_{i0} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_i(\vec{b})}{\partial \ln b_j}\Big|_{\vec{b}=\vec{b}_{0j}} \cdot \delta b_j \le y_i^+, \; i = \overline{1,N}, \tag{5.3}$$

де $\delta b_j = \ln(b_j) - \ln(b_{oj})$.

Перейдемо у системі (5.3) до граничних відхилень для i- тої характеристики системи $\delta y_i^- = y_i^- - y_{i0}$, $\delta y_i^+ = y_i^+ - y_{i0}$. Тоді отримана система матиме такий вигляд:

$$\delta y_i^- \le \sum_{j=1}^{m} S_{ij} \cdot \delta b_j \le \delta y_i^+, \; i = \overline{1,N}, \tag{5.4}$$

де $S_{ij} = b_j \cdot \frac{\partial y_i(\vec{b})}{\partial (b_j)}\Big|_{\vec{b}_0}$ - чутливість i- тої характеристики системи до зміни значення j - того параметра елементів; або в матричному вигляді

$$\delta \vec{Y}^- \le S \cdot \delta \vec{b} \le \delta \vec{Y}^+ \tag{5.5}$$

де $\delta \vec{Y}^- = \{\delta y_i^-, i = \overline{1,N}\}$, $\delta \vec{Y}^+ = \{\delta y_i^+, i = \overline{1,N}\}$ – вектори, складені із верхніх та нижніх меж інтервалів $[\delta y_i^-, \delta y_i^+]$ відхилень вихідної характеристики від номінальної, відповідно;

$S = \{S_{ij}, \overline{i = 1, N}, j = \overline{1,m}\}$ – відома матриця значень похідних функцій $g_i(\vec{b})$ у точці $\vec{b}_0$; $\delta \vec{b} = (\delta b_1,...,\delta b_m)^T$ – вектор відносних відхилень параметрів системи.

В результаті проведеної лінеаризації та розклад в ряд Тейлора була отримана система, яка являється інтервальною системою лінійних алгебричних рівнянь (ІСЛАР). Розв'язком такої системи (5.5) в просторі параметрів $\vec{b} \in R^m$ елементів є область працездатності системи, яка одночасно є допустимою областю $\tilde{\Omega}$. Основуючись на вище зазначене, надалі область працездатності будемо позначати за $\tilde{\Omega}$ (див. рис. 5.2.) [37].

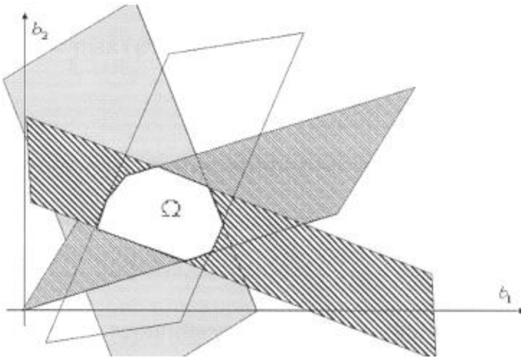


Рисунок 5.2 – Ілюстрація області $\tilde{\Omega}$ для $m = 2, N = 4$.

Приклад. Знайти область розв’язку інтервальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь з двома невідомими параметрами.

$$\begin{cases} 4.2 \le b_1 + 3b_2 \le 6.2 \\ 2 \le b_1 + 2b_2 \le 4 \\ 4.6 \le b_1 + 5b_2 \le 6.6 \end{cases}$$

Розв’язок.

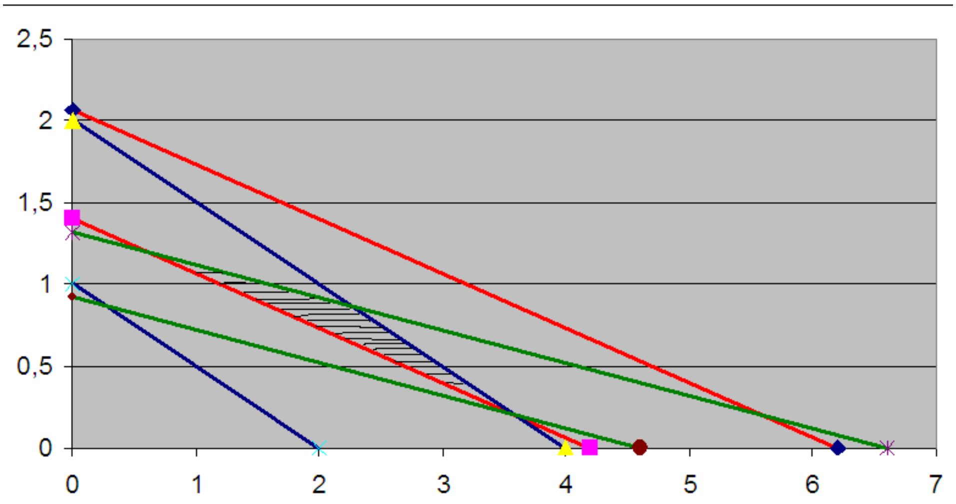
З вихідної ІСЛАР утворюємо три похідні системи:

$$\begin{cases} b_1 + 3b_2 = 6.2 \\ b_1 + 3b_2 = 4,2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [0,\ 2.07]\ [6.2,\ 0] \\ [0,\ 1.4]\ \ [4.2,\ 0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 + 2b_2 = 4 \\ b_1 + 2b_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [0,\ 2]\ [4,\ 0] \\ [0,\ 1]\ \ [2,\ 0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 + 5b_2 = 6,6 \\ b_1 + 5b_2 = 4,6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [0,\ 1.32]\ \ [6.6,\ 0] \\ [0,\ 0.92]\ \ [4.6,\ 0] \end{cases}$$

Розв'язок кожної з трьох систем на площині дає смугу, спільний перетин яких – це і буде шукана область розв'язку ІСЛАР.



Розв'язок задачі синтезу допусків на параметри системи зводиться до пошуку певної області взаємозв'язаних допустимих відхилень параметрів, яка належить допусковій області $\tilde{\Omega}$. У практичних задачах синтезу допусків важливим є забезпечення максимального покриття області допусків, заданої ІСЛАР чи її оцінкою. Для забезпечення такого покриття області допусків використовують різні методи апроксимації допускової області.

Допускову область оцінок параметрів моделі представлену у вигляді многогранника $\tilde{\Omega}$ можна апроксимувати за допомогою вписування в дану область паралелепіпеда максимального об'єму, або еліпсоїда. Перевагою еліпсоїдної оцінки – є забезпечення гладкості функціональних коридорів, а також економічне використання оперативної пам'яті, оскільки для поточного еліпсоїда потрібно зберігати лише декілька параметрів, зокрема матрицю конфігурації еліпсоїда та його центр [15-17,30,43].

Отже, допускову еліпсоїдну оцінку області параметрів апроксимуємо *m*-вимірним еліпсоїдом [21,26]:

$$Q_m = \{\delta\vec{b} \in R^m \,\big|\, (\delta\vec{b} - \delta\vec{\bar{b}})^T \cdot H \cdot (\delta\vec{b} - \delta\vec{\bar{b}}) \le r\} \qquad (5.6)$$

де $\delta\vec{\bar{b}}$ – центр ваги;

H - додатньовизначена симетрична матриця конфігурації еліпсоїда [19];

$r \leq 1$- радіус еліпсоїда;

Схематично така апроксимація зображена на рисунку 5.3. Як видно з формули (5.6), при відомій матриці конфігурації еліпсоїда невідомим для визначення допускового еліпсоїда залишається параметр r та вектор $\vec{\bar{b}}$, що задає центр еліпсоїда.

Еліпсоїд буде допусковим, якщо буде забезпечуватись включення прогнозованого інтервалу в експериментальний $[\delta\hat{y}_i(\delta\vec{b})]\Big|_{\delta\vec{b}\in Q_m} \subseteq [\delta y_i^-, \delta y_i^+],\quad i=\overline{1,N}.$

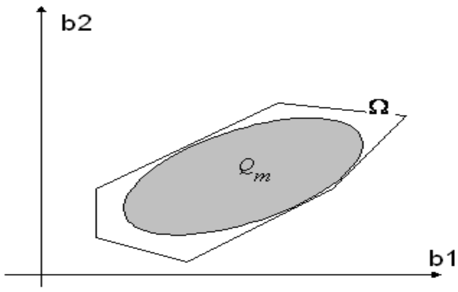


Рисунок 5.3 – Апроксимація допускової області Ω m-вимірним еліпсоїдом Q_m, для випадку m=2.

Припустимо, що центри прогнозованих інтервалів $[\delta\hat{y}_i(\delta\vec{b})]\Big|_{\delta\vec{b}\in Q_m}$, побудованих на основі допускового еліпсоїдного оцінювання області параметрів еліпсоїдом Q_m для всіх спостережень належать до відповідних експериментальних інтервалів, як показано на рисунку 5.4.

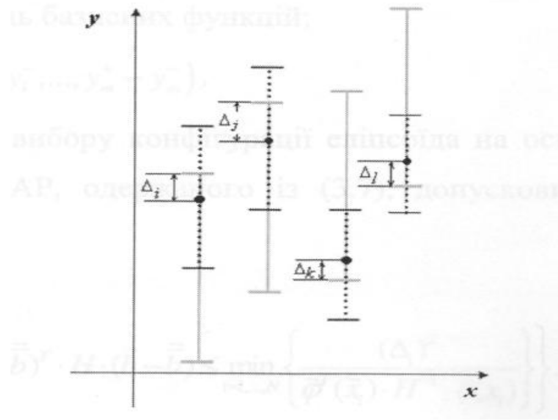


Рисунок 5.4 – Ілюстрація знаходження Δ_i

Тобто справедливим є включення

$$S_i^T \cdot \delta\vec{\vec{b}} \in [\delta y_i^-, \delta y_i^+],\ i = \overline{1,N}. \tag{5.7}$$

Не змінюючи конфігурації еліпсоїда, обчислимо таке значення r, яке буде забезпечувати включення прогнозованого коридору в експериментальний. Для цього необхідно, для кожного i-го спостереження обчислити величину Δ_i, яка визначає відстань від центру прогнозованого коридору до найближчої межі експериментального коридору [19,20,23,27].

Розрахунки величини Δ_i проведемо використовуючи наступне співвідношення :

$$\Delta_i = \min\{S_i^T \cdot \delta\vec{\vec{b}} - \delta y_i^-; \delta y_i^+ - S_i^T \cdot \delta\vec{\vec{b}}\},\ i = \overline{1,N} \tag{5.8}$$

де $\vec{S}_i$ – вектор значень функцій чутливості розрахований для i-ої характеристики; $\delta\vec{\vec{b}}$ - центр симетрії допускової області.

Враховуючи те, що досить часто інтервали вихідних характеристик системи симетричні відносно своїх номінальних значень, звідси центр симетрії допускової області та еліпсоїда збігаються і знаходяться в нульовій точці, що є необхідним, аби вписаний еліпсоїд дотикався до всіх граней допускової області. У такому випадку формула (5.8) набуває вигляду:

$$\Delta_i = \min\{-\delta y_i^-; \delta y_i^+\},\ \ i = \overline{1,N} \qquad (5.9)$$

На основі вище описаної формули, вираховується формула радіуса еліпсоїда r:

$$r = \min_{i=1,\dots,N}\left\{\frac{(\Delta_i)^2}{\vec{S}_i^{\,T} \cdot H^{-1} \cdot \vec{S}_i}\right\}, \qquad (5.10)$$

де H - матриця конфігурації еліпсоїда, знайдена на основі методу виділення з ІСЛАР основних активних обмежень, або у випадку задання конфігурації області оцінки m-вимірним паралелепіпедом [47-48], знайдена на основі виразу

$$H = S_m^{\ T} \cdot E^{-2} \cdot S_m \qquad (5.11)$$

де S_m - матриця значень базисних функцій;

$$E = diag(0.5 \cdot (\delta y_1^+ - \delta y_1^-), \dots, 0.5 \cdot (\delta y_i^+ - \delta y_i^-), \dots, 0.5 \cdot (\delta y_m^+ - \delta y_m^-)).$$

Вибір конфігурації допускової області в такому випадку вибирається на основі відбору m рівнянь з ІСЛАР шляхом розв’язування складної нелінійної оптимізаційної задачі. Систему з m рівнянь формулюють таким чином, щоб квадрат об’єму гіперпаралелепіпеда Ω_m був мінімальним, тобто

$$\left(\prod_{i=1}^{m}(\delta y_i^+ - \delta y_i^-)^2\right) \cdot \det\left(S_m \cdot S_m^T\right)^{-1} \xrightarrow{S_m} \min. \qquad (5.12)$$

Коридор допусків i-ї характеристики $[\delta \hat{y}_i(\delta \vec{b})]\Big|_{\delta \vec{b} \in Q_m}$, побудований на основі отриманого еліпсоїда, матиме такий вигляд:

$$[\delta \hat{y}_i(\delta \vec{b})]\Big|_{\delta \vec{b} \in Q_m} = [\vec{S}_i^T \cdot \vec{\delta \vec{b}} - \Delta_{\delta \hat{y}_i(\delta \vec{b})}\Big|_{\delta \vec{b} \in Q_m};\ \vec{S}_i^T \cdot \vec{\delta \vec{b}} + \Delta_{\delta \hat{y}_i(\delta \vec{b})}\Big|_{\delta \vec{b} \in Q_m}\ ], \tag{5.13}$$

де $\Delta_{\delta y_i(\delta \vec{b})}\Big|_{\delta \vec{b} \in Q_m}$ – половина ширини оціненого коридору визначається за формулою

$$\Delta_{\delta y_i(\delta \vec{b})}\Big|_{\delta \vec{b} \in Q_m} = r^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\vec{S}_i^T \cdot H^{-1} \cdot \vec{S}_i}\ . \tag{5.14}$$

Допуски на параметри елементів системи вираховуватимуться за наступним виразом

$$\delta b_i = \frac{r}{\sqrt{h_{ii}}} \cdot 100\%,\ \ i = \overline{1,m}. \tag{5.15}$$

де h_{ii} - діагональні елементи матриці H .

Для розв'язку задачі пошуку допусків на параметри пристроїв основною і найбільш громіздкою задачею є пошук матриці конфігурації допускового еліпсоїда за формулою (5.11), на основі якої шукається радіус еліпсоїда та похибки вимірювання для встановлення допусків на параметри пристрою [2,3,5,6,9,24,33,34].

Програмна реалізація задачі синтезу допусків на основі методу допускового еліпсоїдного оцінювання мовою програмування C#

Розробити програмну систему для пошуку розв'язку задачі синтезу допусків на параметри системи (вихідна характеристика якої описана рівнянням параболічного типу та наведена на рисунку 5.5) методом допускового еліпсоїдного оцінювання, описаного вище.

Необхідно знайти допуски на параметри параболічної функції виду $f(x) = a \cdot (x-2)^2 + bx + 2$, де $a = -0.3$, $b = 3$. Коридор відхилень значень функцій 15%.

Нижче, у таблиці, зведено декілька вхідних початкових даних та обчислені на основі них дані меж коридору вихідної характеристики.

x	y	y^-	y^+	δy^-	δy^+
3	10.7	9.095	12.305	-1.605	1.605
5	14.3	12.155	16.445	-2.145	2.145
7	15.5	13.175	17.825	-2.325	2.325
9	14.3	12.155	16.445	-2.145	2.145
11	10.7	9.095	12.305	-1.605	1.605

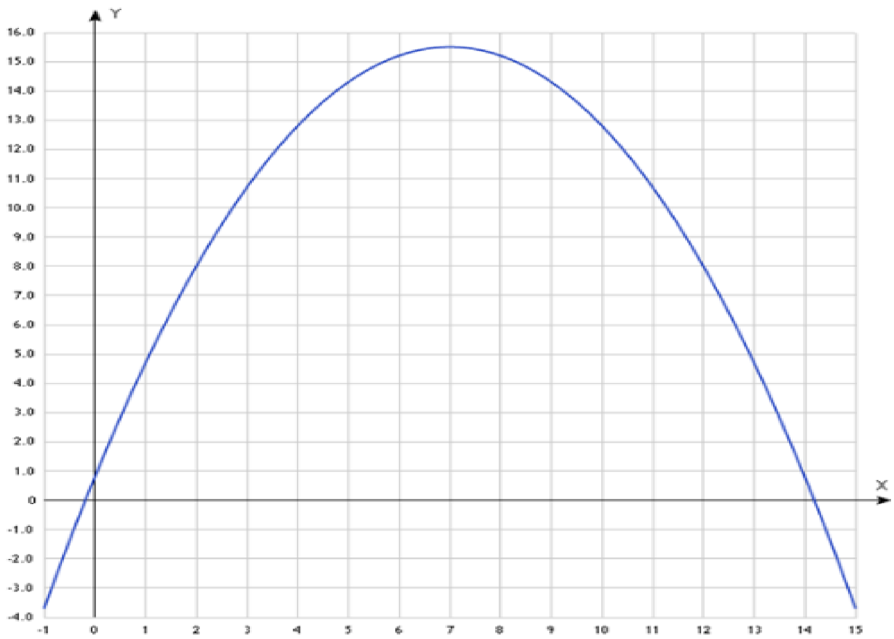


Рисунок 5.5 – Вихідна характеристика статичної системи

Обчислимо значення функції чутливості характеристики у вигляді:

$$S_A = a \cdot \left.\frac{\partial y}{\partial a}\right|_{\vec{b}0} = a \cdot (x-2)^2 \qquad S_B = b \cdot \left.\frac{\partial y}{\partial b}\right|_{\vec{b}0} = b \cdot x$$

Далі знаходимо матрицю чутливості функції:

$$S = \begin{pmatrix} -0.3 & 9 \\ -2.7 & 15 \\ -7.5 & 21 \\ -14.7 & 27 \\ -24.3 & 33 \end{pmatrix}$$

Знаходимо насичений блок S_m із усіх можливих блоків розміром 2×2 із матриці чутливості функції S за формулою (5.12). На прикладі одного блоку покажемо процес обчислення за формулою (5.12).

Крок 1. Формуємо перший блок

$$S_1 = \begin{pmatrix} -0.3 & 9 \\ -2.7 & 15 \end{pmatrix}$$

Крок 2. Транспонуємо матрицю.

$$S_1^T = \begin{pmatrix} -0.3 & -2.7 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$$

Крок 3. Множимо матрицю S_1 на матрицю S_1^T.

$$S_{1_{mul}} = \begin{pmatrix} -0.3 & 9 \\ -2.7 & 15 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0.3 & -2.7 \\ 9 & 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -0.3 \cdot (-0.3) + 9 \cdot 9 & -0.3 \cdot (-2.7) + 9 \cdot 15 \\ -2.7 \cdot (-0.3) + 15 \cdot 9 & -2.7 \cdot (-2.7) + 15 \cdot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81.09 & 135.81 \\ 135.81 & 232.29 \end{pmatrix}$$

Крок 4. Обертаємо матрицю $S_{1_{mul}}$.

$$\det S_{1_{mul}} = 81.09 \cdot 232.29 - 135.81 \cdot 135.81 = 392.04$$

$$S_{1_{mul}}^{-1} = \begin{pmatrix} 232.29/392.04 & -135.81/392.04 \\ -135.81/392.04 & 81.09/392.04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.593 & -0.346 \\ -0.346 & 0.207 \end{pmatrix}$$

Крок 5. Обчислюємо визначник матриці $S_{1_{mul}}^{-1}$.

$$\det S_{1_{mul}}^{-1} = 0.593 \cdot 0.207 - (-0.346) \cdot (-0.346) = 0.0025$$

Крок 6. Виконуємо операцію добутку різниць відхилень значень характеристик від номінальних.

$$\prod_{i=1}^{m} (\delta y_i^{+} - \delta y_i^{-})^2 = (1.605 - (-1.605))^2 \cdot (2.145 - (-2.145))^2 = 10.3 \cdot 18.4 = 189.52$$

Крок 7. Показник за формулою (5.12) для блоку S_1 дорівнює $189.52 \cdot 0.0025 = 0.4738$.

Нижче у таблиці зведені результати пошуку насиченого блоку із множини можливих.

Блок	**Показник за формулою (5.12)**	**Блок**	**Показник за формулою (5.12)**	**Блок**	**Показник за формулою (5.12)**
$\begin{pmatrix} -0,3 & 9 \\ -2,7 & 15 \end{pmatrix}$	0,4738	$\begin{pmatrix} -2,7 & 15 \\ -7,5 & 21 \end{pmatrix}$	0,1278	$\begin{pmatrix} -7,5 & 21 \\ -24,3 & 33 \end{pmatrix}$	0,00323
$\begin{pmatrix} -0,3 & 9 \\ -7,5 & 21 \end{pmatrix}$	0,05948	$\begin{pmatrix} -2,7 & 15 \\ -14,7 & 27 \end{pmatrix}$	0,01554	$\begin{pmatrix} -14,7 & 27 \\ -24,3 & 33 \end{pmatrix}$	-0,6072
$\begin{pmatrix} -0,3 & 9 \\ -14,7 & 27 \end{pmatrix}$	0,01229	$\begin{pmatrix} -2,7 & 15 \\ -24,3 & 33 \end{pmatrix}$	0,0025		
$\begin{pmatrix} -0,3 & 9 \\ -24,3 & 33 \end{pmatrix}$	0,00243	$\begin{pmatrix} -7,5 & 21 \\ -14,7 & 27 \end{pmatrix}$	0,03528		

Згідно представлених даних, насичений блок матиме такий вигляд:

$$S_m = \begin{pmatrix} -14,7 & 27 \\ -24,3 & 33 \end{pmatrix}$$

В даному випадку діагональна матриця ширини гарантованих інтервалів вихідних змінних буде наступного виду:

$$E^{-2} = \begin{pmatrix} 0,217 & 0 \\ 0 & 0,388 \end{pmatrix}$$

І, як результат, вищеописаних обрахунків ми отримуємо матрицю конфігурації еліпсоїда H:

$$H = \begin{pmatrix} 276,19 & -397,56 \\ -397,56 & 581,19 \end{pmatrix}$$

Далі обчислюємо величину радіусу за формулою (5.10). За результатами обчислень, $r = 0,31$. Звідси, на основі формули отримуємо допуски на параметри:

$$\delta a = 1,9\%$$
$$\delta b = 1,3\%$$

На рисунку 5.6 приведена екранна форма вводу вхідних значень для реалізації методу допускового еліпсоїдного оцінювання синтезу допусків на параметри системи, яка складається з двох елементів. На рисунку 5.7 проілюстровано результат виконання програми.

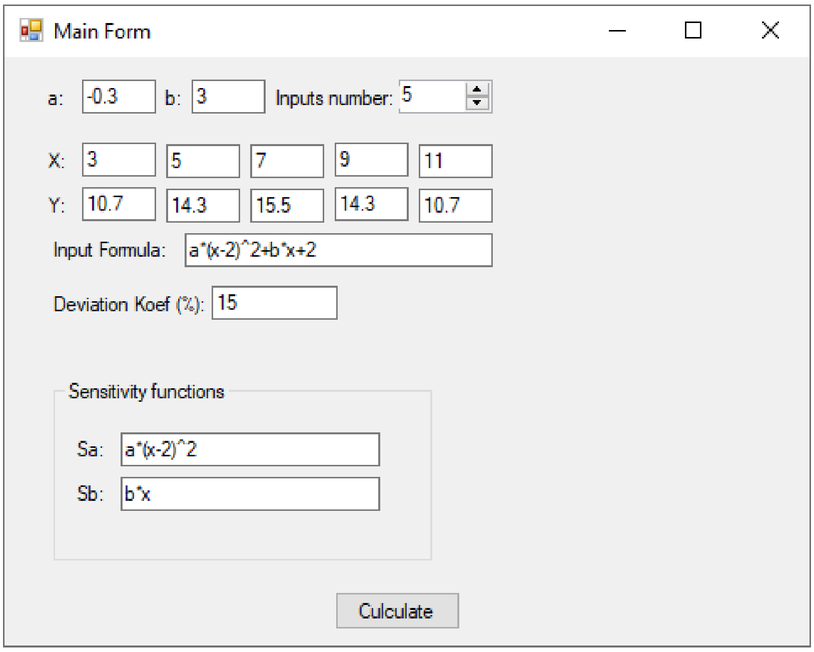


Рисунок 5.6 – Екранна форма вводу вхідних значень для реалізації методу допускового еліпсоїдного оцінювання

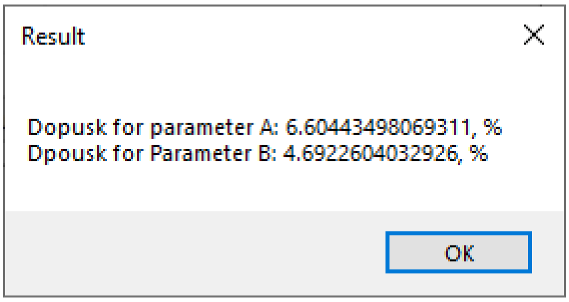


Рисунок 5.7 – Обчисленні допуски на параметри системи

Код програми, який ілюструє основну функціональність методів:

- код класу Вектор;

```
public class Vektor
  {
     public double[,] Elements { get; set; }
     public bool IsHorizontal { get; private set; }
     public int RowsCount => Elements.GetLength(0);
     public int ColumnsCount => Elements.GetLength(1);
     public int Size => Math.Max(RowsCount, ColumnsCount);
    public Vektor(double[,] elements)
     {
        Elements = elements;
        if(elements.GetLength(0)>1&&elements.GetLength(1)>1)
           throw new ArgumentException();

        IsHorizontal = elements.GetLength(1) > 1;
     }
     public double this[int row, int column]
     {
        get { return Elements[row, column]; }
        set { Elements[row, column] = value; }
     }
     public double this[int index]
```

```
        {
            get { return IsHorizontal ? this[0, index]: this[index, 0]; }
            set { this[IsHorizontal ? 0:index, IsHorizontal ? index:0] = value; }
        }
        public Vektor Transopon()
        {
            var res = new Vektor(Elements.Length, !IsHorizontal);
            for (var i = 0; i < Elements.Length; i++)
            {
                res[i] = this[IsHorizontal ? 0:i,IsHorizontal ? i : 0];
            }
            return res;
        }
        public static double operator *(Vektor vektor1, Vektor vektor2)
        {
            double res = 0;

            if(vektor1.RowsCount!=vektor2.ColumnsCount || vektor1.ColumnsCount!=vektor2.RowsCount)
                throw  new ArgumentException();
            for (var i = 0; i < vektor1.Size; i++)
            {
                res += vektor1[i] * vektor2[i];
            }
            return res;
        }
        public Vektor(int elementsNumber, bool isHorizontal)
        {
            IsHorizontal = isHorizontal;
            Elements
                = isHorizontal ? new double[1, elementsNumber] : new double[elementsNumber, 1];
        }
        public override string ToString()
        {
            var elements = new List<double>();
            for (var i = 0; i < Size; i++)
            {
                elements.Add(Elements[IsHorizontal?0:i,IsHorizontal?i:0]);
            }
            return string.Join(IsHorizontal ? "; ": Environment.NewLine, elements);
        }
    }
```

- код класу Матриця;

```
 public class Matrix
    {
        public double[,] Elements { get; private set; }
        public Matrix(double[,] elements)
        {
            Elements = new double[elements.GetLength(0),elements.GetLength(1)];
            for (var i = 0; i < RowsCount; i++)
            {
                for (var j = 0; j < ColumnsCount; j++)
                {
                    Elements[i, j] = elements[i, j];
                }
            }
        }
        public int RowsCount => Elements.GetLength(0);
        public int ColumnsCount => Elements.GetLength(1);
        public double this[int row, int column]
        {
            get { return Elements[row, column]; }
            set { Elements[row, column] = value; }
        }
        public Matrix GetSubMatrixByRowsIndexes(params int[] rowIndexes)
        {
            var array = new double [rowIndexes.Length, this.ColumnsCount];
            for (var i = 0; i < rowIndexes.Length; i++)
            {
                for (var j = 0; j < ColumnsCount; j++)
                {
                    array[i, j] = this[rowIndexes[i], j];
                }
            }
            return new Matrix(array);
        }
        public static Matrix operator /(Matrix matrix1, double number)
        {
```

```
        var iInd = matrix1.RowsCount;
        var jInd = matrix1.ColumnsCount;
        var resMatr = new double[iInd, jInd];
        for (int i = 0; i < iInd; i++)
        {
            for (int j = 0; j < jInd; j++)
            {
                resMatr[i, j] = matrix1[i, j] / number;
            }
        }
        return new Matrix(resMatr);
    }
    public Matrix GetObernMatrics()
    {
        var determinant = this.Determinant();
        var cloneMatrix = new Matrix(this.Elements);
        var tempDouble = cloneMatrix[0, 0];
        cloneMatrix[0, 0] = cloneMatrix[1, 1];
        cloneMatrix[1, 1] = tempDouble;
        tempDouble = cloneMatrix[0, 1];
        cloneMatrix[0, 1] = -1 * cloneMatrix[1, 0];
        cloneMatrix[1, 0] = -1 * tempDouble;
        for (var i = 0; i < this.RowsCount; i++)
        {
            for (var j = 0; j < this.ColumnsCount; j++)
            {
                cloneMatrix[i, j] = cloneMatrix[i, j] / determinant;
            }
        }
       return cloneMatrix;
    }
    public static Matrix operator *(Matrix matrix1, Matrix matrix2)
    {
        var res = new double[matrix1.RowsCount, matrix2.ColumnsCount];
        for (int i = 0; i < matrix1.RowsCount; i++)
        {
            for (int j = 0; j < matrix2.ColumnsCount; j++)
            {
                for (int k = 0; k < matrix1.ColumnsCount; k++)
                {
                    res[i, j] += matrix1[i, k] * matrix2[k, j];
                }
            }
        }
        return new Matrix(res);
    }
   public static Vektor operator *(Vektor vektor, Matrix matrix)
    {
        return matrix * vektor;
    }

    public static Vektor operator *(Matrix matrix, Vektor vektor)
    {
        var res = new Vektor(vektor.Size, vektor.IsHorizontal);
        for (var column=0;column< matrix.ColumnsCount;column++)
        {
            for (var row = 0; row < matrix.RowsCount; row++)
            {
                res[0, column] += matrix[row, column] * vektor[row];
            }
        }
        return res;
    }
    public Vektor GetVektor(int index, bool isHorizontal )
    {
        var res = new Vektor(isHorizontal ? ColumnsCount:RowsCount, isHorizontal);

        for (var i = 0; i < (isHorizontal ? this.ColumnsCount:this.RowsCount); i++)
        {
            res[isHorizontal ? 0 : i, isHorizontal ? i : 0] =
                this[isHorizontal ? 0 : i, isHorizontal ? i : 0];
        }
        return res;
    }
    public Matrix Transpone()
    {
        var res = new double[ColumnsCount,RowsCount];

        for (var i = 0; i < RowsCount; i++)
```

```
            {
                for (var j = 0; j < ColumnsCount; j++)
                {
                    res[j, i] = this[i, j];
                }
            }
            return new Matrix(res);
        }
        public override string ToString()
        {
            var sb = new StringBuilder();
            for(var i=0;i<RowsCount;i++)
            {
                for (var j = 0; j < ColumnsCount;j++)
                {
                    sb.AppendFormat("{0},", this[i, j]);

                }
                sb.Length = sb.Length - 1;
                sb.AppendLine();
            }
            return sb.ToString();
        }
        public double Determinant()
        {
            if(RowsCount!=2 || ColumnsCount!=2)
                throw new Exception("Matrix should be 2x2");
            var res = this[0, 0] * this[1, 1] - this[0, 1] * this[1,0];
            return res;
        }
    }
```

- код класу насиченого блоку;

```
public class MatrixBestResult
    {
        public int Row { get; set; }
        public int Column { get; set; }
        public Matrix Matrix { get; set; }

        public MatrixBestResult(Matrix matrix, int row, int column)
        {
            Matrix = matrix;
            Row = row;
            Column = column;
        }
    }
```

- код основних обчислень за методом;

```
public partial class MainForm : Form
    {
        public MainForm()
        {
            InitializeComponent();
            FormHelper.SetProcessInputTextEvent(FormHelper.NumberFormat.Double, textBoxA, textBoxB);
        }
        private void MainFormLoad(object sender, EventArgs e)
        {

        }
        private void ButtonCulculateClick(object sender, EventArgs e)
        {
            var inputsNumber = (int) numericUpDownInputsNumber.Value;
            var yArrayMinus = new List<double>();
            var yArrayPlus = new List<double>();
            var deltaYMinus = new List<double>();
            var deltaYPlus = new List<double>();
            var devKoef = FormHelper.GetDoubleFromTextboxText(textBoxDeviationKoef);

            for (var i = 0; i < inputsNumber; i++)
            {
                var yI = GetInputXorY(i + 1, false);
                yArrayMinus.Add(yI - yI*devKoef/100);
                yArrayPlus.Add(yI + yI * devKoef/100);
                deltaYMinus.Add(yArrayMinus[i]-yI);
                deltaYPlus.Add(yArrayPlus[i]- yI);
            }

            var sensMatrix = GetSensetivityMatrix();
```

```
        var minResult = double.MaxValue;
        MatrixBestResult matrixBestResult = null;
        for (var i = 0; i < (int) numericUpDownInputsNumber.Value; i++)
        {
            for (var j = i+1; j < (int)numericUpDownInputsNumber.Value; j++)
            {
                var subMatrix = sensMatrix.GetSubMatrixByRowsIndexes(i, j);
                var transMatrix = subMatrix.Transpone();
                var multRes = subMatrix * transMatrix;
                var obernMatrix = multRes.GetObernMatrics();
                var determinant = obernMatrix.Determinant();
                var tempResult = determinant * Math.Pow(deltaYPlus[i] - deltaYMinus[i],2) * Math.Pow(deltaYPlus[j] - deltaYMinus[j],2);
                if (tempResult < minResult)
                {
                    matrixBestResult = new MatrixBestResult(subMatrix, i,j);
                    minResult = tempResult;
                }
            }
        }
        var transMatrixBest = matrixBestResult.Matrix.Transpone();
        var diagArray = new double[2, 2];
        diagArray[0, 0] = 0.5 * (deltaYPlus[matrixBestResult.Row] - deltaYMinus[matrixBestResult.Row]);
        diagArray[1, 1] = 0.5 * (deltaYPlus[matrixBestResult.Column] - deltaYMinus[matrixBestResult.Column]);
        var diagMatrix = new Matrix(diagArray);
        var h = transMatrixBest * ((diagMatrix*diagMatrix).GetObernMatrics()) * matrixBestResult.Matrix;
        minResult = double.MaxValue;
        var hOber = h.GetObernMatrics();
        for (var i = 0; i < (int) numericUpDownInputsNumber.Value; i++)
        {
            var tempResult = Math.Pow(deltaYPlus[i], 2) /
                               (sensMatrix.GetVektor(i, true) * hOber * sensMatrix.GetVektor(i, true).Transopon());
            if (tempResult < minResult)
                minResult = tempResult;
        }
        var radius = minResult;
        var dopuskA = radius / Math.Sqrt(h[0, 0]) * 100;
        var dopuskB = radius / Math.Sqrt(h[1, 1]) * 100;
        MessageBox.Show($"Dopusk for parameter A: {dopuskA}, %{Environment.NewLine}Dpousk for Parameter B: {dopuskB}, %",
            "Result", MessageBoxButtons.OK);
    }
    private int GetSubMatrixCombinationNumber()
    {
        return 10;
    }
    private Matrix GetSensetivityMatrix()
    {
        var matrix = new double[(int)numericUpDownInputsNumber.Value, GetMatrixColumns()];

        for (var i = 0; i < (int) numericUpDownInputsNumber.Value; i++)
        {
            for (var j = 0; j < GetMatrixColumns(); j++)
            {
                matrix[i, j] = CalculateSensetiveMatrixValueByColumnIndex(i, j);
            }
        }

        return new Matrix(matrix);
    }
    private double CalculateSensetiveMatrixValueByColumnIndex(int rowIndex, int columnIndex)
    {
        double res = 0.0;
        switch (columnIndex)
        {
            case 0:
                res = FormHelper.GetDoubleFromTextboxText(textBoxA) * Math.Pow(GetInputXorY(rowIndex+1, true)-2,2);
                break;

            case 1:
                res = FormHelper.GetDoubleFromTextboxText(textBoxB) * GetInputXorY(rowIndex+1, true);
                break;

                default:
                    throw new Exception("Too much columns");
        }
        return res;
    }
    private double GetInputXorY(int i, bool getX)
    {
```

```
        var textBox = FormHelper.GetAllControlChieldControls<TextBox>(this, true, box =>
box.Name.Equals(string.Format("textBox{0}{1}",getX?"X":"Y",i))).FirstOrDefault();
        var res = FormHelper.GetDoubleFromTextboxText(textBox);
        return res;
    }
    private int GetMatrixColumns()
    {
        return 2;
    }
  }
```

Питання для самоконтролю

1. Що означає поняття «Система»?
2. Що означає поняття «Елемент»?
3. Які основні властивості систем?
4. В чому полягає зміст задачі синтезу статичних систем?
5. Яким чином описується зв'язок між вхідними та вихідними параметрами системи?
6. Який алгоритм реалізації методу допускового еліпсоїдного оцінювання?
7. Що являє собою розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь в просторі параметрів?
8. Який алгоритм побудови області розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
9. Як відбувається апроксимація допускової області розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
10. Яка основна і найбільша задача при розв'язку задачі пошуку допусків на параметри?

Варіанти завдань для самостійної роботи

Дано вигляд вихідної характеристики системи y, номінальні значення параметрів a,b,c, та коридор відхилень значень вихідної характеристики від номінальних. Розробити програмну систему пошуку допусків на параметри елементів системи методом допускового еліпсоїдного оцінювання.

№ п/п	y	a	b	c	ε
1	$a\cdot(x-1)^3+bx^2-cx+4$	1	0.5	-2	10
2	$a\cdot\sin x+bx^2-cx^3-3$	0.3	-3	1.5	10
3	$a\cdot x+b\ln x-c(x-1)+0.5$	0.1	-1	2	10
4	$b\cdot(x-1)^3+cx^2-ax$	2.5	0.5	-0.7	10
5	$c\cdot(x-5)^3+ax-b\sqrt{x}+0.6$	-0.2	0.5	0.1	15
6	$a/(x-2)+b\cos x^2-cx+2$	0.5	-2	1.5	15
7	$a\cdot(x-1)^3+b/x^2-c(x-3)$	1.5	3	-0.2	15
8	$a\cdot(x-1.5)^2+bx^3-c/x+1$	-0.4	1	0.5	5
9	$a\cdot\sin 3x-bx-cx+3$	0.1	-0.4	-2	5
10	$a\cdot(x-1)^3-bx^2+cx+4$	-2	1.5	-0.4	5
11	$a\cdot\cos 2x+b(x-0.5)^2-c(x+1)$	-0.2	2.5	2	10
12	$-a\cdot(x-1)^3+b(x-6)^2-c\ln x-1$	-0.4	-1	-2	10
13	$c\cdot(x-1)^3+b\cos x^2-ax+4$	2	2.5	-0.7	10
14	$a\cdot x^4+bx^2-c(x-1)+3$	0.5	-1	1.5	5
15	$a\cdot x+b\sin x-cx$	-0.7	0.5	0.1	5
16	$a\cdot tgx+bx^2+cx+3$	-0.4	3	0.5	5
17	$a\cdot\sqrt{x-1}+bx^2+c/x+7$	1	0.5	-1	15
18	$a\cdot x^3+b(x-1)^2+cx-2$	0.5	-0.2	3	15
19	$a\sin 2x+bx^2-c/x+0.5$	-0.4	0.5	2	15
20	$a\cdot(x-2)^3+b(x-1)-cx^2+3$	0.1	-2	-0.7	5
21	$a\cdot\sqrt{x+1}+bx^2-c/x+0.5$	-1	3	-0.2	5
22	$a\cdot x+btgx-cx^2+3$	0.5	-0.7	1	10
23	$a\cdot(x-4)+bx^3-cx^2+0.3$	2.5	0.5	1.5	10
24	$a\cdot tgx+bx-cx^2+3$	2	-0.4	-2	15
25	$a\cdot\cos x+b/x+cx^2-4$	3	-0.2	0.1	15
26	$c\cdot\sqrt{x+1}-bx-ax^2+0.5$	-2	2.5	-1	10
27	$a\cdot x+b\sin 3x+cx^3-0.4$	-0.7	-1	2	5
28	$-a\cdot(x-1)^3-bx^2-cx^2$	1	2.5	-0.7	5
29	$a\cdot tgx+b(x-2)-c(x-1)^2+3$	3	-2	0.5	10
30	$a\cdot(x-1)^4+bx^3-cx^2+0.5$	-0.2	3	1	10

РОЗДІЛ 6
ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ СТАТИЧНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ

6.1. Оптимізація параметрів статичних систем на основі ітераційних методів

За основу для побудови більшості числових методів обчислення параметрів статичних систем слугує ітераційна оптимізація, суть якої полягає в послідовній модифікації параметрів системи згідно з деяким алгоритмом з метою досягнення вимог, поставлених до вихідних характеристик системи.

Узагальнена схема роботи ітераційних оптимізаційних алгоритмів подана у вигляді UML-діаграми діяльності на рисунку 6.1.

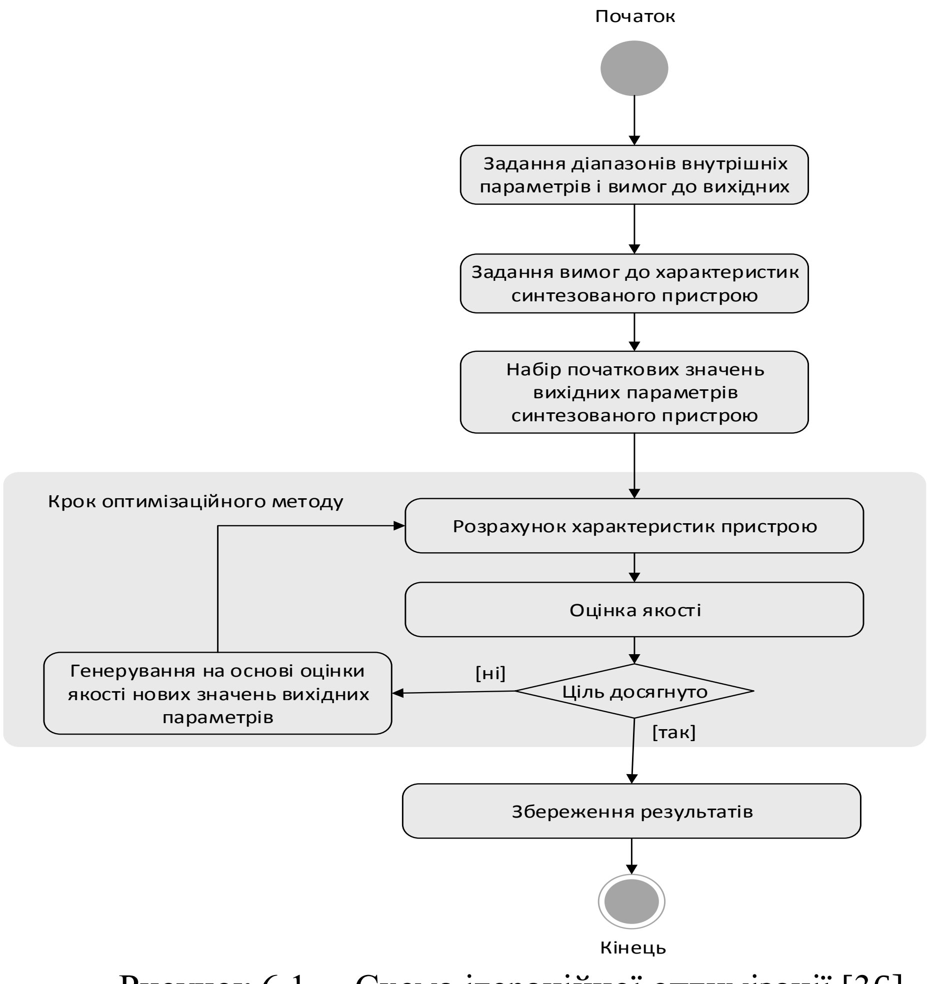


Рисунок 6.1 – Схема ітераційної оптимізації [36]

В загальних рисах проаналізуємо представлену схему. Перед початком задачі забезпечення функціональної придатності виділяються вхідні та вихідні параметри статичної системи та задаються вимоги до характеристик системи оптимізації. Розрахунок характеристик системи виконується, виходячи з варіації значень вхідних параметрів на поточній ітерації оптимізаційного алгоритму. Зв'язок зміни параметрів системи з її характеристиками забезпечується за допомогою математичної моделі системи [36]. Після обчислення характеристик системи виконується чисельна оцінка, тобто визначення ступеня їх відповідності до поставлених вимог. На основі отриманої оцінки оптимізаційний алгоритм вибирає наступні значення зміни параметрів системи.

Найчастіше процес оптимізації на основі ітераційних методів виконується до того моменту, доки його не зупинить проектувальник, оскільки в загальному випадку завжди існує імовірність знаходження кращого розв’язку.

Задачі оптимального проектування статичних систем мають ряд особливостей, до яких відносять багатокритеріальність та «яровий характер» функції якості, наявність обмежень на вхідні та вихідні параметри проектованого пристрою, велику розмірність вектора варійованих параметрів [14].

Стратегія розв’язування задач оптимального проектування передбачає застосування глобальних процедур оптимізації на початкових етапах пошуку та уточнення отриманого глобального рішення швидкозбіжними в околі оптимальної точки локальними алгоритмами. Така стратегія дозволяє, по-перше, з достатньою оцінкою функціональної придатності та точністю визначити значення глобального екстремуму і, по-друге, суттєво знизити обчислювальні витрати на пошук. При цьому етапи глобального пошуку можуть виконуватися з невисокою точністю, а етапи локального уточнення проводять в околі глобального екстремуму, що потребує значно меншої кількості ітераційних обрахунків [10,46].

Зазвичай на вихідні параметри статичної системи задаються певні межі, вихід за які означатиме її відмову. Виникає задача знаходження залежності між допуском на вихідний параметр системи та допусками на параметри елементів, з яких вона складається. Визначення допусків на параметри елементів [8] за заданим допуском на параметри схеми системи створює задачу забезпечення функціональної придатності щодо заданої точності її вихідних параметрів.

6.2. Метод забезпечення функціональної придатності статичних систем з оптимізацією їх параметрів на основі аналізу інтервальних даних

Спочатку розглянемо постановку задачі забезпечення функціональної придатності статичної системи із врахуванням обмежень на її характеристики [38], які переважно є не лінійними за параметрами.

Кожна i-та характеристика y_i системи є функцією параметрів $\vec{b} = (b_1,...,b_j,...,b_m)^T$ елементів. Здебільшого при дослідженні функціонування статичних систем використовують нелінійні залежності вихідних характеристик системи від її параметрів, тобто кожна i-та характеристика $y_i,\ i=\overline{1,N}$ є функцією $g_i(\vec{b})$ векторного аргумента параметрів $\vec{b} = (b_1,..,b_m)^T$. Зважаючи на задані допуски на характеристики системи, при забезпеченні функціональної придатності доцільно вихідні характеристики системи подавати в інтервальному вигляді:

$$[y_i^-, y_i^+],\ i=\overline{1,N}. \tag{6.1}$$

У випадку відомих залежностей $g_i(\vec{b})$ між значеннями параметрів та вихідними характеристиками системи та із урахуванням обмежень (6.1) отримаємо:

$$y_i^- \le g_i(\vec{b}) \le y_i^+,\ i=\overline{1,N}, \tag{6.2}$$

де $[y_i^-, y_i^+]$ - інтервали обмежень на значення вихідної характеристики системи.

Згідно з системою (6.2), умови забезпечення функціональної придатності сформулюємо у такому вигляді:

$$g_i(\hat{\vec{b}}) \subset [y_i^-, y_i^+],\ i = \overline{1, N}. \tag{6.3}$$

Інтервальна система (6.2) є складною у зв'язку з нелінійністю отриманих рівнянь, для розв'язку яких доцільно побудувати таку цільову функцію [11,25]:

$$F(\hat{\vec{b}}_k) \xrightarrow{\hat{\mathrm{b}}} \min, \hat{\vec{b}} \in \Psi, \tag{6.4}$$

де $\hat{\vec{b}}$ – вектор оцінок параметрів статичної системи;

Ψ – область параметрів статичної системи, яка визначається фізичним змістом параметрів;

$F(\hat{\vec{b}}_k)$ – значення функції мети оцінювання вектора параметрів системи.

При цьому процедуру оцінювання вектора параметрів статичної системи необхідно організувати в такий спосіб, щоб забезпечити зменшення значень функції мети $F(\hat{\vec{b}}_1) > F(\hat{\vec{b}}_2) > \ldots > F(\hat{\vec{b}}_k) > \ldots > F(\hat{\vec{b}}_{k=K} = \hat{\vec{b}} \in \Omega)$ за скінчену та якомога меншу кількість ітерацій $k = K$.

Функцію мети оцінювання вектора параметрів системи $F(\hat{\vec{b}}_k)$ визначатимемо як різницю між значеннями вихідних характеристик системи, знайдених у процесі розв'язку ІСНАР (6.2) та центрів заданих інтервалів обмежень на вихідні характеристики (6.1). Формально цю умову запишемо у такому вигляді:

$$F(\hat{\vec{b}}) = \min \max_{i=1,..,N} \left\{ \left| g_i(\hat{\vec{b}}) - mid([y_i]) \right| \right\}, \tag{6.5}$$

де $g_i(\hat{\vec{b}})$ – обчислене під час розв'язку інтервальної системи нелінійних алгебричних рівнянь (6.2) на поточній ітерації значення вихідних характеристик; $[y_i]=[y_i^-, y_i^+]$; $mid(\bullet)$ – операція визначення середини інтервалу.

Проведемо аналіз функції мети в залежності від досягнутої якості поточного наближення вектора параметрів статичної системи. На рисунку 6.2 наведено графічну ілюстрацію обчислення значення функції мети (6.5).

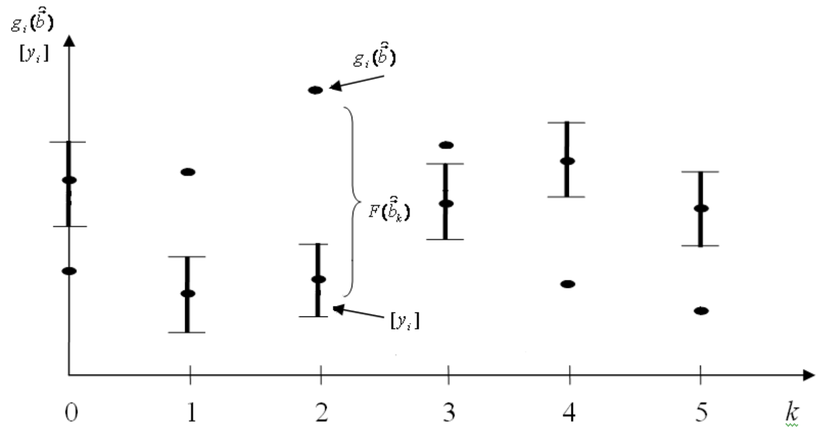


Рисунок 6.2 – Ілюстрація до обчислення функції мети за формулою (6.5)

Як бачимо з рисунку 6.2 найбільше відхилення між заданим інтервалом обмежень на вихідні характеристики $[y_i]$ та точковим значенням вихідних характеристик, обчислених під час розв'язування ІСНАР $g_i(\hat{\vec{b}})$, спостерігаємо на дискреті $k=2$. Саме це відхилення на поточній ітерації визначає значення функції мети (6.5).

Особливістю постановки задачі забезпечення функціональної придатності статичної системи виду (6.4-6.5), на відміну від існуючих, полягає у тому, що зазначена постановка задачі по-іншому інтерпретує оптимальні параметри системи тобто як такі, значення яких забезпечують функціональну придатність системи. Традиційні ж задачі, замість функції мети (6.5), яка мінімізується, використовують мінімізацію середньоквадратичного відхилення, що може не забезпечити функціональну придатність системи.

Очевидно, що чим більша кількість рівнянь в інтервальній системі (6.2), тим складніше знайти розв'язок ІСНАР. Зазначену задачу відносять до типу NP-повних задач. Одним із методів пошуку невідомого вектора параметрів статичної системи є методи випадкового пошуку. Основною особливістю зазначеного методу є те, що в процесі обрахунку наближення $\hat{\vec{b}}_i$ використовують випадкові вектори в якості напрямку руху [7,32,35,40].

6.3. Метод випадкового пошуку вектора параметрів статичних систем

Основною особливістю зазначеного методу є те, що в процесі обрахунку наближення $\hat{\vec{b}}_i$ використовуються випадкові вектори в якості напрямку руху [10]. Коротко опишемо алгоритм методу.

Алгоритм методу випадкового пошуку вектора параметрів статичних систем

Крок 1. Задання початкового (нульового) вектора параметрів $\hat{\vec{b}}_0$.

Крок 2. Обчислення значення цільової функції відносно початкового вектора параметрів.

Крок 3. Формулювання випадковим чином наступного вектора параметрів статичної системи:

$$\hat{\vec{b}}_k = \hat{\vec{b}}_{k-1} + r \cdot \vec{\xi}_k, \; k = \overline{1, K} \tag{6.6}$$

$$\vec{\xi}_k = \left(\frac{\Delta b_{1k}}{R_k}, \ldots, \frac{\Delta b_{mk}}{R_k} \right)^T; \tag{6.7}$$

$$R_k = \sqrt{\Delta b_{1k}^2 + \ldots + \Delta b_{mk}^2} \tag{6.8}$$

де r - довжина кроку, тобто на відстані r від точки $\hat{\vec{b}}_{k-1}$ в просторі параметрів генеруємо k випадкових точок;

$\Delta b_{1k,} ..., \Delta b_{mk}$ - випадкові числа, згенеровані відповідно до випадкового закону розподілу на інтервалі $[-1, 1]$.

Крок 4. Перевірка «якості» $F(\hat{\vec{b}}_k)$ поточного наближення оцінки $\hat{\vec{b}}_i$ вектора параметрів.

Крок 5. Серед згенерованих k точок вибираємо точку, яка забезпечує найменше значення функції мети, тобто обчислене значення «якості» $F(\hat{\vec{b}}_k)$ якої є найменшою. Отриманий таким чином вектор параметрів стане початковим наближенням для наступної ітерації.

Якщо обчислене значення «якості» поточного наближення оцінки вектора параметрів системи на поточній ітерації дорівнює нулю, то процедура завершується інакше повертаємось до Кроку 3.

Пошук кращого вектора параметрів продовжується до тих пір доки зменшується значення функції мети. Якщо ж на певній ітерації виконання алгоритму випадкового пошуку, серед згенерованих точок не можливо знайти точку, яка зменшує значення функції мети, тоді доцільно застосувати адаптивний алгоритм випадкового пошуку з змінним кроком (радіусом пошуку).

Адаптивний алгоритм випадкового пошуку, аналогічно до звичайного, за основу бере випадкові вибірки, котрі використовуються для визначення напрямку пошуку, однак довжина кроку (радіусу) в даному алгоритмі буде змінюватись відповідно до отриманого успіху. Тобто, якщо дві послідовні ітерації дають покращення цільової функції, то крок збільшується в k_{in} раз, а якщо M послідовних ітерацій не дають покращення, то крок зменшується в

k_{dec} раз [28]. Коротко опишемо кроки адаптивного алгоритму випадкового пошуку.

Адаптивний алгоритм методу випадкового пошуку вектора параметрів статичних систем

Крок 1. Задати:

$\vec{b}_0$ - початковий вектор параметрів;

k_{in}, k_{dec} - коефіцієнти збільшення та зменшення величини кроку відповідно;

M – кількість ітерацій, котрі не дають покращення цільової функції.

Крок 2. Встановити початково r, $m = 0$ - лічильник числа ітерацій, котрі не дають покращення.

Крок 3. Отримати N випадкових векторів $\vec{\xi}$ згенерованих відповідно до випадкового закону розподілу на інтервалі [-1;1] за формулами (6.6)-(6.8).

Крок 4. Якщо один з векторів $\vec{b}_i$ - допусковий вектор і $F(\vec{b}_i) < F(\vec{b}_0)$, то розраховуємо відносно нього $r = k_{in} \cdot r$ та $\vec{b}_i = \vec{b}_{next}$ і переходимо до кроку 5. Інакше, $m = m + 1$ та переходимо до кроку 5.

Крок 5. Якщо $m > M$, то $r = k_{dec} \cdot r$, $m = 0$ та переходимо до кроку 6. Інакше, крок 6.

Крок 6. Перевірка умови закінчення пошуку. У разі виконання умови завершуємо алгоритм, інакше переходимо до кроку 3 та повторюємо процедуру.

Програмна реалізація задачі синтезу параметрів системи на основі методу випадкового пошуку мовою програмування C#

Розробити програмну систему синтезу параметрів системи на основі адаптивного алгоритму випадкового пошуку. Основні екранні форми програми повинні відображати сформовану ІСЛАР, сформовану область допустимих значень оцінки вектора параметрів, допусковий коридор значень функції та графік функції, отриманий в результаті апроксимації, знайдений вектор параметрів, кількість ітерацій обчислень алгоритму та час роботи алгоритму.

Дана функція $f(x) = a \cdot (x-2)^2 + bx + 2$, графік якої наведено на рисунку 6.3.

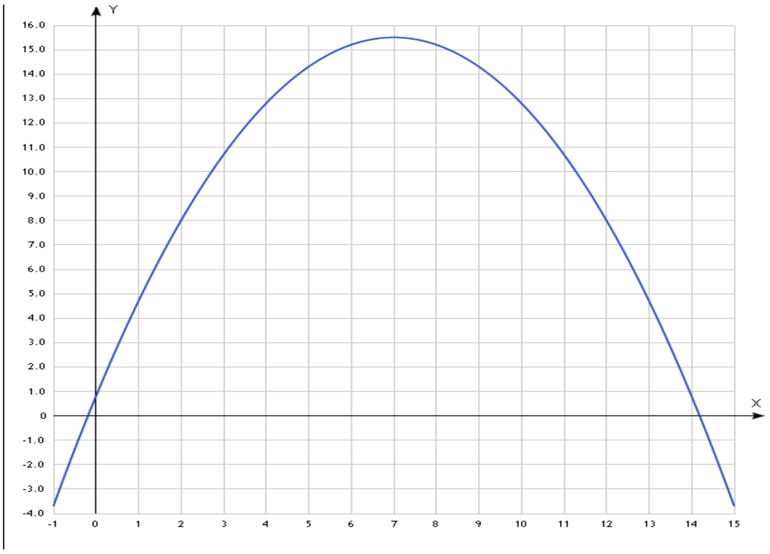


Рисунок 6.3 – Графік заданої функції

1. Область визначення функції $x \in [-\infty; \infty]$, тобто для обчислень можна використовувати будь-які значення x.

2. Задамо інтервал вимірювання $[3;12]$.

3. Спираючись на графік, визначимо значення функції в точках вимірювання:

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	10.7	12.8	14.3	15.2	15.5	15.2	14.3	12.8	10.7	8

4. Задаємо інтервал допустимих значень функції у розмірі 20%.

y	10.7	12.8	14.3	15.2	15.5	15.2	14.3	12.8	10.7	8

y^-	8.56	10.24	11.44	12.16	12.4	12.16	11.44	10.24	8.56	6.4
y^+	12.84	15.36	17.16	18.24	18.6	18.24	17.16	15.36	12.84	9.6

5. На основі вхідних даних сформуємо ІСЛАР наступного виду:

$$
\begin{array}{l}
8.56 \le a + 3b + 2 \le 12.84 \\
10.24 \le 4a + 4b + 2 \le 15.36 \\
11.44 \le 9a + 5b + 2 \le 17.16 \\
12.16 \le 16a + 6b + 2 \le 18.24 \\
12.4 \le 25a + 7b + 2 \le 18.6 \\
12.16 \le 36a + 8b + 2 \le 18.24 \\
11.44 \le 49a + 9b + 2 \le 17.16 \\
10.24 \le 64a + 10b + 2 \le 15.36 \\
8.56 \le 81a + 11b + 2 \le 12.84 \\
6.4 \le 100a + 12b + 2 \le 9.6
\end{array}
$$

6. Будуємо область допустимих значень параметрів системи (див.рис.6.4). Для цього достатньо вибрати будь-які дві нерівності із ІСЛАР, однак для гарантованого перетину допускових коридорів та формування допускової області параметрів візьмемо перші чотири нерівності з системи.

a	b_1^-	b_1^+	b_2^-	b_2^+	b_3^-	b_3^+	b_4^-	b_4^+
-2	2.85	4.28	4.06	5.34	5.49	6.63	7.03	8.04
2	1.52	2.95	0.06	1.34	-1.71	-0.57	-3.64	-2.63

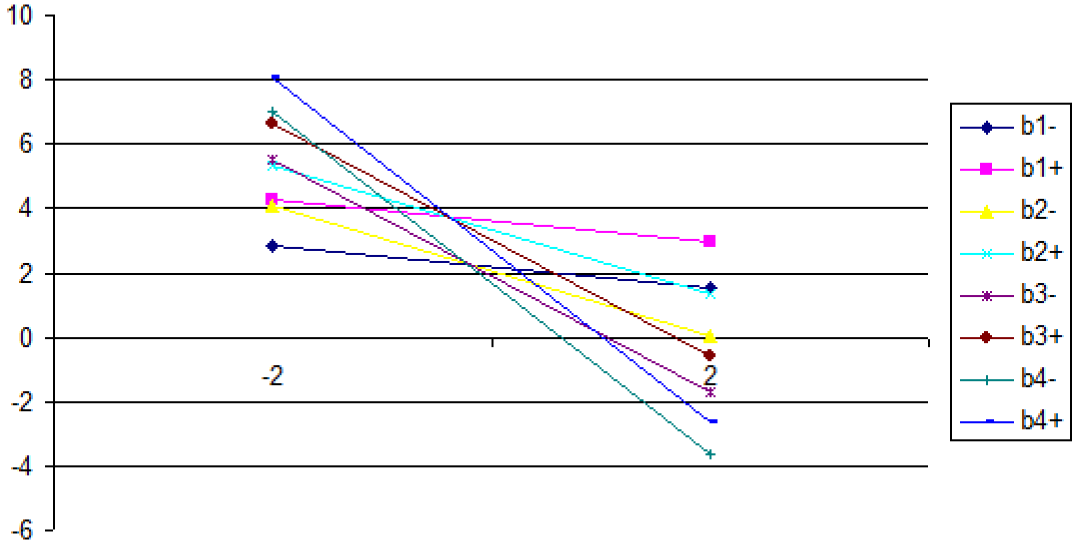


Рисунок 6.4 – Допускова область параметрів ІСЛАР

7. Наступним етапом є пошук параметрів системи на основі адаптивного алгоритму випадкового пошуку. Враховуючи, що кількість обчислень даним алгоритмом може сягати десятки, а то і сотні тисяч ітерацій, наведемо, для прикладу лише пару з них для невеликої кількості випадкових векторів.

Спочатку задаємо необхідні вхідні змінні, а саме:

- величину початкового радіусу $r = 1.2$;
- коефіцієнти збільшення та зменшення радіусу відповідно $k_{in} = 1.2$, $k_{dec} = 0.8$;
- кількість ітерацій, які не дають покращення цільової функції $M = 10$;
- кількість випадково згенерованих векторів $N = 5$ (при програмних обчисленнях дана кількість повинна бути не менша 100);
- із допускової області параметрів ІСЛАР, представленої на рисунку 6.4, вибираємо початкові значення параметрів $a_0 = -0.2$, $b_0 = 2$, отже початкова оцінка вектора параметрів рівний $\vec{b}_0 = (-0.2;2)$.

Обчислюємо значення функції відповідно до початкової оцінки вектора параметрів, а також значення функції мети.

y_0	7.8	9.2	1.2	10.8	11	10.8	10.2	9.2	7.8	6
$\lvert y-y_0 \rvert$	2.9	3.6	4.1	4.4	4.5	4.4	4.1	3.6	2.9	2

Звідси функція мети дорівнює $F(\vec{b}_0)=4.5\geq 0$, отже вектор параметрів системи поки не знайдено.

Формуємо N наближень вектора параметрів згідно формул (6.6-6.8). Нижче, у таблиці, приведено результати обчислень значень функції згідно отриманих наближень вектора параметрів та функції мети.

$\vec{b}_1 =$ $=(\mathbf{0.93};\mathbf{3.13})$		$\vec{b}_2 =$ $=(-\mathbf{0.65};\mathbf{1.55})$		$\vec{b}_3 =$ $=(-\mathbf{0.23};\mathbf{1.97})$		$\vec{b}_4 =$ $=(\mathbf{0.61};\mathbf{2.81})$		$\vec{b}_5 =$ $=(-\mathbf{0.35};\mathbf{1.85})$	
y_1	$\lvert y-y_1 \rvert$	y_2	$\lvert y-y_2 \rvert$	y_3	$\lvert y-y_3 \rvert$	y_4	$\lvert y-y_4 \rvert$	y_5	$\lvert y-y_5 \rvert$
12.34	1.64	5.99	4.71	7.69	3.01	11.05	0.35	7.2	3.5
18.27	5.47	5.57	7.23	8.98	3.82	15.71	2.91	8	4.8
26.08	11.78	3.84	10.45	9.81	4.49	21.59	7.29	8.1	6.2
35.75	20.55	0.82	14.38	10.19	5.01	28.7	13.5	7.5	7.7
47.29	31.79	-3.52	19.02	10.11	5.38	37.04	21.54	6.2	9.3
60.7	45.5	-9.16	24.36	9.59	5.61	46.6	31.4	4.2	11
75.97	61.67	-16.11	30.41	8.6	5.7	57.39	43.09	1.5	12.8
93.12	80.32	-24.37	37.17	7.16	5.64	69.41	56.61	-1.9	14.7
112.13	101.43	-33.93	44.63	5.26	5.43	82.65	71.95	-6	16.7
133.01	125.01	-44.8	52.8	2.91	5.09	97.12	89.12	-10.8	18.8
$F(\vec{b}_1)=$	**125.01**	$F(\vec{b}_2)=$	**52.8**	$F(\vec{b}_3)=$	**5.7**	$F(\vec{b}_4)=$	**89.12**	$F(\vec{b}_5)=$	**18.8**

Після першої ітерації адаптивного алгоритму випадкового пошуку значення функції мети не змінилось, адже покращення не відбулось $F(\vec{b}_3)=5.7>F(\vec{b}_0)=4.5$, тому збільшуємо величину лічильника на 1 ($m=1$) та продовжуємо обчислення від початкового вектора параметрів.

$\vec{b}_1 =$ $= (-0.182;2.02)$		$\vec{b}_2 =$ $= (-0.19;2.01)$		$\vec{b}_3 =$ $= (-0.21;1.99)$		$\vec{b}_4 =$ $= (-0.28;1.92)$		$\vec{b}_5 =$ $= (-0.176;2.02)$	
y_1	$\lvert y - y_1 \rvert$	y_2	$\lvert y - y_2 \rvert$	y_3	$\lvert y - y_3 \rvert$	y_4	$\lvert y - y_4 \rvert$	y_5	$\lvert y - y_5 \rvert$
10.7	2.828	7.872	2.852	7.848	2.9288	7.7712	3.236	7.464	2.804
12.8	3.456	9.344	3.504	9.296	3.6576	9.1424	4.272	8.528	3.408
14.3	3.848	10.452	3.932	10.368	4.2008	10.0992	5.276	9.024	3.764
15.2	4.004	11.196	4.136	11.064	4.5584	10.6416	6.248	8.952	3.872
15.5	3.924	11.576	4.116	11.384	4.7304	10.7696	7.188	8.312	3.732
15.2	3.608	11.592	3.872	11.328	4.7168	10.4832	8.096	7.104	3.344
14.3	3.056	11.244	3.404	10.896	4.5176	9.7824	8.972	5.328	2.708
12.8	2.268	10.532	2.712	10.088	4.1328	8.6672	9.816	2.984	1.824
10.7	1.244	9.456	1.796	8.904	3.5624	7.1376	10.628	0.072	0.692
8	0.016	8.016	0.656	7.344	2.8064	5.1936	11.408	-3.408	0.688
$F(\vec{b}_1) =$	**4**	$F(\vec{b}_2) =$	**4.13**	$F(\vec{b}_3) =$	**4.73**	$F(\vec{b}_4) =$	**11.4**	$F(\vec{b}_5) =$	**3.87**

Після другої ітерації адаптивного алгоритму випадкового пошуку значення функції мети змінилось і дорівнює $F(\vec{b}_5) = 3.87 < F(\vec{b}_0) = 4.5$, але мінімуму досягнуто не було, тому продовжуємо обчислення і обнулюємо лічильник ($m = 0$). За початковий вектор параметрів для наступної ітерації слугуватиме вектор $\vec{b}_0 = \vec{b}_5 = (-0.176;2.02)$.

Процедуру випадкового пошуку повторюємо доки зменшується функція мети. Якщо функція мети не покращується протягом M послідовних ітерацій, то зменшуємо величину радіусу в k_{dec} разів, обнулюємо лічильник та продовжуємо пошук.

На рисунку 6.5 приведена екранна форма вводу вхідних параметрів системи. На рисунку 6.6 приведена екранна форма введення значень вихідної характеристики системи, зокрема їх кількість та інтервали значень. На рисунку 6.7 проілюстровано результат виконання програми.

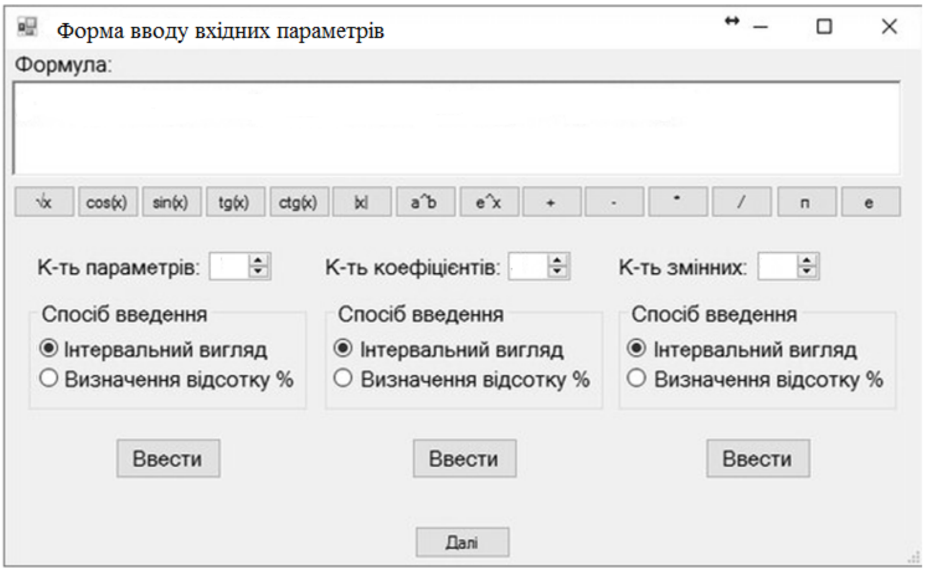


Рисунок 6.5 – Форма вводу вхідних параметрів системи

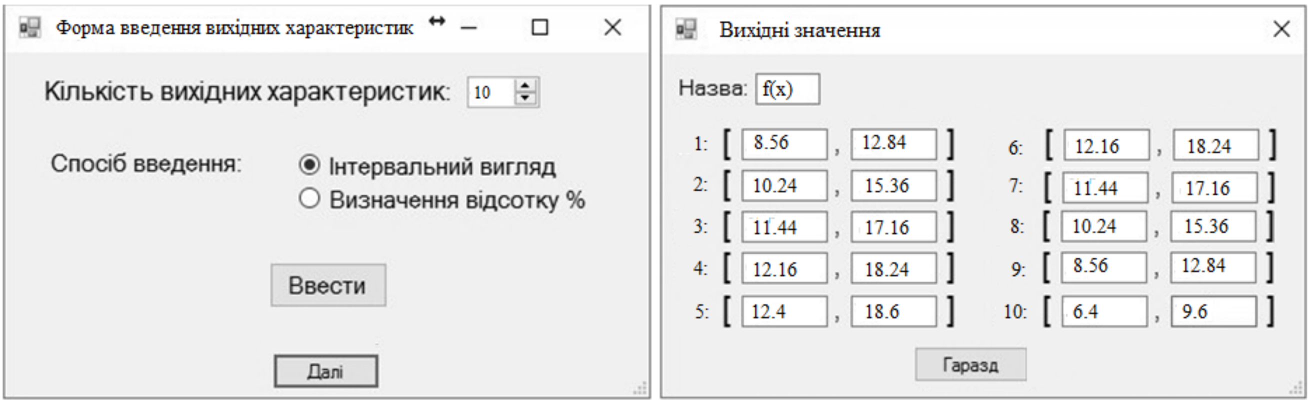


Рисунок 6.6 – Форми для введення значень вихідної характеристики системи

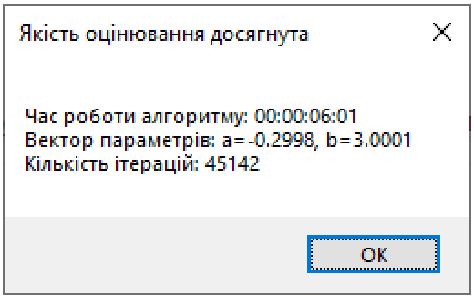


Рисунок 6.6 – Форма виведення результатів обчислення

Нижче коротко приведено код програми, який ілюструє основну функціональність методів:

```
public MainForm()
    {
        InitializeComponent();
    }
    private Random _rnd = new Random();
    private List<Point3D> centralPoints = new List<Point3D>();
    private List<Point3D> otherPoints = new List<Point3D>();
```

```
        private Point3D _bestPoint;
        private void Run()
        {
            _bestPoint = null;
            centralPoints = new List<Point3D>();
            otherPoints = new List<Point3D>();
            ConfigHelper.Radius = ConfigHelper.RadiousOriginal;
            var index = 0;
            ConfigHelper.MethodsType = MethodsTypes.AdvancedSearch;
            ConfigHelper.MaxItterationNumber = Int32.MaxValue;
            var stopWatch = new Stopwatch();
            stopWatch.Start();
            var currentTryCount = 0;
            var addPoints = new List<Point3D>();
            var bestPoint = new Point3D(ConfigHelper.InputG);
            var currentPoint = new Point3D(ConfigHelper.InputG);
            do
            {
                addPoints = GetAdditionalPoints(bestPoint).ToList();
                if (addPoints.Count == 0) continue;
                currentPoint =
                    addPoints.Aggregate(
                        (curmin, x) => (curmin.PrognozSuccessKoef < x.PrognozSuccessKoef) ? curmin : x);
                if (currentPoint.PrognozSuccessKoef < bestPoint.PrognozSuccessKoef)
                {
                    if (ConfigHelper.MethodsType == MethodsTypes.AdvancedSearch)
                    {
                        ConfigHelper.Radius *= ConfigHelper.PercentOfRadiusInc;
                    }
                    bestPoint = (Point3D)currentPoint.Clone();
                    centralPoints.Add(bestPoint);
                    otherPoints.AddRange(addPoints);
                    currentTryCount = 0;
                }
                else
                {
                    currentTryCount++;
                    if (currentTryCount > ConfigHelper.MaxTryCount)
                    {
                        ConfigHelper.Radius *= ConfigHelper.PercentOfRadiusDec;
                        currentTryCount = 0;
                    }
                }
                            index++;
                if (index != 0 && index % ConfigHelper.MaxItterationNumber == 0)
                {
                    stopWatch.Stop();
                    var ress =
                        MessageBox.Show(
                            string.Format("Current quality assessment: {0}{1}achieved during the: {2}{1}Do you want to continue?",
                                          FormHelper.GetFullDouble(bestPoint.PrognozSuccessKoef),
                                          Environment.NewLine, GetRunTime(stopWatch)),
                            "No success",
                            MessageBoxButtons.YesNo, MessageBoxIcon.Asterisk);
                    if (ress == DialogResult.No || ConfigHelper.MethodsType == MethodsTypes.Gentic)
                    {
                        return;
                    }

                    currentTryCount = 0;
                    stopWatch.Start();
                }
             } while (Math.Round(bestPoint.PrognozSuccessKoef - ConfigHelper.Accuracy, ConfigHelper.Rounding) > 0.0015);
            stopWatch.Stop();
            MessageBox.Show(
               string.Format(
                  "The quality of approximation {0} achieved by the time {1}{2}The vector of parameters: {3}{2}Number of iterations: {4}",
                  FormHelper.GetFullDouble(ConfigHelper.Accuracy),stopWatch.ToString(), Environment.NewLine,
                  bestPoint.GetStringVecotor(), index), "Success result was achived", MessageBoxButtons.OK,
MessageBoxIcon.Exclamation);

            _bestPoint = bestPoint;
        }
 public List<Point3D> GetAdditionalPoints(Point3D centralPoint)
        {
            switch (ConfigHelper.MethodsType)
            {
                case MethodsTypes.AdvancedSearch:
                case MethodsTypes.RandomSearch:
```

```
                return GetAdditionalPointsRandom(centralPoint);
            case MethodsTypes.Gentic:
                return GetAdditionalPointsGenetic();
            default:
                throw new ArgumentException(string.Format("Enum choise {0} no implemented",
                                                ConfigHelper.MethodsType));
        }
    }
  private List<Point3D> GetAdditionalPointsRandom(Point3D centralPoint)
    {
        var additionalPoints = new List<Point3D>();
        var rPoints = new List<Point3D>();
       for (var i = 0; i < ConfigHelper.GCalcDepth; i++)
        {
            var epselont = Point3D.GetRandomPoint();
             rPoints.Add(epselont);
            var r = Math.Sqrt(Math.Pow(epselont.X, 2) + Math.Pow(epselont.Y, 2));
            var generalEpselong = new Point3D(epselont.X / r, epselont.Y / r);
            var newPoint = new Point3D(centralPoint.X + ConfigHelper.Radius * generalEpselong.X,
                                  centralPoint.Y + ConfigHelper.Radius * generalEpselong.Y
                                 );
            additionalPoints.Add(newPoint);
        }
        return additionalPoints;
    }
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using AdaptiveAlg;

namespace AdaptiveAlgTwoParameters
{
    public class Point3D : ICloneable
    {
        const int F = 3;
        const int FIncrement = 1;
        private const int MaxMinValue = 10000;

        private static readonly Random Rnd = new Random();
        internal double X { get; set; }
        internal double Y { get; set; }
        private static List<double> _inputF = null;
        internal static List<double> InputF
        {
            get { return _inputF ?? (_inputF = GetInputF()); }
            set { _inputF = value; }

        }
       private static List<double> _inputData;
        internal static List<double> InputData
        {
            get
            {
                return _inputData ?? (
                    _inputData = ConfigHelper.IntputData);
            }
        }
        private List<Point3D> _prognozPoints = null;
        internal List<Point3D> PrognozPoints
        {
            get { return _prognozPoints ?? (_prognozPoints = GetPrognozF()); }
        }
        private List<Point3D> GetPrognozF()
        {
            if (InputF.Count != PrognozData.Count)
                throw new ArgumentException(
                    string.Format(
                        "Input F list and Prognoz data list is not same length. Input F length: {0}, Prognoz data length: {1}",
                        InputF.Count, PrognozData.Count));

            return PrognozData.Select((t, i) => new Point3D(InputF[i], t)).ToList();
        }
        private List<double> _prognozData;
        internal List<double> PrognozData
        {
            get { return _prognozData == null || _prognozData.Count == 0 ? (_prognozData = GetPrognozData()) : _prognozData; }
        }
        internal double[] Coordinates
        {
```

```
        get { return new double[] { X, Y }; }
    }
    private double? _prognozSuccessKoef;
    public double PrognozSuccessKoef
    {
        get
        {
            return GetPrognozSuccessKoef();
        }
    }
    public List<List<double>> PrognozHistory = new List<List<double>>();
    private List<double> GetPrognozData()
    {
        var prognozData = new List<double>();
        for (var i = 0; i < InputData.Count; i++)
        {
            prognozData.Add(X*Math.Pow(InputF[i]-2,2)+Y*InputF[i]+2);
        }
        PrognozHistory.Add(prognozData);
        return prognozData;
    }
    private double GetPrognozSuccessKoef()
    {
        var prognozData = GetPrognozData();
        var subResult = prognozData.Select((t, i) => Math.Round(Math.Abs(InputData[i] - t), ConfigHelper.Rounding)).ToList();

        return subResult.Sum() / subResult.Count;
            }
}}
```

Питання для самоконтролю

1. В чому полягає зміст ітераційної оптимізації?

2. Яка схема роботи ітераційних оптимізаційних алгоритмів?

3. Що являють собою вимоги до характеристик системи?

4. В чому полягає зміст забезпечення функціональної придатності статичних систем?

5. Як визначається функція мети?

6. Як організовується процедура оцінювання вектора параметрів?

7. Від чого залежить складність розв’язку системи рівнянь?

8. Які існують випадки якості поточного наближення вектора параметрів?

9. Яка основна особливість методу випадкового пошуку вектора параметрів?

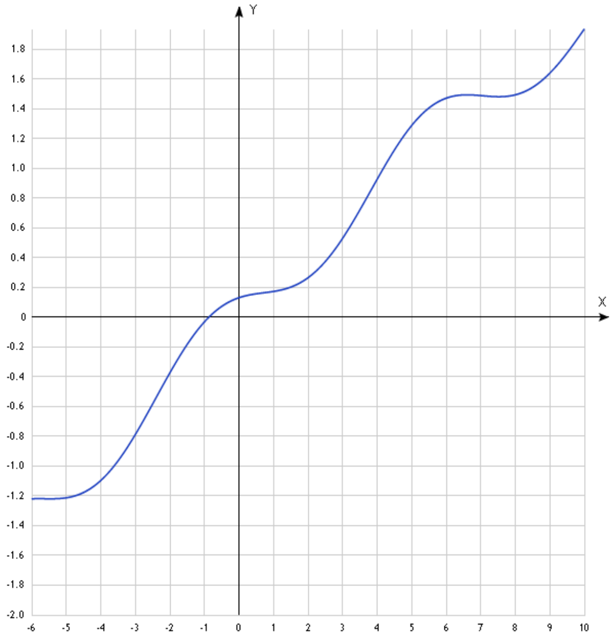
10. Яка основна особливість адаптивного алгоритму методу випадкового пошуку вектора параметрів?

Варіанти завдань для самостійної роботи

Варіант №1

Функція: $f(x)=\sin(0.13x)+a\cos(x+4)+bx$

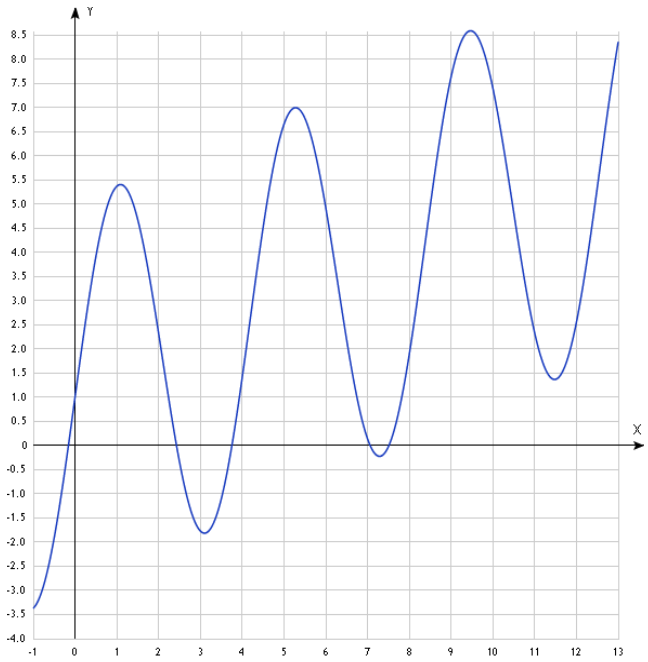
Графік функції:



Варіант №2

Функція: $f(x)=a\cdot\sin(1{,}5x)+bx-1$

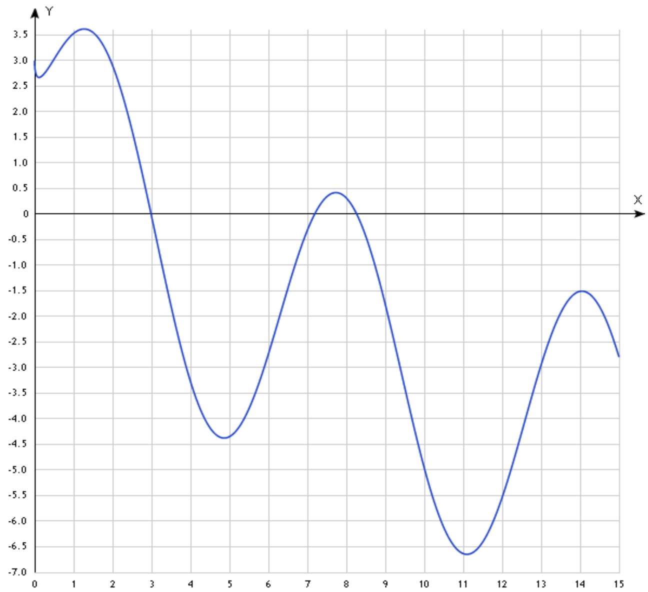
Графік функції:


Y
X
8.5
8.0
7.5
7.0
6.5
6.0
5.5
5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
-0.5
-1.0
-1.5
-2.0
-2.5
-3.0
-3.5
-4.0
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13

Варіант №3

Функція: $f(x) = a \cdot \sin(x) + b\sqrt{x} + 3$

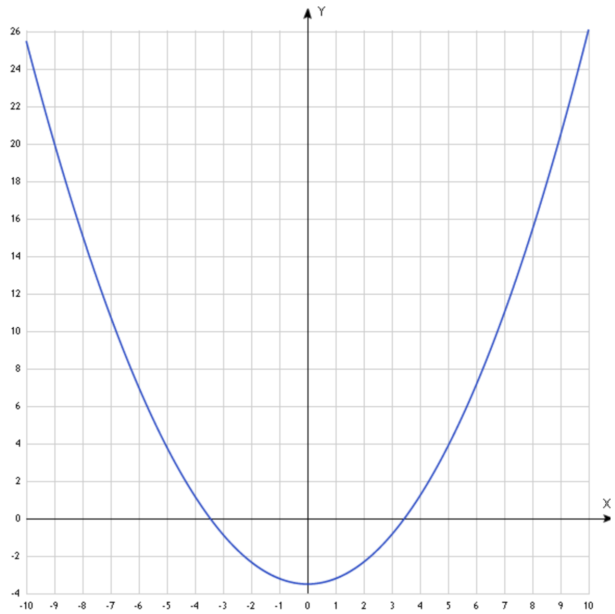
Графік функції:



Варіант №4

Функція: $f(x) = a \cdot \cos(\sqrt{x+10}) + bx^2 - 4$

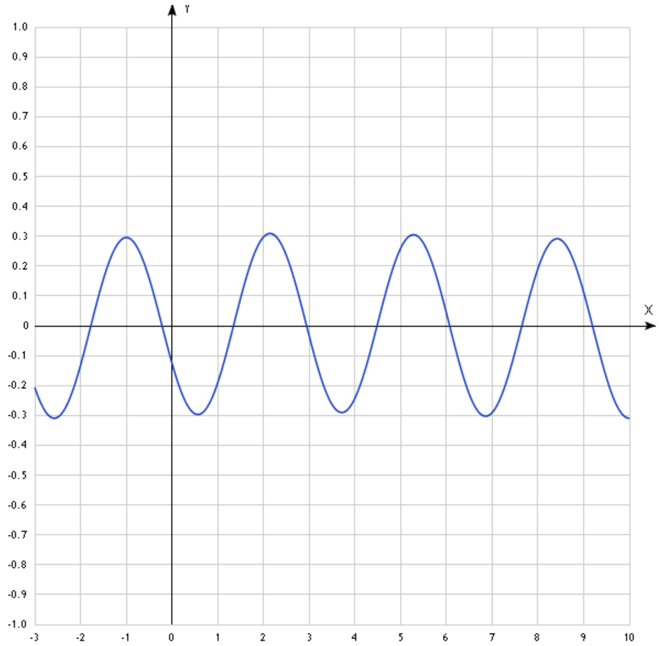
Графік функції:



Варіант №5

Функція: $f(x) = a\cos(2x+2) + b\sin(0{,}5x)$

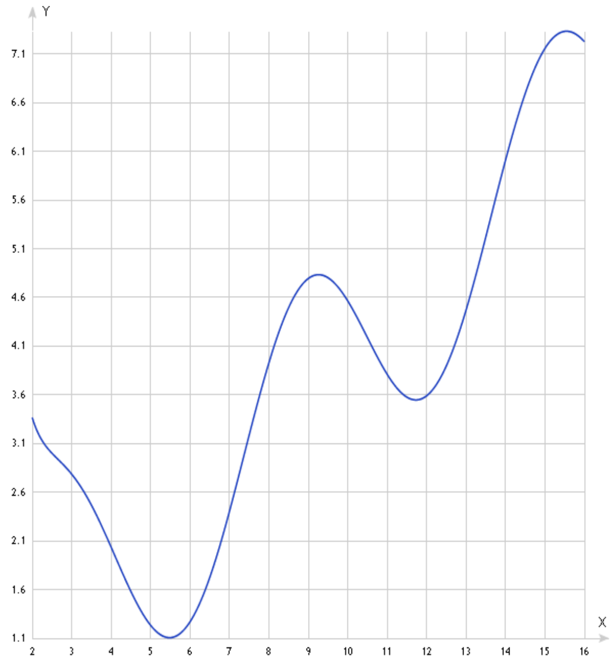
Графік функції:



Варіант №6

Функція: $f(x) = \dfrac{13}{x^3} + a\cos(x+0{,}5) + bx$

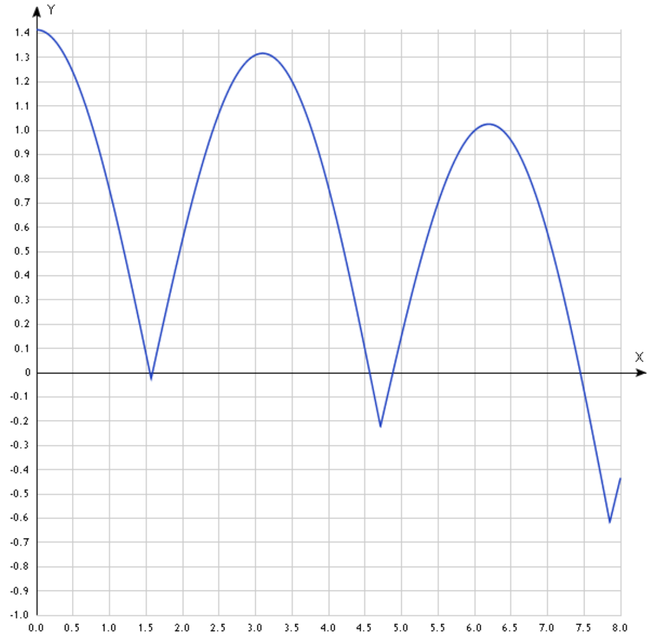
Графік функції:



Варіант №7

Функція: $f(x) = a\sqrt{\dfrac{\cos^2(x)}{2}} - bx^2$

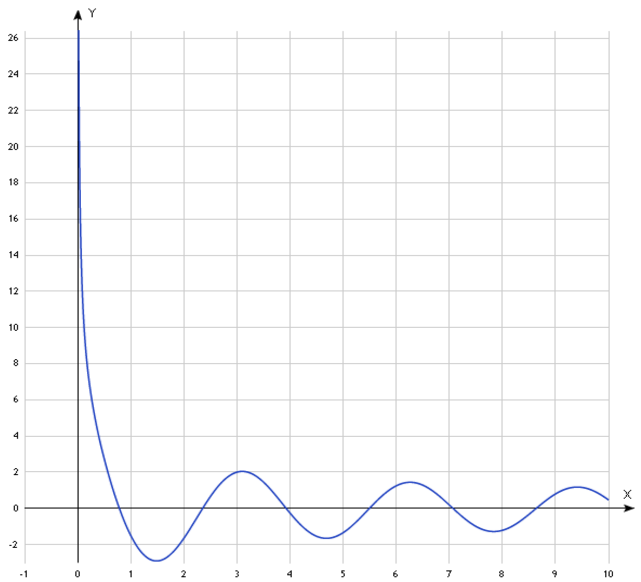
Графік функції:



Варіант №8

Функція: $f(x) = \dfrac{a \cdot \cos(2x)}{b\sqrt{x}}$

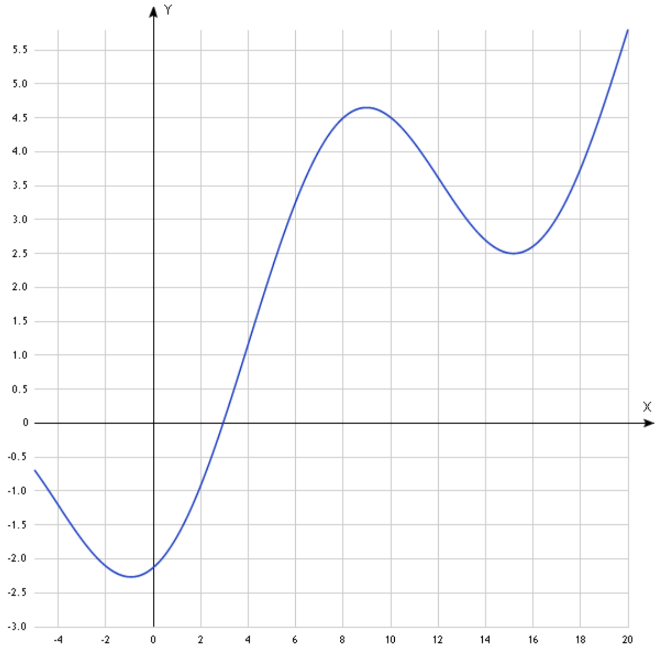
Графік функції:



Варіант №9

Функція: $f(x) = \dfrac{x}{a} - b\cos(0{,}39x)$

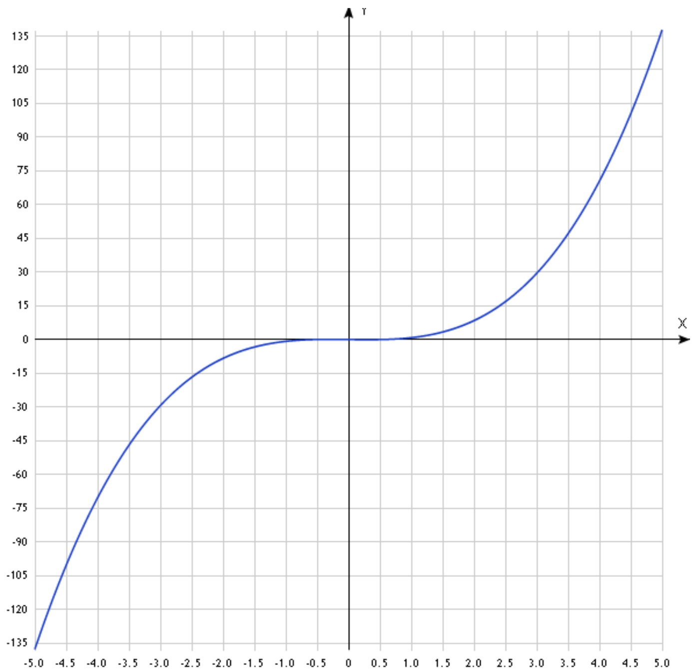
Графік функції:



Варіант №10

Функція: $f(x) = ax^3 + b * \sin(0{,}8x)$

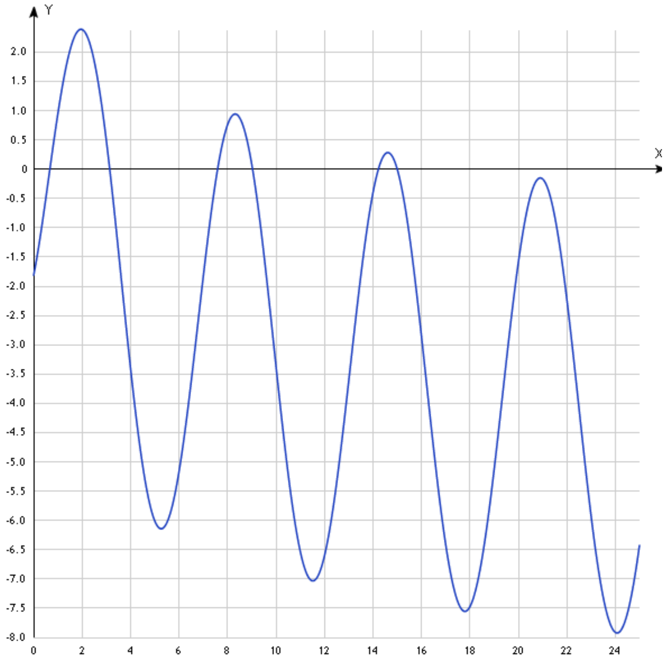
Графік функції:



Варіант №11

Функція: $f(x) = a \cdot \ln(x+1) + b \cdot \sin(x - 0{,}5)$

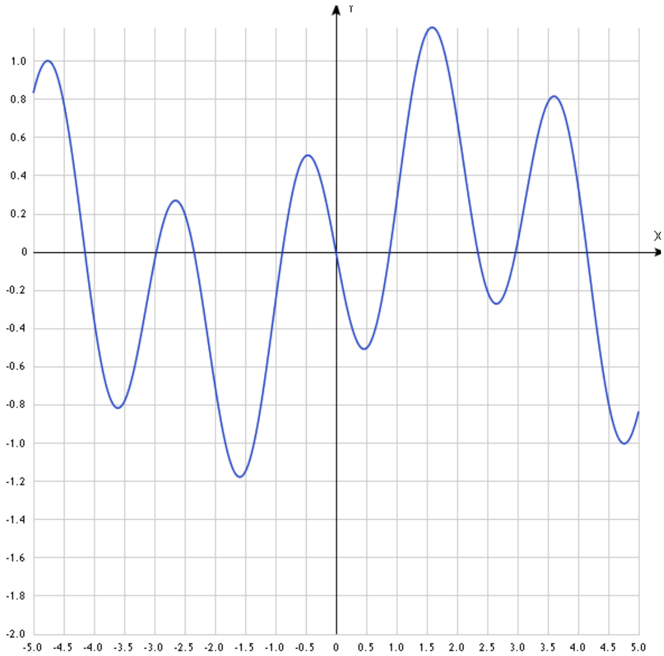
Графік функції:



Варіант №12

Функція: $f(x) = a\sin(0{,}8x) + b\sin(3x)$

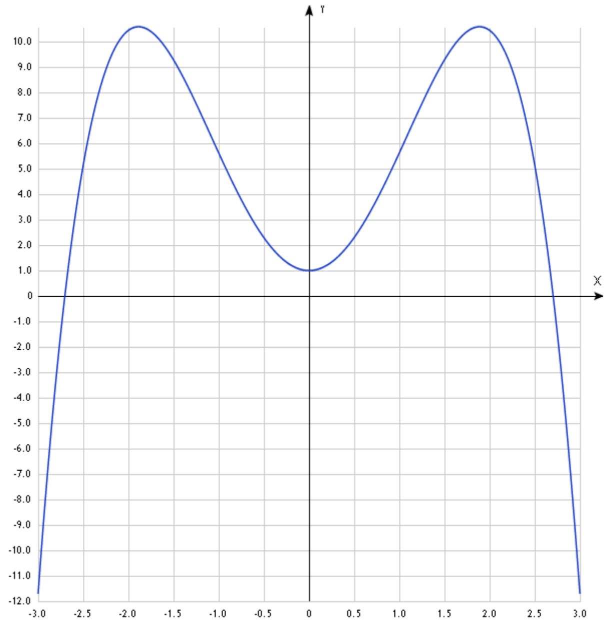
Графік функції:



Варіант №13

Функція: $f(x) = 1 + ax^2 - \frac{2x^4}{b}$

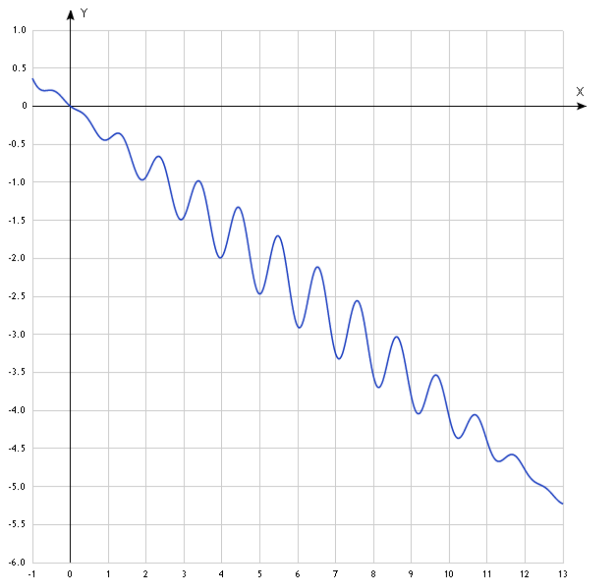
Графік функції:



Варіант №14

Функція: $f(x) = a\sin(0{,}25x) \cdot \sin(6x) - bx$

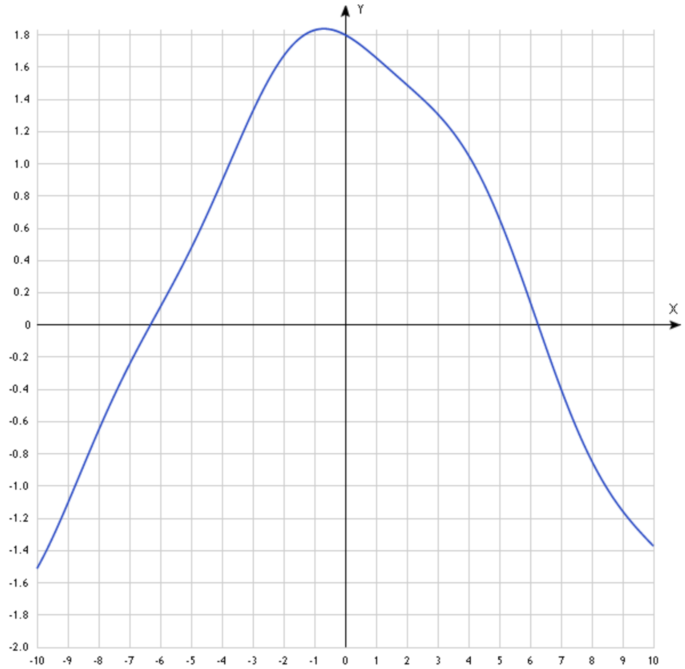
Графік функції:



Варіант №15

Функція: $f(x) = a\cos(0{,}25x) + b\sin(1{,}02x)$

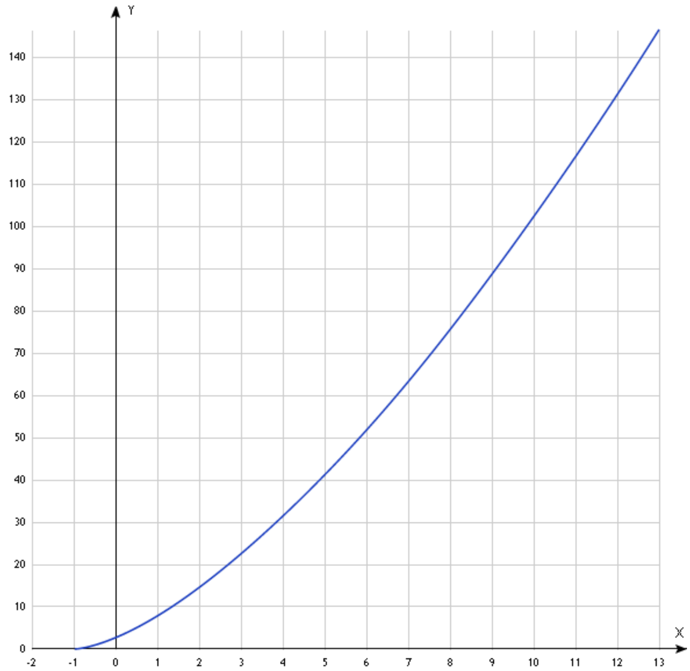
Графік функції:



Варіант №16

Функція: $f(x) = a\sin(x-2) + b\sqrt{(x+1)^3}$

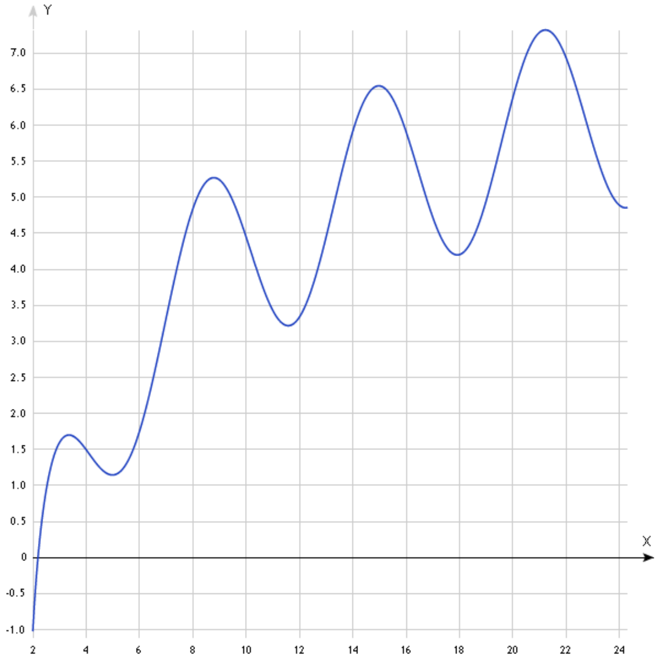
Графік функції:



Варіант №17

Функція: $f(x) = a\ln(x-1{,}39)^2 + b\cos(x-2)$

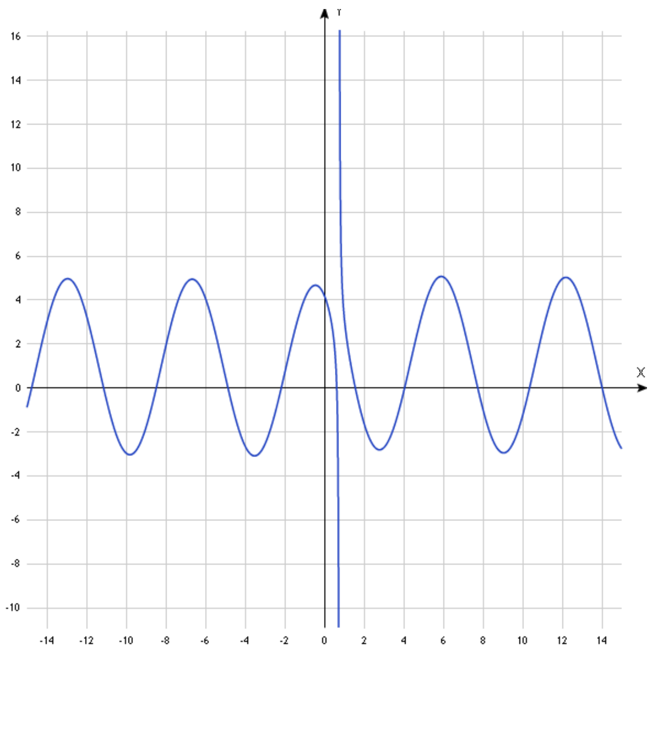
Графік функції:



Варіант №18

Функція: $f(x) = \dfrac{x-a}{x-0{,}75} + b\cos(x+0.38)$

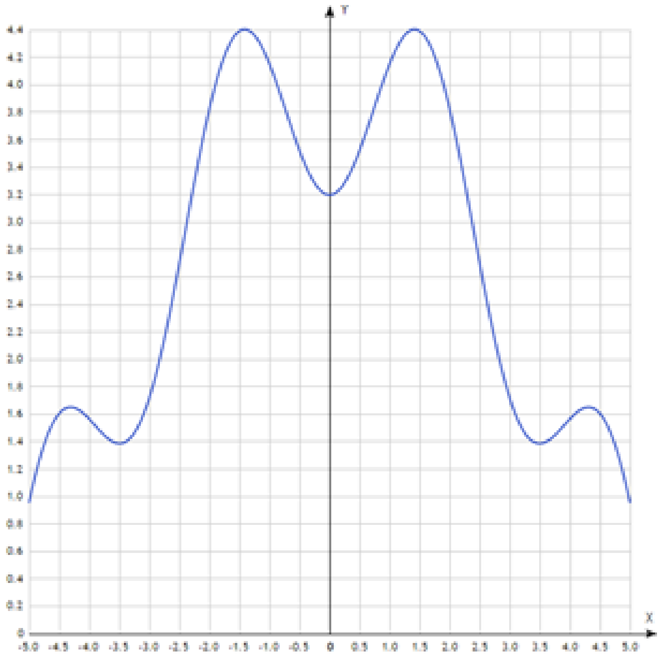
Графік функції:



Варіант №19

Функція: $f(x) = a\cos(0{,}3x) + b\cos(2x)$

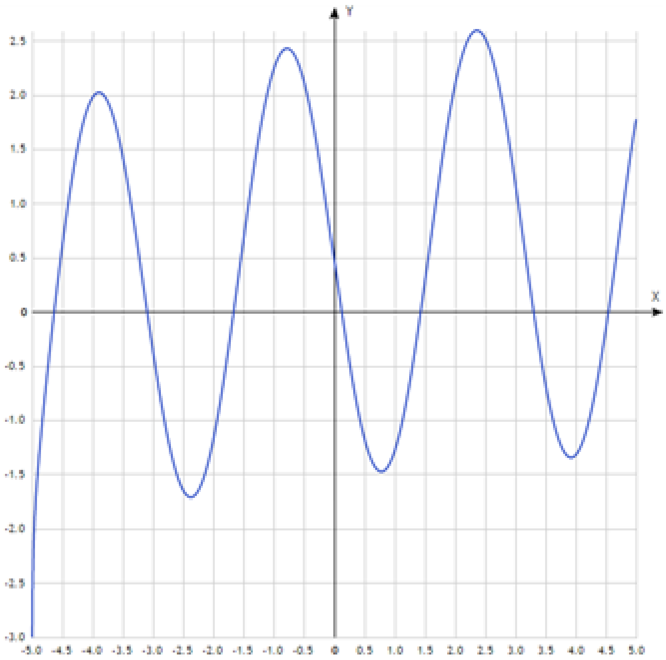
Графік функції:



Варіант №20

Функція: $f(x) = a\ln(x+5) + b\sin(2x)$

Графік функції:



СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1 Alefeld G., Herzberger Y. Introduction to interval calculations: Trans. - M.: Mir, 1987. - 360p.

2 Bobalo Yu. Estimation of functional usability of radio electronic circuits by applying method of confidence ellipsoids /Yu. Bobalo, P. Stakhiv, S. Krepych // Computational Problems of Electrical Engineering: Lviv Polytechnic National University. –2012. –Vol. 2. – P.1-7.

3 Bobalo Yu. Evaluation of functional device suitability, with considering of random technological deviations of the parameters from the nominal and process of component aging / Yu. Bobalo, P. Stakhiv, S. Krepych, M. Dyvak// Przegld Elektrotechniczny: Warszawa, Poland. – 2014. – Nr4. – P.224-228.

4 Hansen E. Optimization using interval analysis / E. Hansen, G. Walster. – New York: “Marcel Dekker, Inc.”, 2004. – 515 с.

5 Krepych S. Analysis of the tolerance area parameters REC based on technological area scattering /S. Krepych, P. Stakhiv, I. Spivak// 12-th 12-th International Conference “The Experience Of Designing And Application Of CAD Systems in Microelectronics” Polyana Svalyava (Zakarpattya) UKRAINE, 2013. – P.179-180.

6 Krepych S. Comparative analysis of the Monte-Carlo method and the confidence ellipsoids for solving task of REC reliability evaluation / S. Krepych, M. Dyvak, P. Stakhiv // IV International Conference on Inductive Modelling, ICIM’2013, UKRAINE, 2013. – P.167-171.

7 Krepych S. The task of synthesis of analog filter with the specified admissible values of the output characteristics and computing complexity of the methods of theis solution / S. Krepych, M. Dyvak, P. Stakhiv, R. Shevchuk //13-th International Conference “The Experience Of Designing And Application Of CAD Systems in Microelectronics” Polyana Svalyava (Zakarpattya) UKRAINE, 2015. – P.119-121.

8 Spence R. Tolerance Design of Electronic Circuits /R.Spence, R.S.

Soin.Addison// Wesley Publ.Co., –1988.

9 Stakhiv P. Evaluation of functional suitability of the filter by the method of confidence ellipsoids / P. Stakhiv, M. Dyvak, S. Krepych // 12-th Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunication, And Computer Science Lviv-Slavske, UKRAINE, –2014. – P. 395-397.

10 Алексеева Е.В. Численные методы оптимизации / Е.В.Алексеева, О.А.Кутненко, А.В.Плясунов // Учебное пособие, Новосибирск, 2008. – 126с.

11 Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс /Б.Банди// Пер.с.анг. Москва: Радио и связь, – 1988. – 128с.

12 Бобало Ю.Я. Математичні моделі та методи аналізу електронних кіл: навч.посібник / Ю.Я.Бобало, Р.І.Желяк, М.Д.Кіселичник, З.О.Колодій, Б.А.Мандзій, В.М.Якубенко; за ред.д-ра техн.наук, проф. Ю.Я.Бобала та д-ра техн. наук, проф.Б.А.Мандзія// Львів: Видавництво Львівської політехніки, – 2013. – 320с.

13 Бочков А.Ф. Интервальный анализ как альтернатива регрессионному анализу /А.Ф. Бочков, А.П. Вощинин, Г.Р. Сотиров// Заводская лаборатория. – 1990. – №7. – С. 76 – 81.

14 Влах И. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем /И.Влах, К.Сингхал// М.: Радио и связь, – 1988. – 560с.

15 Волосов В. В. Об одном способе построения эллипсоидальных оценок в задачах нестохастической фильтрации и идентификации параметров управляемых систем /В.В.Волосов// Автоматика. – 1991. – № 3. – С. 24–32.

16 Волосов В. В. Робастные алгоритмы эллипсоидального оценивания состояния многомерных нестационарных непрерывных динамических систем /В.В.Волосов// Проблемы управления и информатики. – 1999. – № 1. – С. 38–53.

17 Волосов В.В. К построению параметрических семейств эллипсоидальных оценок и их оптимизации в задачах нестохастической идентификации параметров и состояния многомерных дискретных объектов управления

/В.В.Волосов// Проблемы управления и информатики. – 1996. – №4. – С. 37–54.

18 Вощинин А. П. Интервальный анализ: развитие и перспективы /А.П. Вощинин // Заводская лаборатория. – 2002. – №1. – С. 118-126.

19 Дивак М.П. Активна ідентифікація параметрів інтервальних моделей методом локалізації з виділенням насиченого блоку експерименту./ М.П. Дивак, В.І. Манжула // Вісник НУ "Львівська політехніка". Радіоелектроніка та телекомунікації. - 2002.- № 440. - С. 241 -246.

20 Дивак М.П. Вирішення задач синтезу допусків на параметри РЕК методом допускового еліпсоїдного оцінювання з використанням паралельних обчислень. /М.П.Дивак, С.Я.Максимова// Сучасні комп'ютерні інформаційні технології: Матеріали Всеукраїнської школи-семінару молодих вчених і студентів ACIT'2011. – Тернопіль: Економічна думка, – 2011. – С.97-101.

21 Дивак М.П. Еліпсоїдне оцінювання допусків параметрів радіоелектронних кіл/ Дивак М.П., Козак О.Л.// Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2009. – Том 11, №1. – С.93-104.

22 Дивак М.П. Задачі математичного моделювання статичних систем з інтервальними даними /М.П. Дивак// Тернопіль: Економічна думка, – 2011.– 216 с.

23 Дивак М.П. Метод допускового оцінювання параметрів інтервальних моделей статистичних систем / М.П. Дивак, О.Л. Козак.// Відбір та обробка інформації – 2007 – Вип. 26(102) – С18-26

24 Дивак М.П. Організація допусків на параметри радіоелектронних кіл на основі допускового еліпсоїдного оцінювання /М.П.Дивак, І.Я. Співак, Р.П.Шевчук, С.Я.Максимова// Проблемно-наукова міжгалузева конференція «Інформаційні проблеми комп'ютерних систем, юриспруденції, енергетики, економіки, моделювання та управління» (ПНМК-2011), м.Бучач-Яремча, –2011р. – С.344-349.

25 Дивак М.П. Особливості побудови інтервальної системи алгебричних

рівнянь та методу її розв’язку в задачах ідентифікації лінійного інтервального різницевого оператора /М.П. Дивак, Т.М. Дивак// Індуктивне моделювання складних систем. Збірник наукових праць / відпов. редактор В.С.Степашко – Київ: МННЦ ІТС,– 2009. - Вип.1. – С.35-43.

26 Дивак М.П. Оцінювання допусків параметрів статичних систем еліпсоїдними множинами на основі аналізу інтервальних даних/ Дивак М.П., Козак О.Л.// Екон.-мат. Моделювання соц.-екон. Систем. – 2008. – Вип.№13. – С.67-78.

27 Дивак М.П., Козак О.Л. Особливості програмної реалізації допускового оцінювання множини параметрів інтервальних моделей із виділенням насиченого блоку ІСЛАР. // Вісн. Хмельницького національного університету.- 2007.- Т.1. - №.3 . С.140-146

28 Ержан А.А. Исследование переходных процессов в электронных цепях методами математического моделирования /А.А.Ержан// Труды III-ей Международной научно-практической конференции «ИКТ:Образование, наука, инновации». – Алматы, – 2013. – С.417-421.

29 Захаров А.В. Синтез систем управления при интервальной неопределённости параметров их математических моделей /А.В.Захаров, Ю.И.Шокин// Докл.АН СССР. – 1988. – Т. 299 – №2. – С. 292-295.

30 Козак О.Л. Застосування методів допускового еліпсоїдного оцінювання параметрів інтервальних моделей для задачі візуалізації гортанних нервів /О.Л. Козак, М.П. Дивак, А.В. Пукас// Вісник НУ «Львівська політехніка». Радіоелектроніка та телекомунікації. – 2010. – №680. – С.196-206.

31 Колонтаевский Ю.Ф. Радиоэлектроника: Учебное пособие для СПТУ – Москва «Высшая школа», 1988г. – 304ст.

32 Крепич С.Я. Метод синтезу смугового фільтра для заданих обмежень на його модуль коефіцієнта передачі /С.Я.Крепич//Сучасні комп’ютерні інформаційні технології: Матеріали IV Всеукраїнської школи-семінару молодих вчених і студентів ACIT’2014. – Тернопіль: Економічна думка, –

2014. – С.26-29.

33 Крепич С.Я. Оцінювання часової складності застосування методу Монте-Карло та інтервального аналізу даних для встановлення функціональної придатності РЕК /С.Я.Крепич, І.Я.Співак// Сучасні комп’ютерні інформаційні технології: Матеріали ІІІ Всеукраїнської школи-семінару молодих вчених і студентів ACIT’2013. – Тернопіль: Економічна думка, – 2013. – С.36-37.

34 Крепич С.Я. Порівняльний аналіз методу Монте-Карло та методу довірчих еліпсоїдів при оцінюванні функціональної придатності РЕК /С.Я.Крепич, М.П.Дивак// Індуктивне моделювання складних систем: Київ. –2013.–Випуск 5. –С.201-212.

35 Крепич С.Я. Порівняльний аналіз часової складності процедур випадкового пошуку в задачі синтезу при заданих допустимих значеннях вихідних характеристик та допусків на параметри його елементів /С.Я.Крепич// Вісник ТНТУ: Науковий журнал, Тернопіль. – 2015.– №1(77). –С.204-219.

36 Ларман К. Примененеие UML 2.0 и шаблонов проектирования /Крэг Ларман// М.: Вильямс, – 2009. – С.736

37 Лычак М.М. Множественная модель неопределенного процеса и ее использование для обработки результатов измерений/ Лычак М.М.// Проблемы управления и информатики. – 1996. - №1 – 2. С.184-192.

38 Попов В.П. Основы теории цепей: Учебник для вузов спец. «Радиотехника» /В.П.Попов// М.: Высш.школа, –1985. – 496с.

39 Співак І.Я. Інтервальні обчислення / Опорний конспект лекцій. – Тернопіль, 2014. – 88 с.

40 Стахів П.Г. Синтез радіо-електронних кіл при заданих обмеженнях на вихідні характеристики та за умов заданих допусків на параметри елементів / П.Г.Стахів, С.Я.Крепич, М.П.Дивак// Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах: Хмельницьк. – 2014. – Вип.3(48).–С.39-48.

41 Теория систем и системный анализ [Електронний ресурс]. – Режим доступу URL: http://victor-safronov.ru/systems-analysis

42 Тупик В.А. Технология и организация производства радиоэлекронной аппаратуры. – СПб: Издательство: СПбГЭТУ «ЛЭТИ» - 2005.

43 Черноусько Ф. Л. Оптимальные гарантированные оценки неопределенностей с помощью эллипсоидов /Ф.Л. Черноусько// Изв. АН СССР. Техн. киберн. – 1980. –197 №3. – С. 3–11.

44 Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов /Ф. Л. Черноусько// М. : Наука,–1988. – 320 с.

45 Чернышов В.Н. Теория систем и системный анализ: учебн.пособие /В.Н.Чернышов, А.В.Чернышов// Изд-во Тамб.гос.техн.ун-та, – Тамбов. – 2008. – 96с.

46 Чипига А.Ф. Анализ методов случайного поиска глобальних экстремумов многомерных функций / А.Ф.Чипига, Д.А.Колков//Фундаментальные исследования. – 2006. – №2.

47 Шарый С. П. Внешнее оценивание обобщенных множеств решений интервальных линейных систем /С.П.Шарый// Вычислительные Технологии. – 1999. – Т. 4,№4. – С. 82–110.

48 Шарый С. П. Интервальные алгебраические задачи и их численное решение : Дис. доктора физ. –математ. наук /С. П. Шарый// Новосибирск :Ин–т вычисл. Технологий СО РАН,– 2000. – 322 с.

49 Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ / С.П.Шарый // Новосибирск, Институт вычислительных технологий СО РАН, – 2009. – 569 с.