UDC 517.919

Periodic solutions of linear systems with asymmetric variable rank matrix in the derivatives

Valerii Yeromenko, Andrii Aliluiko

Ternopil National Economic University, Ternopil, Ukraine

Summary. *The effective sufficient conditions for a positive definite symmetrization of a differential operator based on a system of two linear firstorder ordinary differential equations with an asymmetric variable rank matrix in the derivatives were established. According to these conditions, the existence of a periodic solution for arbitrary periodic inhomogeneity and the Galerkin iterative method of its approximate construction was confirmed. The approach for the researching of n numbers of the equations where $n > 2$ was described.*

Keywords*: degenerate systems of linear differential equations, periodic solutions.*

Received

Постановка проблеми. В різних галузях сучасної науки і техніки зустрічаються процеси, які моделюються лінійними системами звичайних диференціальних рівнянь з вироджуваною матрицею при похідних. Такі системи виникають в теорії автоматичного регулювання, математичній економіці, кінетиці, теорії нелінійних коливань, теорії гіроскопічних систем тощо. Задача про періодичні або квазіперіодичні розв'язки таких систем недостатньо вивчена.

Аналіз відомих результатів досліджень. Системи рівнянь виду

$$A(t)x^{(1)} + B(t)x = f(t), \tag{1}$$

де $x \in R^n$, $x^{(1)} = dx/dt$, A та B – квадратні матриці,

$$rangA(t) \equiv const < n \quad \forall t \in [0,T], \tag{2}$$

найбільш повно досліджені в [1]. Задача про періодичні розв'язки вивчена в [2] для додатно визначених симетричних систем диференціальних рівнянь, для яких умова (2) може не виконуватися. Результати досліджень умов існування квазіперіодичних розв'язків системи для довільного вектора неоднорідності наведено в [3] у припущенні, що $rangA(t) \le 1$. В [4] отримано достатні умови існування інваріантних многовидів у лінійних системах з виродженою матрицею при похідних для випадків, коли ця матриця є діагональною або має ранг, що не перевищує 1. В роботах [5] та [6] досліджувалися лінійні системи, в яких ранг матриці при похідних змінюється від $n-1$ до n. Наскільки нам відомо система (1) навіть для $n = 2$ повністю не досліджена у випадку $rangA(t) \in [0;2]$.

Мета роботи. Для системи виду (1) з періодичними коефіцієнтами, де $x \in R^2$, $A(t)$ – несиметрична матриця, $rangA(t) \in [0;2]$, дослідити ефективні достатні умови існування єдиного періодичного розв'язку для довільної періодичної неоднорідності, а також вказати підхід до вивчення випадку $n > 2$ рівнянь.

Постановка задачі. Розглянемо систему двох рівнянь

$$\alpha(t)A_1(t)x^{(1)} + B(t)x = f(t), \tag{3}$$

де $x \in R^2$, $\alpha(t)$ – скалярна функція, яка може набирати нульові значення, $A_1^*(t) \ne A_1(t)$, $rang\ A_1(t) \in [1;2]$, α, A_1, B, $f \in C^r(T_1)$, зірочка означає операцію транспонування матриці, $C^r(T_1)$ – простір векторних або матричних функцій, що набувають дійсних значень, періодичних з періодом 2π і таких, що мають неперервні похідні до порядку r включно. Вивчається задача про існування єдиного періодичного розвозку для довільної неоднорідності $f(t)$.

Необхідною умовою існування такого розв'язку є невиродженість матриці $B(t)$ [4]. Запишемо систему (3) в такому вигляді

$$\alpha(t)a(t)x^{(1)} + x = g(t), \tag{4}$$

де

$$a = B^{-1}A_1, \; g = B^{-1}f \,. \tag{5}$$

Ідея дослідження системи (4) полягає в побудові так званого лівого симетризатора [7] $V(t) = \{v_{ij}\}_{i,j=1,2} \in C^r(T_1)$ матриці $B^{-1}A_1$ такого, що для всіх $t \in T_1$

$$\det V(t) \neq 0, \quad \left(V(t)B^{-1}(t)A_1(t)\right)^* = V(t)B^{-1}(t)A_1(t)\,. \tag{6}$$

Тоді у випадку додатної визначеності матриці $V(t)$ система, рівносильна системі (4), стає додатно визначеною симетричною системою.

Елементи матриці $V(t)$ згідно з другою рівністю (6) повинні задовольняти співвідношення

$$\left\langle (a_{12}, a_{22}, -a_{11}, -a_{21}), v \right\rangle = 0 \quad \forall t \in T_1, \tag{7}$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярний добуток, $B^{-1}A_1 = \{a_{ij}\}$,

$$v = (v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22}), \tag{8}$$

при цьому

$$\beta = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}^2 > 0 \;\; \forall t \in T_1, \tag{9}$$

оскільки $rang B^{-1}A_1 \geq 1$. Загальний розв'язок рівняння (7) має такий вид [7]:

$$v(t) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(t) v_i(t), \tag{10}$$

де

$$v_1 = (a_{21}, a_{11}, a_{22}, a_{12}), \quad v_2 = (a_{22}, -a_{12}, -a_{21}, -a_{11}),\; v_3 = (-a_{11}, a_{21}, -a_{12}, a_{22}), \tag{11}$$

$\lambda_i(t)$, $i = \overline{1,3}$, – довільні дійсні скалярні функції, які підлягають визначенню.

Враховуючи співвідношення (8), (10) і (11), одержуємо

$$V(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} - \lambda_3 a_{11} & \lambda_1 a_{11} - \lambda_2 a_{12} + \lambda_3 a_{21} \\ \lambda_1 a_{22} - \lambda_2 a_{21} - \lambda_3 a_{12} & \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{11} + \lambda_3 a_{22} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Виберемо значення функцій $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1,3}$, таким чином, щоб $V(t) \in C^r(T_1)$ і

$$\min_{\|\xi\|=1} \langle V(t)\xi, \xi \rangle = 1 \quad \forall t \in T_1. \tag{13}$$

Для цього розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} v_{12} + v_{21} = 0, \\ v_{11} = 1, \\ v_{22} = 1, \end{cases}$$

тобто

$$C \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

де

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}+a_{22} & -(a_{21}+a_{12}) & a_{21}-a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & -a_{11} \\ a_{12} & a_{11} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

З'ясуємо умови сумісності системи (14), врахувавши, що

$$\det C=(a_{11}+a_{22})\beta, \qquad (15)$$

де β визначене (9).

Якщо

$$tr\left(B^{-1}A_1\right)=a_{11}+a_{22}\neq 0 \quad \forall t\in T_1, \qquad (16)$$

тоді згідно з (15) і (9) матриця C є невиродженою і система рівнянь (14) має єдиний розв'язок

$$\lambda_1=2(a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22})(\det C)^{-1},\ \lambda_2=[(a_{11}+a_{22})^2+(a_{12}-a_{21})^2](\det C)^{-1},$$

$$\lambda_3=(-a_{11}^2-a_{12}^2+a_{21}^2+a_{22}^2)(\det C)^{-1},$$

на підставі якого з (12) отримаємо шукану матрицю

$$V(t)=\begin{pmatrix} 1 & (a_{21}-a_{12})(a_{11}+a_{22})^{-1} \\ (a_{12}-a_{21})(a_{11}+a_{22})^{-1} & 1 \end{pmatrix}. \qquad (17)$$

Нехай умова (16) не виконується в ізольованих точках і t_0 – одна з них. Тоді

$$a_{11}(t_0)+a_{22}(t_0)=0, \qquad (18)$$

$$C(t_0)=\begin{pmatrix} 0 & -a_{12}-a_{21} & -a_{12}+a_{21} \\ a_{21} & -a_{11} & -a_{11} \\ a_{12} & a_{11} & -a_{11} \end{pmatrix},$$

$rang C(t_0)=2$, оскільки сума квадратів всіх мінорів другого порядку матриці $C(t_0)$ дорівнює $2(a_{11}^2+a_{12}^2+a_{21}^2)(2a_{11}^2+a_{12}^2+a_{21}^2)$, тобто відмінна від нуля згідно з (9) і припущенням (18).

Рівняння $C^*(t_0)z=0$ має розв'язок

$$z(t_0)=\left(a_{11}(t_0),-a_{12}(t_0),a_{21}(t_0)\right)^*,\ \|z(t_0)\|\neq 0.$$

Тоді для сумісності системи (14) необхідно і достатньо, щоб

$$\left\langle\left((a_{11}(t_0),-a_{12}(t_0),a_{21}(t_0)\right),(0,1,1)\right\rangle=0,$$

тобто

$$a_{12}(t_0)-a_{21}(t_0)=0. \qquad (19)$$

Припустимо, що

$$\frac{a_{12}(t)-a_{21}(t)}{a_{11}(t)+a_{22}(t)}=d(t)\in C^r(T_1). \qquad (20)$$

Матриця $\tilde{C}$, приєднана до матриці C, має такий вид

$$\tilde{C}=\begin{pmatrix} a_{11}^2+a_{22}^2 & -2a_{11}a_{12} & 2a_{11}a_{21} \\ a_{11}(a_{21}-a_{12}) & -a_{12}(a_{21}-a_{12}) & a_{21}(a_{21}-a_{12}) \\ a_{11}(a_{12}+a_{21}) & -a_{12}(a_{12}+a_{21}) & a_{21}(a_{12}+a_{21}) \end{pmatrix},$$

а тому з урахуванням (15) і (20)

$$\tilde{C}C=(a_{11}+a_{22})\beta I_3,$$

$$
\tilde{C}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22})\\(a_{11}+a_{22})^2+(a_{12}-a_{21})^2\\a_{22}^2-a_{11}^2+a_{21}^2-a_{12}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(a_{12}-a_{11}d)\\a_{11}+a_{22}+(a_{12}-a_{21})d\\a_{22}-a_{11}-(a_{12}+a_{21})d\end{pmatrix}(a_{11}+a_{22}),
$$

де I_3 – одинична матриця третього порядку.

Тобто розв'язок системи (14) в цьому випадку має такий вид

$$
\lambda_1=2(a_{12}-a_{11}d)\beta^{-1},\ \lambda_2=[a_{11}+a_{22}+(a_{12}-a_{21})d]\beta^{-1},\ \lambda_3=[a_{22}-a_{11}-(a_{12}+a_{21})d]\beta^{-1},
$$

де $d(t)$ визначається (20). Підставивши отримані дані в (12), отримаємо шукану матрицю

$$
V(t)=\begin{pmatrix}1 & -d(t)\\ d(t) & 1\end{pmatrix}, \tag{21}
$$

яка з урахуванням (20) співпадає з (17). При цьому враховано, що згідно із співвідношеннями (7)-(12) матриця $V(t)$ визначається з точністю до скалярного множника, відмінного від нуля.

Якщо ж $tr[B^{-1}(t)A_1(t)]\equiv 0 \quad \forall t\in T_1$ та існує хоча б одна точка t, в якій $a_{12}(t)\neq a_{21}(t)$, тоді система (14) є несумісною, тобто неможливо здійснити додатно визначену симетризацію системи (4).

У підсумку отримаємо наступне твердження.

Лема. Нехай стосовно системи двох рівнянь (3) виконуються такі умови:

1) α, A_1, B, $f\in C^r(T_1)$, $rangA_1\geq 1$, $\det B(t)\neq 0 \ \ \forall t\in T_1$;

2) $(a_{12}-a_{21})(a_{11}+a_{22})^{-1}\in C^r(T_1)$, де $B^{-1}A_1=\{a_{ij}\}$.

Тоді система (3) рівносильна системі

$$
Lx\equiv\alpha(t)V(t)B^{-1}(t)A_1(t)x^{(1)}+V(t)x=V(t)B^{-1}(t)f(t), \tag{22}
$$

де для всіх $t\in T_1$

$$
(VB^{-1}A_1)^*\equiv VB^{-1}A_1,\ \min_{\|\xi\|=1}\langle V(t)\xi,\xi\rangle=1, \tag{23}
$$

матриця $V(t)\in C^r(T_1)$ визначається (17).

Згідно з (23) система рівнянь (22) є додатно визначеною симетричною системою. Якщо $|\alpha(t)|$ достатньо мале, тоді для кожного цілого $s=0,1,\ldots,r$ і $t\in T_1$ виконується нерівність

$$
\min_{\|\xi\|=1}\left\langle\left[1+\left(s-\frac{1}{2}\right)\left(\alpha VB^{-1}A_1\right)^{(1)}\right]\xi,\xi\right\rangle\geq\gamma,\ \gamma=const>0, \tag{24}
$$

яка гарантує [8] виконання апріорних оцінок для оператора L, а також існування єдиного розв'язку $x_0(t)\in C^k(T_1)$, $k\geq 1$, системи (22) (а отже, і системи (3)) для довільної неоднорідності, якщо $r\geq k+1$.

Сформулюємо основне твердження.

Теорема. Нехай відносно системи рівнянь (3) виконуються умови леми, де $r\geq k+1$, $k\geq 1$, а також нерівність (24), де $s=\overline{0,r}$.

Тоді система (3) має для будь-якої неоднорідності $f(t)$ єдиний розв'язок $x_0(t)\in C^k(T_1)$.

Зауваження. У роботі [7] показано, що при побудові наближень до $x_0(t)$, а також доведенні їх збіжності, згідно з ітераційним методом Гальоркіна [8] можна використати безпосередньо систему (3), а не систему (22).

Як приклад розглянемо систему виду (3):

$$p\sin t\begin{pmatrix} 2\cos^2 t & \sin t \\ \sin t & 2\cos 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_2(t) \\ f_1(t) \end{pmatrix}, \qquad (25)$$

де p – додатний параметр, f_1, $f_2 \in C^r(T_1)$, $r \geq 2$.

Визначимо з умов теореми таке значення параметра, щоб система (25) мала для будь-якого вектора неоднорідності гладкий періодичний розв’язок.

Відмітимо, що неконструктивність результатів роботи [7] створює труднощі на шляху додатно визначеної симетризації даної системи.

Система (25) рівносильна системі

$$p\sin t\begin{pmatrix} \sin t & 2\cos 2t \\ 2\cos^2 t & \sin t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_2(t) \\ f_1(t) \end{pmatrix},$$

для якої $(a_{12}-a_{21})(a_{11}+a_{22})^{-1}=-\sin t$ і згідно з (17)

$$V(t)=\begin{pmatrix} 1 & \sin t \\ -\sin t & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\alpha VB^{-1}A_1 = p\sin t\begin{pmatrix} (1+2\cos^2 t)\sin t & 2\cos 2t+\sin^2 t \\ 2\cos 2t+\sin^2 t & (1-2\cos 2t)\sin t \end{pmatrix},$$

$$\left(\alpha VB^{-1}A_1\right)^{(1)} = p\begin{pmatrix} (1+2\cos 2t)\sin 2t & \left(2\cos 2t-5\sin^2 t\right)\cos t \\ \left(2\cos 2t-5\sin^2 t\right)\cos t & (1+4\sin^2 t-2\cos 2t)\sin 2t \end{pmatrix},$$

власні числа матриці $\left(\alpha VB^{-1}A_1\right)^{(1)}$

$$\lambda_{\max}^{(t)} = p\left\{(1+2\sin^2 t)\sin 2t+\left[4(\cos 2t-\sin^2 t)^2\sin^2 2t+(2\cos 2t-5\sin^2 t)^2\cos^2 t\right]^{1/2}\right\},$$

$$\lambda_{\min}^{(t)} = p\left\{(1+2\sin^2 t)\sin 2t-\left[4(\cos 2t-\sin^2 t)^2\sin^2 2t+(2\cos 2t-5\sin^2 t)^2\cos^2 t\right]^{1/2}\right\}$$

з допомогою системи Matlab оцінюються нерівностями

$$\max_{t\in T_1}\lambda_{\max}(t)\leq 5{,}39\,p,\ \min_{t\in T_1}\lambda_{\min}(t)\geq -5{,}39\,p.$$

Нерівності (24) виконуються, якщо параметр p задовольняє нерівність

$$p\leq(1-\gamma)\min\left\{\frac{2}{5{,}39};\frac{1}{5{,}39s}\right\},$$

де $s=\overline{1,r}$, γ – як завгодно мале додатне число.

Висновки. 1) Істотною умовою при реалізації викладеного в роботі методу дослідження системи (3) є включення (20), тобто належність простору $C^r(T_1)$ розв’язку алгебраїчного рівняння

$$(a_{11}+a_{22})z=a_{12}-a_{21},$$

де a_{ij} – елементи $B^{-1}A_1$. Якщо ж ця умова не виконується, тоді необхідно здійснювати додаткові дослідження, починаючи з найпростішого випадку системи виду (3):

$$\alpha(t)\begin{pmatrix} 0 & a_1(t) \\ a_2(t) & 0 \end{pmatrix}x^{(1)}+x=f(t),$$

де $a_1(t)\neq a_2(t)$, $\alpha(t)$ та $a_1(t)a_2(t)$ можуть набирати нульові значення, $a_1^2+a_2^2>0$ $\forall t\in T_1$.

2) На шляху узагальнення отриманих результатів для випадку трьох рівнянь системи (3) зазначимо, що матрицю $V(t)$ слід шукати у такому вигляді

$$V = \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ -v_1 & 1 & v_3 \\ -v_2 & -v_3 & 1 \end{pmatrix},$$

де невідомі v_1, v_2, v_3 знаходяться як гладкі періодичні розв'язки неоднорідної системи трьох лінійних алгебраїчних рівнянь, породженої матричним рівнянням $\left(VB^{-1}A_1\right)^* = VB^{-1}A_1$. В загальному випадку потрібно досліджувати систему $\frac{n(n-1)}{2}$ рівнянь.

3) Отримані в даній роботі результати можуть бути використані при вивченні задачі про існування періодичних розв'язків системи

$$A(t)x'' + B(t)x' + C(t)x = f(t).$$

В [9] покладалося, що $A(t)$ – симетрична, а $B(t)$ – додатно або від'ємно визначена матриця.

References

1. Samoilenko A.M., Shkil M.I., Yakovets V.P. Liniini systemy dyferentsialnykh rivnian z vyrodzhenniamy, Kyiv, Vyshcha shkola, 2000, 294 pp. [in Ukrainian].
2. Mozer Yu. Bystrosxodyashhijsya metod iteracij i nelinejnye uravneniya, Uspexi mat. Nauk, Vol. 23, No. 4, 1968, pp. 179 – 238. [in Russian].
3. Kulik V.L., Eremenko V.A. Quasiperiodic solutions of a linear system of differential equations with a singular matrix in the derivatives, Ukr. Mat. Zh., Vol. 32, No. 6, 1980, pp. 502-508.
4. Simokon' V. Kh., Trokhimchuk E. P. On regularity of linear systems with a degenerate matrix by the derivative, Ukr. Mat. Zh. Vol. 45, No. 3, 1993, pp. 299-308.
5. Yeromenko V.O. Periodychni rozviazky funktsionalno-synhuliarno zburenykh liniinykh zvychainykh dyferentsialnykh rivnian vyshchykh poriadkiv, Matematychne ta kompiuterne modeliuvannia. Seriia: fizyko-matematychni nauky : Zb. nauk. prats. – Kamianets-Podilskyi : Kamianets-Podilskyi natsionalnyi universytet im. I. Ohiienka, Vol. 6, 2012, pp. 97-113. [in Ukrainian].
6. Yeromenko V.O., Aliluiko A.M. Kvaziperiodychni rozviazky funktsionalno-synhuliarno zburenykh liniinykh zvychainykh dyferentsialnykh rivnian vyshchykh poriadkiv, Neliniini kolyvannia, Vol. 21, No. 4, 2018, pp. 457-469. [in Ukrainian].
7. Eremenko V.A. Periodic solutions of systems of two linear first-order ordinary differential equations with degenerate asymmetric matrix with derivatives, Ukr. Mat. Zh.,Vol. 50, No. 3, 1998. pp. 400-407.
8. Samojlenko A.M. E'lementy matematicheskoj teorii mnogochastotnyx kolebanij. Invariantnye tory, Moscva, Nauka, 1987, 304 pp. [in Russian].
9. Er'omenko V.O., Aliluiko A.M. Periodic solutions of linear degenerate systems of ordinary differential equations of the second order, Nonlinear Oscill., Vol. 13, No. 3, 2011, pp. 361–371.

Список використаної літератури:

1. Самойленко, А.М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями [Текст] / А.М. Самойленко, М.І. Шкіль, В.П. Яковець. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.
2. Мозер, Ю. Быстросходящийся метод итераций и нелинейные уравнения [Текст] / Ю. Мозер // Успехи мат. наук. – 1968. – № 4 (23). – С. 179 – 238.
3. Kulik, V.L. Quasiperiodic solutions of a linear system of differential equations with a singular matrix in the derivatives / V.L. Kulik, V.A. Eremenko // Ukr. Mat. Zh. – 1980. – № 6 (32). – P. 502-508.
4. Simokon', V. Kh. On regularity of linear systems with a degenerate matrix by the derivative / V. Kh. Simokon', E. P. Trokhimchuk // Ukr. Mat. Zh. – 1993. – № 2 (45). – P. 299-308.
5. Єрьоменко, В.О. Періодичні розв'язки функціонально-сингулярно збурених лінійних звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків [Текст] / В.О. Єрьоменко // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фізико-математичні науки : Зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет ім. І. Огієнка, 2012. – Вип. 6. С. 97-113.
6. Єрьоменко, В.О. Квазіперіодичні розв'язки функціонально-сингулярно збурених лінійних звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків [Текст] / В.О. Єрьоменко, А.М. Алілуйко // Нелінійні коливання. – 2018. – № 4 (21). – с. 457-469.
7. Eremenko, V.A. Periodic solutions of systems of two linear first-order ordinary differential equations with degenerate asymmetric matrix with derivatives [Текст] / V. A. Eremenko // Ukr. Mat. Zh. – 1998. – № 3 (50). – P. 400-407.

8. Самойленко, А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы [Текст] / А.М. Самойленко. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

9. Er'omenko, V.O. Periodic solutions of linear degenerate systems of ordinary differential equations of the second order / V.O. Er'omenko, A.M. Aliluiko // Nonlinear Oscill. – 2011. – № 3 (13). – P. 361–371.

УДК 517.919

Про періодичні розв'язки лінійних систем з несиметричною матрицею змінного рангу при похідних

Валерій Єрьоменко, Андрій Алілуйко

Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль, Україна

Резюме. *В різних галузях сучасної науки і техніки зустрічаються процеси, які моделюються лінійними системами звичайних диференціальних рівнянь з вироджуваною матрицею при похідних. Систематичне вивчення таких систем розпочалося порівняно недавно, з початку 70-х років минулого століття. На цей час найбільш розвинутою є теорія вироджених лінійних систем із сталими коефіцієнтами. Що ж стосується теорії вироджених систем із змінними коефіцієнтами, то її розвинуто в значно меншій мірі. Найбільш повно досліджено випадок сталого рангу матриці при похідних. Теорія існування періодичних та квазіперіодичних розв'язків для змінного рангу матриці при похідних далека від завершення і розроблена для додатно визначених симетричних систем, а також у випадках, коли цей ранг змінюється від 0 до 1 або від n – 1 до n.*

В даній роботі досліджені достатні умови існування єдиного періодичного розв'язку системи двох лінійних диференціальних рівнянь з матрицею при похідних, ранг якої змінюється від 0 до 2, для довільної періодичної неоднорідності. Встановлені достатні умови виконання апріорних оцінок для диференціального оператора, породженого вихідною системою, на підставі яких можна побудувати з допомогою ітераційного метода Гальоркіна наближення до шуканого періодичного розв'язку, а також їх збіжність. При цьому вимагається існування неперервних похідних другого порядку коефіцієнтів системи, що зумовлено методом, використаним для обґрунтування процесу Гальоркіна. Ця вимога є типовою для функціональних методів математичної фізики. Як приклад досліджено систему, яку не вдається вивчити розробленими раніше методами. Вказано підхід до узагальнення отриманих результатів для випадку систем більшого числа диференціальних рівнянь. На цьому шляху потрібно досліджувати існування гладких періодичних розв'язків систем алгебраїчних лінійних неоднорідних рівнянь. Отримані в роботі результати можуть бути використані при розв'язуванні задачі про існування періодичних розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь вищих порядків, в яких матриця при старшій похідній є несиметричною і виродженою.

Ключові слова: *вироджувані системи лінійних диференціальних рівнянь, періодичні розв'язки.*

Отримано