Збірник праць Інституту математики НАН України 2005, т. 2, № 1, 28–45

НАУКОВІ СТАТТІ

УДК 517.983.27

А.М. Алілуйко, О.Г. Мазко

Ін–т математики НАН України, Київ
E-mail: aliluyko@imath.kiev.ua, mazko@imath.kiev.ua

Інваріантні конуси та стійкість багатозв'язних систем *

Methods for stability analysis and state-feedback stabilization of the large-scale dynamic systems using concepts of invariant cones are developed. Requirements of an invariance of circular, ellipsoidal and other types of cones in phase spaces of differential and difference systems are studied. Algebraic stability and positivity conditions of the linear systems are stated in terms of the solutions of matrix inequalities.

Розробляється методика аналізу стійкості і стабілізації багатозв'язних динамічних систем із застосуванням теорії інваріантних конусів. Вивчаються умови інваріантності кругових, еліпсоїдальних та ін. типів конусів у фазовому просторі диференціальних і різницевих систем. Формулюються алгебраїчні умови стійкості та позитивності лінійних систем в термінах розв'язків матричних нерівностей.

0. Вступ. При моделюванні і вивченні складних технічних, економічних, біологічних та інших об'єктів використовуються багатозв'язні диференціальні або різницеві системи рівнянь великої розмірності, в яких враховується структура всіх підсистем і характер їх взаємодії. Такі системи виникають в задачах синтезу об'єктів різної природи, при вивченні динаміки неоднорідних фізичних об'єктів тощо.

Багатозв'язні диференціальні системи подаються у вигляді

$$\dot{X}_k = A_k(X_k, t) + B_k(Z, t), \quad k = 1, \ldots, n, \quad t \geq 0,$$

* Робота виконана при частковій підтримці НДР № 0105U001108 та ДФФД (НДР № 01.07/096)

де $Z = \operatorname{colon}\{X_1, \ldots, X_n\}$, $X_k \in R^{n_k}$ — вектор стану k-ї підсистеми. Оператори B_k описують вплив на k-ту підсистему всіх інших підсистем. Задачам аналізу стійкості і синтезу стабілізуючих регуляторів для багатозв'язних систем присвячена велика кількість робіт. При дослідженні умов стійкості таких систем застосовуються методи векторних і матричних функцій Ляпунова, в яких враховуються особливості всіх підсистем (див., наприклад, [1, 2, 3]).

В даній роботі розвивається методика дослідження багатозв'язних динамічних систем, в якій використовується теорія конусів і операторів в напівупорядкованому просторі. Неоднорідність фазового простору, в якому функціонує керована система, породжує властивості позитивності або монотонності щодо деяких конусів. Для аналізу стійкості таких систем застосовуються спеціальні методи. Знаходяться умови інваріантності конусів типу кругового та їх узагальнень, що дозволяє, зокрема, розв'язати задачу позитивної стабілізації систем, тобто побудови керувань у вигляді зворотного зв'язку по виходу або динамічного компенсатора, які забезпечують одночасно властивості позитивності відносно заданого конуса і асимптотичної стійкості замкнутої системи. Умови інваріантності еліпсоїдальних конусів та експоненціальної стійкості лінійних систем формулюються у вигляді матричних нерівностей.

Задача позитивної стабілізації динамічних систем за допомогою лінійного зворотного зв'язку по стану у випадку конуса невід'ємних векторів вивчалася, наприклад, в [4, 5].

1. Означення і допоміжні факти. Інерцією симетричної матриці $S = S^T \in R^{n\times n}$ будемо називати трійку чисел

$$i(S) = \{i_+(S), i_-(S), i_0(S)\}, \quad i_+(S) + i_-(S) + i_0(S) = n,$$

де $i_+(S)$, $i_-(S)$ і $i_0(S)$ — відповідно кількість додатних, від'ємних і нульових власних значень S з урахуванням кратності.

Наведемо деякі означення і факти з теорії конусів і операторів в напівупорядкованому просторі. Опукла замкнута множина $\mathcal{K}$ дійсного нормованого простору $\mathcal{E}$ називається клином, якщо $\alpha\mathcal{K} + \beta\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ $\forall\alpha, \beta \geq 0$. Клин $\mathcal{K}$ з лезом $\mathcal{K} \cap -\mathcal{K} = \{0\}$ є конусом. Спряжений конус $\mathcal{K}^*$ складають лінійні функціонали $\varphi \in \mathcal{E}^*$, шо приймають невід'ємні значения на елементах $\mathcal{K}$, причому, $\mathcal{K} = \{X \in \mathcal{E} :\ \varphi(X) \geq 0, \forall\varphi \in \mathcal{K}^*\}$. Простір з конусом напівупорядкований: $X \leq Y \iff Y - X \in \mathcal{K}$. Конус $\mathcal{K}$ з непорожньою множиною внутрішніх точок $\mathcal{K}^0 = \{X : X > 0\}$

— тілесний. Конус $\mathcal{K}$ називається нормальним, якщо для $0 \le X \le Y$ виконується $\|X\| \le \nu\|Y\|$, де ν — універсальна константа. Найменше таке число ν є константою нормальності конуса. Конус $\mathcal{K}$ є нормальним лише тоді, коли

$$X, Y \in \mathcal{K},\ \|X\| = \|Y\| = 1 \implies \|X + Y\| \ge \delta > 0,$$

де δ — константа, що не залежить від X і Y. Критерієм нормальності конуса є також умова

$$U \le X \le V \implies \|X\| \le \nu_-\|U\| + \nu_+\|V\|,$$

де $\nu_\pm > 0$ — універсальні константи.

Якщо $\mathcal{E} = \mathcal{K} - \mathcal{K}$, то конус $\mathcal{K}$ є відтворюючим. Конус $\mathcal{K}$ є нормальним лише тоді, коли спряжений конус $\mathcal{K}^*$ — відтворюючий. Типовими прикладами нормальних відтворюючих конусів в скінченновимірних просторах є множина векторів з невід'ємними елементами і множина симетричних невід'ємно визначених матриць рівних розмірів.

Нехай в банаховому просторі $\mathcal{E}_1(\mathcal{E}_2)$ виділено конус $\mathcal{K}_1(\mathcal{K}_2)$. Оператор $M : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ називається монотонним, якщо із $X \ge Y$ випливає $MX \ge MY$. Монотонність лінійного оператора рівносильна його позитивності: $X \ge 0 \implies MX \ge 0$. Якщо $M\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{K}_2$, то оператор M — всюди позитивний. Лінійний оператор M називається позитивно оборотним, якщо $\mathcal{K}_2 \subset M\mathcal{K}_1$, тобто для будь-якого $Y \in \mathcal{K}_2$ рівняння $MX = Y$ має розв'язок $X \in \mathcal{K}_1$. Якщо $\mathcal{K}_2$ — нормальний відтворюючий конус і $M_1 \le M \le M_2$, тоді із позитивної оборотності операторів M_1 і M_2 випливає позитивна оборотність оператора M, причому, $M_2^{-1} \le M^{-1} \le M_1^{-1}$[6]. Критерієм позитивної оборотності класу операторів $M = L - P$, $P\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \subset L\mathcal{K}_1$, де $\mathcal{K}_2$ — нормальний відтворюючий конус, є нерівність $\rho(T) < 1$, де $\rho(T)$ — спектральний радіус пучка операторів $T(\lambda) = P - \lambda L$ [7]. У випадку тілесного конуса $\mathcal{K}_2$ ця нерівність еквівалентна умові $M\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2^0 \ne \varnothing$.

Нехай $X(t) = \Phi(t, t_0, X_0) \in \mathcal{E}$ — стан деякої динамічної системи, що описується неперервно-диференційовною функцією при $t \ge t_0 \ge 0$. Якщо задано оператор $\Omega(t, t_0) : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, що визначає перехід з початкового стану $X(t_0) = X_0$ в стан $X(t)$ при $t > t_0$, то $\Phi(t, t_0, X_0) = \Omega(t, t_0)X_0$. При цьому $\Omega(t_0, t_0) = E$ — тотожний оператор. Система має інваріантну множину $\mathcal{K}_t \subset \mathcal{E}$, якщо для будь-якого $t_0 \ge 0$ із $X_0 \in \mathcal{K}_0$ випливає $X(t) \in \mathcal{K}_t$ при $t \ge t_0$. Якщо $\mathcal{K}_t$ — конус, то ним породжені нерівності між елементами простору в кожний момент часу t позначимо символами типу $\overset{\mathcal{K}_t}{\le}$ або $\overset{\mathcal{K}_t}{\ge}$.

Визначимо властивості систем відносно змінного конуса [8]. Динамічна система, що має інваріантний конус $\mathcal{K}_t$, позитивна відносно даного конуса. Система називається монотонною відносно конуса $\mathcal{K}_t$, якщо для будь-якого $t_0 \geq 0$

$$X_{10} \overset{\mathcal{K}_0}{\leq} X_{20} \implies X_1(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} X_2(t), \quad t > t_0, \tag{1}$$

де $X_k(t) = \Phi(t, t_0, X_{k0})$, $k = 1, 2$. Класи позитивних і монотонних систем позначимо символами $\mathcal{M}_0$ і $\mathcal{M}$. Для класів систем, що мають властивість (1) при додаткових обмеженнях $X_{20} \in \mathcal{K}_0$, $X_{10} \in \mathcal{K}_0$, $X_{10} \in -\mathcal{K}_0$ і $X_{20} \in -\mathcal{K}_0$, використовуємо відповідні позначення $\mathcal{M}_1^+$, $\mathcal{M}_2^+$, $\mathcal{M}_1^-$ і $\mathcal{M}_2^-$. Система класу $\mathcal{M}_2^+$ ($\mathcal{M}_2^-$) монотонна в конусі $\mathcal{K}_t$ ($-\mathcal{K}_t$).

Нехай $X \equiv 0$ — ізольований стан рівноваги динамічної системи, тобто $\Phi(t, t_0, 0) \equiv 0$. Стан $X \equiv 0$ системи називаємо стійким в $\mathcal{K}_t$, якщо для довільних $\varepsilon > 0$ і $t_0 \geq 0$ можно вказати таке $\delta > 0$, що із $X_0 \in \mathcal{S}_\delta(t_0)$ випливає $X(t) \in \mathcal{S}_\varepsilon(t)$ при $t > t_0$, де $\mathcal{S}_\varepsilon(t) = \{X \in \mathcal{K}_t : \|X\| \leq \varepsilon\}$. Якщо при цьому для певного $\delta_0 > 0$ із $X_0 \in \mathcal{S}_{\delta_0}(t_0)$ випливає $\|X(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$, то стан $X \equiv 0$ системи асимптотично стійкий в $\mathcal{K}_t$. Якщо стан $X \equiv 0$ системи з інваріантним конусом $\mathcal{K}_t$ стійкий (асимптотично стійкий) за Ляпуновим, то він стійкий (асимптотично стійкий) в $\mathcal{K}_t$.

Аналогічно означаються інваріантні множини, властивості позитивності і монотонності відносно конуса і стійкості в $\mathcal{K}_t$ для динамічних систем з дискретним часом.

2. Кругові та еліпсоїдальні конуси. Розглянемо в просторі R^{n+1} множину

$$\mathcal{K}(Q, h) = \left\{ z \in R^{n+1} : z^T Q z \geq 0,\ z^T Q h \geq 0 \right\}, \tag{2}$$

де $Q = Q^T$ — симетрична матриця з інерцією $i(Q) = \{1, n, 0\}$, h — довільний вектор такий, що $h^T Q h > 0$. Гіперплощина $\mathcal{P} = \{z : z^T Q h = 0\}$ розділяє два конуси $\mathcal{K}(Q, h)$ і $-\mathcal{K}(Q, h)$ і проходить через їх спільну вершину $z = 0$ (рис. 1).

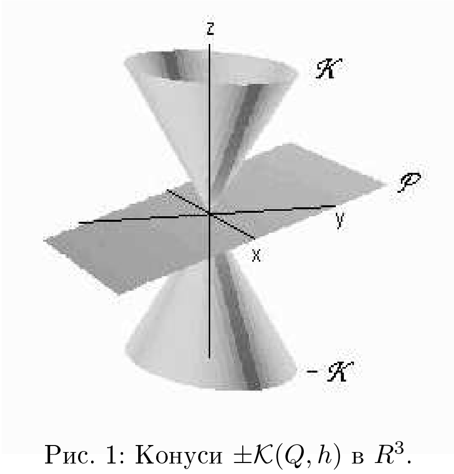

Рис. 1: Конуси $\pm\mathcal{K}(Q,h)$ в R^3.

Лема 1. *Множина* $\mathcal{K}(Q,h)$ *є конусом.*

Доведення. Відомо, що $i_+(Q)=1$ лише тоді, коли [9]

$$S = Q - \frac{1}{\omega} Qhh^T Q \leq 0,$$

де $\omega = h^T Qh > 0$. Якщо $z_1 \in \mathcal{K}(Q,h)$ і $z_2 \in \mathcal{K}(Q,h)$, то, використовуючи розклад $S = -R^T R$ і нерівність Коші, маємо співвідношення

$$\frac{1}{\omega} z_1^T Qhh^T Qz_1 + z_1^T Sz_1 = \alpha^2 - a^T a \geq 0,\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{\omega}} z_1^T Qh \geq 0,\ a = Rz_1,$$

$$\frac{1}{\omega} z_2^T Qhh^T Qz_2 + z_2^T Sz_2 = \beta^2 - b^T b \geq 0,\ \ \beta = \frac{1}{\sqrt{\omega}} z_2^T Qh \geq 0,\ b = Rz_2,$$

$$\frac{1}{\omega} z^T Qhh^T Qz + z^T Sz = \alpha^2 - a^T a + \beta^2 - b^T b + 2(\alpha\beta - a^T b) \geq 0,$$

де $z = z_1 + z_2$. Отже $z_1 + z_2 \in \mathcal{K}(Q,h)$.

Якщо $z \in \pm\mathcal{K}(Q,h)$, то $x^T Qh = 0$, $z^T Qz = z^T Sz = 0$, $Qz = Sz = 0$ і $z = 0$. Тут ми врахували невиродженість Q і наступну властивість матриці $S \leq 0$: $z^T Sz = 0 \Longleftrightarrow Sz = 0$.

Властивість конуса $\alpha\mathcal{K}(Q,h) \subset \mathcal{K}(Q,h)$ при $\alpha \geq 0$ очевидна.

Лема доведена.

Зазначимо, що $\mathcal{K}(Q,h) = \mathcal{K}(Q,h_1)$ для довільного вектора $h_1 \in \operatorname{int}\mathcal{K}(Q,h)$. Зокрема, h може бути власним вектором матриці Q, що відповідає її єдиному додатному власному значенню [10].

Лема 2. *Множина внутрішніх точок конуса $\mathcal{K}(Q,h)$, його границя та спряжений конус відповідно мають вигляд*

$$\operatorname{int}\mathcal{K}(Q,h) = \left\{z \in \mathcal{K}(Q,h) : z^TQz > 0,\ z^TQh > 0\right\},$$

$$\partial\mathcal{K}(Q,h) = \left\{z \in \mathcal{K}(Q,h) : z^TQz = 0\right\},$$

$$\mathcal{K}^*(Q,h) = Q\mathcal{K}(Q,h).$$

Нехай T — невироджена матриця перетворення

$$T^TQT = \Delta = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad h = Tg.$$

Тоді $\mathcal{K}(Q,h) = T\mathcal{K}(\Delta,g)$. Якщо $g = e = [0,\dots,0,1]^T$, то $\mathcal{K}(\Delta,g)$ співпадає з круговим конусом Мінковського [11]

$$\mathcal{K} = \left\{z \in R^{n+1} :\ z^T = [x^T,u],\ \|x\| \le u\right\}, \tag{3}$$

де $\|x\| = \sqrt{x^Tx}$. Отже, $\mathcal{K}(Q,h) = \alpha T\mathcal{K}$, де $\alpha = e^TT^{-1}h$, тобто $\mathcal{K}(Q,h)$ співпадає з $T\mathcal{K}$ $(-T\mathcal{K})$, якщо $\alpha > 0$ $(\alpha < 0)$.

Оскільки $\mathcal{K}$ є нормальним конусом з константою нормальності 1, то конус $\mathcal{K}(Q,h)$ також нормальний, його константа нормальності не перевищує $\sqrt{t_-/t_+}$, де $t_-(t_+)$ — мінімальне (максимальне) власне значення матриці TT^T.

Побудуємо матрицю перетворення T за допомогою спектрального розкладу

$$Q = \gamma hh^T - H\Gamma H^T = GDG^T, \quad \sigma(Q) = \{-\gamma_1,\dots,-\gamma_n,\gamma\}, \tag{4}$$

де $\gamma > 0$, $\Gamma = \operatorname{diag}\{\gamma_1,\dots,\gamma_n\} > 0$, $D = \operatorname{diag}\{-\gamma_1,\dots,-\gamma_n,\gamma\}$, $G = [H,h]$, $h^Th = 1$, $H^TH = I$, $h^TH = 0$, $GG^T = G^TG = I$. Конус (2) визначаємо у вигляді

$$\mathcal{K}(Q) = \left\{z \in R^{n+1} : z^TQz \ge 0,\ z^Th \ge 0\right\},$$

де h — нормований власний вектор матриці Q, що відповідає її єдиному додатному власному значенню γ. При цьому виконуються такі співвідношення

$$\mathcal{K}^*(Q) = \left\{w \in R^{n+1}\colon w^TQ^{-1}w \ge 0, w^Th \ge 0\right\} = \mathcal{K}(Q^{-1}) = Q\mathcal{K}(Q),$$

$$\mathcal{K}(Q) = G\mathcal{K}(D) = T\mathcal{K}, \quad \mathcal{K}(D) = L\mathcal{K}(\Delta), \quad \mathcal{K}(\Delta) = \mathcal{K},$$
$$T = GL, \quad L = \mathrm{diag}\{{\gamma_1}^{-1/2}, \ldots, {\gamma_n}^{-1/2}, \gamma^{-1/2}\}.$$

Зазначимо, що належність вектора z конусу $\mathcal{K}$ описується в термінах невід'ємно визначених матриць [12]:

$$z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \in \mathcal{K} \iff u \geq 0,\ u^2 I \geq xx^T \iff \begin{bmatrix} uI & x \\ x^T & u \end{bmatrix} \geq 0.$$

Аналогічно,

$$z \in \mathcal{K}(Q) \iff u_z \geq 0,\ \gamma u_z^2 \Gamma^{-1} \geq U_z U_z^T \iff \begin{bmatrix} u_z \Gamma^{-1} & U_z \\ U_z^T & u_z \gamma \end{bmatrix} \geq 0,$$

де $u_z = h^T z$, $U_z = H^T z$.

Лема 3. *Для кожного вектора $z \in \mathcal{K}(Q)$ квадратична форма $z^T \Omega z$ невід'ємна тоді і тільки тоді, коли $\Omega \geq \alpha Q$ для деякого $\alpha \geq 0$.*

Доведення. Відомо, що $w^T \Omega w \geq 0$ при $w \in \mathcal{K}$ лише тоді, коли існує таке $\alpha \geq 0$, що виконується нерівність $\Omega \geq \alpha \Delta$ [13]. Оскільки $\mathcal{K}(Q) = T\mathcal{K}$, то поклавши $z = Tw$ і використовуючи закон інерції маємо критерій невід'ємності квадратичної форми $z^T \Omega z$ на конусі $\mathcal{K}(Q)$ у вигляді матричної нерівності $\Omega \geq \alpha Q$.

Лема доведена.

Введемо наступні позначення

$$M = [R, l] = \begin{bmatrix} A & b \\ c^T & d \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} A \\ c^T \end{bmatrix}, \quad l = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix},$$

$$A = [a_1, \ldots, a_n], \quad b^T = [b_1, \ldots, b_n], \quad c^T = [c_1, \ldots, c_n].$$

Встановимо умови, при яких $\mathcal{K}(Q)$ є інваріантним конусом матриці M.

Лема 4. *$\mathcal{K}$ є інваріантним конусом матриці M тоді і тільки тоді, коли виконуються умови*

$$l \in \mathcal{K}, \quad M\Delta M^T \geq \alpha\Delta, \tag{5}$$

де $\alpha \geq 0$ — деяке невід'ємне число.

Доведення. Оскільки

$$z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \in \mathcal{K} \iff \begin{bmatrix} uI & x \\ x^T & u \end{bmatrix} \geq 0,$$

то включення $M\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ означає, що

$$S_z = \begin{bmatrix} uI & x \\ x^T & u \end{bmatrix} \geq 0 \Longrightarrow S_{Mz} = \begin{bmatrix} (c^T x + du)I & Ax + bu \\ x^T A^T + ub^T & c^T x + du \end{bmatrix} \geq 0,$$

тобто для довільних векторів $z \in \mathcal{K}$ і $g \in R^{n+1}$ повинні виконуватись співвідношення

$$g^T S_{Mz} g = l_g^T z \geq 0, \quad l_g^T = \left[g^T S_{r_1} g, \ldots, g^T S_{r_n} g, g^T S_l g\right],$$

$$S_l = \begin{bmatrix} dI & b \\ b^T & d \end{bmatrix}, \quad S_{r_i} = \begin{bmatrix} c_i I & a_i \\ a_i^T & c_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Враховуючи самоспряженість конуса $\mathcal{K}$, маємо $l_g \in \mathcal{K}$, тобто

$$g^T S_l g = w^T l \geq 0, \quad (g^T S_l g)^2 - \sum_{i=1}^{n} (g^T S_{r_i} g)^2 = w^T S w \geq 0,$$

де

$$g = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}, \; w = \Phi(g) = \begin{bmatrix} 2vy \\ y^T y + v^2 \end{bmatrix}, \; S = ll^T - RR^T = M \Delta M^T.$$

Легко встановити, що нелінійне перетворення $\Phi : R^{n+1} \to R^{n+1}$ зберігає конус $\mathcal{K}$, більше того, $\Phi(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$. Тому можна скористатись лемою 3.

Отже, критерій інваріантності конуса $\mathcal{K}$ для матриці M представляється у вигляді (5).

Лема доведена.

Теорема 1. *$\mathcal{K}(Q)$ є інваріантним конусом матриці M тоді і тільки тоді, коли виконуються умови*

$$h^T M h \geq 0, \quad h^T M Q^{-1} M^T h \geq 0, \quad M^T Q M \geq \alpha Q, \tag{6}$$

де $\alpha \geq 0$ — деяке невід'ємне число.

Доведення. Оскільки $\mathcal{K}(Q) = T\mathcal{K}$, то умови $M\mathcal{K}(Q) \subset \mathcal{K}(Q)$ і $M_T \mathcal{K} \subset \mathcal{K}$, де $M_T = T^{-1} M T$, еквівалентні.

Застосуємо лему 4 до матриці M_T. Її останній стовпчик згідно з розкладом (4) має вигляд $l_T = \gamma^{-1/2}T^{-1}Mh$. Тому умови (5) для вектора l_T і матриці M_T зводяться до вигляду

$$h^T Mh \geq 0, \quad h^T M^T QMh \geq 0, \quad MQ^{-1}M^T \geq \alpha Q^{-1}. \tag{7}$$

Відомо, що матриця M має інваріантний конус $\mathcal{K}$ тоді і тільки тоді, коли матриця M^T має інваріантний конус $\mathcal{K}^*$. В нашому випадку $\mathcal{K}^*(Q) = \mathcal{K}(Q^{-1})$. Отже, отриманий критерій інваріантності конуса $\mathcal{K}(Q)$ типу (7) на основі закону інерції представляється у вигляді (6). Тут параметр α знаходиться в інтервалі $0 \leq \alpha \leq \gamma^{-1}h^T M^T QMh$.

Теорема доведена.

Зазначимо, що теорема 1 узагальнює основний результат роботи [10] для еліпсоїдальних конусів типу $\mathcal{K}(Q)$.

Розглянемо лінійну диференціальну систему

$$\dot{z} = Mz, \quad z \in R^{n+1}, \quad t \geq 0, \tag{8}$$

і сформулюємо умови її позитивності відносно конуса $\mathcal{K}(Q) \subset R^{n+1}$, тобто умов, при яких має місце включення $e^{Mt}\mathcal{K}(Q) \subset \mathcal{K}(Q)$ для будь-якого $t \geq 0$. В цьому випадку $\mathcal{K}(Q)$ є інваріантним конусом системи (8).

Теорема 2. *$\mathcal{K}(Q)$ є інваріантним конусом системи (8) тоді і тільки тоді, коли для деякого $\alpha \in R^1$ виконується матрична нерівність*

$$M^T Q + QM \geq \alpha Q, \tag{9}$$

Доведення. Критерій позитивності системи в термінах спряженого конуса $\mathcal{K}^*(Q) = \mathcal{K}(Q^{-1})$ має вигляд [14]

$$z \in \mathcal{K}(Q), \;\; w \in \mathcal{K}^*(Q), \;\; w^T z = 0 \quad \Longrightarrow \quad w^T Mz \geq 0. \tag{10}$$

Покажемо, що із ортогональності ненульових векторів $z \in \mathcal{K}(Q)$ і $w \in \mathcal{K}^*(Q)$ випливає, що $w = \beta Qz$, де $\beta > 0$. Нехай $w = Qg$, де g — деякий вектор, і виконуються співвідношення

$$z^T Qz \geq 0, \quad w^T Q^{-1} w = g^T Qg \geq 0, \quad w^T z = g^T Qz = 0.$$

Тоді, якщо $V = [z, g]$ — матриця повного рангу, то для довільного $\varepsilon > 0$

$$G_\varepsilon = V^T(Q + \varepsilon I)V = \begin{bmatrix} z^T Qz & 0 \\ 0 & g^T Qg \end{bmatrix} + \varepsilon V^T V > 0.$$

Звідси випливає, що вектори z і g повинні бути лінійно залежними. В противному випадку для деякого $\varepsilon > 0$ маємо протиріччя:

$$1 = i_+(Q) = i_+(Q + \varepsilon I) \geq i_+(G_\varepsilon) = 2.$$

Отже, $w = \beta Qz$, причому, $\beta > 0$, оскільки $z^T h > 0$ і $w^T h > 0$.

Умова (10) означає, що $z^T(M^T Q + QM)z \geq 0$ для довільного $z \in \mathcal{K}(Q)$, що згідно з лемою 3 еквівалентно умові (9).

Зауважимо, що в даному випадку $z \in \partial\mathcal{K}(Q)$, тобто $z^T Qz = 0$. Тому умова (9) забезпечує інваріантність конуса $\mathcal{K}(Q)$ для системи (8) при деякому $\alpha \in R^1$. Можна встановити, що $\alpha \leq 2h^T Mh$.

Теорема доведена.

Теорема 3. *Нехай існують симетрична матриця Q з інерцією $i(Q) = \{1, n, 0\}$ і константи $\alpha \in R^1$ і $\beta > 0$, для яких виконуються нерівності*

$$\begin{aligned} &M^T Q + QM \geq \alpha Q, \quad M^T QM \leq \beta Q, \\ &h^T M^{-1} h \leq 0, \quad h^T (M^T QM)^{-1} h \geq 0, \end{aligned} \tag{11}$$

де h — власний вектор матриці Q, що відповідає її єдиному додатному власному значенню. Тоді диференціальна система (8) експоненціально стійка і має інваріантний конус $\mathcal{K}(Q)$.

Даний результат є наслідком теорем 1,2 і загальної теореми про стійкість лінійних позитивних систем [15].

Приклад. Розглянемо диференціальне рівняння третього порядку

$$\frac{d^3 w}{dt^3} + (4 - a)\frac{d^2 w}{dt^2} + (5 - 4a)\frac{dw}{dt} - 5aw = 0,$$

де a — дійсний параметр. Дане рівняння можна переписати у вигляді лінійної системи

$$\dot{z} = Mz, \quad z = \begin{bmatrix} w \\ \dot{w} \\ \ddot{w} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5a & 4a - 5 & a - 4 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Спектр матриці M має вигляд $\sigma(M) = \{a, -2+i, -2-i\}$. Система має інваріантний еліпсоїдальний конус $\mathcal{K}(Q)$ лише тоді, коли $\alpha_M \in \sigma(M)$, де $\alpha_M = \max\{\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in \sigma(M)\}$. В цьому випадку $\alpha_M = a$.

Разом з матричною нерівністю (9) розглянемо матричне рівняння

$$M^T Q + QM - \alpha Q = I. \tag{13}$$

Згідно з теоремою інерції його розв'язок повинен задовольняти умовам

$$i_\alpha^+(M) = i_+(Q), \quad i_\alpha^-(M) = i_-(Q), \quad i_0(Q) = 0,$$

де $i_\alpha^+(M)$ ($i_\alpha^-(M)$) — кількість власних значень матриці M, розташованих справа (зліва) від прямої $2\mathrm{Re}\,\lambda = \alpha$ [7]. Будемо вважати, що $\alpha = a - 2$, тоді $i(Q) = \{1, 2, 0\}$.

Нехай $a = -1$, тоді

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -9 & -5 \end{bmatrix}, \ \sigma(M) = \{-1, \ -2 + i, -2 - i\}, \ \alpha_M = -1.$$

Із матричного рівняння (13) отримуємо

$$Q = \begin{bmatrix} 27 & 17 & 8 \\ 17 & -3,8 & 1,2 \\ 8 & 1,2 & 0,2 \end{bmatrix}, \ h = \begin{bmatrix} 0,89719 \\ 0,38737 \\ 0,21211 \end{bmatrix}, \quad i(Q) = \{1, 2, 0\}.$$

Розв'язуючи систему нерівностей (11) відносно a, α і β при знайдених Q і h, отримуємо $a = -0,81697$, $\alpha = -2,9682$, $\beta = 1,07585$. Отже, виконуються умови теореми 3, при яких система (12) експоненціально стійка і має інваріантний конус $\mathcal{K}(Q)$.

Розглянемо неавтономну систему

$$\dot{z} = M(t)z, \quad z \in R^{n+1}, \quad t \geq 0, \tag{14}$$

у фазовому просторі якої задано змінний еліпсоїдальний конус

$$\mathcal{K}(Q) = \left\{ z \in R^{n+1} : z^T Q(t) z \geq 0, \ z^T h(t) \geq 0 \right\},$$

де елементи матриць $M(t)$, $Q(t) = Q^T(t)$ і вектора $h(t)$ є неперервними функціями часу t.

Теорема 4. *$\mathcal{K}(Q)$ є інваріантним конусом системи (14) тоді і тільки тоді, коли виконується матрична диференціальна нерівність*

$$\dot{Q} + M^T(t)Q + QM(t) \geq \alpha(t)Q, \quad t \geq 0, \tag{15}$$

де $\alpha(t)$ — деяка функція.

Доведення. Нехай $T(t)$ — така невироджена матриця, що $T^T(t)Q(t)T(t) \equiv \Delta$. Тоді за допомогою перетворення $z = T(t)w$ отримуємо систему

$$\dot{w} = N(t)w, \quad N(t) = T^{-1}(t)M(t)T(t) - T^{-1}(t)\dot{T}(t), \tag{16}$$

яка має інваріантний круговий конус $\mathcal{K}$ лише тоді, коли $\mathcal{K}(Q)$ є інваріантним конусом початкової системи (14). За теоремою 3 критерій інваріантності конуса $\mathcal{K}$ для системи (16) має вигляд

$$N^T(t)\Delta + \Delta N(t) \geq \alpha(t)\Delta,$$

де $\alpha(t)$ — деяка функція. Остання нерівність після множення зліва і справа відповідно на $T^{-1T}(t)$ і $T^{-1}(t)$ з використанням тотожності

$$\dot{Q}(t) + T^{-1T}(t)\dot{T}^T(t)Q(t) + Q(t)\dot{T}(t)T^{-1}(t) \equiv 0$$

зводиться до вигляду (15).

Теорема доведена.

3. Конуси типу $\mathcal{K}_p(\mu_\alpha)$ і $\mathcal{K}_q(\sigma_\beta)$. Розглянемо у просторі R^{n+m} множини векторів

$$\mathcal{K}_p(\mu_\alpha) = \{z \in R^{n+m} : \, z^T = [x^T, u^T], \, u \in R^m_+, \, \|x\|_p \leq \mu_\alpha(u)\}, \tag{17}$$

$$\mathcal{K}_q(\sigma_\beta) = \{w \in R^{n+m} : \, w^T = [y^T, v^T], \, v \in R^m_+, \, \|y\|_q \leq \sigma_\beta(v)\}, \tag{18}$$

де $\mu_\alpha(u) = \alpha \min\limits_k u_k$, $\sigma_\beta(v) = \beta \sum\limits_k v_k$, $R^m_+ \subset R^m$— конус векторів з невід'ємними елементами, $\|x\|_p$ — одна з таких векторних норм:

$$\|x\|_\infty = \max_k |x_k|, \quad \|x\|_1 = \sum_k |x_k|,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_k x_k^2} \text{ — евклідова норма,}$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_k |x_k|^p\right)^{1/p} \text{ — норма Гельдера.}$$

Нехай параметри α, β, p і q задовольняють співвідношення

$$\alpha\beta = 1, \; \alpha > 0, \; \beta > 0, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1, \; p \geq 1, \; q \geq 1. \tag{19}$$

Тоді для кожної із введених норм множини (17) і (18) є тілесними конусами, причому виконуються нерівності

$$|y^T x| \leq \|x\|_p \|y\|_q, \quad v^T u \geq \mu_\alpha(u)\sigma_\beta(v). \tag{20}$$

У випадку $p > 1(q > 1)$ перша нерівність (20) є нерівність Гельдера.

Лема 4. *При умовах (19)* $\mathcal{K}_p^*(\mu_\alpha) = \mathcal{K}_q(\sigma_\beta)$.

Доведення. Якщо $z \in \mathcal{K}_p(\mu_\alpha)$ і $w \in \mathcal{K}_q(\sigma_\beta)$, то згідно з (19) і (20) маємо

$$y^T x + v^T u \geq -\|x\|_p \|y\|_q + \mu_\alpha(u)\sigma_\beta(v) \geq 0.$$

Це означає, що $\mathcal{K}_q(\sigma_\beta) \subset \mathcal{K}_p^*(\mu_\alpha)$.

Зворотне включення $\mathcal{K}_q(\sigma_\beta) \supset \mathcal{K}_p^*(\mu_\alpha)$ також виконується. Дійсно, нехай $y^T x + v^T u \geq 0$ для довільного вектора $z \in \mathcal{K}_p(\mu_\alpha)$. Тоді, очевидно, $v \in R_+^m$ і для встановлення нерівності $\|y\|_q \leq \sigma_\beta(v)$ слід розглянути такі випадки:

$$1)\ p = 1,\ q = \infty, \quad x_k = \begin{cases} -y_s, & k = s \\ 0, & k \neq s \end{cases}, \quad u = \beta \|x\|_1 e,$$

$$2)\ p = \infty,\ q = 1, \quad x_k = \begin{cases} -1, & y_k \geq 0 \\ 1, & y_k < 0 \end{cases}, \quad u = \beta \|x\|_\infty e,$$

$$3)\ p > 1,\ q > 1, \quad x_k = \begin{cases} -|y_k|^{q/p}, & y_k \geq 0 \\ |y_k|^{q/p}, & y_k < 0 \end{cases}, \quad u = \beta \|x\|_p e,$$

де $|y_s| = \|y\|_\infty$, $e = [1, \dots, 1]^T$. Для кожного з них виконується співвідношення

$$y^T x + v^T u = -\|x\|_p \|y\|_q + \|x\|_p\, \sigma_\beta(v) \geq 0,$$

звідки випливає, що $\|y\|_q \leq \sigma_\beta(v)$, тобто $w \in \mathcal{K}_q(\sigma_\beta)$.

Лема доведена.

Побудуємо умови інваріантності деяких конусів для класу різницевих систем. Різницева система

$$z_{k+1} = f(z_k, k), \quad k = 0, 1, \dots, \tag{21}$$

має інваріантний конус $\mathcal{K}$, якщо із $z_0 \in \mathcal{K}$ випливає $z_k \in \mathcal{K}$ при $k > 0$. Це означає, що виконуються включення

$$\mathcal{K}_0 = f(\mathcal{K}, 0) \subset \mathcal{K},\ \ \mathcal{K}_k = f(\mathcal{K}_{k-1}, k) \subset \mathcal{K}, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Зокрема, необхідні та достатні умови інваріантності конуса $\mathcal{K}$ для лінійної системи

$$z_{k+1} = M_k z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{22}$$

зводяться до вигляду $W_k\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$, де $W_k = M_k M_{k-1} \cdots M_0$, $k = 0, 1, \ldots$.

Розглянемо стаціонарну різницеву систему

$$z_{k+1} = M z_k, \quad M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \ldots , \tag{23}$$

де $A = \|a_{ij}\|_1^n$, $B = \|b_{ij}\|_1^{n,m}$, $C = \|c_{ij}\|_1^{m,n}$, $D = \|d_{ij}\|_1^m$. Ця система має інваріантний конус $\mathcal{K}$ лише тоді, коли $M\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$.

Введемо такі позначення:

$$A = [a_{*1}, \ldots, a_{*n}] = \begin{bmatrix} a_{1*}^T \\ \vdots \\ a_{n*}^T \end{bmatrix}, \ B = [b_{*1}, \ldots, b_{*m}] = \begin{bmatrix} b_{1*}^T \\ \vdots \\ b_{n*}^T \end{bmatrix},$$

$$C = [c_{*1}, \ldots, c_{*n}] = \begin{bmatrix} c_{1*}^T \\ \vdots \\ c_{m*}^T \end{bmatrix}, \ D = [d_{*1}, \ldots, d_{*m}] = \begin{bmatrix} d_{1*}^T \\ \vdots \\ d_{m*}^T \end{bmatrix}.$$

1. $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\infty(\mu_\alpha)$. Включення $M\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ означає, що

$$z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \in \mathcal{K} \Longrightarrow |a_{s*}^T x + b_{s*}^T u| \le \alpha(c_{k*}^T x + d_{k*}^T u), \ \ s = \overline{1,n}, k = \overline{1,m}.$$

Останні нерівності подамо у вигляді

$$(\alpha c_{k*} \pm a_{s*})^T x + (\alpha d_{k*} \pm b_{s*})^T u \ge 0.$$

Отже,

$$M\mathcal{K} \subset \mathcal{K} \iff \begin{bmatrix} \alpha c_{k*} \pm a_{s*} \\ \alpha d_{k*} \pm b_{s*} \end{bmatrix} \in \mathcal{K}^* = \mathcal{K}_1(\sigma_\beta), \ \ s = \overline{1,n}, k = \overline{1,m}.$$

Критерій інваріантності конуса $\mathcal{K}_\infty(\mu_\alpha)$ для системи (23) зводиться до системи нерівностей

$$d_{kj} \ge \beta|b_{sj}|, \ \sum_{i=1}^{n} |\alpha c_{ki} \pm a_{si}| \le \sum_{j=1}^{m} (d_{kj} \pm \beta b_{sj}), \ k, j = \overline{1,m}, \ s = \overline{1,n}. \tag{24}$$

2. $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1(\mu_\alpha)$. Знайдемо умови того, що

$$\|x\|_1 \le \mu_\alpha(u) \Longrightarrow \|Ax + Bu\|_1 \le \mu_\alpha(Cx + Du).$$

В наших позначеннях виконуються співвідношення

$$\|Ax + Bu\|_1 \le \sum_{k=1}^{n} \left(|a_{k*}^T x| + |b_{k*}^T u|\right) \le \|A\|_\infty \|x\|_1 + \sum_{k,j=1}^{n,m} |b_{kj}| u_j \le h^T u,$$

$$h^T = \left[\frac{\alpha}{m}\|A\|_\infty + \|b_{*1}\|_1, \ldots, \frac{\alpha}{m}\|A\|_\infty + \|b_{*m}\|_1\right],$$

$$\|A\|_\infty = \sum_{k=1}^{n} \|a_{k*}\|_\infty.$$

Враховуючи, що $\mathcal{K}^* = \mathcal{K}_\infty(\sigma_\beta)$, прагнемо задовольнити нерівності

$$\alpha c_{s*}^T x + (\alpha d_{s*} - h)^T u \ge 0, \quad \alpha\|c_{s*}\|_\infty \le \sigma_\beta(\alpha d_{s*} - h), \quad s = \overline{1,m}.$$

Отже, умови інваріантності конуса $\mathcal{K}_1(\mu_\alpha)$ для системи (23) мають вигляд

$$\begin{gathered} \|A\|_\infty + \beta \sum_{j=1}^{m} \|b_{*j}\|_1 + \alpha\|c_{s*}\|_\infty \le \sum_{j=1}^{m} d_{sj}, \\ d_{sj} \ge \frac{1}{m}\|A\|_\infty + \beta\|b_{*j}\|_1, \quad s = \overline{1,m},\ j = \overline{1,m}. \end{gathered} \tag{25}$$

3. $\mathcal{K} = \mathcal{K}_2(\mu_\alpha)$. Цей конус описується в термінах невід'ємно визначених матриць:

$$z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \in \mathcal{K} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \mu_\alpha(u) I & x \\ x^T & \mu_\alpha(u) \end{bmatrix} \ge 0.$$

Тому включення $M\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ означає, що

$$w^T L_k w = l_k^T z \ge 0, \quad \forall w \in R^{n+1},\ z \in \mathcal{K},\ k = \overline{1,m},$$

де

$$L_k = \begin{bmatrix} \alpha(c_k^T x + d_k^T u) I & Ax + Bu \\ x^T A^T + u^T B^T & \alpha(c_k^T x + d_k^T u) \end{bmatrix} \ge 0, \quad l_k = \begin{bmatrix} w^T P_{k1} w \\ \vdots \\ w^T P_{kn} w \\ w^T Q_{k1} w \\ \vdots \\ w^T Q_{km} w \end{bmatrix} \in \mathcal{K}^*,$$

$$P_{ki} = \begin{bmatrix} \alpha c_{ki} I & a_{*i} \\ a_{*i}^T & \alpha c_{ki} \end{bmatrix}, \ Q_{kj} = \begin{bmatrix} \alpha d_{kj} I & b_{*j} \\ b_{*j}^T & \alpha d_{kj} \end{bmatrix}, \ i = \overline{1, n}, \ j = \overline{1, m}.$$

Належність вектора l спряженому конусу $\mathcal{K}^* = \mathcal{K}_2(\sigma_\beta)$ описується у вигляді

$$l = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} \in \mathcal{K}^* \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_\beta(v) I & y \\ y^T & \sigma_\beta(v) \end{bmatrix} \geq 0.$$

Тому достатньою умовою інваріантності конуса $\mathcal{K}_2(\mu_\alpha)$ для системи (23) є система матричних співвідношень [16]

$$S_k = \begin{bmatrix} Q_k & \cdots & 0 & P_{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & Q_k & P_{kn} \\ P_{k1} & \cdots & P_{kn} & Q_k \end{bmatrix} \geq 0, \quad Q_k = \beta \sum_{j=1}^{m} Q_{kj}, \quad k = \overline{1, m}. \tag{26}$$

Якщо матриці Q_k невироджені, то ця умова зводиться до вигляду

$$Q_k > 0, \quad Q_k \geq \sum_{i=1}^{n} P_{ki} Q_k^{-1} P_{ki}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Необхідні та достатні умови інваріантності конуса $\mathcal{K}_2(\mu_\alpha)$ для системи (23) можуть бути представлені у вигляді (див. доведення леми 4)

$$l_j \in \mathcal{K}_2(\mu_\alpha), \quad M_k \Delta M_k^T \geq \alpha_k \Delta, \tag{27}$$

де

$$l_j = \begin{bmatrix} b_{*j} \\ d_{*j} \end{bmatrix}, \ M_k = \begin{bmatrix} A & \beta \sum\limits_j b_{*j} \\ \alpha c_{k*}^T & \sum\limits_j d_{kj} \end{bmatrix}, \ \alpha_k \geq 0, \ j, k = 1, \ldots, m.$$

4. $\mathcal{K} = \mathcal{K}_p(\mu_\alpha)$, $p > 1$. Аналогічно, як і у випадку $p = 1$, маємо співвідношення

$$\|Ax + Bu\|_p \leq \|A\|_p \|x\|_p + \sum_{j=1}^{m} |b_{*j}| u_j \leq h^T u,$$

$$h^T = \left[\frac{\alpha}{m} \|A\|_p + \|b_{*1}\|_p, \ldots, \frac{\alpha}{m} \|A\|_p + \|b_{*m}\|_p \right],$$

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p.$$

Враховуючи, що $\mathcal{K}^* = \mathcal{K}_q(\sigma_\beta)$, прагнемо задовольнити нерівності

$$\alpha c_{s*}^T x + (\alpha d_{s*} - h)^T u \geq 0, \quad \alpha \|c_{s*}\|_q \leq \sigma_\beta(\alpha d_{s*} - h), \quad s = \overline{1,m}.$$

Отже, умови інваріантності конуса $\mathcal{K}_p(\mu_\alpha)$ для системи (23) мають вигляд

$$\begin{gathered} \|A\|_p + \beta \sum_{j=1}^m \|b_{*j}\|_p + \alpha \|c_{s*}\|_q \leq \sum_{j=1}^m d_{sj}, \\ d_{sj} \geq \frac{1}{m}\|A\|_p + \beta \|b_{*j}\|_p, \quad s = \overline{1,m},\ j = \overline{1,m}. \end{gathered} \tag{28}$$

де $p > 1$, $q > 1$, $\alpha\beta = 1$, $1/p + 1/q = 1$, $\|A\|_p$ — узгоджена матрична норма з векторною нормою $\|x\|_p$. Зокрема,

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|, \ \ \|A\|_2 = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)^{1/2}, \ \|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|.$$

Отримані умови інваріантності конусів (24) – (28) для системи (23) можна узагальнити, розглянувши конуси типу

$$\mathcal{K} = \{z \in R^N : \ z^T = [x_1^T, \ldots, x_n^T, u^T], \ \max_i \|x_i\|_p \leq \mu_\alpha(u)\},$$

$$\mathcal{K}^* = \{w \in R^N : \ w^T = [y_1^T, \ldots, y_n^T, v^T], \ \sum_i \|x_i\|_q \leq \sigma_\beta(v)\},$$

де $x_i, y_i \in R^{n_i}$, $u, v \in R^m$, $N = n_1 + \cdots + n_n + m$. При цьому, як і раніше, рівності $p^{-1} + q^{-1} = 1$ і $\alpha\beta = 1$ є умовами спряження конусів $\mathcal{K}$ і $\mathcal{K}^*$, а матриця багатозв'язної системи (23) має таку блочну структуру:

$$M = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} & B_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} & B_n \\ C_1 & \cdots & C_n & D \end{bmatrix},$$

де $A_{ij} \in R^{n_i \times n_j}$, $B_i \in R^{n_i \times m}$, $C_j \in R^{m \times n_j}$, $D \in R^{m \times m}$.

Література

[1] *Siljak D.D.* Large-Scale Dynamic System: Stability and Structure. — New York: North Holland, 1978. — 416 p.

[2] *Груйич Л.Т., Мартынюк А.А., Риббенс-Павелла М.* Устойчивость крупномасштабных систем. — Киев: Наук. думка, 1984. — 307 с.

[3] *Martynyuk A.A.* Qualitative methods in nonlinear dynamics: Novel Approaches to Liapunov's matrix functions. — New York: Marcel Dekker, Inc., 2002. — 301 p.

[4] *Berman A., Neuman M., Stern R.* Nonnegative Matrices in Dynamic Systems.— Wiley-Interscience, 1989.

[5] *Boyd S., Ghaoui L.El, Feron E., Balakrishman V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. // SIAM Studies in Applied Mathematics.— Philadelphia: PA, 1994.— vol. 15.

[6] *Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В.* Позитивные линейные системы. — М.: Наука, 1985. — 256 с.

[7] *Мазко А.Г.* Локализация спектра и устойчивость динамических систем // Праці Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. — **28**. — 216 с.

[8] *Мазко А.Г.* Устойчивость и сравнение состояний динамических систем относительно переменного конуса // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, № 2. — С. 198–213.

[9] *Мазко А.Г.* Полуобращение и свойства инвариантов матриц // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 4.— С. 525–528.

[10] *Stern, R., Wolkowicz, H.* Exponential nonnegativity on the ice cream cone // SIAM J. Matrix Anal. Appl.— 1991.— **12**, №1.— P. 160–165.

[11] *Глазман И.М., Любич Ю.И.* Конечномерный линейный анализ. — М.: Наука, 1969. — 478 с.

[12] *Мазко А.Г.* Устойчивость и монотонность динамических систем // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Праці Ін-ту математики НАН Україню.— 2003. — **47**. — С. 180–201.

[13] *Loewy, R., Schneider, H.* Positive operators on the ice-cream cone // J. Math. Anal. Appl.— 1975.— **49**.— P. 375–392.

[14] *Мазко А.Г.* Позитивные и монотонные системы в полуупорядоченном пространстве // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 2. — С. 164–173.

[15] *Мазко А.Г.* Устойчивость линейных позитивных систем // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 3. — С. 323–330.

[16] *Мазко А.Г.* Устойчивость позитивных и монотонных систем в полуупорядоченном пространстве // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, № 4. — С. 462–475.