Міністерство освіти і науки України
Західноукраїнський національний університет

М Е Т О Д И Ч Н І   В К А З І В К И

до розв'язання задач

КПІЗ

з курсу "Прикладна математика"

Кафедра: Прикладної математики

Тернопіль — 2020

Методичні вказівки до розв’язання задач КПІЗ з курсу "Прикладна математика" / Укл. Руслана Руська.- Тернопіль: ЗУНУ, 2020.

РОЗДІЛ 1. МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

§ 1. Матриці і визначники

1. *Визначником другого порядку* називається число, яке знаходиться за формулою:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\ .$$

2. *Визначником третього порядку* називається число, яке знаходиться за формулою:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

3. Визначник *n*-го порядку має вигляд:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

4. *Мінором* M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається визначник $(n-1)$-го порядку, одержаний із попереднього після викреслювання i-го рядка і j-го стовпчика.

5. *Алгебраїчним доповненням* A_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається мінор для цього елемента, взятий зі знаком “+”, якщо число $(i+j)$ – парне, та зі знаком “–”, якщо воно непарне. Тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}\ .$$

6. *Визначником n-го порядку* називається число, що дорівнює сумі попарних добутків елементів довільного рядка (або стовпчика) на їх

відповідні алгебраїчні доповнення.

Тобто

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,..., n),$$

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,..., n).$$

7. *Матрицею* називається прямокутна таблиця із $m \times n$ чисел, що містить m рядків та n стовпчиків, взятих у квадратні (або круглі) дужки.

Сумою (різницею) двох матриць A і B одного розміру $m \times n$ називається матриця C, елементи якої дорівнюють сумі (різниці) відповідних елементів матриць A і B.

Добутком матриці A на довільне число k (або числа k на матрицю A) називається матриця, елементами якої є добуток елементів матриці A на число k.

Добутком $A \cdot B$ матриці A розміру $m \times n$ і матриці B розміру $n \times p$ називається матриця C розміром $m \times p$, елементи якої c_{ij} дорівнюють сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпчика матриці B.

8. *Рангом матриці* називається найбільший порядок її мінорів, що не дорівнюють нулю.

9. Матриця A^{-1} називається *оберненою матрицею* до матриці A, якщо виконуються рівності $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, тобто матриці A та A^{-1} комутують і їх добуток є одинична матриця.

* *

*

Задача 1. Галузь з трьох заводів виготовляє два види продукції. Матрицею *A* подано об’єми виготовленої продукції на кожному заводі за перший місяць, матрицею *B* – за другий місяць:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Знайти: а) об’єм продукції за два місяці; б) приріст об’ємів виробництва за другий місяць у порівнянні з першим за видами продукції і заводами; в) вартісне вираження виробленої продукції за два місяці (у доларах), якщо $\lambda = 27$ – курс долара по відношенню до гривні.

Розв'язування. а) Об'єм продукції за два місяці визначається сумою матриць *А* та *В*:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix},$$ де $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ – об'єм продукції *j*-го виду, який виготовлений *і*-м заводом за два місяці.

б) Приріст об'ємів виробництва за другий місяць у порівнянні з першим визначається різницею матриць:

$$D = B - A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Додатні елементи d_{ij} показують, що на заводі *і* об'єм виробництва *j*-ї продукції збільшився; від'ємні d_{ij} – зменшився; нульові d_{ij} – не змінився.

в) Для знаходження вартісного вираження виробленої продукції за два місяці потрібно знайти добуток λC.

Задача 2. Підприємство виготовляє продукцію трьох видів: P_1, P_2, P_3 і використовує сировину двох видів: S_1 і S_2. Норми витрат сировини задані матрицею *А*, де кожен елемент a_{ij} ($i = 1,2,3;\ j = 1,2$) показує витрати кількості одиниць сировини *j*-го виду на виготовлення одиниці продукції *і*-го виду. План виробництва заданий матрицею-рядком *С*, ціна одиниці кожного виду сировини – матрицею-стовпцем *В*.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 100 & 150 & 200 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

Знайти витрати сировини, які необхідні для планового виробництва продукції, і загальна вартість сировини.

Розв'язування. Витрати сировини можна задати матрицю $S = C\,A$, де елементи $s_{1j} = \sum_{k=1}^{3} c_{1k} a_{kj}$ – це витрати сировини *j*-го виду на виготовлення продукції *і*-го виду. Тоді

$$S=\begin{bmatrix}100 & 150 & 200\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}800 & 1450\end{bmatrix}.$$

Загальна вартість сировини P визначається як добуток матриць $P=S\,B$ або $P=CA\,B$. У даному випадку отримали

$$P=\begin{bmatrix}800 & 1450\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20\\ 30\end{bmatrix}=800\cdot 20+1450\cdot 30=59500\ .$$

Задача 3. Робоча бригада виготовляє контролери, 60% яких вимагають додаткового налаштування при встановленні, а 40% не потребують налаштування. Відповідно до статистичних досліджень, ті з контролери, які потребували налаштування, вимагатимуть повторного налаштування через рік в 45% випадках, а в 55% через рік будуть працювати добре. Ті контролери, які не потребували початкового налаштування, будуть потребувати його через рік в 20% випадках і продовжують добре працювати в 80% випадках. Яка частка контролерів будуть працювати добре або потребуватимуть налаштування через 2 та 3 роки після встановлення?

Розв'язування. В момент після встановлення частка добре працюючих контролерів становить 0,6, а частка тих, які потребують налаштування – 0,4. Через рік частка тих добре працюючих складе: $0{,}4\cdot 0{,}8+0{,}6\cdot 0{,}55=0{,}65$. Частка тих, які вимагатимуть налаштування: $0{,}6\cdot 0{,}2+0{,}4\cdot 0.45=0{,}3$.

Введемо позначення:

$X_t=\begin{bmatrix}x_{1t} & x_{2t}\end{bmatrix}$ – матриця-рядок стану в момент часу *t*, де – x_{1t} – частка добре працюючих контролерів, а x_{2t} – частка контролерів, які потребують налаштування в момент часу *t*;

$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ – матриця переходу, де a_{ij} – частка контролерів, які в даний момент знаходяться в стані *i* (1– потребують налаштування, 2 – не потребують налаштування), а через рік – в стані *j*.

Враховуючи позначення, маємо:

$$X_0=\begin{bmatrix}0{,}4 & 0{,}6\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}55 & 0{,}45\end{bmatrix}.$$

Тоді через рік

$$X_1=X_0A=\begin{bmatrix}0{,}4 & 0{,}6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}55 & 0{,}45\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}65 & 0{,}35\end{bmatrix};$$

через 2 роки

$$X_2 = X_1 A = X_0 AA = X_0 A^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}55 & 0{,}45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}55 & 0{,}45 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0{,}713 & 0{,}287 \end{bmatrix};$$

через 3 роки

$$X_3 = X_2 A = X_0 A^3 = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}55 & 0{,}45 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0{,}728 & 0{,}272 \end{bmatrix}.$$

Задача 4. В таблиці наведені дані про денну продуктивність 4 підприємств промислового холдингу, який виробляє 3 види продукції з використанням 2 видів сировини, а також тривалість роботи кожного підприємства за рік та ціна кожного виду сировини.

Вид продукції	Денна продуктивність підприємств				Витрати видів сировини	
	1	2	3	4	1	2
1	2	3	6	5	1	4
2	2	0	4	1	3	2
3	1	2	0	3	2	3
	Кількість робочих днів за рік				Ціна видів сировини	
	1	2	3	4	1	2
	200	120	150	170	100	200

Знайти:

1) річну продуктивність кожного підприємства по кожному виду продукції;

2) річні потреби кожного підприємства в кожному виді сировини;

3) річний об'єм фінансування кожного підприємства для постачання сировини, необхідної для виготовлення продукції кожного виду у вказаній кількості.

Розв'язування. Спочатку з приведеної таблиці випишемо матрицю продуктивності підприємств A, матрицю витрат сировини B та матрицю-рядок цін сировини P.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \; P = \begin{bmatrix} 100 & 200 \end{bmatrix}.$$

1) Кожному стовпцю матриці A відповідає денна продуктивність окремого підприємства. Якщо помножити елементи кожного стовпця на кількість робочих днів у році для відповідного підприємства, то отримаємо матрицю річної продуктивності кожного підприємства по кожному виду продукції A_N. Або інакше для обчислення A_N спочатку запишемо діагональну матрицю кількості робочих днів підприємств

$$N = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 170 \end{bmatrix},$$

і тоді

$$A_N = AN = \begin{bmatrix} 400 & 360 & 900 & 850 \\ 400 & 0 & 600 & 170 \\ 200 & 240 & 0 & 510 \end{bmatrix}.$$

2) Річні потреби кожного підприємства в кожному виді сировини B_N можна задати матрицею

$$B_N = BA_N = \begin{bmatrix} 2000 & 840 & 2700 & 2380 \\ 3000 & 2160 & 4800 & 5270 \end{bmatrix}.$$

3) Вартість річного об'єму сировини для кожного підприємства отримаємо, якщо помножимо матрицю P на B_N:

$$P_N = PB_N = \begin{bmatrix} 800000 & 516000 & 123000 & 1292000 \end{bmatrix}.$$

Вправи

1.1. Мале підприємство виробляє 4 види продукції А, В, С та Д, використовуючи на кожну з них різну кількість двох матеріалів та праці (кількість робочих годин). Конкретна інформація вказана у таблиці:

Вироби	**А**	**В**	**С**	**Д**
Одиниці матеріалу, *X*	2 50	300	1 70	2 00
Одиниці матеріалу, *Y*	1 60	230	7 5	0

Кількість робочих годин	80	85	120	100

Охарактеризувати зміст кожного рядка та стовпчика матриці, впорядкованої з цих чисел.

1.2. У таблиці задані показники взаємних потреб та пропозицій між різними галузями промисловості:

Галузеві пропозиції	Галузеві потреби			Потреби інших галузей	Кількість усіх пропозицій
	1	2	3		
1	20	48	18	14	100
2	30	12	54	24	120
3	30	36	36	78	180

Визначити матрицю потреб–пропозицій А.

1.3. Підприємство складається з трьох цехів, кожен з яких виробляє один вид продукції. У таблиці задані витратні норми двох видів сировини і палива на виробництво одиниці продукції кожного цеху, трудомісткість у людино-годинах на одиницю продукції. Потрібно знайти сумарні витрати сировини, палива та трудових ресурсів для виконання програм виробництва.

Показники	**Норми витрат цехів**		
	1	*2*	*3*
Сировина а)	1,4	2,4	0,8
Сировина в)	0	0,6	1,6
Паливо	2	1,8	2,2
Трудомісткість	10	20	20

Відомо, що плани валового випуску продукції такі: для першого цеху – 238, для другого – 186, для третього – 400.

1.4. Магазин здійснює роздрібний, оптовий продаж, а також продаж по лінії посилторгу товарів. Дані про денний продаж записано в таблиці:

Продаж	Товар (ціна)		
	Костюм (1 тис. грн.)	Пальто (2 тис. грн.)	Плаття (0,5 тис. грн.)
Роздрібний	45	30	50
Оптовий	38	25	40
Посилторг	20	15	20

Обчислити денний прибуток від продажу кожного товару окремо.

1.5. Три заводи випускають чотири види продукції. Знайти: а) матрицю випуску продукції за квартал, якщо задані матриці щомісячних випусків A_1, A_2 і A_3; б) матриці приростів випуску продукції за другий і третій місяці та проаналізувати отримані результати:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix}; \; A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}; \; A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

1.6. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: 18 шт.; 11 шт.; 15 шт.; 24 шт.; друга –16; 14; 13; 50; третя – 13; 10; 12; 80. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: 7,7 грн., 3,6 грн., 2 грн., 2,1 грн., в B_2 – 3,7; 2,4; 2,9; 1,3; в B_3 – 3; 7; 3,5; 7. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

1.7. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: 81 шт.; 80 шт.; 66 шт.; 114 шт.; друга – 95; 45; 93; 50; третя – 222; 90; 32; 89. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: 27 грн., 13 грн., 12,1 грн., 3,1 грн., в B_2 – 3; 7,8; 2,3; 1,3; в B_3 – 7; 7,8; 3,9; 7,6. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

1.8. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: 8 шт.; 0 шт.; 16 шт.; 14 шт.; друга –5; 5; 33; 50; третя – 3; 0; 2; 80. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: 1,7 грн., 3 грн., 2 грн., 2,1 грн., в B_2 – 3; 2,4; 2,3; 1,3; в B_3 – 3; 7; 3,5; 7. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

1.9. Підприємство виготовляє чотири види продукції, об'єми виготовлення якої задані матрицею A. Ціна реалізації одиниці i-го типу продукції в j-м регіоні задана матрицею B, де число стовпчиків матриці B відповідає кількості регіонів, в яких реалізується продукція.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 & 10 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Знайти C – матрицю сумарного прибутку по регіонам та вказати, який з трьох регіонів найбільш вигідний для реалізації продукції.

1.10. Швейна фабрика здійснює продаж трьох моделей чоловічих костюмів в чотирьох магазинах. Матриця $B=[b_{ij}]=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ задає ціну продажу (у доларах) одиниці костюмів i-го виду в j-м магазині. Визначити: а) сумарний прибуток кожного магазину, якщо продаж костюмів за місяць (за моделями) задано матрицею $A=\begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 15 \end{bmatrix}$; б) сумарний прибуток кожного магазину (у гривнях), якщо курс долара по відношенню до гривні становить 1 дол. = 27 грн.

1.11. Галузь складається з чотирьох підприємств: матриця коефіцієнтів прямих витрат і матриця-стовпець виготовлення продукції мають вигляд

$$A=\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}.$$

Знайти матрицю-стовпець об’ємів кінцевої продукції.

1.12. Підприємство виготовляє три види продукції, використовуючи для цього два види сировини. Норми витрат сировини i-го виду на виробництво одиниці j-го виду задані матрицею витрат A, виготовлення продукції за квартал – матрицею X, вартість одиниці кожного виду сировини задані матрицею P. Знайти: 1) матрицю S повних витрат сировини кожного виду; 2) повну вартість всієї затраченої сировини.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix},\ P=\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

1.13. Підприємство за деякий проміжок часу виготовило два види продукції, використавши для цього три види сировини. Норми витрат сировини i-го виду на виробництво одиниці j-го виду задані матрицею витрат A, виготовлення продукції за даний проміжок часу – матрицею X, вартість одиниці кожного виду сировини задані матрицею P. Знайти матрицю S повних витрат сировини кожного виду та повну вартість всієї затраченої сировини за даний проміжок часу.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix}, \; P = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \end{bmatrix}.$$

1.14. Магазин побутової техніки може закупити від 1 до 4 телевізорів по ціні 2000 грн. і продати по 2400 грн. кожний. Скласти матрицю прибутку магазину в залежності від кількості закуплених телевізорів (стрічка матриці) та від результату їх продажі (стовпчик матриці).

1.15. В сервісний центр поступають мобільні телефони, 80% яких потребують незначного ремонту, 15% – середнього ремонту, 5% – складного ремонту. Статистичні дослідження показали, що 20% з тих телефонів, які пройшли незначний ремонт будуть потребувати через рік повторного незначного ремонту, 50% – середнього, а 30% – складного ремонту. З телефонів, які пройшли середній ремонт, 10% потребують через рік незначного ремонту, 60% – середнього, 30% – складного ремонту. З телефонів, які пройшли складний ремонт, через рік 10% потребують незначного ремонту, 40% – середнього, 50% – складного ремонту. Які частки із відремонтованих на початку року телефонів будуть потребувати того чи іншого видів ремонту: через 1 рік; 2 роки; 3 роки.

1.16. В таблиці наведені дані про денну продуктивність 5 підприємств промислового холдингу, який виробляє 4 види продукції з використанням 3 видів сировини, а також тривалість роботи кожного підприємства за рік та ціна кожного виду сировини.

Вид продукції	Продуктивність підприємств					Витрати видів сировини		
	1	2	3	4	5	1	2	3
1	4	3	5	6	7	2	5	4
2	2	1	3	2	3	3	3	4
3	0	1	0	2	2	1	3	1
4	3	3	5	5	4	4	2	3
	Кількість робочих днів за рік					Ціна видів сировини		
	1	2	3	4	5	1	2	3
	200	150	200	170	120	10	20	30

Знайти:

1) річну продуктивність кожного підприємства по кожному виду продукції;

2) річні потреби кожного підприємства в кожному виді сировини;

3) річний об'єм фінансування кожного підприємства для постачання сировини, необхідної для виготовлення продукції кожного виду у вказаній кількості.

1.17. Підприємство виготовляє щодобово три види продукції, основні виробничо-економічні показники яких наведені в таблиці.

Вид продукції	Кількість виробів	Витрати сировини	Норми часу виготовлення	Ціна виробу
1	100	2	5	20
2	200	4	10	30
3	150	5	15	25

Використовуючи поняття матриці за даними таблиці скласти нову таблицю відповідно до умов:

а) кількість виробів кожного виду збільшилася на 20%;

б) норми часу виготовлення кожного виробу зменшилися на 10%;

в) ціна на всі види виробів зменшилася на 10%.

§ 2. Системи лінійних рівнянь

1. Система алгебраїчних рівнянь називається *лінійною*, якщо вона може бути записана у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

де $x_1, x_2, ..., x_n$ – невідомі, a_{ij} – дійсні числа, які називаються коефіцієнтами системи; $b_k\,(k = 1,2,3,..., n)$ – вільні члени.

Якщо всі $b_k = 0,$ тоді систему називається *однорідною*. Якщо хоча б один вільний член b_k не дорівнює нулю, тоді система алгебраїчних рівнянь називається *неоднорідною*.

Розв'язком системи називається множина дійсних чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n,$ підстановка яких у систему замість невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$ перетворює кожне рівняння у тотожність.

2. *Правило Крамера*. Якщо основний визначник Δ неоднорідної системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (визначник складений із коефіцієнтів, що стоять біля невідомих) не дорівнює нулю, то ця система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta},\ k = 1,2,...,n,$$

де Δ_k – допоміжний визначник, який одержується з основного визначника Δ шляхом заміни його k-го стовпчика стовпчиком вільних членів системи.

3. Якщо позначити

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_n \end{bmatrix},$$

то згідно з правилом множення матриць та умовою рівності матриць одержимо запис системи лінійних алгебраїчних рівнянь у матричній формі: $AX = B.$ Якщо матриця A квадратна порядку n і її визначник $\Delta(A)$ не дорівнює нулю, тоді існує обернена до A матриця A^{-1}, і матричний розв'язок системи знаходиться за формулою $X = A^{-1}B.$

4. Довільна система m лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},\ \text{де}\ m \neq n.$$

Складемо основну матрицю A і розширену матрицю $\tilde{A}$ цієї системи:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix},\quad \tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Теорема Кронекера – Капеллі. Система m лінійних рівнянь з n невідомими має розв'язок, тобто сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці A дорівнює рангу розширеної матриці $\tilde{A}$, тобто $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(\tilde{A}).$

5. Система лінійних рівнянь називається *однорідною*, якщо вона має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Якщо ранг матриці A системи лінійних однорідних рівнянь дорівнює кількості невідомих, тобто $\mathrm{rang}(A) = n,$ то система має єдиний нульовий розв'язок. Якщо $\mathrm{rang}(A) < n,$ то задана система має ненульові розв'язки.

*   *

*

Задача 1. Приватне підприємство складається з двох відділень, загальний прибуток яких в минулому році склав 150 тис. грн. На цей рік заплановано збільшення прибутків першого відділення на 60%, другого – на 30%, щоб загальний прибуток виріс в 1,4 рази. Яка величина прибутку кожного відділення: а) в минулому році; б) в цьому році?

Розв'язування. Нехай x та y – прибутки першого і другого відділень в минулому році. Тоді умови задачі можна записати у вигляді системи рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ 1{,}6x + 1{,}3y = 210 \end{cases},$$

яку розв'яжемо методом Гаусса.

Виключимо невідому величину x із другого рівняння. Для цього перше рівняння помножимо на "– 1,6" і додамо до другого рівняння:

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ -0{,}3y = -30 \end{cases}.$$

Звідси $y = 100$, а $x = 150 - y = 50$.

Отже, а) прибуток в минулому році першого відділення – 50 тис. грн., другого – 100 тис. грн.;

б) прибуток в цьому році першого відділення – 80тис. грн., другого – 130 тис. грн.

Задача 2. Підприємство отримало річний прибуток 100000 грн., 10% якого відраховано до благодійного фонду, 7% сплачено у вигляді податку до пенсійного фонду (після відрахувань до благодійного фонду) та 20% до державного бюджету (після відрахувань до пенсійного фонду). Знайти суми виплат до благодійного фонду, пенсійного фонду та державного бюджету.

Розв’язування. Нехай *x*, *y*, *z* – благодійний внесок, пенсійні виплати та виплати до державного бюджету, відповідно. Тоді чистий прибуток становить 1000000 – (*y* + *z*), а благодійний внесок – *x* = 0,1(100000 – (*y* + *z*)). Перепишемо останнє рівняння у вигляді

$$x+0{,}1y+0{,}1z=10000\ .$$

Об’єм виплат до пенсійного фонду становитимуть $y=0{,}07(100000\ -x)$, або

$$0{,}07x+y=7000\ .$$

Об’єм виплат до держаного бюджету становлять $z=0{,}2[100000\ -(x+y)]$, або

$$0{,}2x+0{,}2y+z=20000\ .$$

Отримали неоднорідну систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} x+0{,}1y+0{,}1z=10000 \\ 0{,}07x+y=7000 \\ 0{,}2x+0{,}2y+z=20000 \end{cases},$$

яку розв’яжемо методом Крамера.

Основний визначник цієї системи

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}07 & 1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 1 \end{vmatrix}=1+0{,}0014-0{,}02-0{,}007\ =0{,}9744\ \neq 0\,.$$

Обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 10000 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 7000 & 1 & 0 \\ 20000 & 0{,}2 & 1 \end{vmatrix}=10000\ +140-2000-700=7440\ ,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 10000 & 0{,}1 \\ 0{,}07 & 7000 & 0 \\ 0{,}2 & 20000 & 1 \end{vmatrix}=7000\ +140-140-700=6300\ ,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 0{,}1 & 10000 \\ 0{,}07 & 1 & 7000 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 20000 \end{vmatrix}=20000\ +140+140-2000\ -1400\ -140\ =16740\,.$$

Тепер знаходимо

$$x = \frac{7440}{0{,}9744} = 7635{,}468; \qquad y = \frac{6300}{0{,}9744} = 6465{,}517;$$

$$z = \frac{16740}{0{,}9744} = 17179{,}803.$$

Отже, до благодійного фонду внесено 7635,468 грн., до пенсійного фонду – 6465,517 грн., до державного бюджету – 17179,803 грн.

Задача 3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	200	1	3	2	1
S_2	330	2	5	3	4
S_3	280	2	4	3	5

Визначити кількість продукції P_1, P_2, ,P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо сировину буде повністю вичерпано. Вказати базовий розв'язок.

Розв'язування: Якщо вважати, що x_1, x_2, x_3, x_4 – це кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, тоді математичну модель даної економічної задачі можна записати у вигляді системи трьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 200 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 330 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 280 \end{cases}.$$

Розв'яжемо її методом Жордана-Гаусса, використовуючи таблиці:

Табл. 1. В першому рядку за ключовий елемент вибираємо 1. Цей рядок називається ключовим рядком. Переписуємо його без змін першим рядком другої таблиці. До відповідних елементів другого і третього рядків додаємо елементи першого помножені на "– 2". Результати записуємо другим і третім рядком таблиці 2.

№	$\boldsymbol{x_1}$	x_2	x_3	x_4	$в_i$
	<u>1</u>	3	2	1	200
1	2	5	3	4	330
	2	4	3	5	280

2	1	3	2	1	200
	0	**–1**	–1	2	–70
	0	–2	–1	3	–120
3	1	0	–1	7	–10
	0	1	1	–2	70
	0	0	**1**	–1	20
4	**1**	0	0	6	10
	0	**1**	0	–1	50
	0	0	**1**	–1	20

Табл. 2. В другому рядку за ключовий елемента вибираємо другий елемент “–1”. Результат ділення другого рядка на ключовий елемент, записуємо другим рядком третьої таблиці. Помноживши другий рядок таблиці 3 на “–3”, а потім на “2” та додавши отримані рядки відповідно до першого і третього рядків другої таблиці, отримаємо перший і третій рядки третьої таблиці, в яких відбувся процес виключення невідомої x_2.

Табл. 3. В третьому рядку коефіцієнтом “1” при невідомій x_3 є ключовим елементом, тому цей рядок з третьої таблиці переписуємо третім рядком четвертої таблиці. Виключимо невідому x_3 з перших двох рядків третьої таблиці. Для цього третій рядок додаємо спочатку до першого рядка третьої таблиці, а потім, множимо на “–1” і додаємо до другого рядка третьої таблиці. Результати дій записуємо першим і другим рядком четвертої таблиці. Таким чином в результуючій четвертій таблиці кожний рядок має лише дві із чотирьох невідомих. Ця таблиця є розширеною матрицею системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_4 = 10 \\ x_2 - x_4 = 50 \\ x_3 - x_4 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10 - 6x_4 \\ x_2 = 50 + x_4 \\ x_3 = 20 + x_4. \end{cases}$$

В останній системі рівнянь x_1, x_2, x_3 називаються базисними змінними, оскільки матриця, складена з коефіцієнтів при них є одиничною. Невідома

x_4 називається вільною, тому що може приймати будь-які значення. Але в нашій задачі невідомі x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) виражають кількість реалізованої продукції, тому вони повинні бути невід'ємними, тобто $x_i \geq 0$. А тому

$$\begin{cases} x_1 = 10 - 6x_4 \geq 0 \\ x_2 = 50 + x_4 \geq 0, \\ x_3 = 20 + x_4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 \leq 5/3 \\ x_4 \geq -50, \\ x_4 \geq -20 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x_4 \leq 5/3.$$

Будь-якому значенню $x_4 \in [0;5/3]$ відповідає невід'ємний розв'язок, який задовольняє умові задачі. Отже, для $x_4 = 0$, $x_1 = 10$, $x_2 = 50$, $x_3 = 20$ – базовий розв'язок.

Вправи

2.1. Приватне підприємство складається з двох відділень, загальний прибуток яких в минулому році склав 150 тис. грн. На цей рік прогнозується збільшення прибутків першого відділення на 60%, другого – на 30%, що в загальному складе 200 тис. грн. прибутку. Через рік прогнозується збільшення прибутків першого відділення на 70%, другого – на 40% у порівняні з минулим роком, що в загальному складе 300 тис. грн. Яка величина прибутку кожного відділення: а) в минулому році; б) в цьому році?

2.2. Швейна фабрика протягом трьох днів виготовила костюми, пальта і куртки. Відомі об'єми виготовлення продукції за три дні і витрати (у грн.) на виготовлення продукції:

День	Об'єм виготовлення продукції (одиниць)			Витрати (тис. грн.)
	Костюми	Пальта	Куртки	
1	40	10	20	100
2	30	30	25	120
3	40	20	30	120

Знайти собівартість продукції кожного виду.

2.3.Університет виділив 250 тис. грн. для закупівлі 30 предметів для обладнання електронної бібліотеки: кількох комп'ютерів по 4 тис. грн., столів по 1 тис. грн. і стільців по 0,4 тис. грн. Пізніше з'ясувалося, що комп'ютери та столи можна придбати дешевше по ціні 3,8 тис. грн. та 0,9 тис. грн. за штуку відповідно. У наслідок цього на ту ж суму вдалося придбати на один стіл більше. Знайти кількість одиниць кожного виду товару, який було закуплено.

2.4. Підприємство отримало річний прибуток 50000 грн., 5% якого відраховано до благодійного фонду, 10% сплачено у вигляді податку до місцевого бюджету (після відрахувань до благодійного фонду) та 20% до державного бюджету (після відрахувань до місцевого бюджету). Знайти суми виплат до благодійного фонду, місцевого бюджету та державного бюджету.

2.5. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

Запаси сировини та норми витрат на одиницю продукції наведені в таблицях:

.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*110*	*1*	*4*	*2*	*1*
S_2	*80*	*2*	*1*	*3*	*2*
S_3	*94*	*3*	*2*	*2*	*1*

.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*80*	*2*	*3*	*2*	*2*
S_2	*80*	*1*	*4*	*2*	*3*
S_3	*120*	*3*	*2*	*4*	*2*

.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*80*	*3*	*2*	*2*	*3*
S_2	*89*	*2*	*1*	*4*	*1*
S_3	*107*	*1*	*3*	*4*	*3*

§ 3. Модель Леонтєва багатогалузевої економіки

1. Рівняння системи

$$\begin{cases} x_1 = x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} + y_1 \\ x_2 = x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} + y_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn} + y_n \end{cases}$$

називаються *балансовими співвідношеннями*, де x_i – загальний об'єм продукції, виробленої в *i*-ій галузі (план валового виробництва продукції) ($x_i \geq 0$), $i = 1, 2, \ldots, n$; x_{ij} – об'єм продукції *i*-ї галузі, який використовується *j*-ю галуззю в процесі виробництва об'єму продукції x_i; y_i – об'єм продукції *i*-ї галузі, який призначений для реалізації (кінцевий продукт) ($y_i \geq 0$).

2. Величини $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) називаються *коефіцієнтами прямих витрат*, які показують витрати *i*-ї галузі на виготовлення одиниці продукції *j*-ї галузі. Тоді балансові співвідношення можна записати у вигляді

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n \end{cases},$$

або у матричному вигляді (модель Леонтєва)

$$X = A \cdot X + Y,$$

де

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \; Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Вектор X називається *вектором валового виробництва*; вектор Y – *вектором кінцевого продукту*; матриця A – *матрицею прямих витрат*.

3. Вектор валового виробництва X при відомій матриці прямих витрат A і заданому векторі кінцевого продукту Y за деякий період часу знаходиться за формулою:

$$X = (E - A)^{-1} Y = BY.$$

4. Матриця $B=(E-A)^{-1}$ називається *матрицею повних витрат*, кожен елемент b_{ij} якої показує об'єм виробленої продукції i-ї галузі, який необхідний для виготовлення одиниці продукції j-ю галуззю.

5. Матриця $C=B-A$ називається *матрицею непрямих* (посередницьких) *витрат*.

6. Матриця A називається *продуктивною*, якщо для будь-якого вектора $Y \ge 0$ ($y_i \ge 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$) існує розв'язок $X \ge 0$ ($x_i \ge 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$) рівняння $X = A \cdot X + Y$.

Економічний зміст непродуктивності полягає в тому, що внутрішнє споживання окремих галузей перевищує їх валове виробництво.

Критерії продуктивності матриці:

1) Матриця A продуктивна тоді і тільки тоді, коли матриця $B=(E-A)^{-1}$ існує і її елементи невід'ємні.

2) Матриця A з невід'ємними елементами продуктивна, якщо сума елементів по будь-якому стовпцю (рядку) не перевищує одиниці та для хоча б одного стовпця (рядка) ця сума строго менша одиниці.

7. *Запасом продуктивності* продуктивної матриці A називається число $\alpha > 0$, таке що всі матриці λA, де $1 < \lambda < 1+\alpha$, продуктивні, а матриця $(1+\alpha)A$ – непродуктивна.

8. *Модель рівноважних цін* (двоїста модель Леонтєва) описується системою балансових рівнянь

$$\begin{cases} p_1 = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{n1}p_n + v_1 \\ p_2 = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{n2}p_n + v_2 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ p_n = a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{nn}p_n + v_n \end{cases},$$

де a_{ij} (i, j = 1, 2, …, n) – коефіцієнти прямих витрат; p_i – ціна одиниці продукції i-ї галузі; v_i – норма доданої вартості, яка показує величину доданої вартості (частина доходу, яка йде на виплату зарплати та податків, підприємницький прибуток та інвестиції) на одиницю виробленої продукції.

Систему балансових рівнянь можна записати в матричному вигляді

$$P = A^T \cdot P + V,$$

де

$$P=\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\...\\p_n\end{bmatrix},\ V=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\...\\v_n\end{bmatrix},\ A^T=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&...&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&...&a_{n2}\\...&...&...&...\\a_{1n}&a_{2n}&...&a_{nn}\end{bmatrix}.$$

Вектор P називається *вектором цін*; вектор V – *вектором норм доданої вартості*; матриця A^T – *транспонованою матрицею прямих витрат*.

Вектор рівноважних цін P при відомій транспонованій матриці прямих витрат A^T і заданому векторі норм доданої вартості V за деякий період часу знаходиться за формулою:

$$P=(E-A^T)^{-1}V=B^TY,$$

де $B^T=(E-A^T)^{-1}$ – транспонована матриця повних витрат.

Модель рівноважних цін дозволяє, знаючи величини норм доданої вартості, здійснювати прогноз цін на продукцію галузей. Вона також дає можливість прогнозувати зміни цін та інфляцію, яка є наслідком змін цін в одній з галузей.

* *

*

Задача 1. Прямі витрати двох галузей виробництва, а також обсяги кінцевих продуктів (у грошових одиницях) задані у таблиці:

Продукція цехів	Прямі витрати		Кінцевий продукт
	1	2	
1	0,11	0,06	154
2	0,21	0,11	157

Знайти:

а) матрицю повних витрат та перевірити її на продуктивність; б) вектор кінцевого продукту; в) вектор валового виробництва; г) міжгалузеві витрати; д) матрицю непрямих витрат.

Розв'язування. а) З таблиці видно, що матриця прямих витрат буде:

$$A=\begin{bmatrix}0{,}11&0{,}06\\0{,}21&0{,}11\end{bmatrix}.$$

Сума елементів кожного стовпця (рядка) менша одиниці, тому, згідно другого критерію продуктивності матриці, матриця *A* є продуктивною.

б) $Y=\begin{bmatrix}154\\157\end{bmatrix}$ є вектором кінцевого продукту.

в) Знайдемо вектор валового виробництва за формулою $X=(E-A)^{-1}Y$.

$$E-A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0,11 & 0,06\\ 0,21 & 0,11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,89 & -0,06\\ -0,21 & 0,89\end{bmatrix}.$$

Для знаходження матриці $B=(E-A)^{-1}$, обчислимо визначник:

$$|E-A|=\begin{vmatrix}0,89 & -0,06\\ -0,21 & 0,89\end{vmatrix}=0,7921-0,0126=0,7795\neq 0.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів матриці $E-A$:

$$A_{11}=(-1)^2\,|0,89|=0,89;\quad A_{12}=(-1)^3\,|-0,21|=0,21;$$

$$A_{21}=(-1)^3\,|-0,06|=0,06;\quad A_{22}=(-1)^4\,|0,89|=0,89.$$

Обернена матриця (матриця повних витрат) має вигляд:

$$B=(E-A)^{-1}=\frac{1}{0,7795}\begin{bmatrix}0,89 & 0,06\\ 0,21 & 0,89\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1,14 & 0,08\\ 0,27 & 1,14\end{bmatrix}.$$

Остаточно маємо:

$$X=BY=\begin{bmatrix}1,14 & 0,08\\ 0,27 & 1,14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}154\\ 157\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}188\\ 221\end{bmatrix}.$$

Отже, валове виробництво першої галуззі становить 188 у. од., а другої – 221 у. од.

г) Міжгалузеві витрати знайдемо за формулами $x_{ij}=a_{ij}x_j$:

$$x_{11}=a_{11}x_1=0,11\cdot188=20,68,\quad x_{12}=a_{12}x_2=0,06\cdot221=13,26,$$

$$x_{21}=a_{21}x_1=0,21\cdot188=39,48,\quad x_{22}=a_{22}x_2=0,11\cdot221=24,31.$$

д) Запишемо матрицю непрямих витрат C:

$$C=B-A=\begin{bmatrix}1,14 & 0,08\\ 0,27 & 1,14\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0,11 & 0,06\\ 0,21 & 0,11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,03 & 0,02\\ 0,06 & 0,03\end{bmatrix}.$$

Задача 2. Перевірити на продуктивність матрицю

$$A=\begin{bmatrix}0,3 & 0,5\\ 0,8 & 0,4\end{bmatrix}$$

та знайти її запас продуктивності.

Розв'язування. Використаємо перший критерій продуктивності матриці. Для цього знайдемо матрицю $E-A$ та обернену до неї:

$$E-A=\begin{bmatrix}0{,}7 & -0{,}5\\ -0{,}8 & 0{,}6\end{bmatrix},\quad (E-A)^{-1}=\begin{bmatrix}30 & 25\\ 40 & 35\end{bmatrix}.$$

Видно, що матриця $(E-A)^{-1}$ існує і має невід’ємні елементи. Отже, A продуктивна.

Для знаходження запасу продуктивності знову будемо користуватися першим критерієм продуктивності матриці. У даному випадку

$$E-\lambda A=\begin{bmatrix}1-0{,}3\lambda & -0{,}5\lambda\\ -0{,}8\lambda & 1-0{,}4\lambda\end{bmatrix}.$$

Визначник цієї матриці

$$\Delta=|E-\lambda A|=(1-0{,}3\lambda)(1-0{,}4\lambda)-0{,}4\lambda^2=-0{,}28\lambda^2-0{,}7\lambda+1.$$

Тоді обернена матриця має вигляд:

$$(E-\lambda A)^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{1-0{,}3\lambda}{\Delta} & \dfrac{0{,}5\lambda}{\Delta}\\ \dfrac{0{,}8\lambda}{\Delta} & \dfrac{1-0{,}4\lambda}{\Delta}\end{bmatrix}.$$

Матриця λA буде продуктивною, якщо всі елементи матриці $(E-\lambda A)^{-1}$ будуть невід’ємними. Це можливо лише тоді, коли

$$\begin{cases}\Delta>0\\ 1-0{,}3\lambda\ge 0\\ 1-0{,}4\lambda\ge 0\\ \lambda>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3{,}515<\lambda<1{,}015\\ \lambda<10/3\\ \lambda\le 2{,}5\\ \lambda>1\end{cases}\Rightarrow \lambda\in(1;1{,}015).$$

При $\lambda\in(1;1{,}015)$ матриця λA продуктивна, а при $\lambda=1{,}015$ – непродуктивною. Отже, запас продуктивності матиці A дорівнює 0,015.

Задача 3. Баланс двох галузей промисловості за деякий період (у грошових одиницях) наведений в таблиці.

Галузь	Споживання		Кінцевий продукт	Валове виробництво
	Промисловість	Сільське господарство		
Промисловість	11	12	77	100
Сільське господарство	21	24	155	200

Знайти об'єм валового виробництва кожного виду продукції, якщо кінцевий продукт за галузями збільшився вдвічі.

Розв'язування. Знайдемо матрицю прямих витрат:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{x_{11}}{x_1} & \dfrac{x_{12}}{x_2} \\ \dfrac{x_{21}}{x_1} & \dfrac{x_{22}}{x_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0{,}11 & 0{,}06 \\ 0{,}21 & 0{,}12 \end{bmatrix}.$$

Матриця повних витрат:

$$B=(E-A)^{-1}=\begin{bmatrix} 0{,}89 & -0{,}06 \\ -0{,}21 & 0{,}88 \end{bmatrix}^{-1}\approx\begin{bmatrix} 1{,}14 & 0{,}08 \\ 0{,}27 & 1{,}15 \end{bmatrix}.$$

Відповідно до умови задачі вектор кінцевої продукції повинен бути рівним

$$Y=2\cdot\begin{bmatrix} 77 \\ 155 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 154 \\ 310 \end{bmatrix}.$$

Вектор валового виробництва становить

$$X=BY=\begin{bmatrix} 1{,}14 & 0{,}08 \\ 0{,}27 & 1{,}15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 154 \\ 310 \end{bmatrix}\approx[\ ].$$

Отже, валове виробництво в промисловості потрібно збільшити на 53,6 у. од., а в сільському господарстві – на 182,8 у. од.

Задача 4. Економічна система складається з трьох галузей. Нехай транспонована матриця прямих витрат та вектор норм добавленої вартості мають вигляд

$$A^T=\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{bmatrix},\ V=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Знайти вектор рівноважних цін P та зміну вектора рівноважних цін ΔP після підвищення норми доданої вартості в першій галузі на 10%.

Розв'язування. Спочатку знайдемо транспоновану матрицю повних витрат:

$$B^T=(E-A^T)^{-1}\approx\begin{bmatrix} 1{,}64 & 1{,}15 & 0{,}98 \\ 0{,}43 & 2{,}1 & 0{,}66 \\ 0{,}46 & 0{,}72 & 1{,}48 \end{bmatrix}.$$

Тоді рівноважні ціни становлять

$$P = B^T V = \begin{bmatrix} 11,48 \\ 10,98 \\ 7,21 \end{bmatrix}.$$

Після зміни норми доданої вартості, тобто $V = \begin{bmatrix} 3,3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, новий вектор рівноважних цін становитиме $P_1 = \begin{bmatrix} 11,97 \\ 11,11 \\ 7,35 \end{bmatrix}$, а вектор зміни цін буде мати вигляд $\Delta P = P_1 - P = \begin{bmatrix} 0,49 \\ 0,13 \\ 0,14 \end{bmatrix}$.

Таким чином, продукція першої галузі подорожчала на 4,27%, другої – на 1,18%, третьої галузі – на 1,94%.

Вправи

З’ясувати, чи продуктивні матриці:

3.1. $\begin{bmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,9 & 0,3 \end{bmatrix}$.

3.2. $\begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix}$.

3.3. $\begin{bmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}$.

3.4. $\begin{bmatrix} 0,3 & 1,1 \\ 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}$.

3.5. $\begin{bmatrix} 0 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \end{bmatrix}$.

3.6. $\begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,4 \\ 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \end{bmatrix}$.

З’ясувати, який запас продуктивності мають матриці:

3.7. $\begin{bmatrix} 0,2 & 0,5 \\ 0,8 & 0,3 \end{bmatrix}$.

3.8. $\begin{bmatrix} 0,4 & 0,7 \\ 0,7 & 0,1 \end{bmatrix}$.

3.9. Економічна система складається з двох галузей, яка характеризується наступними даними (у грошових одиницях):

Галуз	Споживання	Кінце

ь	I	II	вий продукт
I	150	200	150
II	200	100	100

Обчислити матрицю прямих витрат.

3.10. Наведено данні про роботу системи двох галузей в минулому місяці і план виробництва кінцевої продукції в наступному місяці Y_1 (у грошових одиницях)

Галузь	Споживання		Кінцевий продукт, Y_0	Кінцевий продукт, Y_1
	I	II		
I	100	200	250	300
II	50	150	200	200

Знайти матриці прямих і повних витрат, а також вектор валового виробництва в наступному місяці, який забезпечить виробництво кінцевої продукції Y_1.

3.11. Задано матрицю *A* прямих витрат деякої моделі багатогалузевого балансу. Знайти вектор кінцевої продукції Y, який відповідає вектору валового виробництва *X*:

$$A = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 1{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 1{,}1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 250 \end{bmatrix}.$$

3.12. Задано матрицю *A* прямих витрат деякої моделі багатогалузевого балансу. Знайти вектор валового виробництва *X*, який відповідає вектору кінцевої продукції Y:

$$A = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 1{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 1{,}1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 150 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

3.13. Задано матрицю *A* прямих витрат. Знайти зміну векторів:

а) кінцевого продукту ΔY при заданій зміні вектора валової продукції ΔX;

б) валового виробництва ΔX при заданій зміні вектора кінцевого продукту ΔY:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}2 \end{bmatrix}; \text{ а) } \Delta X = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \end{bmatrix}; \text{ б) } \Delta Y = \begin{bmatrix} 92 \\ 138 \end{bmatrix}.$$

3.14. Задано матрицю *A* прямих витрат. Знайти зміну векторів:

а) кінцевого продукту ΔY при заданій зміні вектора валової продукції ΔX ;

б) валового виробництва ΔX при заданій зміні вектора кінцевого продукту ΔY :

$$A=\begin{bmatrix}1{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}5 & 1{,}3 & 0{,}4\\ 0{,}2 & 0{,}6 & 1{,}5\end{bmatrix};\ \text{а)}\ \Delta X=\begin{bmatrix}10\\ 20\\ 30\end{bmatrix};\ \text{б)}\ \Delta Y=\begin{bmatrix}5\\ -10\\ 20\end{bmatrix}.$$

3.15. Баланс двох галузей промисловості за деякий період (у грошових одиницях) наведений в таблиці.

Галузь	Споживання		Кінцевий продукт
	I	II	
I	0,5	0,4	300
II	0,2	0,3	200
III	0,2	0,2	250

Знайти об’єм валового виробництва кожного виду продукції, якщо об’єм кінцевої продукції для першої галузі збільшився на 10%, для другої – збільшився на 20%, а для третьої – зменшився на 5%.

3.16. Економічна система складається з трьох галузей. Нехай матриця прямих витрат та вектор норм добавленої вартості мають вигляд

$$A=\begin{bmatrix}0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1\end{bmatrix},\ V=\begin{bmatrix}4\\ 4\\ 2\end{bmatrix}.$$

Знайти вектор рівноважних цін P та зміну вектора рівноважних цін ΔP після підвищення норми доданої вартості в другій галузі на 5%.

Питання для самоконтролю

1. В чому полягає суть моделі Леонтєва багатогалузевої економіки?
2. Яка основна задача міжгалузевого балансу?
3. Як визначають матрицю прямих витрат?
4. Як визначають матрицю повних витрат?
5. Як визначають матрицю посередницьких витрат?
6. Який існує критерій продуктивності моделі Леонтєва?
7. Як будується економічна модель рівноважних цін?
8. В чому полягає модель міжнародної торгівлі?

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

§ 2. Власні вектори і власні значення матриць. Модель міжнародної торгівлі

1. Ненульовий вектор $\vec{x}$ називається *власним вектором* матриці A, якщо знайдеться таке число λ, що

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x},$$

де число λ називається *власним значенням* матриці A, яке відповідає вектору $\vec{x}$.

2. Рівняння

$$|A - \lambda E| = 0$$

називається *характеристичним рівняння* матриці A.

3. Власні значення матриці A є коренями її характеристичного рівняння.

4. Система рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = x_n \end{cases}$$

є *моделлю міжнародної торгівлі* (*лінійною моделлю торгівлі*), де x_i (i = 1, 2, …, n) – національний дохід i-ї держави; a_{ij} (i, j = 1, 2, …, n) – частка національного доходу, яку j-а держава витрачає на покупку товарів у i-й державі.

Вважаємо, що весь національний дохід витрачається на закупку товарів або всередині держави, або на імпорт із інших держав, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad (j = 1,2,...,n).$$

Модель міжнародної торгівлі можна записати у матричному вигляді

$$A \cdot X = X,$$

де

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Матриця *A*, з властивістю, що сума елементів її довільного стовпчика дорівнює 1, називається *структурною матрицею торгівлі, X* – матриця-стовпчик складена з координат *вектора* $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$ *національних доходів*.

Отже, вектор $\vec{x}$ національних доходів є власним вектором структурної матриці торгівлі *A*, який відповідає власному значенню $\lambda=1$.

5. Максимальне по модулю власне значення невід'ємної матриці *A* називається *числом Фробеніуса* матриці *A*, а невід'ємний власний вектор який йому відповідає – *вектором Фробеніуса* для *A*.

6. *Критерій продуктивності матриці*: Невід'ємна квадратна матриця *A* продуктивна тоді і тільки тоді, коли її число Фробеніуса менше одиниці.

*   *

*

Задача 1. Структурна матриця торгівлі трьох країн має вигляд

$$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Знайти співвідношення між національними доходами країн, при якому буде торгівля збалансована.

Розв'язування. Позначимо національні доходи відповідно x_1,x_2,x_3. Тоді знаходимо власний вектор $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$, який відповідає власному значенню $\lambda = 1$, розв'язавши рівняння $(A - E)X = 0$ або систему рівнянь

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Неважко знайти загальний розв'язок цієї системи:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} x_3 \\ x_2 = \frac{3}{2} x_3 \end{cases},$$

тому за власний вектор можна взяти вектор $\vec{x} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1 \right)$.

Одержаний результат означає, що збалансованість торгівлі цих трьох країн досягається при співвідношенні доходів $\frac{3}{2} : \frac{3}{2} : 1$ або $3:3:2$.

Задача 2. З'ясувати при яких значеннях $a > 0$ матриця

$$A = a \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

буде продуктивною.

Розв'язування. Запишемо характеристичне рівняння матриці *A*

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a - \lambda & 3a & 0 \\ 3a & a - \lambda & 0 \\ 6a & 6a & 9a - \lambda \end{vmatrix} = (9a - \lambda)\left((2a + \lambda)^2 - 9a^2\right) =$$

$$= (9a - \lambda)(2a + \lambda)(\lambda - 4a) = 0.$$

Корені цього рівняння (власні значення):

$\lambda_1 = 9a$, $\lambda_2 = 4a$, $\lambda_3 = -2a$.

Матриці *A* буде продуктивною, якщо виконується умова $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} < 1$, тобто $9a < 1$.

Отже, для будь-якого $a \in (0; 1/9)$ матриця *A* буде продуктивною.

Вправи

Визначити у якому співвідношенні повинні бути національні доходи трьох країн для збалансування торгівлі, якщо задано структурну матрицю торгівлі A:

2.1. $A=\begin{bmatrix}0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}6\\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3\end{bmatrix}$. 2.2. $A=\begin{bmatrix}0 & 1/3 & 0{,}25\\ 0{,}75 & 1/3 & 0{,}25\\ 0{,}25 & 1/3 & 0{,}5\end{bmatrix}$.

Знайти рівноважний вектор національних доходів в моделі міжнародної торгівлі для структурної матриці A, якщо відомо, що сумарний дохід цих країн становить 380 млрд. у. о.:

2.3. $A=\begin{bmatrix}0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}4\\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3\end{bmatrix}$. 2.4. $A=\begin{bmatrix}0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}6\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2\end{bmatrix}$.

2.5. $A=\begin{bmatrix}0{,}25 & 0{,}25 & 0\\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25\\ 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}75\end{bmatrix}$. 2.6. $A=\begin{bmatrix}3/10 & 3/10 & 4/5\\ 3/5 & 1/10 & 1/10\\ 1/10 & 3/5 & 1/10\end{bmatrix}$.

Знайти усі значення параметра $a>0$, при яких матриця А буде продуктивною:

2.7. $A=a\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 7 & 6 & 9\end{bmatrix}$. 2.8. $A=a\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ 5 & 3 & 2\end{bmatrix}$.

Питання для самоконтролю

1. Що таке вектор?
2. Що таке координати вектора?
3. Як визначають скалярний добуток векторів?
4. Як визначають скалярний добуток двох векторів через координати векторів співмножників?
5. Що таке орт вектора?
6. Який простір називають простором товарів?
7. Що таке вектор цін?
8. Як обчислюють ціну набору товарів?

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИ І МОДЕЛІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

§ 2. Задачі лінійного програмування

Іноді для пошуку мінімального чи максимального значення деякої лінійної функції за цілого ряду умов будують таку математичну модель, яка зводиться до розв'язування задач лінійного програмування та здійснюють перетворення у декілька етапів, щоб отримати екстремальні значення даної функції.

В загальному вигляді нехай задано систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_n; \\ x_i \geq 0\left(i = \overline{1,n}\right). \end{cases} \qquad (1)$$

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \qquad (2)$$

Систему рівностей і нерівностей (1) називають системою обмежень.

А лінійну форму (2) – цільовою функцією або функцією мети.

До системи (1) можуть входити як рівності, так і нерівності обох знаків і їхні комбінації. Якщо виконуються певні умови, то шляхом перетворень систему обмежень можна звести до вигляду, коли до неї входитимуть лише рівності або лише нерівності.

Задачі, у яких цільова функція і функції-обмеження записані у лінійному вигляді називаються *задачами лінійного програмування*.

Розглянемо основні типи задач, що приводять до загальної задачі лінійного програмування.

Задача про розподіл сировини.

Для виготовлення n видів продукції $P_1, P_2, ..., P_n$ використовують m видів сировини $S_1, S_2, ..., S_m$. Відомо, що запаси сировини обмежені і дорівнюють відповідно $b_1, b_2, ..., b_m$ одиниць. Для виготовлення продукції однієї одиниці $P_j\left(j = \overline{1,n}\right)$ необхідно затратити a_{ij} одиниць сировини $S_i\left(i = \overline{1,m}\right)$. Від реалізації одиниці продукції $P_j\left(j = \overline{1,n}\right)$ можна отримати дохід $c_j\left(j = \overline{1,n}\right)$ грошових одиниць. Скласти такий план випуску продукції $P_j\left(j = \overline{1,n}\right)$, щоб отримати максимальний дохід від її реалізації.

Занесемо дані до таблиці:

Сировин	Запас	Кількість одиниць сировини на

а		виготовлення одиниці продукції			
		P_1	P_2	…	P_n
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…
S_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}
Дохід від реалізації		c_1	c_2	…	c_n

Складемо математичну модель задачі.

Для цього позначимо через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ відповідно кількість одиниць продукції $P_1, P_2, \ldots, P_n$, яку потрібно виготовити. Тоді на виготовлення продукції буде витрачено:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$ – одиниць сировини S_1;

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n$ – одиниць сировини S_2;

………………………………………………

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n$ – одиниць сировини S_m.

Окрім того, відомо, що запаси сировини обмежені, тому справедливими будуть нерівності:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2;$$

....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_n.$$

Враховуючи умову задачі, одержимо додаткові нерівності для невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які повинні бути невід'ємними $x_i \ge 0 \left(i = \overline{1, n}\right)$. І відповідно, якщо деякий вид продукції P_i не виробляються, то відповідний йому x_i =0.

Для обчислення прибутку складемо лінійну функцію, що буде дорівнювати:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

Для розв'язування задачі потрібно знайти максимальне значення цієї лінійної функції. Отже, математична модель даної задачі буде мати вигляд:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_n; \\ x_i \ge 0\left(i = \overline{1,n}\right). \end{cases}$$

Задача про суміші.

Задачі про суміші – це задачі, в яких змішують задану кількість різних речовин для отримання суміші, що має певні властивості. При цьому, потрібно, щоб вартість такої суміші була мінімальною. До задач про суміші належать задачі про дієту, задачі про кормовий раціон тварин, задачі про отримання суміші для різних марок бензину тощо.

Нехай задано *m* видів сировини, запаси якої відповідно становлять $k_1, k_2, ..., k_m$. Із цієї сировини необхідно утворити суміш, що містила б *n* речовин, які визначають технічні характеристики суміші. Відомі величини $a_{ij}\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$ будуть вказувати на кількість *j*-ої речовини в одиниці *i*-ого виду сировини. Відомою також є вартість *i*-ого виду сировини, яку позначимо через $c_i\left(i = \overline{1,m}\right)$. Окрім того, в задачі задано обмеження на кількість *j*-ої речовини, позначимо як $b_j\left(j = \overline{1,n}\right)$ – мінімально допустима кількість *j*-ої речовини в суміші. Отримати суміш із заданими властивостями при мінімальних витратах на задані види сировини.

Занесемо дані до таблиці:

Вид речовини / Сировина	1	2	…	*n*	Обсяг сировини	Ціна сировини
1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	k_1	c_1
2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	k_2	c_2
…	…	…	…	…	…	…
m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	k_m	c_m
Мінімальна кількість	b_1	b_2	…	b_n		

речовини в суміші						

Складемо математичну модель задачі.

Для цього позначимо через $x_1, x_2, \ldots, x_m$ відповідно кількість сировини *i*-ого виду, яка буде входити в суміш. Окрім того, задано обмеження на кількість *j*-ої речовини, тому справедливими будуть нерівності:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq b_1;$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq b_2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq b_n.$$

Враховуючи умову задачі, одержимо додаткові нерівності для невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які повинні бути невід'ємними і обмеженими певним обсягом речовини, тобто $0 \leq x_i \geq k_i \left(i = \overline{1, m}\right)$.

Для обчислення витрат складемо лінійну функцію, що буде дорівнювати:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m.$$

Для розв'язування задачі потрібно знайти мінімальне значення цієї лінійної функції. Отже, математична модель даної задачі буде мати вигляд:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq b_1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq b_n; \\ 0 \leq x_i \geq k_i \left(i = \overline{1, m}\right). \end{cases}$$

Задачі про раціональний розкрій матеріалу.

Задача про раціональний розкрій матеріалу полягає у знаходженні найоптимальнішого способу розкрою матеріалу, при якому буде отримано найбільшу кількість заготовок або одержано найменшу кількість відходів.

Нехай маємо *a* одиниць матеріалу одного виду, з якого потрібно отримати комплекти, кожен з яких міститиме *n* видів виробів в кількостях, що будуть дорівнювати числам $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Існує *m* способів розкрою даного матеріалу, отже, кількість одиниць *j*-их виробів при *i*-ому способі розкрою одиниці матеріалу позначимо через $a_{ij} \left(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}\right)$. При цьому ми будемо отримувати певні відходи, які позначимо через $c_i \left(i = \overline{1, m}\right)$. Потрібно скласти план розкрою, отримавши при цьому мінімальну кількість відходів.

Занесемо дані до таблиці:

Вид виробу / Спосіб розкрою	1	2	…	n	Відходи
1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	c_1
2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	c_2
…	…	…	…	…	…
m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	c_m
Кількість виробів	b_1	b_2	…	b_n	

Складемо математичну модель задачі.

Для цього позначимо через $x_1, x_2, \ldots, x_m$ відповідно кількість одиниць матеріалу, що буде розкроєний i-им способом. Тоді кількість виробів першого виду буде дорівнювати:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m .$$

Враховуючи умову задачі про отримання певної кількості виробів, одержимо:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m = b_1 .$$

Такі ж рівняння отримаємо і для виробів інших видів. Окрім того, враховуючи умову невід'ємності для змінних $x_1, x_2, \ldots, x_m$, матимемо систему обмежень:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m = b_1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m = b_n; \\ x_i \geq 0 \left(i = \overline{1, m}\right). \end{cases}$$

Цільовою функцією задачі буде мінімізація відходів, тобто

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m \to \min .$$

Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

У випадку, коли кількість невідомих дорівнює 2, для її розв'язування зручно застосовувати графічний метод. Виходячи з умови невід'ємності x_1 і x_2, розв'язок ЗЛП завжди лежатиме в І-ій чверті.

Відшукання розв'язку проводять за таким алгоритмом:

1. За заданими обмеженнями із системи обмежень будують многокутник розв'язків, який утвориться із перетину півплощин, якщо до системи обмежень входять нерівності і прямих, якщо в системі рівняння. Якщо не вдалося знайти спільні точки, які утворяться при побудові многокутника розв'язків, то говорять, що у ЗЛП немає жодного розв'язку.
2. Відшуковують точки, у яких цільова функція набуватиме мінімального, максимального значення. Для цього будують вектор нормалі $\overrightarrow{N}$, початкова точка якого (0;0), а кінцева $(c_1;c_2)$, де c_1 та c_2 – коефіцієнти цільової функції при невідомих. Після цього перпендикулярно до вектора нормалі $\overrightarrow{N}$ будують пряму, яку називають лінією рівня.
3. Переміщують лінію рівня вздовж напрямку вектора нормалі $\overrightarrow{N}$. Остання точка, яка зустрінеться при перетині лінії рівня і многокутника розв'язків буде точкою max. Якщо переміщувати лінію рівня у напрямі протилежному напряму вектора нормалі $\overrightarrow{N}$, то остання точка буде точкою min.
4. Обчислюють координати точки перетину і підставивши їхні значення у рівняння цільової функції, обчислюють max та min цільової функції.

Зауваження:

1) Якщо вдалося побудувати многокутник розв'язків, то він обов'язково буде опуклим.

2) Многокутник розв'язків може бути замкнутим або не замкнутим. Якщо він замкнутий, то існує числове значення max та min. Якщо не замкнений, то max та min, або одне з цих значень лежить у нескінченності.

3) В загальному випадку точками перетину лінії рівня і многокутника розв'язків будуть деякі вершини многокутника розв'язків. Як часткові випадки можуть бути відрізок, промінь.

4) Для зручності обчислень вибирають точки перетину з осями чи шукають координати вершин многокутника як точки перетину двох прямих, що їх утворюють.

5) Для побудови вектора нормалі для нас важлива не його абсолютна величина, а його напрямок, а це означає, що координати кінця вектора можна пропорційно змінювати.

Інколи можна досить просто розв'язати ЗЛП, якщо задані змінні x_1, x_2, x_3. В цьому випадку необхідно змінити позначення півплощина – на півпростір, многокутник розв'язків – на многогранник розв'язків, лінія рівня – на площина, вектор нормалі – трьохвимірний.

В загальному випадку графічний метод може використовуватися в *n*-вимірному просторі.

* *

*

Задача 1. Для виготовлення двох видів продукції P_1 і P_2 використовують три види сировини S_1, S_2, S_3. Відомо, що запаси сировини відповідно дорівнюють 30, 25, 20 одиниць. Для виготовлення продукції однієї одиниці P_1 необхідно затратити 5 одиниць сировини S_1, 8 одиниць сировини S_2 і 4 одиниці сировини S_3. Для виготовлення одиниці продукції P_2 необхідно затратити 6 S_1, 7 S_2 і 3 S_3. Від реалізації одиниці продукції P_1 можна отримати дохід 20 грошових одиниць, а від реалізації одиниці продукції P_2 – 45 грошових одиниць. Скласти такий план випуску продукції P_1 і P_2, щоб отримати максимальний дохід від її реалізації.

Занесемо дані до таблиці:

Сировина	Запас	Кількість одиниць сировини на виготовлення одиниці продукції	
		P_1	P_2
S_1	30	5	6
S_2	25	8	7
S_3	20	4	3
Дохід від реалізації		20	45

Складемо математичну модель задачі.

Для цього позначимо через x_1 і x_2 відповідно кількість одиниць продукції P_1 і P_2, яку потрібно виготовити. Тоді на виготовлення продукції буде витрачено:

$5x_1 + 6x_2$ – одиниць сировини S_1;

$8x_1 + 7x_2$ – одиниць сировини S_2;

$4x_1 + 3x_2$ – одиниць сировини S_3.

Окрім того, відомо, що запаси сировини обмежені, тому справедливими будуть нерівності:

$5x_1 + 6x_2 \le 30;$

$8x_1 + 7x_2 \le 25;$

$4x_1 + 3x_2 \le 20.$

Враховуючи умову задачі, одержимо додаткові нерівності для невідомих x_1, x_2, які повинні бути невід'ємними $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

Для обчислення прибутку складемо лінійну функцію, що буде дорівнювати:

$f = 20x_1 + 45x_2$.

Для розв'язування задачі потрібно знайти максимальне значення цієї лінійної функції. Отже, математична модель даної задачі буде мати вигляд:

$$f = 20x_1 + 45x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \le 30; \\ 8x_1 + 7x_2 \le 25; \\ 4x_1 + 3x_2 \le 20; \\ x_1 \ge 0; \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 2. Денна дієта повинна містити не менше 8 одиниць вітаміну А, 10 одиниць вітаміну В і 6 одиниць вітаміну С. Для дієти використовують два різні продукти. В першому міститься 2 одиниці вітаміну А, 1 одиниця вітаміну В і 1 одиниця вітаміну С. В одиниці другого продукту міститься 1 одиниці вітаміну А, 3 одиниця вітаміну В і 1 одиниця вітаміну С. Скласти дієту так, щоб вона задовольняла мінімальну денну потребу в вітамінах за умови найменшої вартості. Якщо ціна однієї одиниці першого продукту складає 0,1 грошових одиниць, а другого – 0,5 грошових одиниць.

Занесемо дані до таблиці:

Вітаміни / Продукти	Вітамін А	Вітамін В	Вітамін С	Ціна продуктів
1	2	1	1	0,1
2	1	3	1	0,5
Мінімальна денна	8	10	6	

потреба в вітамінах				

Складемо математичну модель задачі.

Для цього позначимо через x_1, x_2 відповідно кількість одиниць першого і другого продуктів, які використовують для дієти. Одержимо систему нерівностей:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 8; \\ x_1 + 3x_2 \geq 10; \\ x_1 + x_2 \geq 6; \\ x_1 \geq 0; \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Цільовою функцією задачі буде мінімізація витрат на продукти харчування:

$$f = 0{,}1x_1 + 0{,}5x_2 \to \min .$$

Задача 3. В цеху здійснюється розріз металевого дроту для подальшого збору із отриманих частин готової продукції. На складі є заготовки стандартної ширини по 9 м. Для подальшого використання потрібен металевий дріт нестандартної ширини: 4 штуки довжиною 4 м, 3 штуки довжиною 3,5 м та 6 штук довжиною 1,5 м.

Занесемо дані до таблиці, перебравши всі можливі варіанти розрізу металевого дроту шириною 9 м:

Вид виробу / Спосіб розрізу	4 м	3,5 м	1,5 м	Відходи
1	2	0	0	1
2	1	1	1	0
3	1	0	3	0,5
4	0	2	1	0,5
5	0	1	3	1
6	0	0	6	0
Кількість виробів	4	3	6	

Складемо математичну модель задачі.

Для цього позначимо через $x_1, x_2, \ldots, x_m$ відповідно кількість частин металевого дроту стандартної ширини, що будуть розрізані *і*-им способом. Тоді матимемо систему обмежень:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ x_2 + 2x_4 + x_5 = 3; \\ x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 6x_6 = 6; \\ x_i \geq 0\left(i = \overline{1,m}\right). \end{cases}$$

Цільовою функцією задачі буде мінімізація відходів, тобто

$$f = x_1 + 0{,}5x_3 + 0{,}5x_4 + x_5 \to \min .$$

Задача 4. Меблева фабрика "Нова" випускає дві моделі підставок під телевізор. Підставки обох моделей обробляють на першому та другому станках. Тривалість обробки (у хвилинах) однієї підставки кожної моделі подано в таблиці.

Станки	Тривалість обробки підставки (хв.) за моделями	
	A	***B***
1	18	20
2	21	29

Час обробки першого та другого станків відповідно дорівнює 30 і 32 години на тиждень. Прибуток фабрики від реалізації однієї підставки моделі *A* дорівнює 80 грн., а моделі *B* – 60 грн. Вивчення ринку збуту показало, що тижневий попит на підставки моделі *A* ніколи не перевищує попиту на модель *B* не більше, ніж на 20 одиниць, а попит на підставки моделі *B* не перевищує 50 одиниць на тиждень. Визначити обсяги виробництва підставок під телевізор обох моделей, які максимізують прибуток фабрики. Побудувати економіко-математичну модель задачі та розв'язати її графічно.

Розв'язування. Нехай x_1 - кількість підставок моделі *A*, виготовлених фабрикою за тиждень, а x_2 – відповідна кількість підставок моделі *B*.

Цільова функція – максимізація прибутку фабрики від реалізації продукції, тобто

$$Z = 80x_1 + 60x_2 \quad (max).$$

Обмеження математичної моделі враховують час роботи станків (першого та другого) для обробки продукції та попит на підставки для телевізорів обох моделей. Обмеження на час роботи першого та другого станків матимуть вигляд:

$18x_1 + 20x_2 \leq 30 \cdot 60 = 1800$ хв. – для першого станка,

$21x_1 + 29x_2 \leq 32 \cdot 60 = 1920$ хв. – для другого станка.

Обмеження на попит $x_1 - x_2 \leq 20,\ x_2 \leq 50$.

Отже, економіко-математичну модель задачі записуємо так:

$$\begin{cases} 18x_1 + 20x_2 \le 1800 \\ 21x_1 + 29x_2 \le 1920 \\ x_1 - x_2 \le 20 \\ x_2 \le 50 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$Z = 80x_1 + 60x_2\ (\max).$$

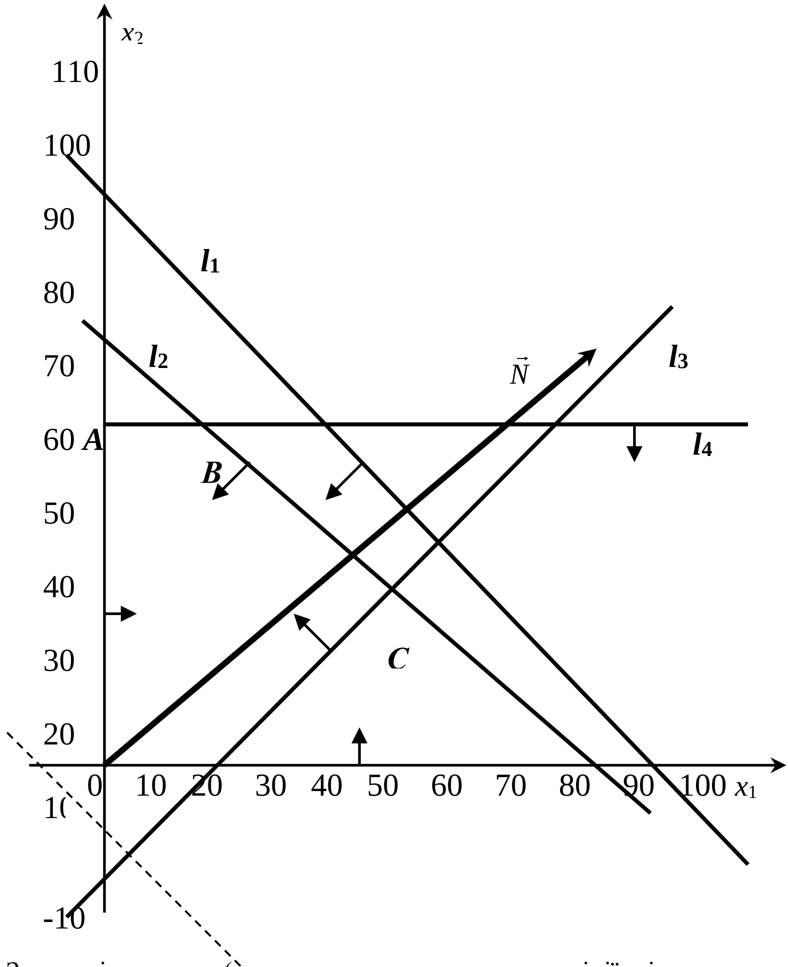
Задачу розв’язуємо графічним методом за відомим алгоритмом.

$$Z = 80x_1 + 60x_2\ (\max).$$

$$\begin{cases} 18x_1 + 20x_2 = 1800, & l_1(0;90);(100;0); \\ 21x_1 + 29x_2 = 1920, & l_2\left(0;66\frac{6}{29}\right);\left(91\frac{3}{7};0\right); \\ x_1 - x_2 = 20, & l_3(0;-20);(20;0); \\ x_2 = 50, & l_4 - пряма\,||\,осі\ OX_1 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 & \end{cases}$$

Будуємо многокутник розв’язків.

Утворився многокутник розв’язків *OABCD*. Вектор нормалі $\overline{N}(80;60)$ і перпендикулярно до нього лінія рівня.



За дослідженням (паралельним перенесенням лінії рівня в напрямку вектора нормалі) точка *C* є точкою максимуму. Координати цієї точки визначають оптимальний план задачі, тобто обсяги виробництва підставок під телевізор моделей *A* та *B*, що максимізують прибуток від їх реалізації.

Координати точки $C(l_2 \cap l_3)$ знайдемо, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 21x_1 + 29x_2 = 1920 \\ x_1 - x_2 = 20 \end{cases}.$$

З другого рівняння знаходимо $x_1 = 20 + x_2$. Підставимо цей результат у перше рівняння. Маємо:

$$21(20 + x_1) + 29x_2 = 1920;$$
$$420 + 21x_2 + 29x_2 = 1920;$$
$$50x_2 = 1500; \; x_2 = 30, \text{ а } x_1 = 50.$$

Отже, $Z = 80x_1 + 60x_2 = 80 \times 50 + 60 \times 30 = 5800$.

Це означає, що якщо фабрика щотижня вготовлятиме 50 підставок під телевізор першої моделі (*A*) та 30 – другої моделі (*B*), то вона отримає максимальний прибуток у розмірі 5800 грн. При цьому тижневий фонд роботи станків буде використано повністю.

Вправи

2.1. Графічним методом розв’язати задачі лінійного програмування:

а) $z = -3x_1 + 3x_2 - 4 \quad (extr)$
$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 \le 21 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ -4x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

б) $z = x_1 + 4x_2 - 9 \quad (extr)$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 15 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

в) $z = -6x_1 + x_2 + 4 \quad (extr)$
$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 \le 15 \\ 2x_1 + x_2 \ge 4 \\ -2x_1 + 5x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

г) $z = -x_1 + 2x_2 - 5 \quad (extr)$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 4x_1 + x_2 \ge 4 \\ 2x_1 - 5x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

д) $z = -x_1 - 3x_2 + 5 \quad (extr)$
$$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 \le 15 \\ 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 \le 4 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

е) $z = -3x_1 + 3x_2 - 4 \quad (extr)$
$$\begin{cases} 7x_1 + 8x_2 \le 56 \\ 6x_1 - x_2 \ge 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Питання для самоконтролю

1. Які є види рівнянь прямої та площини?
2. Які є види рівнянь площини?
3. Які є види рівнянь прямої в просторі?
4. Що таке еліпс, гіпербола, парабола?
5. Як записують канонічне рівняння еліпса, гіперболи параболи?
6. Як розміщується пряма і площина в просторі?
7. У чому полягає суть економічної моделі рівноваги ринку?
8. Що таке рівноважна ціна?
9. Що таке точка рівноваги?
10. Як знаходиться рівноважна ціна?
11. У чому полягає суть економічної моделі рівноваги та збитків компанії?
12. Як визначається бюджетна множина, її межа і лінії бюджетного обмеження?

РОЗДІЛ 5. МЕТОДИ І МОДЕЛІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

§ 1. Похідна функції

1. *Похідною* функції $y = f(x)$ у точці x називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx, коли Δx довільно прямує до нуля. Якщо ця границя існує, то вона позначається: y', або $f'(x)$, або y'_x, або $\dfrac{dy}{dx}$, або $\dfrac{df(x)}{dx}$.

Математично похідна функції визначається за формулою:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

2. *Геометричний* зміст похідної: похідна $f'(x)$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x.

Механічний зміст похідної: похідна $S'(t)$ є величиною миттєвої швидкості в момент t тіла, що рухається за законом $S = S(t)$.

Економічний зміст похідної: похідна $V'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta V}{\Delta x}$ дорівнює граничним витратам виробництва $V = V(x)$ однорідної продукції як функції кількості продукції x та наближено характеризує додаткові витрати на виробництво одиниці додаткової продукції.

Похідну $V'(x)$ називають маржинальними (або граничними) витратами виробництва при умовах хоча би простого відтворення виробництва продукції. Аналогічно можна розглядати маржинальний дохід, маржинальний прибуток, маржинальну продуктивність праці, маржинальний обсяг продукції, маржинальну корисність тощо.

Таким чином, похідна функції характеризує швидкість зміни функції (деякого економічного чи фізичного процесу, досліджуваного фактора відносно часу).

3. Величину $V_{сер} = \dfrac{V(x)}{x}$ називають *середніми витратами* на одиницю випуску продукції.

Якщо функція $q(t)$ виражає об'єм виготовленої продукції q за час t, то похідна $q'(t_0)$ в момент часу t_0 є *продуктивністю праці* в момент t_0.

4. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну $(n-1)$ порядку, диференційовану в деякій точці x інтервалу $[a;b]$, то похідна від $f^{(n-1)}(x)$ називається n-ою похідною, або похідною n-го порядку і позначають:

$$f^{(n)}(x),\ \text{або}\ y^{(n)},\ \text{або}\ y_x^{(n)},\ \text{або}\ \frac{d^n y}{dx^n},\ \text{або}\ \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Тому, n-на похідна функції $y = f(x)$ визначається рівністю:

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'.$$

5. *Основні формули диференціювання*:

1) $y = u(x) \pm v(x),$ $\quad y' = u' \pm v';$

2) $y = u(x) \cdot v(x),$ $\quad y' = u'v + uv';$

3) $y = c,\ c = const,$ $\quad y' = 0;$

4) $y = c \cdot u(x),$ $\quad y' = cu';$

5) $y = \dfrac{u(x)}{v(x)},$ $\quad y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2};$

6) $y = f(u), u = \varphi(x), y = f(\varphi(x)),$ $\quad y' = y'_u \cdot u'_x;$

7) $y = u^{\alpha}(x),$ $\quad y' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u';$

8) $y = \sqrt{u(x)},$ $\quad y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}};$

9) $y = \sin u(x),$ $\quad y' = \cos u \cdot u';$

10) $y = \cos u(x),$ $\quad y' = -\sin u \cdot u';$

11) $y = \mathrm{tg}\, u(x),$ $\quad y' = \dfrac{u'}{\cos^2 u};$

12) $y = \mathrm{ctg}\, u(x),$ $\quad y' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u};$

13) $y = a^{u(x)},$ $\quad y' = a^u \cdot \ln a \cdot u';$

14) $y = e^{u(x)},$ $\quad y' = e^u \cdot u';$

15) $y = \log_a u(x),$ $\quad y' = \dfrac{u'}{u}\log_a e = \dfrac{u'}{u \ln a};$

16) $y=\ln u(x)$, $\quad y'=\frac{u'}{u}$;

17) $y=\arcsin u(x)$, $\quad y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

18) $y=\arccos u(x)$, $\quad y'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

19) $y=\mathrm{arctg}\, u(x)$, $\quad y'=\frac{u'}{1+u^2}$;

20) $y=\mathrm{arcctg}\, u(x)$, $\quad y'=-\frac{u'}{1+u^2}$.

6. Нехай $V(x)$ – функція споживання (частина доходів, які витрачаються), а $S(x)$ – функція збереження, де x – національний дохід. Тоді

$$V(x)+S(x)=x.$$

Диференціюємо останнє рівняння, і отримаємо

$$V'(x)+S'(x)=1,$$

де $V'(x)$ – гранична схильність до споживання, $S'(x)$ – гранична схильність до зберігання.

7. Якщо функція $y=f(x)$ диференційована в точці x, тобто має у цій точці скінченну похідну y', то її приріст

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x,$$

де $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Диференціалом функції (dy) називається головна частина $f'(x)\Delta x$ приросту Δy функції, лінійна відносно Δx.

Диференціалом функції називається добуток її похідної на диференціал незалежної змінної: $dy=f'(x)dx$.

8. Формула наближеного обчислення значень функції:

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

9. Рівняння *дотичної* у точці $M_0(x_0;y_0)$ на кривій $y=f(x)$:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

10. Рівняння *нормалі* в точці $M_0(x_0;y_0)$ на кривій $y=f(x)$:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \text{, або}$$

$$x - x_0 + f'(x_0)(y - y_0) = 0.$$

11. *Правило Лопіталя*. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ – неперервні і мають похідні в околі точки $x = x_0$, а в точці x_0 дорівнюють нулю

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = 0; \ \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = 0 \right)$$

або нескінченності. Тоді границя відношення функцій дорівнює границі відношення їх похідних, якщо остання існує, тобто

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Тут $\varphi(x) \neq 0, \ \varphi'(x) \neq 0$ в околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0.

12. *Еластичність попиту* Q відносно ціни p:

$$E_p(Q) = \lim_{\Delta p \to 0} \left(\frac{\Delta Q}{Q} : \frac{\Delta p}{p} \right) = \frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp} \text{, або } E_p(Q) = p \cdot T_Q(p),$$

де

$$T_Q(p) = \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dp}$$

– відносна швидкість зміни (темп) функції.

Якщо $E_p(Q) < -1$ (підвищенню ціни на 1% відповідає зниження попиту більше, ніж на 1%), то попит еластичний.

Якщо $E_p(Q) = -1$ – попит нейтральний.

Якщо $E_p(Q) > -1$ – попит нееластичний.

13. *Еластичність пропозиції* $S(p)$ відносно ціни p:

$$E_p(S) = E_p = \lim_{\Delta p \to 0} \left(\frac{\Delta S}{S} : \frac{\Delta p}{p} \right) = \frac{p}{S} \frac{dS}{dp}.$$

14. Якщо аргумент x обчислений з відносною похибкою $\delta_x = \frac{\Delta x}{x}$, то функція $y = f(x)$ – з відносною похибкою $\delta_y = \frac{\Delta y}{y} = |E_x(y)| \delta_x$.

*   *

*

Задача 1. Залежність між витратами виробництва V і об'ємом виготовленої продукції x виражаються функцією $V = 100x - 0{,}06x^3$ (у.о.). Визначити середні та маржинальні витрати при об'ємі продукції 20 одиниць.

Розв'язування. Функція середніх витрат (на одиницю продукції) має вигляд: $V_{сер} = \dfrac{V}{x} = 100 - 0{,}06x^2$. При $x = 20$ середні витрати становлять $V_{сер}(20) = 100 - 0{,}06 \cdot 20^2 = 76$ (у.о.). Функція маржинальних витрат: $V'_{сер} = 100 - 0{,}18x^2$. При $x = 20$ маржинальні витрати становлять $V'_{сер}(20) = 100 - 0{,}18 \cdot 20^2 = 28$ (у.о.). Отже, середні витрати на виробництво одиниці продукції складають 76 у.о., а додаткові витрати на виготовлення додаткової одиниці продукції при заданому рівні виробництва ($x = 20$) складають 28 у.о.

Задача 2. Підприємство виготовляє x виробів, роздрібна вартість кожного з яких – p, причому $p = 100 - 2x$, а функція витрат $V(x) = 2000 + 10x$ (у гривнях). Знайти маржинальний прибуток, якщо виготовлено і продано 10 та 25 виробів.

Розв'язування. Функція доходу має вигляд

$$D(x) = xp = x(100 - 2x) = 100x - 20x^2.$$

Тоді функція прибутку підприємства:

$$P(x) = D(x) - V(x) = 100x - 2x^2 - (2000 + 10x) = 90x - 2x^2 - 2000.$$

Знайдемо маржинальний прибуток:

$$P'(x) = (90x - 2x^2 - 2000)' = 90 - 4x.$$

Тоді при $x = 10$ та $x = 25$ отримаємо:

$$P'(10) = 90 - 4 \cdot 10 = 50, \quad P'(25) = 90 - 4 \cdot 25 = -10.$$

Отже підприємство буде мати збитки розміром 10 гривень за кожний виріб, який буде виготовлено та продано при зростанні кількості виробів.

Задача 3. Функція споживання деякої країни має вигляд $V(x) = 0{,}36x^{5/4} + 0{,}25x + 20$, де x – сукупний національний дохід (грош.

од.). Знайти граничну схильність до споживання й граничну схильність до збереження, якщо дохід становить 16 млн. грош. од.

Розв'язування. Спочатку знайдемо граничну схильність до споживання:

$$V'(x) = 0{,}45x^{1/4} + 0{,}25 .$$

При $x = 16$ маємо $V'(16) = 0{,}45\sqrt[4]{16} + 0{,}25 = 1{,}15$.

Гранична схильність до споживання та гранична схильність до зберігання пов'язані рівністю $V'(x) + S'(x) = 1$. Тому гранична схильність до зберігання має вигляд

$$S'(x) = 1 - V'(x) = 0{,}75 - 0{,}45x^{1/4}.$$

При $x = 16$ маємо $S'(16) = 1 - 1{,}15 = -0{,}15$.

Задача 4. Валовий продукт деякої держави є функція $ВП = 50 + t$ (мільярдів гривень), а кількість населення – $K = 80 + 3t$ (мільйонів), які залежать від часу t. Знайти швидкість зміни частини валового продукту держави, що припадає на кожного громадянина.

Розв'язування. Нехай функція

$$ВП_{сер}(t) = \frac{ВП}{K} = \frac{50 + t}{80 + 3t}$$

– частина валового продукту держави, що припадає на кожного громадянина. Тоді швидкість зміни частини валового продукту є похідна

$$ВП'_{сер}(t) = \frac{(50 + t)'(80 + 3t) - (50 + t)(80 + 3t)'}{(80 + 3t)^2} = \frac{80 + 3t - 150 - 3t}{(80 + 3t)^2} =$$

$$= \frac{80 + 3t - 150 - 3t}{(80 + 3t)^2} = \frac{-70}{(80 + 3t)^2} .$$

Оскільки похідна від'ємна, то частина валового продукту, що припадає на кожного громадянина, з часом зменшується.

Задача 5. Обсяг випущеної продукції q заданий функцією $q = -\frac{7}{9}t^3 + 7t^2 + 98t + 50$, $t \in [0;8]$, де t – робочий час. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни через 1 годину після початку роботи й за годину до її завершення.

Розв'язування. Спочатку знайдемо продуктивність праці

$$z(t) = q'(t) = -\frac{7}{3}t^2 + 14t + 98 .$$

Тоді знайдемо швидкість і темп зміни продуктивності праці, які виражаються похідною $z'(t)$ та логарифмічною похідною $T_z(t) = \left[\ln z(t)\right]' = \dfrac{z'(t)}{z(t)}$ відповідно:

$$z'(t) = -\frac{14}{3}t + 14, \; T_z(t) = \frac{-\frac{14}{3}t + 14}{-\frac{7}{3}t^2 + 14t + 98} = \frac{2t-6}{t^2 - 6t - 42}.$$

В задані моменти часу $t_1 = 1$ і $t_2 = 8 - 1 = 7$ відповідно матимемо: $z(1) = 109{,}67$, $z'(1) = 37{,}33$, $T_z(1) = 0{,}09$ та $z(7) = 81{,}67$, $z'(7) = -9{,}33$, $T_z(7) = 0{,}23$.

Отже, наприкінці робочого дня продуктивність праці знижується; зміна знака $z'(t)$ та $T_z(t)$ з «+» на «–» вказує на те, що швидкість і темп зміни продуктивності праці в перші години робочого дня збільшується і знижується в останні години.

Задача 6. При відомій функції попиту $Q = Q(p) = 7 - p$ і пропозиції $S = S(p) = p + 1$, де Q і S – кількість товару; p – ціна товару.

Знайти:

а) рівноважну ціну;

б) еластичність попиту і пропозиції для рівноважної ціни;

в) зміну доходу при підвищенні ціни на 5% від рівноважної.

Розв'язування.

а) рівноважна ціна – ціна, при якій попит і пропозиція врівноважуються. Тому, рівноважна ціна визначається з рівняння $Q(p) = S(p);\;\; 7 - p = p + 1;$ p = 3 грн.

б) знаходимо еластичність попиту і пропозиції за формулами:

$$E_p(Q) = \frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp}, \;\; E_p(S) = \frac{p}{S}\frac{dS}{dp}.$$

В даному випадку

$$E_p(Q) = \frac{p}{7-p}\cdot(-1) = -\frac{p}{7-p}; \;\; E_p(S) = \frac{p}{S}\cdot 1 = \frac{p}{p+1}.$$

Для рівноважної ціни p = 3 маємо $E_{p=3}(Q) = -0{,}75;\;\; E_{p=3}(S) = 0{,}75.$

Знайдені значення еластичності за абсолютною величиною менші за 1, тоді і попит, і пропозиція даного товару при рівноважній ціні нееластичні відносно ціни, тобто зміна ціни не призведе до різкої зміни попиту і пропозиції. Так, при підвищенні ціни на 1%, попит зменшиться на 0,75%, а пропозиція підвищиться на 0,75%.

в) при підвищенні ціни p на 5% від рівноважної, попит зменшиться на $5\cdot 0{,}75 = 3{,}75\%$, а дохід зросте на 3,75%.

Задача 7. Залежність попиту Q від ціни p задана функцією $Q = 50(15-\sqrt{p})$. Знайти еластичність попиту. Визначити, при яких значеннях ціни попит буде: а) еластичним; б) нейтральним; в) нееластичним. Які рекомендації відносно ціни за одиницю продукції можна дати керівникам підприємства при $p = 50$ і $p = 150$.

Розв'язування. Знайдемо еластичність функції

$$E_p(Q) = \frac{p}{50(15-\sqrt{p})}\left(50(15-\sqrt{p})\right)' = -\frac{\sqrt{p}}{2(15-\sqrt{p})}.$$

Попит нейтральний, якщо $E_p(Q) = -\dfrac{\sqrt{p}}{2(15-\sqrt{p})} = -1$. Розв'язком останнього рівняння є $p = 100$. Оскільки $p > 0$ і $Q = 50(15-\sqrt{p}) > 0$ (тобто $p < 225$), то при $0 < p < 100$ попит є нееластичним, а при $100 < p < 225$ – еластичним.

Якщо ціна одиниці продукції 50 грош. од., то попит є нееластичним і можна підвищити ціну. При цьому дохід зросте. При ціні продукції 150 грош. од. попит є еластичним. У такому випадку бажаним є зниження ціни, що приведе до збільшення доходу в результаті збільшення попиту на продукцію.

Задача 8. Витрати палива автомобілем на 100 км шляху залежно від швидкості руху v (км/год) описується функцією $V(v) = 15 - 0{,}4v + 0{,}002v^2$. Оцінити відносну похибку обчислення витрат палива за швидкості $v = 80$ км/год, визначену з точністю 5%.

Розв'язування. Знайдемо еластичність функції

$$E_v(V) = v\frac{V'(v)}{V(v)} = \frac{v(-0{,}4+0{,}004v)}{15-0{,}4v+0{,}002v^2}.$$

При $v = 80$ отримаємо $\left|E_{80}(V)\right| = 1{,}52$. Тоді відносна похибка $\Delta_V = 1{,}52\cdot 5 \approx 7{,}6\%$.

1. На підприємстві ціна одиниці продукції складає С грн., а зарплата складає W гри/міс. Яка мінімальна гранична продуктивність праці дозволяє

підприємству наймати додаткового працівника, якщо в середньому місяць має 25 робочих днів, а робоча зміна – 8 годин. (C=2, W=600).

<u>Розв’язання.</u>

Оскільки продуктивність праці вимірюватимо в одиницях продукції за годину, перейдемо в розмірності зарплати від грн/місяць до грн/год:

$$W = 600\frac{грн}{міс} = \frac{600}{25}\frac{грн}{день} = 24\frac{грн}{день} = 8\frac{грн}{год}$$

Оцінимо реальну зарплату робітника

$$\frac{W}{p} = \frac{3\frac{грн}{год}}{2грн} = \frac{3}{2}\ {}^{1}\!\!/\!_{год}$$

Підприємству вигідно залучати додаткову робочу силу коли продуктивність нового працівника буде вищою від його реальної заробітньої плати. Тобто коли $MPL > \frac{W}{p}$. Отже підриємству вигідно наймати додаткового працівника коли його продуктивність буде вищою за 1,5 одиниці продукції за одну годину.

2. На підприємстві ціна одиниці продукції складає C грн., плата за оренду виробничої лінії складає PO за добу, а зарплата складає W гри/міс. Персонал лінії обслуговування PL чоловік. Яка мінімальна гранична продуктивність лінії дозволяє підприємству забезпечити її встановлення. (C=2, PO=200, PL=5, W=600).

<u>Розв’язання.</u>

Підприємству вигідно встановлювати нове обладнання коли реальна виручка від її встановлення буде додатньою:

$$\frac{\Delta(pr)}{p} = \frac{1}{p}[\Delta(виручка) - \Delta(витрати\{наобладнанняінадодатковуробочусилу\})] =$$

$$= \frac{1}{p}(p \cdot MPK - R - \Delta L \cdot W) = MPK - \frac{R}{p} - \frac{W}{p}\Delta L \geq 0$$

Звідси отримуємо $MPK \geq \frac{R}{p} + \frac{W}{p}\Delta L$. В умовах задачі

$$\frac{R}{p} + \frac{W}{p}\Delta L = \frac{200}{2}\frac{1}{добу} + \frac{1}{2}\cdot\frac{600}{25}\cdot 5\cdot\frac{грн}{грн \cdot добу} = (100 + 60)\frac{1}{добу} = 160\,\frac{1}{добу}$$

Відповідь продуктивність лінії не повинна бути нижчою ніж 160 одиниць продукції за добу.

3. Нехай частка капіталу в розподілі ВВП складає Alfa процентів. Нехай імміграція збільшує робочу силу на Beta процентів. Як зміняться загальний обсяг продукції якщо Alfa= 30% , Beta= 10%.

Розв'язання. Моделюємо обсяг ВВП за допомогою функції Кобба-Дугласа.

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$$

Із диференціального числення функцій багатьох змінних відомо, що

$$\Delta Y \approx dY = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \Delta K + \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot \Delta L$$

Оскільки за умовою задачі міняється лише робоча сила, то : $dY = \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot \Delta L$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha) \cdot A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha-1} = (1-\alpha)\frac{Y}{L}$$

Звідси $\frac{\Delta Y}{Y} \approx \frac{dY}{Y} = (1-\alpha)\frac{\Delta L}{L} = (1-0.3) \cdot 10\% = 7\%$

Відповідь. ВВП росте із швидкістю 7%.

1. Нехай в павутиноподібній моделі функція попиту на деякий товар $D_t = 100 - 50 p_t$, функція пропозиції $S_t = 20 + 30 p_{t-1}$; $S_t = D_t$. Відомо, що $p_0 = 0{,}5$, визначити p_1.

Розв'язок

Вирахуємо p_t через p_{t-1} :

$$p_t = \frac{C - A}{E} - \frac{B}{E}$$

$$D_t = S_{t-1}$$

$$100 - 50p^* = 20 + 30p^*$$

$$-80p^* = -80$$

$$p^* = 1 \neq p_0 = 0{,}5$$

$$p_1 = \frac{100 - 20}{50} - \frac{30}{50} \cdot 0{,}5$$

2. Нехай функція попиту на імпортований товар: $Q_D = 4 - p$. Функція пропозиції іноземним виробником товару: $Q_S = -6 + 3p$. Щоб захистити національного виробника, уряд встановлює квоту на імпортований товар у

розмірі $Q_L = 3$ млн. шт. в рік. Припустимо, що доходи споживачів збільшилися, внаслідок чого зріс попит на товар, і функція попиту $Q_D^1 = 8 - p$. Визначити рівноважну ціну і обсяг продажу, які встановилися б при відсутності квоти. Якою буде ціна в дійсності?

Розв'язок

$Q_D = Q_S$

$4 - p = -6 + 3p$

$p = 2{,}5 \quad Q = 1{,}5$ — початкове положення ринкової рівноваги.

$Q_D^1 = Q_S$

$8 - p = -6 + 3p$

$p = 3{,}5 \quad Q = 4{,}5$

Якщо б не було квоти, обсяг пропозицій піднявся б до $Q_1 = 4{,}5 \quad p = 3{,}5$.

Квота перешкоджає збільшенню обсягу пропозиції вище 3 млн. шт.

$p_2 = 5$

§ 2. Екстремум функції

1. Функція $y = f(x)$ називається *зростаючою* (*спадною*) у проміжку $(a,\ b)$, якщо більшому значенню аргументу в цьому проміжку відповідає більше (менше) значення функції, тобто якщо з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$, то функція $f(x)$ – зростаюча, а якщо $f(x_2) < f(x_1)$, то функція $f(x)$ – спадна.

Якщо диференційована функція зростає (спадає) у деякому проміжку, то похідна цієї функції невід'ємна (недодатня) у цьому проміжку.

2. Функція $f(x)$ має при $x = x_0$ *максимум* (*мінімум*), якщо існує такий окіл точки x_0, для усіх точок x якого виконується нерівність:

$f(x_0) > f(x)$ для максимуму,

$f(x_0) < f(x)$ для мінімуму.

Узагальненим терміном понять максимуму і мінімуму є екстремум.

3. *Необхідна умова екстремуму функції.*

Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0 і має у цій точці екстремум, то її похідна при $x = x_0$ дорівнює нулю $(f'(x_0) = 0)$ або не існує.

Корені рівняння $f'(x_0) = 0$ і значення x, в яких $f'(x_0)$ не існує, називаються *критичними точками першого роду*.

4. *Перша достатня умова екстремуму функції.*

Якщо похідна $f'(x)$ функції $f(x)$ перетворюється в нуль у точці x_0 або не існує і при переході через x_0 змінює свій знак, то функція $f(x)$ має у цій точці екстремум: максимум, якщо знак змінюється з "+" на "–", і мінімум, якщо знак змінюється з "–" на "+" .

Друга достатня умова екстремуму функції.

Якщо в точці x_0 перша похідна $f'(x)$ функції $f(x)$ перетворюється в нуль, а її друга похідна $f''(x)$ не дорівнює нулю, то в точці x_0 функція $f(x)$ має екстремум: максимум, якщо $f''(x_0) < 0$, і мінімум, якщо $f''(x_0) > 0$.

5. Якщо в усіх точках інтервалу (a, b) $f''(x_0) > 0$, то крива $y = f(x)$ є *угнутою* на цьому інтервалі; якщо $f''(x_0) < 0$ на деякому інтервалі, то крива $y = f(x)$ *опукла* на цьому інтервалі. Точка кривої, в якій крива переходить від угнутості до опуклості або навпаки, називається *точкою перегину* кривої.

6. *Необхідна умова існування точки перегину.*

Якщо функція $f(x)$ має неперервну другу похідну і $A(x_0, f(x_0))$ – точка перегину кривої $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$ або не існує.

Значення x, при яких $f''(x) = 0$ або не існує, називаються *критичними точками другого роду*.

7. Якщо в точці x_0 функція $f(x)$ має першу похідну $f'(x_0)$, а друга похідна $f''(x_0)$ у цій точці дорівнює нулю або не існує і при переході через x_0 змінює знак, то $A(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$.

8. *Загальна схема дослідження функції $y = f(x)$ і побудова її графіка.*

1. Знаходимо область визначення функції $f(x)$.

2. Знаходимо інтервали неперервності та точки розриву.

3. Знаходимо точки перетину кривої з осями координат.

4. Досліджуємо функцію на парність або непарність (осьова або центральна симетрія графіка).

5. Досліджуємо функцію на періодичність.

6. Знаходимо асимптоти графіка функції (горизонтальні, вертикальні або похилі).

7. Знаходимо критичні точки першого роду, інтервали зростання і спадання функції.

8. Знаходимо точки екстремумів та екстремальні значення функції.

9. Знаходимо критичні точки другого роду, інтервали опуклості та угнутості графіка функції.

10. Знаходимо точки перегину і значення функції в точках перегину.

11. Згідно з результатами дослідження будуємо у системі координат графік функції.

9. Для знаходження найбільшого і найменшого значень функції на $[a,\ b]$ потрібно:

а) знайти всі критичні точки першого роду;

б) обчислити значення функції на кінцях відрізка, тобто знайти $f(a)$ і $f(b)$, а також у тих критичних точках, які належать відрізку;

в) із одержаних чисел вибрати найбільше і найменше значення функції на відрізку.

*   *

*

Задача 1. Підприємство за місяць виготовляє *x* одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V = \frac{1}{30}x^2 + 8x + 300$,

$p = 40 - \frac{1}{10}x$ - залежність між питомою ціною і кількістю одиниць продукції *x,* яку можна продати по цій ціні. Розрахувати, за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, прибуток при цих умовах.

Розв'язування. Прибуток P визначається як різниця між доходами і сумарними витратами виробництва $P = D - V$.

В нас дохід – $D = p \cdot x = (40 - \frac{1}{10}x) \cdot x = 40x - \frac{1}{10}x^2$,

сумарні витрати – $V = \frac{1}{30}x^2 + 8x + 300$,

прибуток – $P = 40x - \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{30}x^2 - 8x - 300 = -\frac{2}{15}x^2 + 32x - 300$.

Знайдемо маржинальний прибуток – $P' = -4/15 \cdot x + 32$.

Максимальний прибуток буде тоді, коли $P' = 0$, оскільки $P'' = -4/15 < 0$.

При цьому $-4/15 \cdot x + 32 = 0$; $-4x + 480 = 0$; $x = 120$.

Отже, щоб прибуток був максимальним, треба випускати 120 од. продукції.

Маржинальні витрати – $V'(120) = \frac{1}{15} \cdot 120 + 8 = 16$,

сумарні витрати

$$V(120) = \frac{1}{30} \cdot 120^2 + 8 \cdot 120 + 300 = 480 + 960 + 300 = 1740.$$

Максимальний прибуток

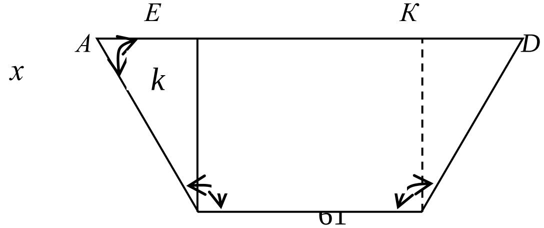
$$P(120) = -\frac{2}{15} \cdot 120^2 + 32 \cdot 120 - 300 = 1620.$$

Задача 2. Під яким кутом α потрібно збити три однакових дошки, щоб одержати водонапійний жолоб найбільшої місткості.

Розв'язування. Найбільшу місткість буде мати жолоб тоді, коли поперечний переріз буде найбільшим. У цій задачі поперечний переріз має форму рівносторонньої трапеції.

Позначимо через $x = \angle BAD$ і врахуємо, що ширина кожної дошки дорівнює a $(AB = BC = CD = a)$. Тоді висота трапеції $BE = \alpha \sin x$. Окрім цього, $AE = a \cdot \cos x$, тому

$$AD = AE + EK + KD = a\cos x + a + a\cos x = a + 2a\cos x.$$



α α

B C

Площа трапеції дорівнює

$$S(x)=\frac{BC+AD}{2}\cdot BE=\frac{a+a+2a\cos x}{2}\cdot a\sin x=a^2(1+\cos x)\sin x$$

$(0\le x\le \pi/2)$.

Похідна функції

$$S'(x)=a^2(-\sin^2 x+\cos x(1+\cos x))=a^2(-\sin^2 x+$$
$$+\cos x+\cos^2 x)=a^2(1+\cos x)(2\cos x-1).$$

Оскільки похідна на інтервалі $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ перетворюється в нуль тільки при $x=\frac{\pi}{3}$, а $S(0)=0$, $S\left(\frac{\pi}{2}\right)=a^2$, $S\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, то S приймає найбільше значення при $x=\frac{\pi}{3}$, тобто при $\alpha=120^\circ$.

Крім цього,

$$S''=a^2(-2\sin x\cos x-\sin x-2\cos x\sin x)=-a^2\sin x(4\cos x+1).$$

При $x=\frac{\pi}{3}$ маємо $S''=-\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$, тобто $S''<0$. Це означає, що при $x=\frac{\pi}{3}$ функція $S(x)$ досягає максимуму. Отже, якщо три дошки збити під кутом $\alpha=120^\circ$, то водонапійний жолоб матиме найбільшу місткість.

Вправи

2.1. Знайти максимальний прибуток, який може отримати фірма, якщо відомі ціна одиниці продукції p грош. од. і функція витрат $V(x)$:

а) $V=x^3+3x$, $p=15$;

2.2. Підприємство за місяць виготовляє *x* одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V(x)$, а $p(x)$ – залежність між ціною і кількістю одиниць продукції *x*, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

а) $V=\frac{1}{12}x^2+5x+300$, $p=38-\frac{1}{10}x$;

б) $V=\frac{1}{14}x^2+5x+300$, $p=30-\frac{1}{11}x$;

2.3. Обсяг видобування кам'яного вугілля y (т/год) від кількості праці x (людино-год) заданий співвідношенням $y=\sqrt{x}$. Ціна 1 тонни вугілля – 800 грн., заробітна плата робітника – 30 грн./год. Знайти оптимальну кількість праці (кількість робітників), якщо інших витрати крім заробітної плати відсутні.

2.4. Нехай з кожної проданої одиниці товару у бюджет відраховується 8 грош. од. Задано $D(x)=16x-x^2$ – функцію доходу та $V(x)=x^2+1$ – функція витрат фірми. Яку кількість товару необхідно виробити, щоб отримати максимальний прибуток фірми.

2.5. Сіткою довжиною 200 м потрібно обгородити прилягаючу до будинку прямокутну ділянку найбільшої площі. Знайти розміри прямокутної ділянки.

2.6. Визначити розміри відкритого басейну об'ємом 32 м^3 з квадратним дном так, щоб на облицювання його стін і дна пішла найменша кількість матеріалу.

2.7. Переріз тунелю має форму прямокутника з насадженим півкругом. Периметр перерізу – 18 м. При якому радіусі півкруга площа перерізу буде найбільшою?

2.8. Із квадратних бляшаних листів зі стороною 60 см виготовляють коробки без кришок, вирізаючи по кутах чотири квадратики і загинаючи смужки, що залишились. При яких розмірах вирізаних квадратиків виготовлять коробки найбільшого об'єму?

2.9. Із відходів основного виду виробництва, якими є бляшані листи прямокутної форми з сторонами 80 см і 50 см, роблять відкриті зверху ящики найбільшого об'єму, вирізавши по кутах рівні квадратики і загнувши бляху, щоб отримати бічні стінки. Якої довжини мають бути сторони вирізаних квадратиків?

2.10. Прямокутну земельну ділянку площею 90000 м^2 потрібно обкопати вздовж усієї межі ровом. Які повинні бути розміри ділянки, щоб витратити мінімум засобів на копання рову?

2.11. Потрібно побудувати канал, що має у перерізі форму рівнобедреної трапеції, основа і бічні сторони якої мають по 8 м. Яка повинна бути ширина каналу, щоб він уміщав найбільшу кількість води?

Питання для самоконтролю

1. Що таке похідна функції однієї змінної?
2. У чому полягає економічний зміст похідної?
3. У чому полягає економічний зміст функції?
4. Що таке еластичність функції?
6. Що виражає коефіцієнт еластичності?
7. В чому полягає геометричний зміст еластичності?
8. Яку функцію називають еластичною?
9. Яку функцію називають нееластичною?
10. Яку функцію називають цілком еластичною?
11. Яку функцію називають цілком нееластичною?
12. Який існує зв'язок між еластичністю і доходом?
13. Як визначається оптимальний розв’язок задачі фірми?
14. Як знайти граничний прибуток, якщо відомо дохід і витрати фірми?
15. Яке співвідношення між середніми і граничними витратами фірми?
16. Які необхідні і достатні умови екстремуму функції?

РОЗДІЛ 6. МЕТОДИ І МОДЕЛІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

§ 1. Поняття функції багатьох змінних

1. Якщо змінна величина z залежить від n незалежних змінних x, y, t, ..., u, v, то вона називається *функцією* цих змінних і позначається:

$z = f(x, y, t, ..., u, v)$.

Сукупність усіх числових значень, які можуть приймати аргументи x, y, t, ..., u, v, і при яких функція z має певні дійсні значення, називається *областю визначення* функції.

Лінією рівня функцій двох змінних $z = f(x, y)$ називається сукупність усіх точок на площині XOY, для яких виконується умова $f(x, y) = C$.

2. Частинний приріст функції z по змінній x:

$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$.

Частинний приріст функції z по змінній y:

$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

3. *Частинною похідною* від функції $z = f(x, y)$ по незалежній змінній x називається похідна:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = z'_x = f'_x(x, y),$$

знайдена при сталому значенні y.

Частинною похідною від функції $z = f(x, y)$ по незалежній змінній y називається похідна:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = z'_y = f'_y(x, y),$$

знайдена при сталому значенні x.

4. Еластичність функції попиту $Q(p_1, p_2)$ по ціні p_1 та по ціні p_2:

$$E_{p_1}(Q) = \frac{p_1}{Q} Q'_{p_1} \quad E_{p_2}(Q) = \frac{p_2}{Q} Q'_{p_2}$$

5. Виробнича функція Кобба-Дугласа:

$y = AK^{\alpha} L^{\beta}$, де A, α, β - невід'ємні константи, причому $\alpha + \beta \le 1$;

K – об'єм фондів у вартісному, або натуральному вираженні;
L – об'єм трудових ресурсів – число працівників, число людино-днів;
y- випуск продукції у вартісному, або натуральному вигляді;

α - еластичність випуску по фондах;

β - еластичність випуску по праці.

Величина $l = \frac{y}{L}$ називається *середньою продуктивністю праці* (кількість продукції, виробленої одним робітником).

Величина $k = \frac{y}{K}$ називається *середньою фондовіддачею* (кількість продукції, виробленої одним верстатом).

Величина $f = \frac{K}{L}$ називається *середньою фондоозброєністю* (вартість фондів, які припадають на одиницю трудових ресурсів).

6. Рівняння обміну Фішера:

$MV = PY.$

Тут:

M - загальна кількість грошей, наявних в обороті;

V - швидкість їх обороту (скільки раз кожна гривня бере участь в розрахунках в середньому за рік);

P - рівень цін (середнє зважене значення цін готових товарів і послуг , що визначені відносно базового показника, прийнятого за одиницю);

Y - національний продукт або дохід (*національний продукт* – це всі готові товари і послуги, що виготовлені в економічній системі у вартісному виразі; *національний дохід* – це всі виплати, одержані домашніми господарствами: заробітна плата, рента, прибуток; національний продукт і національний дохід чисельно рівні).

* *

*

Задача 1. Нехай виробнича функція визначається функцією Кобба-Дугласа. Щоб збільшити випуск продукції на 5%, треба збільшити фонди на 10% або чисельність робітників на 15%. В 2006 році один робітник за місяць виготовляв продукції на 2000 грн., а всього робітників було 1000. Основні фонди оцінювались в 4 млн. грн. Записати виробничу функцію, величину середньої фондовіддачі і середньої продуктивності праці, еластичність випуску по праці і по фондах.

Розв'язування. Еластичність випуску по праці $\beta = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, а по фондах $\alpha = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Отже, функція Кобба-Дугласа має вигляд: $y = AK^{1/2}L^{1/3}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} < 1$. Підставляючи інші величини, одержимо:

$2000 \cdot 1000 = A \cdot (4 \cdot 10^6)^{1/2}(1000)^{1/3}$, тобто $2000 \cdot 1000 = A \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10$; $A = \frac{2000 \cdot 1000}{2000 \cdot 10} = 100$.

Отже, шукана виробнича функція $y = 100 \cdot K^{1/2} \cdot L^{1/3}$. Середня фондовіддача дорівнює $k = \frac{y}{K} = \frac{2000 \cdot 1000}{4000000} = \frac{1}{2}$, а середня продуктивність $l = \frac{y}{L} = \frac{2000 \cdot 1000}{1000} = 2000$, $E_K(y) = \alpha = 1/2$, $E_L(y) = \beta = \frac{1}{3}$.

Задача 2. Економіка країни характеризується наступними показниками:

а) реально-товарна маса дорівнює 600 млрд. грн.;

б) час обороту гривні дорівнює 4 місяці;

в) рівень дефляції 2%.

Визначити обсяг грошової маси.

Розв'язування. Із рівняння обміну Фішера $MV = PY$ знаходимо $M = \frac{PY}{V}$. Використавши дані із умови задачі, одержимо:

$$P = \frac{100\% - 2\%}{100\%} = 0{,}98, \quad V = \frac{t_{const}}{t_{обороту}} = \frac{12}{4} = 3,$$

$$M = \frac{0{,}98 \cdot 6000 \cdot 10^9}{3} = 196 \cdot 10^9 \text{ грн.}$$

Задача 3. Задано функцію попиту $Q(p_1, p_2) = 500 - 6p_1^2 + 3p_2$ на товари *A* та *B*, де p_1 і p_2 – ціни цих товарів відповідно. Знайти коефіцієнти еластичності попиту відносно цін p_1 і p_2, якщо $p_1 = 5$, $p_2 = 30$.

Розв'язування. Використолвуючи формули еластичності функції попиту, отримаємо

$$E_{p_1}(Q)=\frac{p_1}{Q}Q'_{p_1}=\frac{p_1}{500-6p_1^2+p_2}(-12p_1)=\frac{-12p_1^2}{500-6p_1^2+p_2},$$

$$E_{p_2}(Q)=\frac{p_2}{Q}Q'_{p_2}=\frac{p_2}{500-6p_1^2+p_2}\cdot 3=\frac{3p_2}{500-6p_1^2+p_2}.$$

При $p_1=5$, $p_2=30$ маємо $E_{p_1}(Q)=-0{,}68$, $E_{p_2}(Q)=0{,}2$.

Вправи

1.1. Обсяг витрат на продаж нового продукту x залежить від часу t (у тижнях) та витрат A (у гривнях) підприємства на рекламу і характеризується залежністю:

$$x=200(5-e^{-0{,}002A})(1-e^{-t}).$$

Знайти $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial x}{\partial A}$ і вказати економічний зміст цих похідних при $t=1,\ A=400$.

1.2. Задана функція попиту на товар A:

$$X_A=500+3P_B-6P_A^2,$$

де P_A і P_B – вартість одиниці товарів A і B відповідно. Визначити еластичність функції попиту відносно P_A і P_B, коли $P_A=5,\ P_B=30$.

1.3. Знайти еластичність функції пропозиції S при заданих цінах p_1, p_2:

а) $S=p_1+4p_1p_2+p_2^2,\ p_1=2, p_2=1;$

б) $S=2p_1^3p_2+p_2^2+p_1^3,\ p_1=1, p_2=1;$

1.4. Нехай виробнича функція визначається функцією Кобба-Дугласа. З метою збільшення випуску продукції на $a\%$, необхідно збільшити фонди на $b\%$, або чисельність працівників на $c\%$. В 2016 році один працівник протягом місяця виготовляв продукції на $M=3000\,грн$, а всього робітників L. Основні фонди оцінюються в $K\ млн.грн.$ Записати виробничу функцію y, величину середньої фондовіддачі і середньої продуктивності праці, еластичність випуску по праці $E_L(y)$ і по фондах $E_K(y)$.

а) $a=23\%, b=46\%, c=69\%, L=125, K=5\,млн.грн.$

б) $a = \frac{47}{2}\%, b = 47\%, c = \frac{148}{2}\%, L = 250, K = 9$*млн.грн.*

в) $a = 24\%, b = 48\%, c = 72\%, L = 375, K = 9$*млн.грн.*

1.5. Економіка країни характеризується показниками: а) реально-товарна маса рівна 8000 млрд.грн.; б) час обороту гривні 6 місяців; в) рівень дефляції 3 %. Визначити обсяг грошової маси.

§ 2. Екстремум функції багатьох змінних

1. *Необхідні умови існування екстремуму.*

Якщо функція $f = (x, y)$ має екстремум у точці $M_0(x_0; y_0)$, то її частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

або не існують.

2. *Достатні умови існування екстремуму.*

Нехай у точці $M_0(x_0, y_0)$ виконуються необхідні умови існування екстремуму та існують неперервні частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x^2} = A, \quad \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x \partial y} = B, \quad \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial y^2} = C.$$

Розглянемо число $D = AC - B^2$.

Тоді:

1) функція $z = f(x, y)$ має максимум, якщо $D > 0, \quad A < 0$;

2) функція $z = f(x, y)$ має мінімум, якщо $D > 0, \quad A > 0$;

3) функція $z = f(x, y)$ не має екстремуму, якщо $D < 0$;

4) якщо $D = 0$, тоді екстремум в точці $M_0(x_0; y_0)$ може існувати, а може і не існувати.

3. *Умовним екстремумом* функції $z = f(x, y)$ називається екстремум цієї функції, досягнутий при умові, коли змінні x і y пов'язані рівнянням $\varphi(x, y) = 0$ (рівняння зв'язки).

Для знаходження умовного екстремуму методом Лагранжа потрібно:

1) записати функцію Лагранжа:

$U = (x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y);$

2) знайти критичні точки $M_k(x_k, y_k, \lambda_k)$ функції Лагранжа, використовуючи необхідні умови існування екстремуму:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0 \end{cases};$$

3) перевірити в кожній критичній точці достатні умови існування екстремуму:

а) якщо в точці $M_k(x_k, y_k, \lambda_k)$ визначник третього порядку $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \varphi'_x(M_k) & \varphi'_y(M_k) \\ \varphi'_x(M_k) & U''_{xx}(M_k) & U''_{xy}(M_k) \\ \varphi'_y(M_k) & U''_{xy}(M_k) & U''_{yy}(M_k) \end{vmatrix}$ додатний, то точка M_k є точкою максимуму:

$z_{\max} = f(M_k) = f(x_k, y_k);$

б) якщо визначник $\Delta < 0,$ тоді точка M_k є точкою мінімуму:

$z_{\min} = f(M_k) = f(x_k, y_k).$

4. *Метод найменших квадратів*.

а) лінійна залежність: $y = ax + b,$ де a і b знаходять із нормальної системи рівнянь:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

Невідомі a і b можна знайти також використовуючи метод найменших квадратів у матричній формі, який полягає у виконанні наступних кроків:

1-й крок – знаходження добутку матриць $X'X$, де $X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ і $X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$;

2-й крок – знаходження оберненої матриці $\left[X'X\right]^{-1}$;

3-й крок – знаходження добутку матриці X' і вектора Y, де $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$;

4-й крок – знаходження добутку результатів кроку 2 і кроку 3

$$\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \left[X'X\right]^{-1} \cdot \left(X'Y\right).$$

б) параболічна залежність: $y = ax^2 + bx + c$, де a, b, c знаходять із нормальної системи рівнянь:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

*   *

*

Задача 1. Мале підприємство виробляє товари *A* і *B*. Загальні щоденні витрати *V* (у гривнях) на виробництво *x* одиниць товару *A* та *y* одиниць товару *B* відомі: $V = 320 - 14x - 10y + 0{,}2x^2 + 0{,}1y^2$. Визначити кількість одиниць товарів *A* і *B*, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

Розв'язування. Загальна функція витрат відома: $V = 320 - 14x - 10y + 0{,}2x^2 + 0{,}1y^2$. Щоб знайти кількість одиниць товарів *x* товару *A* і *y* товару *B*, необхідно дослідити цю функцію на екстремум.

Знайдемо частинні похідні I-го порядку $\begin{cases} V'_x = -14 + 0{,}4x \\ V'_y = -10 + 0{,}2y. \end{cases}$

Прирівнюючи їх до нуля, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} -14 + 0{,}4x = 0 \\ -10 + 0{,}2y = 0 \end{cases}, \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 50. \end{cases}$$

Знайдемо частинні похідні II порядку: $A = V''_{xx} = 0{,}4,\quad B = V''_{xy} = 0$, $C = V''_{yy} = 0{,}2$.

Обчислимо $D = AC - B^2 = 0{,}4 \cdot 0{,}2 - 0 = 0{,}08 > 0$ і $A = 0{,}4 > 0$.

Отже, функція витрат при $x = 35$, $y = 50$ досягає мінімуму. Це означає, що для того, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними, необхідно виробити 35 одиниць товару *A* і 50 одиниць товару *B*.

Задача 2. Компанія виробляє два види взаємозамінної продукції виду *A* і *B*. Аналітики фірми експертно визначили функцію сумарних витрат, які необхідні для випуску продукції

$$Z(x, y) = 8x^2 - xy + 12y^2.$$

Відомо, що сумарний обсяг продукції обох видів буде дорівнювати 42 одиницям. Перед менеджерами компанії поставлене завдання: визначити обсяги продукції *A* і *B*, при яких сумарні затрати на виробництво будуть мінімальними.

Розв'язування. Введемо позначення: *x* – кількість продукції виду *A* (одиниць), *y* – кількість продукції виду *B* (одиниць).

Математична модель задачі набуває вигляду: знайти мінімум сумарних витрат

$$Z(x, y) = 8x^2 - xy + 12y^2 \to \min$$

за обмежень:

а) стосовно необхідного сумарного обсягу продукції обох видів

$x + y = 42$;

б) стосовно невід'ємності змінних

$x \geq 0, y \geq 0$.

Задачу розв'язуємо з допомогою методу множників Лагранжа. Для цього зробимо перетворення першого обмеження, представивши його таким чином: $42 - x - y = 0$.

Функція Лагранжа має вигляд:

$$L(x, y, \lambda) = 8x^2 - xy + 12y^2 + \lambda \cdot (42 - x - y).$$

Знаходимо частинні похідні першого порядку та прирівнюємо їх до нуля.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 16x - y - \lambda, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -x + 24y - \lambda, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 42 - x - y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16x - y - \lambda = 0, \\ -x + 24y - \lambda = 0, \\ 42 - x - y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16x - y - \lambda = 0, \\ -x + 24y - \lambda = 0, \\ x + y = 42. \end{cases}$$

Розв’язуємо отриману систему трьох рівнянь із трьома невідомими за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 16 & -1 & -1 \\ -1 & 24 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16 \cdot 24 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 24 \cdot (-1) -$$

$$-1 \cdot (-1) \cdot 16 - 0 \cdot (-1) \cdot (-1) = 0 + 1 + 1 + 24 + 16 - 0 = 42,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 24 & -1 \\ 42 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 42 + 24 \cdot 42 = 25 \cdot 42 = 1050,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 16 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 42 & 0 \end{vmatrix} = 42 + 16 \cdot 42 = 17 \cdot 42 = 714,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 16 & -1 & 0 \\ -1 & 24 & 0 \\ 1 & 1 & 42 \end{vmatrix} = 16 \cdot 24 \cdot 42 - 42 = 383 \cdot 42 = 15286,$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{25 \cdot 42}{42} = 25,$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{17 \cdot 42}{42} = 17,$$

$$\lambda = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{383 \cdot 42}{42} = 383.$$

Знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 16; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 24; \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = -1; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = -1.$$

$A=16$, $B=-1$, $C=24$.

Обчислюємо $D = AC - B^2 = 383$.

Оскільки $D>0$, $A>0$, то знайдена точка екстремуму з координатами $(25;17)$ є точкою мінімуму функції.

Отже, компанія понесе мінімальні сумарні затрати, якщо випускатиме продукції виду *A* – 25 одиниць, продукції виду *B* – 17 од. Ці затрати становитимуть:

$$Z_{\min} = Z(25;17) = 8\cdot 25^2 - 25\cdot 17 + 12\cdot 17^2 = 5000 - 425 + 3468 = 8043 \quad (\textit{грн.})$$

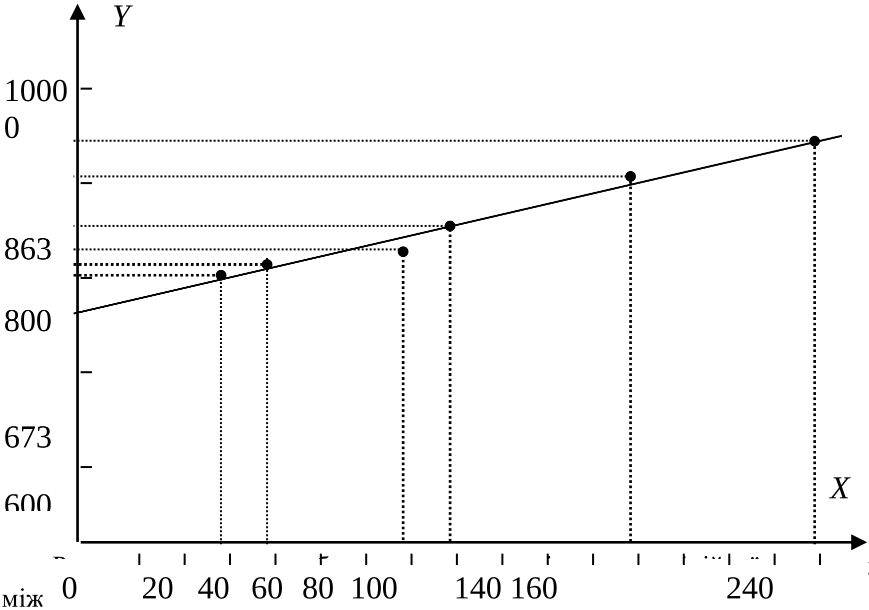
.

Задача 3. Величина товарообміну x (тисяч гривень) і витрати на обіг y (гривень) подані у таблиці

	60	80	140	160	240	320
	551	576	628,5	673	788,5	863

Знайти аналітичну залежність між y та x .

Розв'язування. Спочатку побудуємо у прямокутній системі координат задані таблицею точки.



...сті

між ... із

системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

Будуємо розширену таблицю:

	x_i	y_i	$x_i y_i$	$x_i^{\ 2}$
	60 80 140 160 240 320	551 576 628,5 673 788,5 863	33060 46080 87990 107680 184440 276160	3600 6400 19600 25600 57600 102400
$\sum$	1000	4080	735410	215200

За таблицею складаємо систему рівнянь при $n=6$:

$$\begin{cases} 215200\,a + 1000\,b = 735410 \\ 1000\,a + 6b = 4080 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 215{,}2a + b = 735{,}1 \\ 166{,}67a + b = 680 \end{cases}.$$

Розв'язавши цю систему, маємо $a \approx 1{,}13,\ b \approx 489{,}71$. Одержали функціональну залежність вигляду $y = 1{,}13x + 489{,}71$.

Задача 4. Бюро економічного аналізу фабрики "Світоч" оцінює ефективність відділу маркетингу з продажу цукерок. Для такої оцінки вони мають досвід праці у 5 географічних зонах з майже однаковими умовами (потенційні клієнти, ставлення до товарого знака і т. ін.). У цих зонах вони зафіксували протягом однакового періоду обсяги продажів (y, млн. коробок), витрати (x, млн. грн.) фірми, наведені в таблиці. Припустивши, що між y і x існує лінійна залежність $y = ax + b$, знайти її вигляд методом найменших квадратів у матричній формі.

y_i	25	30	35	45	65
x_i	5	6	9	12	18

Розв'язування.

1) Знаходимо добуток матриць

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 9 & 12 & 18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 9 \\ 1 & 12 \\ 1 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 50 \\ 50 & 610 \end{bmatrix}.$$

2) Знаходимо обернену матрицю

$$\left[X^T X\right]^{-1} = \frac{1}{550} \cdot \begin{bmatrix} 610 & -50 \\ -50 & 5 \end{bmatrix}.$$

3) Знаходимо добуток матриці X^T і вектора Y:

$$X^T Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 9 & 12 & 18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 25 \\ 30 \\ 35 \\ 45 \\ 65 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 2330 \end{bmatrix}.$$

4) Знаходимо добуток

$$\frac{1}{550}\cdot\begin{bmatrix}610 & -50\\ -50 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}200\\ 2330\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 3\end{bmatrix}.$$

Одержали функціональну залежність вигляду $y = 3x + 10$.

Вправи

2.1. Мале підприємство виробляє товари *A* і *B*. Загальні щоденні витрати *V(x)* (у гривнях) на виробництво *x* одиниць товару *A* та *y* одиниць товару *B* відомі. Визначити кількість одиниць товарів *A* і *B*, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

а) $V(x) = 398–12x–3y+0,5x^2+0,1y^2$; б) $V(x) = 441–14x–4y+0,7x+0,1y$;

в) $V(x) = 299–2x–11y+0,1x^2+0,2y^2$; *г)* $V(x) = 33–3x–12y+0,1x^2+0,5y^2$.

2.2. Прибуток фірми визначається наступною формулою $PR(x_1,x_2) = p_0 f(x_1,x_2) - p_1x_1 - p_2x_2$, де $f(x_1,x_2)$ – виробнича функція фірми, p_0 – ринкова ціна продукції, яку випускає фірма, p_1, p_2 – ринкова ціна 1-го і 2-го ресурсів, x_1, x_2 – кількість 1-го і 2-го ресурсів, які затрачає фірма.

Визначити оптимальну кількість ресурсів, при якій фірма отримає найбільший прибуток, і максимальний прибуток, якщо

$$f(x_1,x_2) = 0{,}5\sqrt{x_1}x_2 - 0{,}5x_2^2 + 3{,}5x_2,\ \ p_0 = 2,\ \ p_1 = 1,\ \ p_2 = 1.$$

2.3. Фірма планує витрати 20000 грн. на рекламу. Одна хвилина реклами на телебаченні коштує 1000 грн., а на радіо – 500 грн. Аналітики фірми прогнозують збільшення приросту доходу фірми від використання рекламних засобів за такою функцією:

$$Z(x,y) = -x^2 - y^2 + xy + 10x + 5y,$$

де $Z(x,y)$ – приріст доходу фірми (тис. грн.) від реклами; *x* – тривалість (хв.) рекламного ролика на телебаченні; *y* – тривалість (хв.) рекламного ролика на радіо. Яким чином потрібно поєднати рекламу на телебаченні та радіо, щоби отримати максимальне значення приросту доходу фірми, економно використавши при цьому наявні грошові засоби на рекламу?

2.4. Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох ресурсів x_1 та x_2 і виражається функцією $P(x_1,x_2) = 8000 - x_1^2 - x_2^2 + 40x_1 + 60x_2$. Кількість ресурсів обмежена квотою $x_1 + x_2 = 100$. Визначити витрати ресурсів x_1 і x_2, що забезпечують максимальний прибуток підприємства, та обчислити його.

2

Питання для самоконтролю

1. Що називають функцією багатьох змінних?
2. Що називають функцією двох змінних?
3. Що таке лінії рівня?
4. Які функції багатьох змінних використовуються в економічній теорії?
5. Що таке частинні і повні прирости функції багатьох змінних?
6. Що називається частинними похідними функції багатьох змінних?
7. Що називають градієнтом функції?
8. Що характеризує градієнт функції багатьох змінних?
9. Який зв'язок між градієнтом функції багатьох змінних та її лінією рівня?
10. Що таке точки локального екстремуму функції багатьох змінних?
11. Як формуються необхідні умови локального екстремуму функції багатьох змінних?
12. Як формуються достатні умови локального екстремуму функції багатьох змінних?
13. Як знаходиться найбільше і найменше значення функції багатьох змінних в області?
14. Яка основна ідея методу найменших квадратів?
15. Як обчислити коефіцієнти в методі найменших квадратів у випадку лінійної залежності?
16. Як обчислити коефіцієнти в методі найменших квадратів у випадку квадратичної залежності?
17. Що таке умовний екстремум функції багатьох змінних?
18. Як знаходиться умовний екстремум функції багатьох змінних?
19. В чому полягає суть методу невизначених множників Лагранжа для знаходження точок умовного екстремуму?
20. Наведіть приклади економічних функцій?
21. Яка функція називається виробничою?
22. Яку виробничу функцію називають функцією Кобба-Дугласа?
23. Як знаходити середню продуктивність праці?
24. Як знаходиться середня фондовіддача?
25. Як знаходиться середня фондоозброєність?
26. Яке рівняння називається рівнянням обміну Фішера?
27. Як визначається еластичність виробництва?
28. Як визначається коефіцієнт еластичності попиту товару відносно його ціни?

РОЗДІЛ 7. МЕТОДИ І МОДЕЛІ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

§ 1. Невизначений інтеграл

1. Функція $F(x)$ називається *первісною функцією* для заданої функції $f(x)$, якщо для довільного x з області визначення $f(x)$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$ або $dF(x) = f(x)dx.$

2. Сукупність усіх первісних $F(x)+C$ для заданої функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* і позначається $\int f(x)dx.$ Отже $\int f(x)dx = F(x)+C.$

Таблиця основних інтегралів:

1) $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$;

2) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$;

3) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$;

4) $\int \sin u du = -\cos u + C$;

5) $\int \cos u du = \sin u + C$;

6) $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\, u + C$;

7) $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\, u + C$;

8) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C, \quad (-\arccos\frac{u}{a} + C)$;

9) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$;

10) $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + C, \quad (-\frac{1}{a}\mathrm{arcctg}\frac{u}{a} + C)$;

11) $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$;

12) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$;

13) $\int e^u du = e^u + C$;

14) $\int \mathrm{tg}\, u du = -\ln|\cos u| + C$;

15) $\int \mathrm{ctg}\, u du = \ln|\sin u| + C$;

16) $d\int f(u)du = f(u)du$;

17) $\int dF(u) = F(u) + C$;

18) $\int kf(u)du = k\int f(u)du$;

19) $\int [f_1(u) \pm f_2(u)]du = \int f_1(u)du \pm \int f_2(u)du$.

3. Інтеграл $\int f(x)dx$ обчислюється за допомогою підстановки $x = \varphi(t)$, тобто має місце рівність:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Тут $x = \varphi(t)$ – диференційована функція нової змінної t має обернену $t = \varphi(x)$.

При заміні $t = \varphi(x)$ отримуємо формулу:

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(t)dt.$$

4. Формула *інтегрування частинами*

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$$

Тут за u беруть функцію, що при диференціюванні спрощується, а за dv – ту частину підінтегрального виразу, що має множник dx, інтеграл від якої відомий або може бути знайдений.

*   *

*

Задача 1. Заданий граничний дохід фірми $D'(x) = 200 - 2x,$ де x – кількість виробленої продукції. Знайти функцію сумарного доходу фірми, якщо нульовий випуск продукції дає нульовий дохід.

Розв'язування. Функцію сумарного доходу можна знайти так:

$$D(x) = \int (200 - 2x)dx = 200x - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C = 200x - x^2 + C.$$

Якщо врахувати, що $D(0) = 0$, то $D(0) = 0 = \; = 200 \cdot 0 - 0^2 + C.$ Звідси $C = 0.$

Отже, сумарний дохід фірми $D(x) = 200x - x^2.$

Задача 2. Маржинальний дохід фірми виражено функцією $D'(x) = 12 - 0{,}04x.$ Знайти функцію доходу і визначити відношення між вартістю одиниці продукції та проданою її кількістю.

Розв'язування. Інтегруючи функцію маржинального доходу, знайдемо функцію доходу фірми:

$$D(x) = \int D'(x)dx = \int (12 - 0{,}04x)dx = 12\int dx - 0{,}04\int xdx =$$

$$= 12x - 0{,}04\frac{x^2}{2} + C = 12x - 0{,}02x^2 + C.$$

З умови, що непродаж жодної одиниці продукції дає нульовий дохід, маємо: $0 = 12 \cdot 0 - 0{,}02 \cdot 0^2 + C,\; C = 0.$

Отже, функція доходу має вигляд: $D(x) = 12x - 0{,}02x^2.$

Оскільки дохід дорівнює добутку вартості кожної одиниці продукції (P) проданої фірмою на кількість (x) одиниць продукції, то $D(x) = P \cdot x = 12x - 0{,}02x^2.$

Звідси $P = 12 - 0{,}02x$.

Вправи

Використовуючи невизначений інтеграл, розв'язати задачі економічного змісту:

1.1. Гранична ціна за продану продукцію виражена функцією $P'(x) = 2x + 50,$ де x – кількість проданої продукції. Знайти загальну функцію ціни за продану продукцію, якщо ціна 10 одиниць продукції дорівнює 2000 гривень.

1.2. Граничні витрати фірми на виготовлення x одиниць продукції виражені функцією $V'(x) = 100 + 0{,}04x.$ Знайти загальні можливі витрати при виробництві 1000 одиниць продукції.

1.3. Маржинальний річний дохід фірми заданий рівністю $D'(x) = 80 - 0{,}04x.$ Знайти функцію річного прибутку цієї фірми.

1.4. Маржинальна функція доходу малого підприємства дорівнює $D'(x) = 6 - 0{,}03x.$ Після реалізації 100 одиниць продукції підприємство одержало дохід 30 тисяч гривень. Визначити функцію доходу цього підприємства. Який дохід одержить підприємство після реалізації 125 одиниць продукції?

1.5. Маржинальні витрати (у гривнях) взуттєвої фабрики характеризуються функцією $V'(x) = \frac{x}{100}\sqrt{x^2 + 360}$, де x – кількість пар виготовленого взуття. Знайти функцію загальних витрат фабрики, якщо витрати 50 гривень на пару взуття фіксовані.

§ 2. Застосування визначених інтегралів

1. *Визначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається границя інтегральної суми при умові, що довжина найбільшого з елементарних відрізків прямує до нуля:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum f(\alpha_i)\Delta x_i .$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, то границя інтегральної суми існує і не залежить від способу ділення відрізка $[a;b]$ на частини і від вибору точок α_i.

2. Основні властивості визначеного інтеграла:

2.1. $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx .$$

2.2. $$\int_a^a f(x)dx = 0 .$$

2.3. $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad a < c < b .$$

2.4. $$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

2.5. $$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$$

2.6. $$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), \quad a < c < b.$$

2.7. Якщо m і M – найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, то:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

2.8. Якщо $f(x) \le \varphi(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$, $x \in [a;b]$.

3. Правила обчислення визначених інтегралів:

3.1. *Формула Ньютона – Лейбніца*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ первісна для $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

3.2. *Заміна змінної*:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

де $x = \varphi(t)$ – функція, неперервна разом зі своєю похідною $\varphi'(t)$ на відрізку $\alpha \le t \le \beta$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, $f[\varphi(t)]$ – функція неперервна на $[\alpha;\beta]$.

3.3. *Інтегрування частинами*:

$$\int_a^b udv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu,$$

де $u = u(x)$, $v = v(x)$ – неперервно диференційовані функції на відрізку $[a;b]$.

3.4. Якщо $f(x)$ – непарна функція, тобто $f(-x) = -f(x),$ то:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 .$$

Якщо $f(x)$ – парна функція, тобто $f(-x) = f(x),$ то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx .$$

4. *Економічний зміст визначеного інтеграла*: він чисельно дорівнює обсягу виробленої продукції підприємством з продуктивністю праці $y = f(t)$ за інтервал часу $[0;t]$, тобто

$$q = \int_{0}^{t} f(t)dt.$$

5. *Площа криволінійної трапеції*, обмеженої кривою $y = f(x) \quad (f(x) \geq 0),$ двома ординатами $x = a$ і $x = b$ та відрізком $[a; b]$ на осі OX, обчислюється за формулою:

$$S = \int_{a}^{b} ydx = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

6. *Площа фігури*, обмеженої двома кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ $(f_1(x) \leq f_2(x))$ та двома прямими $x = a$ і $x = b,$ обчислюється за формулою:

$$S = \int_{a}^{b} [f_2(x) - f_1(x)]dx.$$

7. Якщо криволінійна трапеція, обмежена кривою $y = f(x),$ відрізком $[a; b]$ на осі OX і прямими $x = a$ і $x = b,$ обертається навколо осі OX, то *об'єм тіла обертання* обчислюється за формулою:

$$V = \pi\int_{a}^{b} y^2dx = \pi\int_{a}^{b} f^2(x)dx.$$

Аналогічно, *об'єм тіла обертання* навколо осі OY знаходиться за формулою:

$$V = \pi\int_{c}^{d} x^2dy = \pi\int_{c}^{d} f^2(y)dy.$$

8. Якщо фігура, обмежена кривими $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = f_2(x)$ $(0 \le f_1(x) \le f_2(x))$ та прямими $x = a,\ \ x = b,$ обертається навколо осі OX, то *об'єм тіла обертання* обчислюється за формулою:

$$V = \pi\int_a^b [y_2{}^2 - y_1{}^2]dx = \pi\int_a^b [f_2{}^2(x) - f_1{}^2(x)]dx.$$

9. Нехай $V(x)$ – функція загальних видатків на виробництво x одиниць продукції, $V'(x)$ – функція маржинальних видатків. $P'(x),\ D'(x)$ – функції, відповідно, маржинальних прибутку та доходу. Тоді при зростанні кількості одиниць продукції від a до b, зміна загальних видатків обчислюється за формулою $\int_a^b V'(x)dx = V(x)\Big|_a^b = V(b) - V(a)$.

При зростанні реалізації продукції зміни прибутку і доходу визначимо за формулами: $\int_a^b P'(x)dx = P(x)\Big|_a^b = P(b) - P(a)$,

$$\int_a^b D'(x)dx = D(x)\Big|_a^b = D(b) - D(a).$$

10. Якщо $V(t)$, $P(t)$, $D(t)$ відповідно функції витрат, прибутку та доходу від часу, то їх *середні значення витрат, прибутку, доходу* підприємства за інтервал часу $t \in [t_1; t_2]$ обчислюються за формулами:

$$V_{сер.} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} V(t)dt,\quad P_{сер.} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} P(t)dt,\quad D_{сер.} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} D(t)dt.$$

11. Метою всякого виробництва є досягнення максимального прибутку. Тобто, досягнення максимальної різниці між доходами і видатками. Тоді $P(t) = D(t) - V(t)$. Функція досягає свого екстремуму, якщо її похідна рівна 0. Тобто $P'(t) = D'(t) - V'(t) = 0$. Тобто $D'(t) = V'(t)$. Визначимо момент t_k в який швидкість зміни доходу та видатків зрівнюються. Загальний прибуток за час t_k можна знайти за формулою

$$P(t_k) = \int_0^{t_k} P'(t)dt = \int_0^{t_k} (D'(t) - V'(t))dt.$$

12. Якщо капітал $K(t)$ збільшується за одиницю часу t на обсяг чистих інвестицій $I(t)$, то чисті інвестиції – це похідна від капіталу за часом t,

тобто $I(t)=K'(t)$. Приріст капіталу за період часу від t_1 до t_2 знаходиться так:

$$\Delta K = K(t_2) - K(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt .$$

13 Графік функції $y = f(x)$, яка описує дійсний розподіл доходів населення держави, називається *кривою Лоренца*.

Коефіцієнтом нерівності розподілу доходів кривої Лоренца (*коефіцієнтом Джіні)* називають відношення площі фігури, обмеженої кривою Лоренца та прямою $y = x$ до площі фігури, яка лежить нижче прямої $y = x$ (прямокутний трикутник: $0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1;\ y = x$). Коефіцієнт Джіні (k) показує нерівність в розподілі доходів населення і завжди задовольняє співвідношення: $0 \le k \le 1$. Коли $k = 0$, доходи населення розподілено рівномірно, а коли $k = 1$, нерівномірність розподілу доходів найбільша. Аналогічні міркування і в задачі про розподіл прибуткового податку.

14. Величина початкового вкладу K_0 при умові, що відомий вклад $K_t = g(t)$, одержаний при неперервному нарахуванні відсотків через t років за річної ставки p становить $K_0 = g(t)e^{-\frac{p}{100}t} = g(t)e^{-it}$. Тоді *повна дисконтна сума* за T років знаходиться за формулою

$$K_d = \int_0^T g(t)e^{-it}dt$$

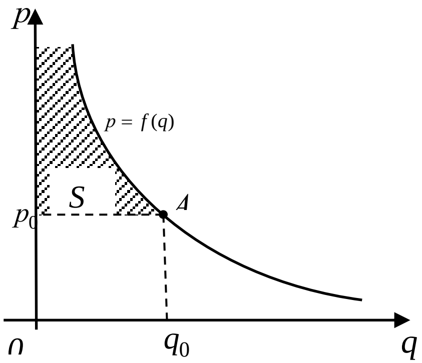
15. Розглянемо криву попиту деякого товару у вигляді $p = f(q)$ (рис. 1), де p – ціна одиниці товару, а q – обсяг товару. p_0 – рівноважна ціна, а q_0 – обсяг товару, який реалізується за ціною p_0.

Надлишок споживача S_H – це різниця між можливими й реальними витратами споживача в умовах ринку:

$$S_H = \int_0^{q_0} f(q)dq - p_0 q_0 . \qquad (1)$$

Розглянемо криву пропозиції деякого товару $p = g(q)$ (рис. 2.) *Додаткова вартість* виробника – це різниця між вартістю створеного продукту і вартістю факторів виробва:

$$S_{\text{дод. вар.}} = p_0 s_0 - \int_0^{s_0} g(s) ds \,. \qquad (2)$$



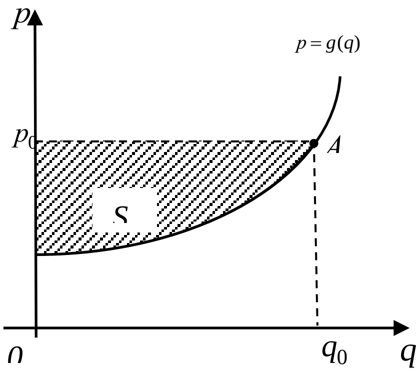


Рис. 1. Рис. 2.

* *

*

Задача 1. Продуктивність праці робітника задано функцією $f(t) = 6t - t^2$. Робочий день працівника становить 6 год. Визначити обсяг виробленої продукції: а) за робочий день; б) за дві останні години роботи.

Розв'язування.

а) $q_1 = \int_0^6 f(t)dt = \int_0^6 (6t - t^2)dt = \left(3t^2 - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^6 = 36$ од. пр.;

б) $q_2 = \int\limits_4^6 f(t)dt = \int\limits_4^6 (6t - t^2)dt = \left(3t^2 - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_4^6 = 9\frac{1}{3}$ од. пр.

Задача 2. Знайти обсяг продукції, виробленої підприємством за п'ять років, якщо виробнича функція Кобба-Дугласа має вигляд $y = (1 + 0{,}05t)e^{2t}$.

Розв'язування.

$$q = \int\limits_0^4 (1 + 0{,}05t)e^{2t}dt = \begin{vmatrix} u = 1 + 0{,}05t, & du = 0{,}05dt \\ dv = e^{2t}dt, & v = \frac{1}{2}e^{2t} \end{vmatrix} = \frac{1 + 0{,}05t}{2}e^{2t}\Bigg|_0^4 -$$

$$-\frac{1}{40}\int\limits_0^4 e^{2t}dt = 0{,}6e^8 - 0{,}5e^0 - \frac{1}{80}e^{2t}\Bigg|_0^4 = 0{,}6e^8 - 0{,}5 - \frac{1}{80}(e^8 - e^0) =$$

$$= 0{,}5875\,e^8 - 0{,}4875 \quad (\text{\textit{од.пр.}}).$$

Задача 3. Знайти середній прибуток за 8 місяців поточного року, якщо функція прибутку фірми має вигляд $\boldsymbol{P(t) = 3t^2 - 2t - 1}$, де t час у місяцях.

Розв'язування. Середній прибуток фірми потрібно знайти за інтервал часу від $t_1 = 0$ до $t_2 = 8$.

$$P_{сер.} = \frac{1}{8}\int\limits_0^8 (3t^2 - 2t - 1)dt = \frac{1}{8}\left(t^3 - t^2 - t\right)\Big|_0^8 = \frac{1}{8}\left(8^3 - 8^2 - 8\right) = 55 \text{ ум. грош.}$$

од.

Задача 4. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами:

$$V'(t) = 5 + 2\sqrt[3]{t^2}, \; D'(t) = 17 - \sqrt[3]{t^2}.$$

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

Розв'язування. Оптимальний час t для прибутку підприємства одержимо з умови $D'(t) = V'(t)$:

$$5 + 2\sqrt[3]{t^2} = 17 - \sqrt[3]{t^2}, \; 3\sqrt[3]{t^2} = 12, \; \sqrt[3]{t^2} = 4, \; t = 8.$$

Отже, підприємство було прибутковим 8 років. За цей час одержано прибутку:

$$P=\int_0^8[D'(t)-V'(t)]dt=\int_0^8\left(17-\sqrt[3]{t^2}-5-2\sqrt[3]{t^2}\right)dt=$$

$$=\int_0^8\left(12-3t^{2/3}\right)dt=\left(12t-3\cdot\frac{t^{5/3}}{5/3}\right)\Bigg|_0^8=96-\frac{9}{2}\cdot 32=38{,}9\,(\text{млн. грн.}).$$

Задача 5. За даними чистими інвестиціями $I(t)=30000\sqrt{t}$ знайти приріст капіталу з першого по четвертий рік і визначити, за скільки років приріст капіталу становитиме 20000000 умов. грош. од.

Розв'язування. Приріст капіталу знайдемо за інтервал часу від $t_1=1$ до $t_2=4$.

$$\Delta K=K(4)-K(1)=\int_1^4 30000\sqrt{t}dt=20000\sqrt{t^3}\Big|_1^4=140000$$ умов. грош. од.

За умовою задачі

$$\Delta K=K(t_k)-K(0)=\int_0^{t_k}30000\sqrt{t}dt=20000\sqrt{t^3}\Big|_0^{t_k}=20000000\ ,$$

тобто $\sqrt{t_{t_k}^3}=1000$, звідки $t_k=10$. Отже, потрібно 10 років, щоб приріст капіталу досяг 20 млн. умов. грош. од.

Задача 6. Нехай $y=2-\sqrt{4-x^2}$, крива Лоренца, визначена за дослідженнями розподілу доходів в якійсь країні, де *x* – відсоток населення, у – відсоток доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джіні.

Розв'язування. З малюнка видно, що $k=\dfrac{S_{OAm}}{S_{\Delta OAB}}$,

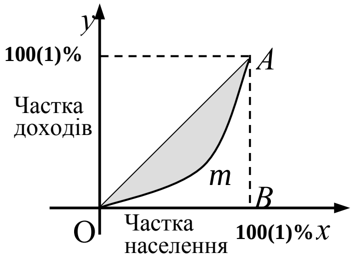
$$S_{OAm}=\int_0^1(x-2+\sqrt{4-x^2})dx=\int_0^1 xdx-2\int_0^1 dx+\int_0^1\sqrt{4-x^2}dx.$$

Для знаходження $\int_0^1\sqrt{4-x^2}dx$ введемо заміну $x=2\sin t$, тоді нижня межа t = 0, а верхня $t=\dfrac{\pi}{6}$.

Обчислюємо

$$S_{oAm}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}2\sqrt{1-\sin^2 t}\,2\cos t dt=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 tdt=\frac{1}{2}-2+\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}41.$$



$$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}.$$

Тому $k=\dfrac{0{,}41}{0{,}5}=0{,}82$. Великий коефіцієнт k показує нерівномірність розподілу доходів серед населення даної країни.

Задача 7. Визначити дисконтний дохід за 3 роки за процентної ставки 10%, якщо початкові капіталовкладення становили 20 млн. грн., а очікуване щорічне зростання капіталу – 2 млн. грн.

Розв'язування. Капіталовкладення задаються функцією $g(t)=20+2t$, а $i=p/100=0{,}1$.

Дисконтна сума капіталовкладень:

$$K_d=\int_0^3(20+2t)e^{-0{,}1t}dt=\left|\begin{matrix} u=20+2t, & du=dt \\ dv=e^{-0{,}1t}dt, & v=\dfrac{e^{-0{,}1t}}{-0{,}1}\end{matrix}\right|=$$

$$=-10e^{-0{,}1t}(20+2t)\Big|_0^3+10\int_0^3 e^{-0{,}1t}dt=200-260e^{-0{,}3}-100e^{-0{,}1t}\Big|_0^3=$$

$$=300-360e^{-0{,}3}\approx 33 \textit{ млн. грн.}$$

Задача 8. Знайдемо надлишок споживача, якщо крива попиту визначається функцією $p=f(q)=45-4q^2$, а рівноважний обсяг товару $q_0=3$.

Розв'язування. Підставивши значення $q_0=3$ у функцію попиту, дістанемо рівноважну ціну:

$$p_0=f(q_0)=45-4\cdot 3^2=9.$$

Використовуючи формулу (1), матимемо:

$$S_H = \int_0^{q_0} f(q)dq - p_0 q_0 = \int_0^3 \left(45 - 4q^2\right)dq - 9 \cdot 3 =$$

$$= \left(45q - \frac{4q^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 - 27 = 45 \cdot 3 - 36 - 27 = 72.$$

Задача 9. Знайдемо додаткову вартість виробників, якщо крива пропозиції визначається функцією $p = f(q) = 12 + 5q^3$, а рівноважний обсяг товару $q_0 = 4$.

Розв'язування. Підставивши значення $q_0 = 4$ у функцію пропозиції, дістанемо рівноважну ціну:

$p_0 = f(q_0) = 12 + 5 \cdot 4^3 = 12 + 320 = 332$.

Використовуючи формулу (2), матимемо:

$$S_{\text{дод.вар.}} = p_0 q_0 - \int_0^{q_0} f(q)dq = 332 \cdot 4 - \int_0^4 \left(12 + 5q^3\right)dq =$$

$$= 1328 - \left(12q + \frac{5q^4}{4}\right)\Bigg|_0^4 = 1328 - (12 \cdot 4 + 320) = 1328 - 368 = 960.$$

Задача 10. Знайти надлишок споживачів і виробників у пропозиції встановлення ринкової рівноваги, якщо функції попиту й пропозиції мають вигляд $p = 64 - 2q^2$, $p = 16 + 4q$ відповідно.

Розв'язування. Розв'язавши систему $\begin{cases} p = 64 - 2q^2, \\ p = 16 + 4q; \end{cases}$ знайдемо точку рівноваги: $p_0 = 32$, $q_0 = 4$. Тоді, використовуючи формули (1) і (2), одержимо:

$$S_H = \int_0^{q_0} f(q)dq - p_0 q_0 = \int_0^4 \left(64 - 2q^2\right)dq - 32 \cdot 4 = \left(64q - \frac{2q^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 - 128 =$$

$$= 64 \cdot 4 - \frac{128}{3} - 128 = 128 - \frac{128}{3} = \frac{256}{3} = 85\frac{1}{3};$$

$$S_{\text{дод. вар.}} = p_0 q_0 - \int_0^{q_0} f(q)dq = 32 \cdot 4 - \int_0^4 (16 + 4q)dq = 128 - \left(16q + 2q^2\right)\Big|_0^4 =$$

$$= 128 - (16 \cdot 4 + 32) = 128 - 96 = 32.$$

Вправи

2.1. Знайти середнє значення витрат $K(x) = 3x^2 + 4x + 1,$ якщо об'єм продукції x змінюється від 0 до 3 одиниць, і вказати об'єм продукції, при якому витрати мають середнє значення.

2.2. Відомі закони зміни швидкості витрат $V'(t)$ і доходу $D'(t)$ підприємства. За який час підприємство одержить максимальний прибуток? Якою буде величина максимального прибутку?

а) $V'(t) = 2 + 3\sqrt{t},\ D'(t) = 14 - \sqrt{t};$

б) $V'(t) = 2 + 2\sqrt[3]{t},\ D'(t) = 10 - 2\sqrt[3]{t};$

Тут t вимірюють у роках, а витрати $V(t)$ і дохід $D(t)$ – у млн. гривень.

2.3. Денна продуктивність праці (за 7 робочих годин) бригади робочих машинобудівного заводу виражена функцією $y = -0{,}0033t^2 - 0{,}08t + 20{,}96,$ де t – проміжок часу в годинах. Визначити об'єм випуску продукції протягом року (за 240 робочих днів). Обчислити прибуток, якщо заводська оптова ціна одиниці продукції становить 200 гривень, її собівартість – 100 гривень, а кількість бригад – 10.

2.4. Продуктивність праці протягом дня описується функцією

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + 6t, & 0 < t \le 4, \\ 0, & 4 < t < 5, \\ -t^2 + 13t - 40, & 5 \le t \le 8, \end{cases}$$

де t – час, що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, виробленої за весь робочий день.

2.5. Знайти обсяг випуску продукції фірми за 5 років, якщо виробнича функція Кобба-Дугласа має вигляд $y = (2t + 1)e^{3t}$.

2.6. Витрати електроенергії (у кВт) міськими підприємствами і населенням міста з 8 до 18 год. наближено виражені функцією $y = 10000 - 8t + 15t^2,$ де t – проміжок часу в годинах. Визначити вартість електроенергії, спожитої містом, якщо вартість 1кВт/год дорівнює 12 коп.

2.7. Надходження товару на склад виражене функцією $y_1 = 0{,}006t^2 - 0{,}3t + 75,$ а реалізація цих товарів – функцією $y_2 = 0{,}003t^2 - 0{,}4t + 56,$ де t – кількість днів. Визначити запас товару в умовних одиницях після закінчення 60 робочих днів, якщо вихідного товару на складі не було.

2.8. За даними дослідження в розподілі доходів в одній із країн крива Лоренца описана рівнянням $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$. Тут x відсоток населення, а y – відсоток доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джіні.

2.9. Нехай $y = \frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x$, крива Лоренца визначена дослідженням нерівномірного розподілу прибуткового податку. Тут y – відсоток загального прибуткового податку; x – відсоток всього населення держави, яка сплачує цей податок. Обчислити коефіцієнт нерівномірності розподілу податку (коефіцієнт Джіні).

Питання для самоконтролю

1. Яка функція називається первісною для даної функції?
2. Що називається невизначеним інтегралом даної функції?
3. Які є методи обчислення невизначених інтегралів?
4. Що таке визначений інтеграл функції на проміжку [a;b]?
5. Який геометричний та економічний зміст визначеного інтегралу?
6. Що таке криволінійна трапеція?
7. Як знайти площу плоскої фігури з допомогою визначеного інтеграла?
8. Як знайти об’єм тіла обертання навколо вісі OX (OY)?
9. Як обчислюється обсяг виробленої продукції?
10. Як обчислюється середні значення економічних функцій?
11. Як обчислюється приріст капіталу за відомими інвестиціями?
12. Що таке коефіцієнт Джіні?
13. Що характеризує крива Лоренца?

РОЗДІЛ 8. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1. *Диференціальним рівнянням* називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x, шукану функцію $y=f(x)$ і її похідні або диференціали різних порядків, тобто рівняння

$$F(x,y,y',y''...,y^{(n)})=0. \qquad (1)$$

2. Розв'язком диференціального рівняння (1) називається така функція $y=\varphi(x)$, яка при підстановці у рівняння (1) перетворює його в тотожність.

3. Рівняння вигляду

$$f_1(y)dy=f_2(x)dx, \qquad (2)$$

де $f_1(y)$ і $f_2(x)$ – задані функції, називається *диференціальним рівнянням з відокремленими змінними.*

Щоб розв'язати рівняння (2), треба проінтегрувати обидві його частини:

$$\int f_1(y)dy=\int f_2(x)dx+C.$$

4. Функція двох змінних $f(x,y)$ називається *однорідною* n-го виміру, якщо виконується умова

$$f(x,y)=f(tx,ty)=t^n f(x,y).$$

5. Диференціальне рівняння $y'=f(x,y)$ називається *однорідним*, якщо функція $f(x,y)$ однорідна нульового виміру.

В загальному випадку змінні в однорідному рівнянні не відокремлюються зразу. Але, якщо ввести допоміжну невідому функцію $u=u(x)$ за формулою

$$\frac{y}{x}=u \quad \text{або} \quad y=xu,$$

то ми зможемо перетворити однорідне рівняння в рівняння з відокремлюваними змінними.

6. *Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку* називається рівняння, яке містить шукану функцію і її похідну у першому степені без їх добутку:

$$y'+P(x)y=Q(x). \qquad (3)$$

Тут $P(x)$, $Q(x)$ – відомі функції незалежної змінної x.

Якщо $Q(x)=0$, то рівняння (3) називається *лінійним однорідним* і є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Якщо $Q(x)\neq 0$, то рівняння (3) називається *лінійним неоднорідним.*

Розв'язок диференціального рівняння (3) за методом Бернуллі шукаємо у вигляді

$$y=u(x)\,v(x) \quad \text{або} \quad y=uv, \qquad (4)$$

де $u(x)$, $v(x)$ невідомі функції. Одну з цих функцій можна взяти довільну, а інша визначається із рівняння (3).

Із рівності $y=uv$ знаходять похідну y':

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Підставляють y та y' в рівняння (3):

$$u'v + uv' + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x) \text{ або } u'v + u(v' + P(x) \cdot v) = Q(x).$$

Вибирають функцію v такою, щоб $v' + P(x)v = 0$.

Тоді знаходять функцію u із одержаного рівняння $u'v = Q(x)$.

Знайдені функції u та v підставляють в (4) і одержують загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння.

*   *

*

Задача 1. Відомо, що еластичність попиту Q визначається за формулою $\eta = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp}$, де x – кількість одиниць деякого товару вартістю p за кожну одиницю. Знайти функцію попиту на цей товар, якщо еластичність попиту постійна і дорівнює –1.

Розв'язування. За умовою задачі: $\frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} = -1$; $\frac{dQ}{Q} = -\frac{dp}{p}$;

$$\ln|Q| = -\ln|p| + \ln|C|;\ \ln|Q| = \ln\left|\frac{C}{p}\right|;\ Q = \frac{C}{p};\ \ p = \frac{C}{Q}.$$

Знайшли залежність між кількістю товару та його вартістю, тобто функцію попиту.

Задача 2. Швидкість знецінювання обладнання внаслідок його зносу пропорційна в кожний даний момент часу його фактичній вартості. Початкова вартість – A_0. Якою буде вартість використання впродовж t років?

Розв'язування. Нехай A_0 – вартість обладнання в момент t. Зміна вартості (знецінювання) виражається різницею $(A_0 - A_t)$. Швидкість знецінювання $\frac{d(A_0 - A_t)}{dt}$ пропорційна фактичній вартості в даний момент A_t. Одержуємо рівняння

$$\frac{d\left(A_0 - A_t\right)}{dt} = kA_t$$

з початковою умовою $A_t(0) = A_0$.

Розв'язавши його, одержимо:

$$\frac{-dA_t}{dt} = kA_t \Rightarrow \int \frac{dA_t}{A_t} = -\int k\,dt \Rightarrow \ln\left|A_t\right| = -kt + \ln\left|C\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{A_t}{C}\right| = -kt \Rightarrow \frac{A_t}{C} = e^{-kt} \Rightarrow A_t = Ce^{-kt}.$$

Для визначення довільної сталої *C* використаємо початкову умову при *t* = 0:

$$A_0 = Ce^{-k\cdot 0};\ \ C = A_0.$$

Одержаний частинний розв'язок має вигляд

$$A_t = A_0 e^{-kt}.$$

Задача 4. Кількість населення $y(t)$ є функцією часу *t*, тобто з часом кількість населення змінюється. Швидкість зміни приросту населення пропорційна кількості. Знайти формулу для визначення кількості населення у будь-який момент часу *t*.

Розв'язування. Швидкість зміни приросту населення пропорційна кількості населення. Це записуємо так $\frac{dy}{dt} = ky(t)$, де k – коефіцієнт пропорційності.

В одержаному диференціальному рівнянні відокремимо змінні

$$\frac{dy}{y} = k\,dt.$$

Далі будемо мати:

$$\ln\left|y\right| = kt + \ln\left|c\right| \Rightarrow \ln\left|y\right| - \ln\left|c\right| = kt \Rightarrow \ln\left(\frac{y}{c}\right) = kt \Rightarrow y = ce^{kt}.$$

Отже, ми отримали формулу для визначення кількості населення.

Задача 5. У 1990 році населення на Землі становило 5 млрд. Знайти чисельність населення Землі у 2010 році, якщо відомо, що населення у 2000 році становило 6 млрд.

Розв'язування. Почнемо відлік із 1990 року, тобто $t_0 = 0$.

В 2000 році населення Землі 6 млрд., $t = 10$ років.

Отримаємо рівняння $6=5e^{k10}$. Звідси $k=\frac{1}{10}\ln\frac{6}{5}$.

Враховуючи це запишемо розв'язок $y=5e^{\frac{1}{10}\ln\frac{6}{5}t}$.

Використовуючи одержану формулу знайдемо кількість населення, яка б мала бути в 2010р., t=20.

$$y=5e^{\frac{1}{10}\ln\frac{6}{5}20}=5e^{\ln\left(\frac{6}{5}\right)^2}=5\left(\frac{6}{5}\right)^2=7{,}2 \text{ млрд. осіб.}$$

Згідно статистичних даних населення Землі 7,204 млрд. осіб. Отримане значення є наближене до статистичного.

Задача 6. Економісти встановили, що швидкість зростання інвестованого капіталу у будь-який момент часу *t* пропорційна величині капіталу із коефіцієнтом пропорційності рівним узгодженому відсотку *R* неперервного зростання капіталу. Знайти закон зростання інвестованого капіталу, враховуючи величину початкової ($t=0$) інвестиції I_0.

Розв'язування. Побудуємо математичну модель цієї задачі.

Позначимо: $I(t)$ – величина інвестованого капіталу у момент *t* (шукана функція). Тоді $\frac{dI(t)}{dt}$ – швидкість зміни величини інвестиції, $i=\frac{r}{100}$.

За умовою задачі отримали задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dI(t)}{dt}=iI(t), \\ I(t)\big|_{t=0}=I_0. \end{cases}$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння є:

$$I(t)=e^{it+c}=e^c e^{it}$$

Згідно з початковою умовою при *t* = 0 маємо $I_0=e^c$.

Отже, розв'язком задачі Коші є функція $I(t)=I_0e^{it}$.

Це означає, що при умовах задачі інвестиції з часом зростають за експоненціальним законом.

Вправи

1.1. Стосовно попиту кількості одиниць Q певного товару вартістю p за кожну одиницю відомо, що еластичність попиту, яку визначають формулою $E=\frac{p}{Q}\cdot\frac{dQ}{dp}$, постійна і дорівнює $-\frac{1}{2}$. Знайти функцію попиту на цей товар.

1.2. Еластичність попиту на певний товар постійна і дорівнює $-2.$ Визначити функцію попиту вигляду $p=f(Q),$ якщо $p=\frac{1}{2}$, коли $Q=4.$

1.3. Еластичність попиту на певні вироби змінюється разом зі зміною вартості кожного виробу за законом $E=\frac{p}{p-10}$. Визначити функцію попиту вигляду $p=f(Q),$ якщо $0<p<10$ і $p=7,$ коли $Q=15.$

1.4. Еластичність попиту товару – $E=\frac{Q-200}{Q}$. Визначити функцію попиту вигляду $p=f(Q),$ якщо $0<Q<200$ і $p=5,$ коли $Q=190.$

1.5. Кількість населення певного міста $y(t)$ (t вимірюють у роках) задовольняє диференціальне рівняння $y'=0{,}1y(1-10^{-6}y).$ Через скільки років кількість населення цього міста збільшиться зі 100000 до 500000?

ДОДАТКИ

Д1. Таблиця відсотків рахунків накопичення

$S_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}$ *та ренти* $a_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[1-(1+i)^{-i}\right]}{i}$

i=0,5%= 0,005				*i=1%= 0,01*			
	$(1+i)^n$	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$		$(1+i)^n$	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$
	1,005	0,995	1,0		1,01	0,99	1,0
	1,001	1,985	2,005		1,02	1,97	2,01
	1,015	2,970	3,015		1,03	2,94	3,030
	1,020	3,950	4,030		1,04	3,90	4,060
	1,025	4,925	5,050		1,05	4,85	5,101
	1,030	5,896	6,075		1,06	5,79	6,152
	1,035	6,862	7,105		1,07	6,72	7,213
	1,040	7,822	8,141		1,08	7,65	8,285
	1,045	8,779	9,182		1,09	8,56	9,368
	1,051	9,730	10,22		1,10	9,47	10,46
	1,056	10,67	11,27		1,11	10,3	11,56
	1,061	11,06	12,33		1,12	11,2	12,68
	1,066	12,55	13,33		1,13	12,1	13,80
	1,072	13,48	14,46		1,14	13,0	14,94
	1,077	14,41	15,53		1,16	13,8	16,09
	1,083	15,33	16,61		1,17	14,7	17,25
	1,088	16,25	17,69		1,18	15,5	18,43
	1,093	17,17	18,78		1,19	16,3	19,61
	1,099	18,08	19,87		1,20	17,2	20,81
	1,104	18,98	20,97		1,22	18,0	22,01
	1,110	19,88	22,08		1,23	18,8	23,23
	1,115	20,78	23.19		1,24	19,6	24,47
	1,121	21,67	24,31		1,25	20,4	25.71
	1,127	22,56	25,43		1,26	21,2	26,97

Таблиця відсотків рахунків накопичення

$$S_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \text{ та ренти } a_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[1-(1+i)^{-i}\right]}{i}$$

(продовження)

i=2%= 0,02				*i=3%= 0,03*			
	$(1+i)^n$	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$		$(1+i)^n$	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$
	1,02	0,980	1,0		1,03	0,970	1,0
	1,04	1,941	2,02		1	1,913	2,03
	1,06	2,883	3,060		1,09	2,828	3,090
	1,08	3,807	4,121		1,12	3,717	4,183
	1,10	4,713	5,204		1,19	4,579	5,309
	1,12	5,601	6,308		1,19	5,417	5,468
	1,14	6,471	7,434		1,22	6,230	7,662
	1,17	7,325	8,582		1,26	7,019	8,892
	1,19	8,16	9,754		1,30	7,786	10,15
	1,21	8,98	10,94		1,34	8,530	11,46
	1,24	9,78	12,16		1,38	9,252	12,80
	1,26	10,57	13,41		1,42	9,954	14,19
	1,29	11,34	14,68		1,46	10,63	15,61
	1,31	12,10	15,97		1,51	11,29	17,08
	1,34	12,84	17,29		1,55	11,93	18,59
	1,37	13,57	18,63		1,60	12,56	20,15
	1,40	14,29	20,01		1,65	13,16	21,76
	1,42	14,99	21,41		1,70	13,75	23,41
	1,45	15,67	22,84		1,75	14,32	25,11
	1,48	16,35	24,29		1,80	14,87	26,87
	1,51	17,01	25,78		1,86	15,41	28,67
	1,545	17,65	27,29		1,91	15,93	30,53
	1,57	18,29	28,84		1,97	16,44	32,45
	1,60	18,91	30,42		2,03	16,93	34,42

Таблиця відсотків рахунків накопичення

$$S_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \text{ та ренти } a_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[1-(1+i)^{-i}\right]}{i}$$

(продовження)

i=5%= 0,05				*i=8%= 0,08*			
	$(1+i)^n$	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$		$(1+i)^n$	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$
	1,05	0,952	1,0		1,08	0,92	1,0
	1,10	1,859	2,05		1,16	1,78	2,08
	1,15	2,723	3,152		1,25	2,57	3,246
	1,21	3,545	4,310		1,36	3,31	4,506
	1,27	4,329	5,525		1,46	3,99	5,866
	1,34	5,075	6,801		1,58	4,62	7,335
	1,40	5,786	8,142		1,71	5,20	8,922
	1,47	6,463	9,549		1,85	5,74	10,63
	1,55	7,107	11,02		1,99	6,24	12,48
	1,62	7,721	12,57		2,15	6,71	14,48
	1,71	8,306	14,20		2,33	7,13	16,64
	1,79	8,863	15,91		2,51	7,53	18,97
	1,88	9,393	17,71		2,71	7,90	21,49
	1,97	9,898	19,59		2,93	8,24	24,21
	2,07	10,37	21,57		3,17	8,55	27,15
	2,18	10,83	23,65		3,42	8,53	30,32
	2,29	11,27	25,84		3,70	9,12	33,75
	2,40	11,68	28,13		3,99	9,37	37,45
	2.52	12,08	30,53		4,31	9,60	41,44
	2,65	12,46	33,06		4,66	9,81	45,76
	2,78	12,82	35,71		5,03	10,0	50,42
	2,92	13,16	38,50		5,43	10,2	55,45
	3,07	13,48	41,43		5,87	10,3	60,89
	3,22	13.79	44,50		6,34	10,5	66,76

ЛІТЕРАТУРА

1. Комплексні практичні індивідуальні завдання з вищої математики. Навчальний посібник / Алілуйко А.М., Неміш В.М., Шинкарик М.І. — Тернопіль: Економічна думка, 2013. – 116 с.

2. Крыньский Х. Э. Математика для економистов: Пер. с польск. Меникера В. Д. Под ред. Баренгольца М. И. – М.: Статистика, 1970. – 584 с.

3. Математичні моделі в економічних задачах. Практикум (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. – К: НТУУ «КПІ», 2014. – 57 с.

4. Методичні вказівки для проведення тренінгів з вищої математики / Алілуйко А.М., Дзюбановська Н.В., Лесик О.Ф., Неміш В.М., Шинкарик М.І. — Тернопіль: ТНЕУ, 2016. – 90 с.

5. Неміш В. М., Процик А. І., Березька К. М. Практикум з вищої математики: Навч. посібник., 3-тє видання. – Тернопіль: ТНЕУ в-во «Економічна думка» 2010. – 304 с.