МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Тернопільська академія народного господарства

На правах рукопису

ДЕМ’ЯНЮК
Ольга Борисівна

УДК 519.866:336

Моделювання прийняття фінансових рішень на основі функції вигідності з грошовим та часовим аргументами

Спеціальність: 08.03.02. – Економіко-математичне моделювання

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата економічних наук

Науковий керівник:
ОЛЕКСЮК Олександр Степанович,
доктор економічних наук,
професор

ТЕРНОПІЛЬ - 2002

ЗМІСТ

ВСТУП

Сучасний період розвитку української економіки характеризується нестабільністю механізму ринкового регулювання, мінливістю тенденцій та процесів економічного розвитку, складними процесами становлення та розвитку підприємництва, непередбаченими змінами кон’юнктури на внутрішніх і зовнішніх ринках, що змушують суб’єктів господарювання приймати фінансові рішення в умовах невизначеності і ризику, а це передбачає якісно новий підхід до підвищення ефективності методів прийняття фінансових рішень і врахування об’єктивно-суб’єктивного аспекту рішень.

Виходячи з цього, особливої уваги заслуговують методи теорії вигідності, оскільки теорія вигідності враховує як кількісні (затрати ресурсів) так і якісні (людський фактор) аспекти варіантів рішень. Теорія вигідності відображає прагматичну тенденцію в мотивації прийняття рішень ОПР, яка пов’язана з розрахунком альтернатив на успіх, вигоди в несприятливих та суперечливих обставинах. Одним з основних положень теорії вигідності є лінія поведінки ОПР, її суб’єктивна оцінка ймовірності настання та вигідність події. Використання цієї теорії дає можливість порівняти альтернативи за критерієм вигідності і виключити ті з них, які потенційно пов’язані із значними втратами. ОПР, яка раціонально приймає рішення виходячи з принципу найбільшої вигоди завжди має обґрунтовані міркування та уявлення про міру ризикованості тієї чи іншої альтернативи. Ці уявлення базуються на мірі впевненості ОПР (суб’єктивних ймовірностях) в настанні різних наслідків рішень.

Існують ґрунтовні теоретичні дослідження щодо проблематики розробки та використання функції вигідності при виборі рішень, пов’язаних з ризиком, а також має місце широкий діапазон наукових джерел [1; 6; 12; 23-25; 27; 39-43; 61; 62; 73; 75; 76; 81; 91; 95; 100; 102-104; 117; 131; 132; 139; 143; 144; 146; 158; 163; 164; 168; 170; 171; 175; 176], де ці питання розглядаються. Виходячи з того, що у процесі фінансових операцій і комерційних угод фінансові ресурси завжди пов′язані з конкретними моментами часу, проблема “гроші – час” не така вже й нова в економічній науці. Розроблено моделі та алгоритми [5; 7-9; 11; 12; 25; 31; 32; 34; 36; 53-55; 63; 65; 66; 69; 77; 78; 80; 88; 89; 98; 101; 106; 109; 110; 116; 119; 129; 132; 140; 142; 152; 153-157; 161; 169], що дають змогу орієнтуватися у справжній ціні майбутніх грошових ресурсів з позиції поточного моменту часу. Однак відомі моделі “гроші – час” абстрагувались від ОПР і не враховували її суто особисті преференції (переваги), її ставлення до ризику. Тому ці фактори необхідно враховувати, зокрема, за допомогою функції вигідності, що залежить від грошового і часового аргументів. Тому доцільним і актуальним є дослідження та застосування функції вигідності з грошовим та часовим аргументами для прийняття фінансових рішень, в тому числі інвестиційних, і рішень з оптимального страхування активу.

Актуальність теми дослідження зумовлена необхідністю наукового обґрунтування та розробки економіко-математичних методів і моделей прийняття рішень, пов’язаних з управлінням фінансами суб’єктів господарювання, на основі функції вигідності з грошовим та часовим аргументами.

В умовах становлення ринкової системи в Україні фінансова діяльність суб’єктів господарювання вкрай нестабільна, що вимагає вдосконалення підходів щодо прийняття фінансових рішень на основі економіко-математичних методів та моделей, які адекватно відображають процеси підготовки та прийняття фінансових рішень в умовах невизначеності й ризику. Особливо важливу роль у виробничо-фінансовій діяльності суб’єктів господарювання в сучасних умовах відіграють об’єктивно-суб’єктивні методи прийняття рішень, зокрема методи, що ґрунтуються на теорії вигідності. Виходячи з того, що теорія вигідності є однією з фундаментальних складових фінансового менеджменту і має потенційні можливості в царині розробки і вдосконалення економіко-математичних методів і моделей прийняття ризикових фінансових рішень в умовах нестабільної економіки, а в фінансових задачах критеріями виступають гроші й час, що дає підставу в контексті прийняття фінансових рішень в умовах ризику обмежитися вибором двофакторної функції вигідності, то актуальним є дослідження застосування функції вигідності з аргументами гроші й час.

Різні аспекти досліджуваної проблеми висвітлили в працях вітчизняні та зарубіжні вчені: Д. Бернуллі, М. Бромвіч, В. Вітлінський, О. Воронцовський, Ю. Гаврилець, С. Ємельянов, Р. Кіні, О. Ларічєв, Р. Льюс, А. Мертенс, Дж. Маршал, Дж. Нейман, О. Моргенштерн, О. Олексюк, З. Соколовська, Х. Райфа, П. Фишберн, М. Фрідмен, Л. Севідж, П. Шумейкер, О. Ястремський та ін.

Отже, з огляду на нову економічну ситуацію в Україні, низьку результативність управлінських рішень і дій щодо виробничо-фінансової діяльності суб’єктів ринку, що формується, та необхідність врахування об’єктивно-суб’єктивних чинників рішень, актуальною постає проблема розробки та прийняття фінансових рішень на основі економіко-математичних методів і моделей із використанням функції вигідності з грошовим та часовим аргументами, що й визначило мету та основні завдання даного дослідження.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана відповідно до плану науково-дослідних робіт кафедри інтелектуальної власності та систем прийняття рішень Тернопільської академії народного господарства і належить до держбюджетної теми “Методологічні основи моделювання управління в предметних областях: фінанси, інтелектуальна власність, право в концепції комп’ютерних систем прийняття рішень“ (№ ДР 0101U000256, шифр ІВСПР – 01 – 99 “К”). *Особисто автор* розробила моделі на основі функції вигідності з грошовим та часовим аргументами для визначення оптимальної частки страхування активу та розподілу інвестиційних коштів між різнотерміновими видами вкладів.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційного дослідження є побудова і дослідження функції вигідності з грошовим та часовим аргументами й розробка економіко-математичних моделей прийняття фінансових рішень з використання двофакторної функції вигідності для суб’єктів господарювання.

Досягнення цієї мети зумовило необхідність вирішення наступних завдань:

– проведення аналізу методів і підходів та обґрунтування необхідності теоретичної розробки економіко-математичних методів і моделей прийняття фінансових рішень на основі функції вигідності з грошовим та часовим аргументами;
– побудову функції вигідності та дослідження ліній рівня вигідності за умов різного ставлення особи, що приймає рішення до фінансового і часового ризиків;
– розробку підходу до застосування функції вигідності для прийняття рішень щодо відбору інвестиційних проектів;
– моделювання прийняття рішень з розподілу інвестиційних коштів між різнотерміновими вкладами з використанням функції вигідності з грошовим та часовим аргументами;
– побудову моделей оптимального страхування активу з використанням функції вигідності для особи, що приймає рішення, з різним ставленням до фінансового і часового ризиків.

Об’єктом дослідження є управління фінансами суб’єктів господарювання в умовах становлення ринкової системи.

Предметом дослідження є моделювання прийняття фінансових рішень з використанням функції вигідності з грошовим та часовим аргументами.

Методи дослідження. Теоретичною основою дослідження є загальнонауковий діалектичний, аналітичний, індуктивний та дедуктивний методи, а також системний підхід і праці провідних вчених з прийняття фінансових рішень, економіко-математичного моделювання і теорії вигідності. У процесі дослідження використано методи: оптимізації; математичного аналізу, зокрема диференціального числення; теорії ймовірностей; ризикології для побудови функції вигідності з грошовим та часовим аргументами, моделювання оптимальної частки страхування та розподілу інвестиційних коштів між різнотерміновими вкладами. Задачу відбору інвестиційних проектів досліджено методами фінансового аналізу, а задачу прийняття рішень з оптимального страхування – з використанням методів актуарної математики.

Наукова новизна одержаних результатів проявляється у теоретичному узагальненні та новому підході до вирішення наукової проблеми з розробки моделей прийняття фінансових рішень на основі функції вигідності з грошовим та часовим аргументами. Основні наукові положення, що їх отримано в дисертації, полягають у наступному:

вперше:

– обґрунтовано необхідність розробки економіко-математичних методів та моделей прийняття фінансових рішень на основі функції вигідності з грошовим та часовим аргументами;
– побудовано функції вигідності з факторами гроші та час за умов комбінування різного ставлення особи, що приймає рішення, до фінансового і часового ризиків, виходячи з того, що міра несхильності до ризику є сталою величиною;
– запропоновано підхід до дослідження функцій вигідності з грошовим та часовим аргументами на основі досліджень їх ліній рівня вигідності;
– запропоновано підхід до застосування функції вигідності для прийняття рішень щодо відбору інвестиційних проектів;
– побудовано моделі розподілу інвестиційних коштів між різнотерміновими вкладами з використанням функції вигідності з грошовим та часовим аргументами;

отримали подальший розвиток:

– розробка моделей оптимального страхування активу з урахуванням грошового і часового факторів страхування на основі функції вигідності для особи, що приймає рішення, нейтральної, схильної і не схильної до фінансового ризику та нейтральної до часового.

Практичне значення одержаних результатів полягає в тому, що на основі аналізу управління фінансами суб’єктів господарювання та методів і підходів до прийняття фінансових рішень науково обґрунтовано концепцію моделювання прийняття фінансових рішень із використанням функції вигідності з грошовим та часовим аргументами в умовах становлення ринкової системи України.

Результати досліджень, покладених в основу дисертації, використані у: розробці бізнес-планів та інвестиційних проектів розвитку науково-виробничої компанії “САНА” Лтд (м. Київ) (довідка від 12.02.2002 р.) та Відкритого акціонерного страхового товариства “Терен” (м. Тернопіль) (довідка № 137А від 31.01.2002 р.); розробці навчальних робочих програм, підручника та методичних вказівок з дисциплін: “Інформаційні системи в фінансово-кредитних установах”, “Інформаційні системи в економіці”, “Автоматизовані системи обробки економічної інформації”, “Управління підприємницьким ризиком”, “Економічний ризик і методи його вимірювання” в Тернопільській академії народного господарства (довідка № 126-06/50 від 21.01.2002 р.).

При виконанні вказаних робіт дисертант брала безпосередню участь у формуванні теоретико-методологічних і методичних підходів з фінансового менеджменту суб’єктів господарювання, розробці математичного й програмного забезпечення та проведенні аналітичних і прогнозних розрахунків, експертних оцінок проблем і перспектив, що стосуються прийняття фінансових рішень.

Особистий внесок здобувача. Дисертація є самостійною завершеною роботою. Особисто автору належить комплексне дослідження теоретичних і практичних засад використання економіко-математичного моделювання у процесі прийняття фінансових рішень на основі функції вигідності з грошовим та часовим аргументами з урахуванням об'єктивно-суб'єктивних аспектів прийняття рішень. Наукові положення, розробки, висновки і рекомендації, представлені у дисертації, одержано автором самостійно і опубліковано в її наукових працях.

Апробація результатів дисертації. Основні положення дисертації доповідалися, обговорювалися і отримали позитивну оцінку на:

міжнародних наукових конференціях: ім. академіка М. Кравчука (Київ, 2000 р.), "Проблеми економічної інтеграції України в Європейський Союз: європейські студії"; (Ялта – Лівадія – Форос, 2000 р.), "Проблеми економічної інтеграції України в Європейський Союз: європейські порівняльні студії" (Ялта – Лівадія – Форос, 2001 р.), "Актуальні проблеми інтелектуальної власності: отримання прав на об'єкти інтелектуальної власності, їх охорона і захист" (Алушта, 2000 р.); "Проблеми впровадження інформаційних технологій в економіці та бізнесі" (м. Ірпінь, 2000 р.);

міжнародній науково-практичній конференції "Еколого-економічні проблеми розвитку підприємств регіону" (Лівадія – Луганськ, 2000 р.);

міжнародному симпозіумі "Питання оптимізації обчислень" (Кацивелі – Київ, 2001 р.).

Публікації. За результатами дослідження опубліковано 11 наукових та методичних праць загальним обсягом 7,2 ум. друк. арк., з них 1 брошура, 5 наукових статей у фахових виданнях, 2 – у наукових журналах за матеріалами науково-практичних конференцій, 3 тези доповідей на науково-практичних конференціях.

РОЗДІЛ 1
ПРОБЛЕМАТИКА ПРИЙНЯТТЯ ФІНАНСОВИХ РІШЕНЬ НА ОСНОВІ ФУНКЦІЇ ВИГІДНОСТІ

1.1. Суть, місце і роль теорії вигідності в процесі прийняття фінансових рішень

Стержнем будь-якої економічної теорії є проблеми економічного вибору, а теорію прийняття рішень, як правило, визначають як теорію вибору [62; 95; 131]. Ключовим поняттям постановки проблеми прийняття фінансових рішень є категорія цілі, як деякий компроміс між дійсним і бажаним, засобами і результатами, затратами і вигідністю. Носієм цієї цілі виступає ОПР, у якої вона формується у процесі виникнення певних потреб (інтересів). У ролі ОПР може виступати як окремий суб'єкт, так і група суб'єктів.

Становлення прийняття рішень як наукової дисципліни почалось у другій половині XX ст. і розвивалось у двох напрямах:

- систематизація, узагальнення і формалізація нагромаджених практикою правил прийняття рішень в межах еврістичного програмування. Основоположниками цього напряму були американські вчені А. Ньюел і Г. Саймон [174]. Еврістичні методи не гарантують прийняття найкращого рішення, однак роблять будь-яку, навіть досить складну, творчу задачу прийняття рішень практично розв'язною;
- формалізація процесу розробки і прийняття рішень. Основоположною для цього напряму є робота [95; 171] Неймана і Моргенштерна (1964), у якій запропоновано аксіоматичний підхід до теорії раціонального вибору. Раціональність вибору трактувалась авторами теорії як вимоги до пріоритетів ОПР бути послідовними і

ідеально несуперечливими, які були описані у вигляді математичних правил (аксіом).

З даної проблематики виконана велика кількість робіт науковцями як нашої країни, так і закордонними [10; 13; 17; 18; 19; 24; 29; 47-49; 52; 62; 64; 67; 70; 75-77; 81; 90; 98; 102-105; 113; 117; 118; 120; 121; 127; 131; 132; 134; 136; 141; 144; 159; 167; 174]. Ці роботи заклали основи для подальшого просування в даному напрямі.

З метою дослідження проблематики моделювання прийняття фінансових рішень на основі функції вигідності необхідно, насамперед, дати вичерпне визначення процесу прийняття рішень (фінансових рішень). Цей процес трактують по-різному, наприклад, у роботі [79] рішення – 1) вибір однієї чи декількох альтернатив на множині можливих (варіантів рішення); 2) процес здійснення такого вибору; у роботі [23, с. 20] фінансові рішення – це рішення, що торкаються питань фінансування активів (необхідних обсягів і структури), власне це рішення щодо нагромадження капітулу та оптимізація його структури; а у роботі [132, с. 6] – це рішення з обсягу і структури інвестованих грошових засобів (власних і позичкових), рішення з забезпечення поточного фінансування наявних короткотермінових і довготермінових активів.

Отже, підсумовуючи сказане, рішення – це процес вибору суб’єктом альтернатив з множини можливих, виходячи з поставлених цілей, а фінансові рішення – рішення пов’язані з грошовими потоками. Виходячи з цього, під прийняттям фінансових рішень будемо розуміти процес вибору суб’єктом альтернатив з множини можливих грошових потоків, виходячи з поставлених цілей.

Цілі, які ставить перед собою ОПР можуть бути різні, зокрема це і максимізація прибутку, і отримання виручки від продаж, і лідерство в наукових дослідженнях і дослідних розробках, і престиж фірми, і мінімізація ризику тощо. Для прийняття теоретично обґрунтованих фінансових рішень, найкращих з заданих реальних умов з точки зору досягнення поставлених цілей, як правило, застосовують методи побудови економіко-математичної моделі ситуації, що розглядається.

Формування цілей відіграє важливу роль в процесі прийняття рішень. Моделі, побудовані з врахуванням конкретної мети можуть бути малокорисними для досягнення деякої іншої мети. Проект, досить привабливий для суб'єкта господарювання, який прагне максимізувати прибуток, може бути неприйнятним для іншого суб'єкта, який прагне максимізувати ріст виручки від продаж. Єдиної думки в науковій літературі щодо цілей суб'єктів господарювання, чи того якими вони повинні бути немає [24; 47; 48; 62; 64; 75; 174]. Проте центральним в економічній теорії є припущення про те, що фірми прагнуть максимізувати прибуток [12; 132; 142].

Визначення цілей рішення викликає трудність пов'язану з тим, що тільки прості рішення зазвичай мають одну мету. У більшості рішень їх є декілька, причому можливі суперечності між ними. Якщо для прийняття рішення визначено декілька цілей, то часто ці цілі об'єднують в систему, будуючи їх ієрархію, тобто виділяється головна – відносно якої здійснюється пошук оптимального рішення і підцілі, які ведуть до вирішення головної. Наприклад, якщо головною метою ОПР є отримання прибутку, то зниження собівартості продукції є підціллю, засобом її досягнення, причому варто пам'ятати про забезпечення якості продукції.

У загальному випадку мета рішення вказує загальний напрям, в якому повинна рухатися ОПР для досягнення найкращого результату [62, с. 47].

Дослідження і порівняння альтернатив для досягнення поставленої мети є дуже важливим процесом. Завдання полягає у тому, щоб вибрати ті шляхи, які приведуть до досягнення поставленої мети і є реальними з точки зору використання обмежених фінансових ресурсів, а потім з альтернативних шляхів розвитку системи визначити найкращий, порівнявши і оцінивши його за пов'язаними з реалізацією цих альтернатив витратами й одержуваної при цьому вигодою. Вигода альтернативи – це користь, яку одержують у результаті дій, пов'язаних із впровадженням в життя альтернативи. Для того щоб знайти загальну цінність альтернативи, потрібні витрати і одержану при цьому вигоду розглядати разом.

Процедура виявлення альтернатив і відповідних наслідків є одним з найпродуктивніших способів усунення невизначеності, який узгоджується з інтуїтивно достатніми якісними рішеннями в цілому та раціональним шляхом досягнення цілей системи зокрема.

Вибір, який роблять ОПР, не завжди відбувається в умовах визначеності, тобто тоді, коли кожна альтернатива спричиняє єдиний можливий результат. Найчастіше вибір здійснюється в умовах ризику чи невизначеності. Історично поняття ризику пов'язується з різними видами людської діяльності, а термін ризик зустрічається у науковій літературі при зародженні саме теорії вигідності. Необхідно відзначити значне різноманіття поняття ризику, яке зустрічається у науковій та довідковій літературі, – це пов'язано з тим, що означення ризику залежить від області його використання (наприклад, для математиків ризик – це ймовірність, для страховиків – це предмет страхування тощо). Зокрема у роботах [12; 156] ризик – це невизначеність, пов'язана з вартістю інвестицій в кінці періоду; у [13] – це ймовірність несприятливого результату; у [155] – можлива втрата, викликана настанням випадкових несприятливих подій; у [134] – це можлива небезпека втрат, яка випливає зі специфіки тих чи інших явищ природи і видів діяльності людського суспільства; у роботі [66] ризик розглядається як рівень фінансової втрати, який виражається у можливості не досягти поставленої мети, в невизначеності прогнозованого результату і в суб'єктивній оцінці прогнозованого результату.

У теорії прийняття рішень існують два підходи до моделювання невизначеності і ризику: об'єктивний та суб'єктивний. Об'єктивний підхід передбачає наявність необхідного обсягу статистичної інформації для оцінки можливостей тієї чи іншої події, у припущенні про незмінність дії факторів, які впливають на появу цієї події. Якщо кожній можливій події протиставити кількісну оцінку її результату, таку що, чим вища ця оцінка, тим бажаніша подія, яка їй відповідає, то найкращою альтернативою буде та, сподіваний результат якої буде максимальним, тобто за якої добуток ймовірностей подій, що можуть виникнути при виборі цієї альтернативи, на кількісні оцінки результатів відповідних подій – максимальний [12].

Суб’єктивний підхід має місце тому, що незважаючи на простоту об’єктивний підхід досить обмежений за областю застосування, так як не завжди можна отримати достатню інформацію про ймовірність тих чи інших подій. Окрім того, об’єктивний підхід не враховує ставлення ОПР до ризику.

У багатьох практичних випадках ОПР не ризикують, коли йдеться про значні фінансові ресурси, побоюючись великих втрат у разі невдачі. Цей феномен пояснюється перш за все такими факторами як психологічна схильність до ризику, кількість доступних грошових засобів на момент прийняття рішення і можливістю повторення ризикової ситуації у майбутньому. Ці фактори об’єднують у категорію, яку у наукових джерелах називають по-різному: корисність, ступінь вигідності тощо. У наших дослідженнях приймемо за основний термін вираз вигідність. Термін “вигідність” (корисність) сприймається як важливість кінцевого варіанту рішення, яку можна оцінити формально, наприклад, як оцінку пріоритетів альтернатив рішень.

В історичному плані вигідність була вперше усвідомлена як кількісно вимірна величина, тобто як число. Проти цієї точки зору в її початковій формі висловлювалися серйозні заперечення [95, с. 10]. Зрозуміло, що будь-яке вимірювання повинно в кінцевому рахунку базуватися на деякому безпосередньому відчутті, яке, можливо, не може, і зрозуміло, не повинно аналізуватися якось далі. Але це не може бути основою для кількісного порівняння вигідностей як для однієї особи, так і для їх порівняння для різних осіб. Існує два підходи до вимірювання вигідності: кардинальний (кількісний) і ординальний (порядковий). Класичний кардинальний підхід приписує кожному благу кількісну оцінку вигідності; порядковий підхід не вимагає оцінки кожного блага, а пов'язаний лише з порівнянням будь-якої пари рішень і виділенням пріоритетнішого.

Вперше на проблему сподіваної вигідності звернув увагу Д. Бернуллі у 1738 р. Він помітив невідповідність математичного сподівання, яке дається математиками, і оцінкою, яку індивід приписує деякому жеребу. Розвиваючи свою гіпотезу, він показав, що математичне сподівання це ціна жереба, а оцінка вимірюється не ціною, а тією вигодою, яку можна отримати від виграшу. Ціна визначається самою річчю і однакова для всіх, а вигода це суто індивідуальне поняття. Математичне сподівання – це сподіваний грошовий виграш, а оцінка – це сподівана вигідність, яка може бути отримана від виграшу. Цю оцінку можна отримати, якщо помножити окремі, можливі вигоди на ймовірність їх настання. Бернуллі перший помітив, що сподіваний грошовий виграш не відображає "справедливу ціну" гри, і вирішив цю проблему шляхом введення кількісного визначення вигідності як логарифма наявних грошей [6].

Якість і вигідність рішення, прийнятого в умовах невизначеності чи ризику, можна оцінити за допомогою сподіваної вигідності. Вигідність – це термін, який вживається економістами для характеристики міри задоволення, що випливає з споживання товарів і послуг. Хоча вигідність важко виміряти, її існування неможливо заперечувати. У літературі [62; 76; 81; 89; 95; 102-104; 131; 143; 163; 168] суть поняття "вигідність" визначається таким чином. Якщо кожному можливому результату певним чином поставлено у відповідність значення "вигідності" цього результату і для кожної альтернативи обчислено значення "сподіваної вигідності", то найкращим способом дій є альтернатива, яка володіє максимальною "сподіваною вигідністю". У роботі [79] вигідність – це ступінь задоволення потреб суб′єкта при споживанні ним товарів чи виконання будь-якої дії, це категорія, яка застосовується в економіко-математичних дослідження, що означає результат, ефективність економічного рішення чи діяльності.

Припускається, що у кожної ОПР у будь-який момент часу є певна множина пріоритетів, яка може бути виражена мовою математики, тобто у функціональній формі, і така функція носить назву функції вигідності. Поняття функції вигідності виникло в теорії споживацького попиту при порівнянні різних наборів товарів. Значення функції вигідності на певному наборі товарів виражає цінність чи корисність (вигідність) даного набору для споживача. У задачах вибору значення функції вигідності виражає вигідність альтернатив [131].

Функція вигідності (*utility function*) – формальне вираження залежності, яка пов′язує вигідність як результат деякої дії з рівнем (інтенсивністю) цієї дії. Таке широке трактування охоплює уявлення про функцію загальної вигідності споживацьких благ [79]. Функція вигідності може будуватися двома способами – безпосереднім оцінюванням і використанням економіко-математичного моделювання для побудови функції вигідності. Безпосереднє оцінювання функції вигідності досить трудомістке і може бути іноді суперечливим, тому у більшості випадків користуються другим способом. Побудована функція вигідності корегує процес прийняття рішення у відповідності з індивідуальним сприйняттям ризику ОПР.

Термін “вигідність”, який застосовується в економіко-математичній літературі – це зручний спосіб для кількісного опису порівнянь між затратами та зусиллями з однієї сторони та результатами – з другої. Таке порівняння прийнято виражати у вигляді функції:

$$u = u(x_1, x_2, ..x_n), \qquad (1.1)$$

де $x_1, x_2, ..x_n$ – фактори, що впливають на вигідність u, тобто аргументом є грошові засоби, час, різні альтернативи споживацьких благ і послуг.

Теорія вигідності сформувалась як самостійна наукова дисципліна у 40-х роках ХХ століття, після основоположної роботи Джона фон Неймана і Оскара Моргенштерна [95] та інших робіт, які з’явились після неї [81; 117;

143; 168], і спочатку виступала як область привабливих, але досить абстрактних моделей. До середини 20 ст. теорія вигідності концентрувала свою увагу на структурах пріоритетів, які не включали явно ризику чи ймовірності як міри ризику, а теорія вигідності Неймана і Моргенштерна стимулювала новий інтерес до ролі ризику у структурах пріоритетів. Підхід щодо концепції вигідності Неймана і Моргенштерна, базувався на спільному використанні теорії вигідності і теорії ймовірності. Для вивчення вигідності розглядається вибір особи у тих випадках, коли існує ризик і основним поняттям вигідності Неймана-Моргенштерна є лотерея.

У теорії вигідності широко використовується поняття пріоритету. Виділяють такі основні пріоритетні відношення: $\succeq$ – "не гірше, ніж" – нестроге співвідношення пріоритетності; $\succ$ – "пріоритетніше, ніж" – строге співвідношення пріоритетності; $\sim$ – "рівноцінно" – відношення байдужості. Для означення вигідності розглядають вибір особи, що приймає рішення в умовах ризику. З множини *X*, пред′явлених ОПР значень певного економічного показника вибирають два - x' і x''такі, що $x \succeq x'$ і $x'' \succeq x$ для всіх $x \in X$. Таким чином, x'' – найбільш пріоритетне, а x' - найменш пріоритетне з усіх можливих значень певного економічного показника. ОПР пропонують порівнювати між собою дві альтернативи:

1) детерміновану альтернативу: отримати значення *x* "напевно";
2) ризикову альтернативу: отримати гірше значення x' з ймовірністю *p* або краще значення x'' з ймовірністю 1-*p*.

Нейманом-Моргенштерном вигідність варіанту *x* визначається ймовірністю *p*, за якої ОПР байдуже на якій з двох альтернатив зупинити свій вибір. Основна теорема теорії вигідності стверджує, що при дотриманні аксіом вигідності Неймана-Моргенштерна [95] (системи аксіом, які дають змогу на строгій формальній основі ввести поняття вигідності, наведені в роботах [12; 75; 76; 81; 95; 102; 143]) існує функція вигідності визначена на всіх лотереях, яка є однозначною з точністю до монотонного строго зростаючого лінійного перетворення, причому $u(x) > u(y)$, тоді і тільки тоді, коли $x \succ y$, де $x, y \in X$.

Отже, теорія вигідності Неймана-Моргенштерна вказує, що у відповідності з визначеним (введеним аксіоматично) поняттям “раціональної” поведінки ОПР для кожного наслідку необхідно підібрати таке число, яке називають вигідністю цього наслідку, яке задовольнило б такі вимоги [62]:

1) чим пріоритетніший набір значень, тим вища його вигідність;
2) шкала для вимірювання вигідності повинна бути побудована так, що максимізація сподіваної вигідності відповідала б вибору кращих альтернатив.

Кількість публікацій, яка постійно зростає і присвячена прийняттю рішень на основі теорії вигідності [1; 6; 12; 23-25; 27; 39-45; 61; 62; 73; 75; 76; 81; 93; 95; 100; 102-104; 117; 131; 135; 139; 143; 144; 146; 158; 163; 164; 168; 170; 171; 175; 176], свідчить про те, що цей напрям займає одне з провідних місць в літературі з дослідження операцій, аналізу систем, наук з управління і прийняття рішень тощо. Теорія вигідності допомагає окремій ОПР при виборі можливих дій в умовах ризику і невизначеності. У процесі такого підходу використовують кількісні оцінки, які дають змогу ОПР вияснити для себе, який курс дій їй варто обрати.

Одним з стандартних посилань сучасного економічного аналізу є припущення, що ОПР прагнуть досягти такого доходу, який максимізує їх загальну вигідність.

Якщо L – лотерея, що приводить до виграшів $x_1, x_2, .. x_n$ з відповідними ймовірностями $p_1, p_2, .. p_n$, то у загальному вигляді основна формула теорії сподіваної вигідності матиме вигляд [23; 62; 73; 76; 89; 102; 103; 144; 146; 158; 168; 175]:

$$u(L) = M(u(X)) = u(p_1, x_1; ...; p_n, x_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i), \tag{1.2}$$

$M(u(X))$ – сподівана вигідність результату, тобто вигідність лотереї збігається з математичним сподіванням вигідності результатів вибраної лотереї.

Критерієм оцінки ефективності рішення є деякий єдиний показник, це гроші у формі доходу чи розмір багатства [12; 23; 25; 89; 102; 103; 131]. Вибір рішення зводиться до оцінки певної кількості альтернатив і відбору “найкращої” з них, тобто вибирається те рішення при якому величина сподіваної вигідності результату $M(u(X))$ буде максимальною. Однак, загалом ОПР відрізняються своїм ставленням до ризику (схильність, несхильність та нейтральність). У кожній ситуації є свої важливі особливості поведінки ОПР з різним ставленням до ризику. Зниження міри ризику збільшує привабливість рішення для ОПР несхильної до ризику, тоді як при нейтральності – суттєвим є тільки сподіваний виграш (дохід), а для ОПР схильної до ризику більш ризиковані рішення завжди пріоритетніші.

Згідно теорії вигідності Неймана-Моргенштерна графічна і функціональна форма функції вигідності можуть дати інформацію про ставлення ОПР до ризику [19; 23; 62; 89; 102-104]. Ставлення до ризику є суб′єктивною характеристикою кожної особи.

Якщо для ОПР більш бажаним є отримання гарантованого сподіваного виграшу, ніж участь у ризикованому проекті, то кажуть, що ця ОПР не схильна до ризику. Коли у ризикованому проекті припускається виграш x_1 з ймовірністю p, а x_2 – з ймовірністю $1-p$, то умова несхильності до ризику запишеться так:

$$u(px_1 + (1-p)x_2) > pu(x_1) + (1-p)u(x_2) \tag{1.3}$$

або скорочено $u(M(X)) > M(u(X))$. Графік функції вигідності особи не схильної до ризику матиме вигляд опуклої вгору кривої (ввігнутої) (рис.1.1):

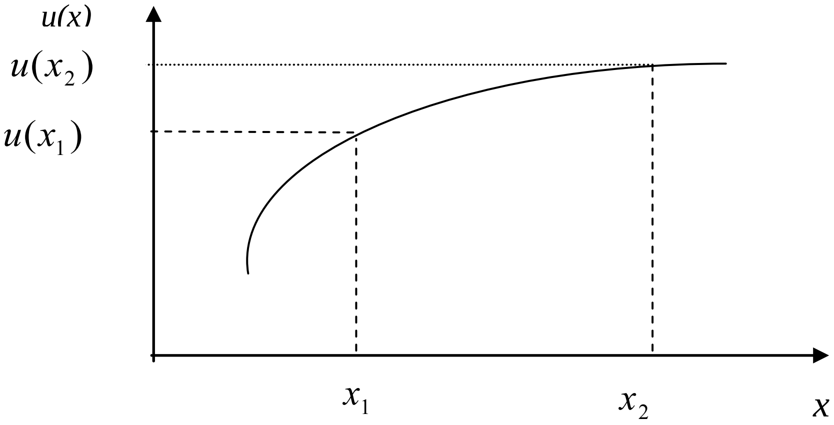


Рис.1.1.

Якщо ризиковий проект для ОПР більш привабливий порівняно з отриманням сподіваного виграшу, то така ОПР є схильною до ризику. Умову схильності до ризику ОПР записують так:

$$u(px_1 + (1-p)x_2) < pu(x_1) + (1-p)u(x_2) \qquad (1.4)$$

або скорочено $u(M(X)) < M(u(X))$. Графік функції вигідності особи схильної до ризику матиме вигляд опуклої вниз кривої (опуклої) (рис.1.2):

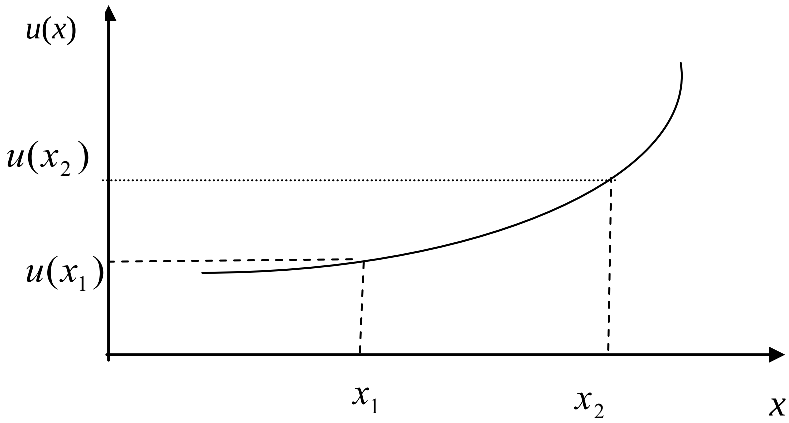


Рис.1.2.

І нарешті, нейтральною до ризику є ОПР, якій байдуже, що обирати: участь у ризикованому проекті, чи отримання гарантованого виграшу. Умова нейтральності особи до ризику записується так:

$$u(px_1 + (1-p)x_2) = pu(x_1) + (1-p)u(x_2) \qquad (1.5)$$

або скорочено $u(M(X)) = M(u(X))$, а функція вигідності є лінійною (рис.1.3).

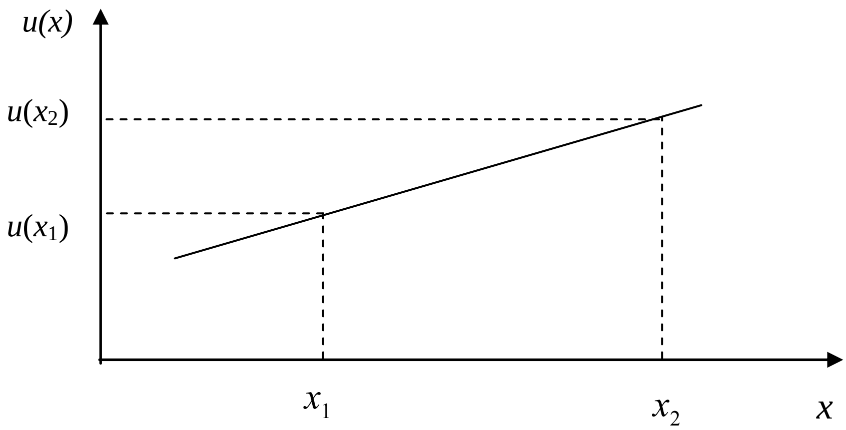


Рис.1.3.

Практичне застосування теорії вигідності виявило такі переваги кривої вигідності [73]:

– криві вигідності, виражаючи індивідуальні пріоритети ОПР і будуючись один раз, дають змогу приймати рішення в подальшому з врахуванням її пріоритетів, але без додаткових консультацій з самою ОПР;
– функція вигідності у загальному випадку може використовуватися для делегування права прийняття рішень. При цьому логічніше використовувати функцію вигідності вищого керівництва, оскільки для забезпечення свого положення при прийнятті рішень воно прагне враховувати конфліктуючі потреби усіх зацікавлених сторін, тобто усієї компанії.

Однак варто мати на увазі, що функція вигідності може змінюватися з часом, відображаючи фінансові умови даного моменту часу. Таким чином, теорія вигідності дає змогу формалізувати підхід до ризику і тим самим науково обґрунтувати рішення, прийняті в умовах невизначеності і ризику.

В економічній теорії припускається, що ОПР в абсолютній більшості не схильні до ризику. Однак міра несхильності може розрізнятися. При прийнятті ризикових фінансових рішень необхідно враховувати міру несхильності до ризику чи зміну ставлення до нього ОПР у контексті зміни ситуації, яка пов’язана з рішенням. Міру несхильності до ризику особи відображає кривизна функції вигідності. Для будь-якої точки на кривій вигідності можна виміряти міру несхильності до ризику через відносну зміну нахилу функції вигідності в цій точці. Нахил кривої розраховується як перша похідна функції вигідності в точці. Зміну нахилу можна знайти як другу похідну. Як відомо, ОПР може бути схильна, не схильна і байдужа (нейтральна) до ризику. При встановлені міри несхильності до ризику необхідно аби вона вказувала, що відображає функція вигідності – несхильність, чи навпаки, схильність до ризику (це якраз визначає u'': якщо $u'' < 0$ для всіх x, то u повинна бути ввігнутою, а це означає несхильність ОПР до ризику; якщо $u'' > 0$ для всіх x, то u опукла, а отже схильна до ризику) [62]. Отже, відносна зміна нахилу (або функція несхильності) розраховується як частка другої похідної (зміна нахилу) і першої похідної (саме значення нахилу). Так як друга похідна від′ємна (нахил зменшується з ростом достатку чи інших благ), то рівень несхильності до ризику визначається як від′ємна величина відносної зміни для зростаючої функції:

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}. \tag{1.6}$$

і додатна – для спадної:

$$r(t) = \frac{u''(t)}{u'(t)}. \tag{1.7}$$

Згідно означення [62] для постійних монотонно зростаючих (спадних) з мірою несхильності до ризику вираженою формулою (1.6) ((1.7) для спадних) функцій вигідності, ОПР буде:

- не схильною до ризику, якщо $r(x)$ ($r(t)$) – додатна величина;
- схильною до ризику, якщо $r(x)$ ($r(t)$) – від’ємна величина;
- байдужою (нейтральною) до ризику, якщо $r(x) = 0$ ($r(t) = 0$).

Сучасна економічна теорія щодо теорії вигідності і функції вигідності [12; 23; 25; 62; 82; 89; 102; 131; 144] дещо відрізняється від класичної теорії вигідності Неймана-Моргенштерна [95], зокрема формулюванням і трактуванням вимог (аксіом) для визначення раціональної поведінки ОПР тощо. Однак загальна схема залишається класичною, тобто вимагається, щоб функція вигідності задовольняла деякому набору важливих властивостей. Якщо індивідуальна функція вигідності має певні властивості, то її називають “правильною” (well behaved), а поведінку, узгоджену з цією функцією називають “раціональною” (rational). Для того, щоб бути правильною, функція вигідності повинна відповідати таким вимогам [93]:

1) ненаситності (insatiability);
2) спадній граничній вигідності (diminishing marginal utility);
3) спадній граничні заміщеності (diminishing marginal substitutability);
4) несхильності до ризику (risk aversion).

Незважаючи на те, що ці терміни дещо непривабливі для слуху, однак за ними ховається природний і інтуїтивно привабливий зміст.

Ненаситність відповідає неможливості ОПР бути повністю задоволеною. А саме, яким би великим не був список споживчих товарів і послуг, придбаних людиною, їй завжди мало. Не має значення, як багато товарів і послуг знаходиться в індивідуальному володінні, з нових товарів і послуг ОПР завжди зуміє вилучити додаткову вигоду. З цим твердженням легше погодитися, якщо обмежитися фінансовою сферою. Можливість купувати і споживати товари і послуги забезпечуються індивідуальним достатком. З цього випливає, що чим більший достаток даної ОПР, тим більша вигідність, яка їй доступна. Звідси можна зробити висновок, що людям властиве ненаситне бажання примножувати своє багатство.

Вимога спадної граничної вигідності відповідає тій обставині, що з придбанням все більшої кількості якогось споживчого товару кожна нова одиниця цього товару забезпечує все менший додатковий вклад в загальну вигідність. Навіть будучи розширеним до всієї множини товарів і послуг, ця властивість, як правило, зберігає свою силу. У фінансовому контексті мається на увазі, що кожна нова гривня нагромадженого багатства збільшує сумарну вигідність, але збільшує її меншою мірою, ніж гривня попередня.

Під спадною граничною заміщеністю розуміється наступне: в міру того, як придбається додаткова одиниця конкретного товару чи послуги, вона стає менш привабливою відносно інших товарів і послуг. Ця властивість має певні важливі додатки в області фінансів. Так, наприклад з ростом особистого достатку ОПР з фінансів відкриває для себе все більше неприємних сторін у вільному часопроводжені і, як наслідок, все охочіше жертвує багатством заради дозвілля.

Правильна функція вигідності володіє ще однією властивістю – властивістю несхильності до ризику, яку не завжди згадують явно під час економічних дискусій з приводу вигідності. Однак ця властивість важлива для аналізу поведінки функції вигідності в сфері фінансів. У фінансовому аналізі зазвичай виходять з припущення, що раціональна ОПР не схильна до ризику. Це означає, що при решта рівних умовах ризик зменшує вигідність.

Хоча ОПР раціонального типу поведінки поступають так, якщо б вони використовували правильну функцію вигідності, дуже мало таких, хто дійсно розмірковує в термінах впливу вигідності на рішення, які приймаються. Це не означає, що люди, роблячи вибір, не приймають вигідності в розрахунок, скоріше, це означає, що вони роблять так несвідомо, не вважаючи необхідним думати про це. Важливо також зрозуміти, що існує нескінченна множина варіацій функцій вигідності (множини пріоритетів), кожна з яких є правильною в інтерпретації раніше згаданих вимог. Так, навіть при тому, що раціональні ОПР не схильні до ризику, міра несхильності до ризику буде у них неоднакова. Дехто буде налаштований проти цього досить рішуче, і не побажає йти на найменший ризик, навіть якщо велика можлива винагорода. Такі люди зазвичай характеризуються як консервативні у фінансовому відношенні. Інші несхильні до ризику помірно і якщо за прийнятий на себе ризик пропонується винагорода, то ризикують навіть коли потенційно винагорода невелика. Таких людей називають агресивними у фінансовому відношенні. Більшість людей, зрозуміло, знаходиться між цими двома станами [93].

Критику, якій підлягає теорія вигідності, поділяють на дві категорії [12, с. 334]. До першої – належать труднощі щодо обґрунтування припущень, практичного застосування і висновків теорії. До другої – належать твердження про те, що теорія не може використовуватися як робочий метод в бізнесі.

Першою, пов’язаною з функціями вигідності трудністю є процедура їх отримання. Можливість виведення рівняння для функції вигідності шукалась економістами давно. Фактично функція вигідності є базовою для всієї економіки і просуває її у розряд точних наук. Не враховуючи труднощі, пов’язані з необхідністю залучати вищих керівників до гри, яка вимагає тривалого часу, наскільки ОПР може бути впевнена в тому, що отримані відповіді дійсно описують реакцію керівників у випадку, коли їм на практиці необхідно буде приймати рішення, від яких залежатиме власне майбутнє і майбутнє фірми. Окрім того, в роботі [170] було встановлено, що непослідовні рішення приймаються навіть у випадку простих ігор. Спроби скоректувати такі непослідовні дії можуть привести до спотворення функції вигідності. Аналогічна трудність полягає у тому, що керівник може відчувати себе зобов’язаним прийняти рішення навіть тоді, коли він не може зробити вибір між можливими варіантами.

Ще однією трудністю, пов’язаною з отриманням індивідуальної функції вигідності є те, що вона може бути досить чутливою до змін обставин. Зокрема, індивідуальна функція вигідності може змінюватися з плином часу, відображаючи фінансові умови будь-якого моменту. З цих причин будь-яка функція вигідності у кращому випадку є наближеним відображенням індивідуальних пріоритетів на даний момент часу.

Ще більші труднощі пов’язані із спробами побудувати функцію вигідності для прийняття колективних рішень. На даний час не існує очевидних способів комбінувати функції вигідності двох і більше ОПР.

Ще одним недоліком вважають те, що більшість робіт з теорії вигідності було здійснено в лабораторних умовах, тобто розглядаються тривіальні ігри, де в якості об’єктів дослідження виступали не особи, що приймають рішення в бізнесі, а студенти [167; 170]. Успішні результати таких досліджень не можуть автоматично використовуватися для опису поведінки ОПР в реальних ситуації, за якими стоять значні реальні суми грошей.

Існує також критика наукових основ теорії сподіваної вигідності [12; 169]. Частина такої критики спрямована проти самого правила прийняття рішень на основі сподіваної вигідності, зокрема висувається думка про те, що це правило веде до такого результату, який більшістю людей може розглядатися як неприйнятний. Прибічники такої думки зазвичай наводять ситуацію вибору між ризиковими альтернативами, яка веде до суперечностей між найкращим вибором, який здійснюється на практиці, і тим, який пропонує теорія вигідності. Однак стверджується, що ті індивіди, вчинки яких суперечать теорії, у таких ситуаціях володіють пріоритетами, які не тільки не відповідають наведеним аксіомам раціональної поведінки, але також самі собі суперечать.

1.2. Методи прийняття фінансових рішень в контексті багатокритеріальної теорії вигідності

У науці про прийняття рішень, варіанти рішень характеризуються різними показниками їх привабливості для ОПР, які називають факторами (критеріями) оцінки альтернатив. Кількість критеріїв впливає на складність задач прийняття рішень.

Використання критеріїв для оцінки альтернатив вимагає визначення градацій якості: кращих, гірших і проміжних оцінок, тобто існують шкали оцінок за критеріями. У прийняті рішень прийнято розрізняти шкали [76, 103; 104]: шкала неперервних і дискретних оцінок; шкала якісних і кількісних оцінок; шкала порядку – оцінки впорядковані за зростанням чи спаданням якості; шкала рівних інтервалів – інтервальна шкала, для цієї шкали є рівні відстані за зміною якості між оцінками; шкала пропорційних оцінок. При прийнятті рішень остаточна вигідність альтернатив найчастіше вимірюється за порядковими та інтервальними шкалами.

При застосуванні методів порівняння багатокритеріальних альтернатив виникають дві проблеми: як отримати оцінки за окремими критеріями і як об’єднати ці оцінки в загальну оцінку вигідності альтернативи.

Різні методи прийняття рішень за кількома критеріями відрізняються способом переходу до єдиної оцінки вигідності альтернатив. Виділяють такі групи цих методів [75].

1. *Прямі методи*, методи, де залежність загальної вигідності альтернативи від оцінок за окремими критеріями відома наперед. Найчастіше використовується вид залежності, при якому визначаються кількісні показники важливості критеріїв (ваги), помножені на оцінки за критеріями (метод зваженої суми оцінок критеріїв). Іншим прямим методом є метод дерева рішень, де шляхом перегляду варіантів вибору визначаються альтернативні варіанти рішень. Для кожного альтернативного варіанту підраховуються ймовірності здійснення, які множаться на його цінність (у гр.од.).
2. *Методи компенсації*, прагнуть врівноважити (скомпенсувати) оцінки однієї альтернативи оцінками іншої, щоб знайти кращі оцінки. Це найпростіший метод, при якому людина виписує переваги і недоліки кожної альтернативи і викреслюючи попарно еквівалентні переваги, (недоліки) вивчає те, що залишилося.
3. *Методи порогів непорівняльності*. Тут задається правило порівняння двох альтернатив, за яким одна альтернатива вважається кращою за іншу. У відповідності з заданим правилом альтернативи діляться (попарно) на порівняльні (одна краща за іншу, чи еквівалентні) і непорівняльні (методи ELECTRE).
4. *Аксіоматичні методи*. Тут визначається ряд властивостей, які повинна задовольняти залежність загальної вигідності альтернативи від оцінок за окремими критеріями. Ці властивості (аксіоми) перевіряються шляхом отримання інформації від ОПР. Відповідно до цієї інформації робиться висновок про ту чи іншу форму залежності.

5. *Людинно-машинні методи* використовуються тоді, коли модель проблеми відома частково і людина, взаємодіючи з ЕОМ, визначає бажані співвідношення між критеріями.

Найбільш розповсюдженням є припущення про те, що вигідність альтернатив різна для різних ОПР (але це не виключає того, що вигідність деяких альтернатив може бути для них однаковою). При такому припущенні має зміст задача вибору найціннішої альтернативи (чи групи альтернатив) або впорядкування альтернатив за вигідністю.

У різних методах оцінки і порівняння багатокритеріальних альтернативи можна виділити такі загальні риси [47; 48; 75; 76; 102; 159]:

- вимірювання вигідностей ОПР, що здійснюється певним чином;
- перетворення даних цих вимірювань у форму, що дає оцінку альтернативам;
- використання отриманих оцінок для порівняння (зіставлення) альтернатив.

Для розв'язання задач прийняття фінансових рішень будують моделі, які описують пріоритети ОПР, застосування яких дає змогу зробити кращий вибір. Ці моделі будуються по-різному в різних наукових школах в областях прийняття рішень. Найбільш відомими і розповсюдженими є методи: відношення пріоритетності за якістю (ELECTRE), аналітичної ієрархії (AHP), багатокритеріальної теорії вигідності (MAUT) тощо.

Методи ELECTRE були розроблені французькою школою теорії прийняття рішень, яку очолював Б. Руа [121]. Ними було запропоновано конструктивний підхід до вироблення рішень, в межах якого методи, моделі і концепції розглядаються як допоміжні засоби практичного аналізу ситуації, які дають змогу як усвідомити цілі прийняття рішення, так і краще зрозуміти пріоритети ОПР. Прийняття рішень за допомогою методів ELECTRE полягає у попарному порівнянні багатокритеріальних альтернатив і спрямовані на розв'язання задач з уже заданими багатокритеріальними альтернативами. У цих методах не визначається кількісно показник якості кожної альтернативи, а встановлюється лише умова переваги однієї альтернативи над іншою. Методи ELECTRE належать до третьої групи методів оцінки багатокритеріальних альтернатив, згідно з вищевказаною класифікацією.

Метод аналітичної ієрархії, який опирається на багатокритеріальний опис проблем, був запропонований Т. Сааті у роботі [123]. При цьому підході задача структурується у вигляді ієрархічної структури з декількома рівнями: цілі – критерії – альтернативи. Для кожного рівня ОПР виконує попарні порівняння елементів і результат порівняння оцінюється по бальній шкалі. На основі таких порівнянь ОПР обраховує: коефіцієнти важливості, перевіряючи узгодженість суджень; оцінки альтернатив і знаходить оцінку як зважену суму оцінок критеріїв.

Багато робіт і досліджень проведено з дослідження аксіоматичних методів [12; 23; 24; 25; 49; 62; 75; 76; 81; 89; 95; 102-104; 117; 131; 143; 159; 162; 163; 171]. Аксіоматичні методи безпосередньо опираються на класичний підхід Неймана-Моргенштерна і на їх теорію сподіваної вигідності. Хоча усі методи оцінки багатокритеріальних альтернатив так чи інакше використовують вимірювання цінності, вигідності, аксіоматичні методи підходять до цих вимірювань найбільш теоретично: вони розглядають їх як певні кроки, що підтверджують справедливість вибору деяких аксіом і ведуть до можливості використання певної функції вигідності. В основу багатокритеріальної теорії вигідності (MAUT) покладено наукову працю Р. Кіні та Х. Райфа [62]. З метою побудови моделей і дослідження функції вигідності з двома факторами: гроші і час, розглянемо цей підхід детальніше.

Науковий напрямок MAUT відрізняють такі особливості [62; 76]:

– будується функція вигідності, яка має аксіоматичне (чисто математичне) обґрунтування;
– деякі умови, що визначають форму цієї функції, перевіряються в діалозі з ОПР;
– розв’язується задача, а отримані результати використовуються для оцінки заданих альтернатив.

Аксіоматика методу багатокритеріальної теорії вигідності

Як і класична теорія вигідності (однокритеріальна), так і багатокритеріальна має аксіоматичне обґрунтування. Це означає, що висуваються деякі аксіоми (твердження, які приймаються без доведення), що повинні задовольняти функцію вигідності ОПР. У тому випадку, коли аксіоми виконуються, дається математичне доведення існування функції вигідності в певному вигляді.

У MAUT ці аксіоми поділяють на дві групи [62; 76; 102-104]:

- аксіоми загального характеру;
- аксіоми незалежності.

I. *Аксіоми загального характеру* (вони ідентичні до тих, які використовуються в класичній теорії вигідності).

1. **Аксіома слабкого порядку**. Між вигідностями будь-якої пари альтернатив можуть бути встановлені такі співвідношення: або одна з низ переважає іншу, або вони рівні. Символічно це запишемо так: якщо є альтернативи A_1 і A_2, то має місце одне з наступних співвідношень:

$$U(A_1) > U(A_2), \quad U(A_1) < U(A_2), \quad U(A_1) = U(A_2).$$

2. **Аксіома транзитивності**. З переваги вигідності альтернативи A_1 над вигідністю альтернативи A_2 і переваги вигідності A_2 над вигідністю A_3 випливає перевага вигідності альтернативи A_1 над вигідністю A_3. Тобто, якщо є альтернативи A_1, A_2, A_3 і

$$U(A_1) > U(A_2), \quad U(A_2) > U(A_3), \text{ то } U(A_1) > U(A_3).$$

3. **Аксіоми, що визначають, так звані, ненормованості в перевагах**. У цій групі є дві аксіоми. Одна з них стверджує, що можна використовувати будь-які вигідності двох альтернатив для вираження еквівалентної третьої, тобто для альтернатив A_1, A_2, A_3, при $U(A_1) > U(A_2) > U(A_3)$ і $\alpha\ (0 < \alpha < 1)$:

$$\alpha U(A_1) + (1-\alpha)U(A_3) = U(A_2).$$

Друга аксіома забороняє використання альтернатив, які незмірно переважають інші альтернативи (архімедова альтернатива), тобто для альтернатив A_1, A_2, A_3, співвідношення між вигідностями яких виражається нерівністю $U(A_1) > U(A_2) > U(A_3)$ і при β, γ $(0 < \beta, \gamma < 1)$:

$$\beta U(A_1) + (1-\beta)U(A_3) < U(A_2);$$
$$U(A_2) < \gamma U(A_1) + (1-\gamma)U(A_3).$$

II. *Аксіоми незалежності* (специфічні для MAUT). Вони дають змогу стверджувати, що деякі взаємовідношення між оцінками альтернатив не залежать від інших критеріїв. Існує багато форм аксіом незалежності. Найчастіше використовують такі [62; 75; 76; 143].

1. **Слабка умовна незалежність за вигідністю**: пріоритети для двох альтернатив, що відрізняються лише оцінками за шкалою одного критерія, не залежать від оцінок цих альтернатив за шкалами інших критеріїв.
2. **Спільна незалежність**: пріоритети між альтернативами, що відрізняються оцінками за певною підмножиною критеріїв, не залежать від однакових оцінок за критеріями підмножини, що залишилася.

В умовах ризику в ролі аксіом незалежності використовують такі.

3. **Незалежність за різницею** (або аксіома еквівалентна визначеності). Пріоритети між альтернативами не залежать від їх однакових наслідків. Тобто пріоритети між двома альтернативами, які відрізняються лише оцінками за порядковою шкалою одного критерія K_1 не залежать від однакових (фіксованих) оцінок за іншими критеріями $K_2, \ldots, K_N$.
4. **Незалежність за вигідністю**. Критерій K_1 називається незалежним за вигідністю від критеріїв $K_2, \ldots, K_N$, якщо порядок пріоритетів лотерей, в яких змінюються лише рівні критерія K_1, не залежать від фіксованих значень за іншими критеріями.
5. **Незалежність за пріоритетністю**. Два критерії K_1 і K_2 незалежні за пріоритетністю від інших критеріїв $K_3, \ldots, K_N$, якщо пріоритети між

альтернативами, які відрізняються лише оцінками за K_1 і K_2, не залежать від фіксованих значень за іншими критеріями.

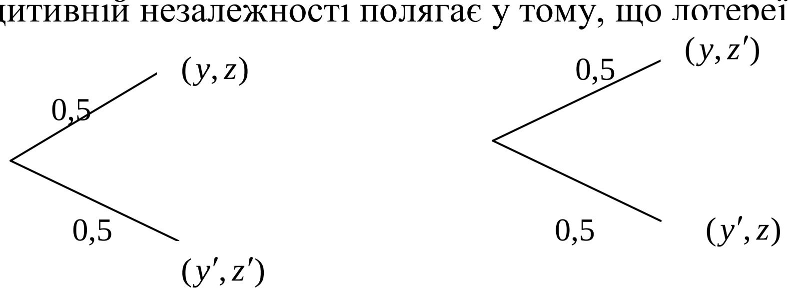
6. **Аксіома маргінальності:** багатокритеріальні альтернативи зрівняльні між собою лише на основі розгляду розподілів ймовірностей оцінок за окремими критеріями (тобто ці розподіли розглядаються як незалежні).

Умови 4, 5 другої групи аксіом є одними з найбільш важливих і часто використовуваними умовами для побудови і дослідження багатокритеріальної функції вигідності, які детально викладені в роботі [62], де й формулюються інші аксіоми незалежності (або комбінуються різні варіанти аксіом уже згаданих), зокрема адитивної незалежності. Наведемо означення цього поняття для подальшого використання при побудові багатокритеріальної функції вигідності.

Адитивна незалежність. Не останнє місце у багатокритеріальній теорії вигідності (зокрема, у двокритеріальній) займає поняття адитивної незалежності.

Фактори Y і Z називаються адитивно незалежними, якщо відношення пріоритетності для будь-яких двох лотерей (при їх попарному порівнянні), кожна з яких характеризується своїм спільним розподілом ймовірностей на $Y \times Z$, залежить тільки від маргінальних розподілів ймовірностей, які властиві цим лотереям [62, с. 221].

У двовимірному просторі умова, що накладається на Y і Z і еквівалентна адитивній незалежності полягає у тому, що лотереї



повинні бути однаково пріоритетними (рівноцінними) для всіх (y, z) при заданих, але довільно вибраних y' і z'. У цих лотереях ймовірності отримання y чи y', z чи z' рівні 0,5. Єдина різниця між ними в тому, як скомбіновані в їх результатах значення факторів *Y* та *Z*. Умова адитивної незалежності є рефлексивною.

Якщо виконуються аксіоми першої групи і деякі з аксіом незалежності, то це означає, що існує багатокритеріальна функція вигідності в певному вигляді.

У [62, с. 222] доводиться теорема про загальний вигляд функції вигідності за умови адитивної незалежності факторів *Y* та *Z*. Для двофакторного варіанту маємо таке.

Фактори *Y* та *Z* є адитивно незалежними тоді і тільки тоді, коли функція вигідності для цих факторів адитивна, тобто має вигляд

$$u(y,z) = u(y,z_0) + u(y_0,z) \tag{1.8}$$

або $$u(y,z) = k_Y u_Y(y) + k_Z u_Z(z). \tag{1.9}$$

де $u(y,z)$ нормалізується умовами $u(y_0,z_0) = 0$ і $u(y_1,z_1) = 1$ для таких довільних y_1, z_1, що $(y_1,z_0) \succ (y_0,z_1)$ і $(y_0,z_1) \succ (y_1,z_0)$;

$u_Y(y)$ – умовна функція вигідності на *Y*, нормалізована рівностями $u_Y(y_0) = 0$ і $u_Y(y_1) = 1$;

$u_Z(z)$ – умовна функція вигідності на *Z*, нормалізована рівностями $u_Z(z_0) = 0$ і $u_Z(z_1) = 1$;

$k_Y = u(y_1, z_0)$;

$k_Z = u(y_0, z_1)$.

Перевірку умов незалежності по вигідності зазвичай суміщають з попереднім етапом побудови однокритеріальних функцій вигідності.

Для повноти перевірку аксіоми (умови) незалежності за вигідністю варто здійснювати для всіх лотерей. Однак часто задовольняються наближеною перевіркою – тільки для однієї з лотерей, що використовується для побудови однокритеріальної функції вигідності.

1.3. Проблематика прийняття фінансових рішень з використанням функції вигідності

Прийняття фінансових рішень є важливим етапом у діяльності суб'єктів господарювання, який визначає їх майбутнє. Для більшості фінансових рішень неможливо точно розрахувати і оцінити наслідки. Можна лише припускати, що певний варіант рішення приведе до найкращого результату. Однак таке припущення може виявитися помилковим, тому що ніхто не може заглянути в майбутнє і знати все напевне. Тому рішення, які приймаються людиною є досить важливим для практики і цікавим для науки об'єктом дослідження. Людина володіє унікальним вмінням швидко оцінювати обстановку, виділяти головне і відкидати другорядне, співвимірювати суперечливі оцінки, доповнювати невизначеність своїми здогадками. Ці цінні якості рятували людей протягом усієї людської історії.

Економісти і фінансові теоретики розробили низку математичних і графічних підходів до пояснення відношень між вигідністю, доходом і ризиком [5; 8; 12; 25; 34; 53; 55; 63; 65; 66; 101; 106; 116; 119; 129; 132; 140; 153-156]. Такі форми аналізу найчастіше використовуються для того, щоб пояснити методи портфельного вибору і переформування портфелів.

Не в усіх моделях прийняття рішень до уваги приймається психологічний аспект ризику. Теорія вигідності дає змогу ОПР впливати на результат наслідків потенційних рішень шляхом проведення оцінки їх вигідності. Одне і те ж саме правило у даному випадку приводить до різноманітних рішень у ОПР з різним ставленням до ризику, кожна з яких може адаптувати процес прийняття рішень до своїх цілей.

Зараз розвиваються підходи щодо відшукання таких правил прийняття рішень, які б дали змогу приймати оптимальні рішення (в умовах невизначеності і ризику). Жодне з таких правил не є поки що повністю вивченим і практичним або вільним від критики. Однак деякі автори вважають, що цей напрям обіцяє значний прогрес у майбутньому.

На даний час виділяють три основні підходи до побудови моделей процесу розробки і прийняття рішень (математичне моделювання):

- теорія статистичних рішень;
- теорія вигідності (корисності);
- теорія ігор.

Підхід теорії вигідності дає змогу приймати оптимальні фінансові рішення враховуючи психологічну сторону ставлення ОПР до ризику. Зокрема актуальною є проблема моделювання прийняття рішень з управління грошовими засобами ОПР. Проблема прийняття рішень щодо інвестування грошових засобів досить складна і є актуальною темою наукових досліджень. Аналіз літературних джерел [9; 34; 36; 66; 101; 109; 110; 156; 157] показує, що вкладаються грошові засоби у цінні папери (фінансові інвестиції) та певні матеріальні активи, проекти (реальні інвестиції). Фінансові інвестиції в свою чергу поділяють на: інвестиції в цінні папери і депозити [103]. У подальшому в даному дисертаційному дослідженні акцентуємо увагу на моделюванні прийняття рішень з інвестування на основі функції вигідності у фінансові (депозити) та реальні (інвестиційні проекти) інвестиції.

Проблема залучення вільних коштів населення залишається однією з найактуальніших на сучасному етапі розвитку ринкових відносин. Багато провідних вчених та економістів-практиків єдині у думці, що піднесення економіки мають визначати внутрішні заощадження, при цьому головним завданням фінансово-кредитних установ є акумуляція фінансових ресурсів для їх подальшого інвестування та реалізації програми покращення соціально-економічного становища в країні шляхом розширення кредитних вкладень. Мета управління грошовими засобами полягає у тому, щоб інвестувати надлишок грошових доходів для отримання прибутку, але одночасно мати їх необхідну кількість для виконання зобов’язань з платежів і страхування на випадок непередбачених (несприятливих) ситуацій. Оскільки успіх у бізнесі передбачає не ухилення від ризику, а зниження його до мінімального рівня, то в роботі розглядається один з прийомів зменшення ризику – страхування. Чим більше прогнозовані грошові потоки, тим менша потреба у страхуванні. Страхування – один із способів, що пом’якшує негативні наслідки ризику випадкових втрат.

Вкладення коштів у більшості випадків пов’язане з невизначеністю (ризиком) отримання сподіваних результатів. Чим вища нестабільність економічної і соціальної ситуації, в умовах яких здійснюється фінансування, тим менша їх перспектива.

Одним з головних напрямів діяльності фінансових установ є акумулювання грошових ресурсів і спрямування їх на суб’єктів господарської діяльності. З одного боку, це задачі щодо залучення ресурсів, з іншого – щодо їх ефективного використання. Саме ці аспекти діяльності банку цікавлять вкладників і кредиторів, тобто виявляються їхні інтереси щодо отримання доходу від вкладень фінансових коштів.

У світовій практиці використовують декілька критеріїв прийняття рішень з вкладення коштів в умовах невизначеності (ризику) і отримання прибутку від таких вкладів:

- критерій максимального прибутку;
- критерій максимального сподіваного прибутку;
- критерій сподіваної максимальної вигоди;
- критерій максимальної рентабельності тощо.

Залежно від конкретної ситуації і ставлення до ризику проектів для прийняття рішень можна вибрати той чи інший критерій. В одному випадку це може бути критерій максимального прибутку. Його можна застосовувати при відомих витратах. В іншому випадку можна застосовуватися критерій максимально сподіваного прибутку критерій математичного сподівання. Однак цей критерій прийняття рішень може бути використано у не багатьох ситуаціях. Недолік методу математичного сподівання для врахування ставлення до ризику є наслідком того, що цей метод в усіх випадках розцінює величини математичного сподівання в 1 грн. незалежно від того, який рівень ризику втрат (збитків) пов’язаний, наприклад, з інвестиційним проектом, що розглядається. Отже, правило математичного сподівання може безумовно використовуватися лише тоді, коли не має суттєвого значення ризик, пов'язаний з конкретним проектом. Така ситуація виникає в тому випадку, коли розглядається пакет, який складається з великої кількості відносно невеликих і схожих проектів, тобто коли низький середній дохід одного проекту, ймовірно буде компенсовуватися високим середнім доходом іншого. Однак таке припущення в певних ситуаціях не може бути виправдане, а особливо тоді, коли важливо певним чином враховувати ставлення до ризику.

У третьому випадку може бути застосований критерій максимальної сподіваної вигоди. Він враховує і прибуток, і ризик, а тому є найбільш прийнятним критерієм для прийняття рішень з врахуванням ставлення до ризику.

Існує кілька підходів щодо вимірювання міри ставлення до ризику прийняття рішень – вигідності рішень. В основному це залежить від вибору шкали вигідності. Аналіз літературних джерел [23; 24; 62; 76; 81; 89; 102-104; 159; 162; 163] показує, що одним з розповсюджених підходів вимірювання вигідності є такий, коли вигідність виступає як зведений показник, що узагальнено виражає витрати або виграші, коли всі цінності зведені до однієї шкали. Для певної події вона буде відповідати деякій точці на цій шкалі. При чому шкала вигідності визначається логікою ОПР, її висновками і пріоритетами. Від ОПР залежить критерій, що вибирається, оцінки рішення. Вигідність у цьому випадку вимірюється у довільних одиницях, які називають одиницями вигідності. Вони можуть бути пов'язані з грошовими одиницями і означати для ОПР величину вигідності.

Дехто з авторів прагне включити ставлення до ризику в процес прийняття рішень шляхом введення деякого показника, який враховує вартість 1 гр. од. доходу залежно від ризику його джерела і ставлення до ризику того індивіда, достаток якого розглядається. Такий підхід включає вимірювання невизначеності результатів проекту не в грошовому вираженні, а за допомогою одиниці вимірювання, яку називають “ютайл” (*utile*) [12].

За такого підходу стає можливим розрахунок сподіваної чистої дисконтованої вигідності (*utility*). Враховуючи те, що вигідності можуть бути визначені таким чином, щоб вони відображали ставлення індивіда до доходу, пов’язаного з ризиком, цей підхід дає можливість подолати труднощі, які виникають при максимізації величин, які виражаються у грошових одиницях. Однак необхідно вирішити ще багато проблем, перш ніж модель вигідності отримає загальне визнання ділового світу.

У багатьох ситуаціях, пов’язаних з розподілом коштів (засобів) чітких правил прийняття оптимального рішення не існує. Єдине, що можна зробити – наближено проаналізувати методи рішень, придатні для практичного застосування. При багатоперіодному (зокрема, двоперіодному) розподілі коштів проблема фінансового планування перетворюється у проблему максимізації вигідності вкладень.

Проблема розподілу грошових коштів за умов обмежених фондів фірми у кожному році в основному розв’язувалася за допомогою задач математичного програмування і якраз багато авторів пропонують використовувати методи математичного програмування в умовах обмежених засобів, зокрема [177]. Однак, використання методів математичного програмування (зокрема, лінійного) є досить таки штучними і не зовсім відповідають безпосередньому використанню при розв’язанні реальних проблем розподілу засобів [12]. Задача, яка розв’язується лінійним програмуванням, розміщення грошових ресурсів полягає в максимізації загальної чистої дисконтованої вартості. Розподіл обмежених коштів може залежати від ставки дисконту, яка використовується для отримання чистих дисконтованих вартостей у цільовій функції моделі. Однак чутливість оптимального рішення до ставки дисконту, що використовується, може спотворити кінцеві результати і таким чином зробити їх не корисними.

У літературі можна знайти досить таки мало інформації відносно того, яку ставку дисконту варто використовувати в моделях програмування. У цій області потрібні серйозні додаткові теоретичні і практичні дослідження. Спробувати розв’язати це завдання можна використовуючи максимізацію функції вигідності власника активу [165].

Як уже зазначалося вище, в основному, раніше досліджувалася функція вигідності з єдиним фактором (критерієм) – розміром багатства або грошей у формі доходу.

Дещо складнішою є задача, коли кількість критеріїв більше одного (наприклад, два). У цьому випадку якості рішення за обома критеріями можуть бути безпосередньо співставленні і вироблено компроміс.

Серед багатьох факторів, від яких залежить вигідність, особливої уваги заслуговує часове вимірювання. Зазвичай не всі наслідки рішень, що приймаються належать до одного і того ж моменту часу. При формуванні та прийнятті рішень в області фінансів, ОПР повинна постійно порівнювати, оцінювати та аналізувати минулі, теперішні та майбутні доходи та витрати. Це пов’язано з нерівноцінністю однієї і тієї ж самої суми грошей у різні моменти часу. Нерівноцінність двох однакових за величиною, але різних за часом отримання грошових сум – явище широко відоме і усвідомлене у фінансовому світі. Його існування обумовлене низкою причин [80, с. 12]:

– будь-яка наявна грошова сума в умовах ринку може бути негайно інвестована і через деякий час принести дохід;
– навіть за невеликої інфляції купівельна спроможність грошей з часом знижується;
– у загальному випадку індивідуум надає перевагу поточному споживанню перед майбутнім тощо.

Як уже згадувалося, проблема “гроші – час” є відомою і досить актуальною в економіці, є уже розроблені моделі та алгоритми, що дають змогу орієнтуватися у справжній ціні майбутніх грошових ресурсів з позиції поточного моменту часу [5; 8; 12; 25; 34; 53; 55; 63; 65; 66; 101; 106; 116; 119;

129; 132; 140; 153-156]. Однак відомі моделі "гроші – час" не враховують особисті, індивідуальні переваги ОПР, зокрема її ставлення до ризику. Саме фактори: гроші, час і ставлення до ризику ОПР при прийнятті фінансових рішень дає можливість враховувати, теорія вигідності, зокрема функція вигідності, що залежить від грошового і часового аргументів.

Тому спираючись на попередні дослідження і загальний вигляд функції вигідності (1.1), в управлінні фінансами, варто розглядати її як функцію від двох аргументів:

$$u = u(x, t), \tag{1.10}$$

де x - грошові засоби, t – час, оскільки порівняння, оцінювання та аналіз минулих, теперішніх та майбутніх доходів та витрат полягає у встановленні взаємозв′язку часу та грошових засобів. Ще однією з причин введення і дослідження функції (1.10) є те, що раціональні індивіди надають перевагу споживанню перед нагромадженням, сьогоднішній грошовій одиниці перед завтрашнією. Сьогоднішня гривня дорожча "завтрашньої" не лише тому, що інфляція знижує її купівельну здатність, але й тому, що інвестована сьогодні гривня завтра принесе конкретний прибуток. І в аналізі вигід і витрат варто робити коригування показників грошових потоків упродовж часу, з тим, щоб конверувати їх у стандартні одиниці вартості, над якими потім можна буде здійснювати розрахунки.

Модель, яку будує економіст, описує процеси, в яких важливу роль відіграють люди: інженерно-технічні працівники, робітники, продавці, споживачі тощо. Дії, які вони виконують і їх результат знаходять своє відображення в моделях. У реальному житті людська поведінка значною мірою непередбачувана і складна для моделювання.

Хоча моделі, які розглядаємо є джерелами багатьох методів, які допомагають ОПР приймати рішення в умовах ризику, вони поки ще не пропонують загальновизнаних правил прийняття, які дозволили б повністю розв'язати всі проблеми.

Теорія вигідності створила хорошу формальну схему для розуміння характеру ризику і має прекрасні потенційні можливості в області вдосконалення практичних методів прийняття рішень.

Виходячи з вищевикладеного необхідно зазначити, що окремі питання моделювання прийняття фінансових рішень з використанням функції вигідності висвітлюються в роботах [1; 6; 12; 23-25; 27; 39-45; 61; 62; 73; 75; 76; 81; 82; 95; 100; 102-104; 117; 131; 132; 139; 143; 144; 146; 158; 163; 164; 168; 170; 171; 175; 176]. Проте дана концепція вимагає проведення досить широкого спектра досліджень, тому в наступних розділах дисертаційної роботи розглянемо актуальну тематику моделювання прийняття фінансових рішень з використанням функції вигідності з факторами гроші та час. Зокрема, актуальними та нерозв'язаними є задачі:

- побудова функції вигідності за умов різного ставлення ОПР до фінансового і часового ризиків;
- дослідження ліній рівня вигідності для випадку постійної міри несхильності до фінансового ризику і нейтральності до часового;
- розробка підходу до застосування функції вигідності для прийняття рішень щодо інвестиційних проектів;
- моделювання прийняття рішень з розподілу інвестиційних коштів між різнотерміновими вкладами з використанням функції вигідності з грошовим та часовим аргументами;
- побудову моделей оптимального страхування активу на основі функції вигідності для власника активу нейтрального (схильного, не схильного) до фінансового ризику і нейтрального до часового.

Розв'язанню щойно вказаних задач присвячене дане дисертаційне дослідження.

Висновки до 1-го розділу

1. У процесі становлення ринкової системи в Україні, прийняття фінансових рішень відбувається в умовах невизначеності та ризику. Задачі прийняття фінансових рішень на основі вигідностей і ймовірностей, полягають у тому, що ОПР вибирає певні дії, де на отриманий результат дії впливають випадкові події, їй непідвласні. Але маючи деякі знання про ймовірність цих подій, ОПР може розрахувати найбільш вигідну сукупність і почерговість своїх дій. Саме такий підхід, що базується на спільному використанні теорій вигідності і ймовірності для побудови моделей прийняття фінансових рішень використовується у даному дослідженні.

2. У результаті аналізу літературних джерел з даної проблематики встановлено, що суть теорії вигідності полягає у тому, що ОПР повинна вибрати одну з кількох альтернатив, кожна з яких буде мати певний результат, якому поставлено у відповідність значення “вигідності” цього результату і для кожної альтернативи обчислені значення сподіваної вигідності, то найкращою буде альтернатива з максимальною сподіваною вигідністю. Прийняття рішень з використанням функції вигідності є інструктивним підходом, який призначений для ОПР, при цьому ОПР зазвичай користується принципом найбільшої вигідності (максимізації своєї функції вигідності) і враховує психологічний аспект ризику, який дає змогу ОПР впливати на результати наслідків рішень шляхом проведення оцінки їх вигідності. Графічна і функціональна форма функції вигідності дають інформацію про ставлення ОПР до ризику (схильність, несхильність, нейтральність), яке є суб’єктивною характеристикою кожної особи. Показано, що: перевагою теорії вигідності є те, що вона враховує як кількісні (затрати ресурсів) так і якісні (людський фактор) аспекти варіантів рішень; при прийнятті рішень необхідно враховувати міру несхильності до ризику, яку відображає кривизна функції вигідності через відносну зміну нахилу кривої вигідності.

3. Проведено аналіз основних груп методів прийняття рішень за кількома критеріями, а саме: прямі методи, методи компенсації, методи порогів непорівняльності, аксіоматичні методи, людино-машинні методи. Розглянуто основні багатокритеріальні методи прийняття фінансових рішень: відношення пріоритетності за якістю (ELECTRE), аналітичної ієрархії (AHP), багатокритеріальної теорії вигідності (MAUT).

4. Виходячи з того, що інвестування коштів в основному пов’язане з ризиком отримання сподіваних результатів, розглянуто основні критерії прийняття рішень з вкладення коштів в умовах невизначеності і ризику і отримання прибутку від таких вкладів: критерій максимального прибутку; критерій максимально сподіваного прибутку; критерій максимальної вигоди; критерій максимальної рентабельності. З’ясовано, що найбільш прийнятним критерієм є критерій максимальної вигоди, оскільки він враховує і прибуток, і ризик та в основному опирається на теорію вигідності, а саме максимізацію функції вигідності.

5. В результаті проведеного дослідження встановлено, що серед багатьох факторів, від яких залежить вигідність, особливої уваги заслуговує часове вимірювання, адже для ОПР не байдуже, коли отримати певну суму коштів: тепер чи у майбутньому. На думку вчених-економістів, вигідність певного наслідку дій для ОПР є тим меншою, чим більше часу повинно пройти до отримання нею відповідної грошової суми. Тому доцільним і актуальним є проведення досліджень з побудови економіко-математичних моделей прийняття фінансових рішень на основі функції вигідності з двома факторами: гроші та час.

РОЗДІЛ 2
ПОБУДОВА ФУНКЦІЙ ВИГІДНОСТІ З ГРОШОВИМ ТА ЧАСОВИМ АРГУМЕНТАМИ ДЛЯ ПРИЙНЯТТЯ ФІНАНСОВИХ РІШЕНЬ

2.1. Побудова функцій вигідності

При прийнятті рішень в області фінансів, ОПР повинна постійно порівнювати, оцінювати та аналізувати доходи і витрати не лише у грошовому, а й у часовому вимірі. Це пов'язано з нерівноцінністю однієї і тієї ж самої грошової суми у різні моменти часу.

Зазвичай не всі наслідки рішень, що приймаються належать до одного і того ж моменту часу. Тому ОПР потрібно аналізувати свої пріоритети відносно деякого наслідку a (гроші), який реалізується в момент часу t_1 (наприклад, $t_1 = 0$), і наслідку b, який реалізується в момент часу t_2 ($t_2 = T$). Тобто варто розглянути функцію від аргументів гроші і час і дослідити її як функцію вигідності від двох аргументів.

Розглянемо проблему, яка в загальному вигляді виглядає так. ОПР повинна вибрати одну з декількох альтернатив (способів дій) A_1, A_2,…, A_n, кожна з яких у кінцевому результаті буде мати деякий результат. Оцінка пріоритетності можливих результатів здійснюється за допомогою двох критеріїв X (гроші) і T (час).

Припустимо, що у відповідності з наявною проблемою встановлено ієрархію цілей і сформульовано набір критеріїв (факторів) X (гроші) і T (час). Нехай x_i, t_i – конкретні значення факторів X та T відповідно. Завдання полягає у побудові конкретної функції вигідності $u(x, t)$, яка залежить від двох змінних.

Нехай $x \in [a;b]$ і $t \in [0;T]$. Тоді очевидно, що ОПР буде прагнути до наслідку (b, 0) (отримання максимальної суми грошей у мінімально можливий момент (термін) часу), і її вигідність буде максимальною

$$u(b, 0) = 1. \tag{2.1}$$

Аналогічно, ОПР буде вважати себе у програші, у разі отримання наслідку (a, T) (отримання мінімально можливої суми грошей у максимальний термін часу), і її вигідність буде мінімальною

$$u(a, T) = 0. \tag{2.2}$$

При дослідженні однофакторної (з фактором гроші) функції вигідності, її конкретну математичну формулу, як правило, виводили з тих чи інших припущень про залежність міри несхильності до ризику від розміру грошових ресурсів [89; 102; 103; 162].

В умовах становлення ринкових відносин підприємницьку діяльність доводиться здійснювати в умовах зростаючої невизначеності ситуації і мінливості економічного середовища. Звідси виникають неясність, невизначеність і невпевненість в отриманні сподіваного остаточного результату, і як наслідок, виникає ризикова ситуація. Особливо важливу роль у господарській діяльності суб’єктів господарювання в сучасних умовах відіграє схильність до ризику. Вона відображає таку прагматичну тенденцію в поведінці керівника в мотивації прийняття рішень, яка пов’язана з розрахунком шансів на успіх, перемогу в несприятливих та суперечливих обставинах. Чим більш несприятлива ситуація складається в господарській діяльності і чим менший обсяг інформації має у своєму розпорядженні ОПР, тим схильність до ризику посилюється.

Дослідимо функцію вигідності $u(x, t)$, а саме її математичну форму, адже знання функціональної залежності дає змогу досить точно передбачити події навіть віддаленого майбутнього, виходячи з питань ставлення ОПР до ризику і врахування її міри несхильності до ризику.

Оскільки функція $u(x, t)$ є монотонно зростаючою за фактором x і монотонно спадною за фактором t, то міру несхильності до ризику недоотримання коштів можна визначити так, враховуючи формулу (1.6):

$$r_X(x,t) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big/ \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{2.3}$$

а міру несхильності до ризику часової затримки коштів, враховуючи формулу (1.7), так:

$$r_T(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \bigg/ \frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (2.4)$$

Беручи до уваги означення схильності, несхильності і нейтральності ОПР до ризику для функції вигідності з постійною мірою несхильності до ризику і те, що ми розглядаємо двовимірну функцію, розглянемо загальні випадки комбінування нейтральності до кожного з ризиків (фінансового і часового) і постійної (відмінної від нуля) міри несхильності до кожного з ризиків. При такому комбінуванні отримаємо чотири загальні випадки для побудови функції вигідності. Випадок:

1) постійної міри несхильності до ризику щодо грошового параметру і нейтральності до часового ризику;
2) нейтральності до грошового параметру і постійної міри несхильності до ризику щодо часу;
3) нейтральності до ризику щодо грошового і нейтральності щодо часового параметрів;
4) постійної міри несхильності до ризику щодо грошового параметру і постійної міри несхильності до ризику щодо часу.

1. Побудова функції вигідності ОПР з постійною мірою несхильності до ризику щодо грошового параметру і нейтральності до ризику щодо часу.

Розглянемо задачу побудови функції вигідності $u(x,\ t)$, де грошовий аргумент x змінюється на скінченному проміжку $x \in [a;b]$, а часовий аргумент t на проміжку $t \in [0;T]$. При цьому міра несхильності до ризику за змінною грошовою величиною x є постійною $k_X = k = const \neq 0$, а міра несхильності до ризику щодо часу $k_T = 0$, тобто ОПР нейтральна щодо часової компоненти ризику [41].

Нейтральність щодо часової компоненти ризику спричиняє лінійність функції $u(x,\ t)$ щодо t, тобто

$$u(x,\ t) = A(x)t + B(x). \qquad (2.5)$$

Для того, щоб встановити вигляд функцій $A(x)$ та $B(x)$, підставимо функцію (2.5) в рівняння (2.3), яке випливає з означення міри несхильності до ризику щодо грошового параметра. Отримаємо таку рівність:

$$-\frac{A''(x)t + B''(x)}{A'(x)t + B'(x)} = k\,. \tag{2.6}$$

Рівняння (2.6) еквівалентне системі двох взаємно незалежних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} A''(x) = -kA'(x); \\ B''(x) = -kB'(x). \end{cases} \tag{2.7}$$

Загальний розв'язок системи (2.7) можна зобразити у вигляді:

$$\begin{cases} A(x) = C_{A_1}e^{-kx} + C_{A_2}; \\ B(x) = C_{B_1}e^{-kx} + C_{B_2}, \end{cases} \tag{2.8}$$

де коефіцієнти $C_{A_1}, C_{A_2}, C_{B_1}, C_{B_2}$ поки що не визначені.

Підставивши проміжні функції (2.8) у функцію (2.5), отримаємо функцію вигідності у вигляді:

$$u(x,t) = \left(C_{A_1}e^{-kx} + C_{A_2}\right)t + C_{B_1}e^{-kx} + C_{B_2}\,. \tag{2.9}$$

На функцію (2.8), а отже, і на її невизначені коефіцієнти накладається природна умова нульової вигідності отримання мінімального рівня коштів a в найпізніший термін T, тобто умова (2.2).

Підставимо функцію (2.9) в умову (2.2) і отримаємо рівняння:

$$\left(C_{A_1}e^{-ka} + C_{A_2}\right)T + \left(C_{B_1}e^{-ka} + C_{B_2}\right) = 0\,. \tag{2.10}$$

Ще одну умову на невизначені коефіцієнти отримаємо, якщо врахуємо максимальну вигідність – отримання максимальних коштів $x = b$ у початковий момент часу $t = 0$, тобто умову (2.1).

Підставивши в умову (2.1) функцію (2.9), отримаємо рівняння, яке пов'язує тільки два коефіцієнти:

$$C_{B_1}e^{-kb} + C_{B_2} = 1\,. \tag{2.11}$$

Очевидно, що двох умов (2.10) і (2.11) не вистачає для однозначного обчислення чотирьох невідомих $C_{A_1}, C_{A_2}, C_{B_1}, C_{B_2}$. Тому потрібно задатися ще двома незалежними умовами на функцію $u(x,\ t)$. В якості таких умов задамося ще двома значеннями функції $u(x,\ t)$ в двох інших вершинах прямокутника $[a;b]\times[0;T]$, а саме, нехай

$$u(a,\ 0) = u_1 \tag{2.12}$$

$$u(b,\ T) = u_2, \tag{2.13}$$

де $0 < u_1 < 1$ і $0 < u_2 < 1$.

Умова (2.12), як і умова (2.1), призводить до рівняння, яке пов'язує лише коефіцієнти C_{B_1} і C_{B_2}:

$$C_{B_1}e^{-ka} + C_{B_2} = u_1. \tag{2.14}$$

З умови (2.13), як і з умови (2.2), отримаємо рівняння, яке пов'язує всі чотири невідомі коефіцієнти:

$$\left(C_{A_1}e^{-kb} + C_{A_2}\right)T + C_{B_1}e^{-kb} + C_{B_2} = u_2. \tag{2.15}$$

Розв'яжемо спочатку рівняння (2.11) і (2.14), об'єднавши їх у систему

$$\begin{cases} C_{B_1}e^{-kb} + C_{B_2} = 1; \\ C_{B_1}e^{-ka} + C_{B_2} = u_1. \end{cases} \tag{2.16}$$

Віднявши від першого рівняння системи (2.16) друге, отримаємо:

$$C_{B_1}\left(e^{-kb} - e^{-ka}\right) = 1 - u_1; \quad \Rightarrow$$

$$C_{B_1} = \frac{1-u_1}{e^{-kb} - e^{-ka}}. \tag{2.17}$$

Маючи коефіцієнти C_{B_1}, знайдемо коефіцієнт C_{B_2}:

$$C_{B_2} = 1 - \frac{(1-u_1)e^{-kb}}{e^{-kb} - e^{-ka}}. \tag{2.18}$$

Отримані коефіцієнти (2.17) і (2.18) підставимо у рівняння (2.10) та (2.15), також об'єднавши їх у систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \left(C_{A_1}e^{-ka} + C_{A_2}\right)T + 1 - \dfrac{(1-u_1)e^{-kb}}{e^{-kb} - e^{-ka}} + \dfrac{e^{-ka}(1-u_1)}{e^{-kb} - e^{-ka}} = 0; \\ \left(C_{A_1}e^{-kb} + C_{A_2}\right)T + 1 - \dfrac{(1-u_1)e^{-kb}}{e^{-kb} - e^{-ka}} + \dfrac{e^{-kb}(1-u_1)}{e^{-kb} - e^{-ka}} = u_2. \end{cases} \tag{2.19}$$

Віднявши від другого рівняння системи (2.19) перше, отримаємо рівняння для коефіцієнта C_{A_1}:

$$C_{A_1}T\left(e^{-kb}-e^{-ka}\right)=u_1+u_2-1.$$

Отже,

$$C_{A_1}=\frac{u_1+u_2-1}{T(e^{-kb}-e^{-ka})}. \tag{2.20}$$

Підставимо коефіцієнт (2.20) у перше рівняння системи (2.19), попередньо спростивши його:

$$\frac{(u_1+u_2-1)e^{-ka}}{e^{-kb}-e^{-ka}}+C_{A_2}T+u_1=0. \tag{2.21}$$

Розв'яжемо рівняння (2.21) відносно C_{A_2}:

$$C_{A_2}=-\frac{(u_2-1)e^{-ka}+u_1e^{-kb}}{T(e^{-kb}-e^{-ka})}. \tag{2.22}$$

Підставимо знайдені коефіцієнти (2.17), (2.18), (2.20) і (2.22) у функцію (2.9):

$$u(x,t)=\left(\frac{(u_1+u_2-1)e^{-kx}}{T(e^{-kb}-e^{-ka})}-\frac{(u_2-1)e^{-ka}+u_1e^{-kb}}{T(e^{-kb}-e^{-ka})}\right)t+\frac{(1-u_1)e^{-kx}}{e^{-kb}-e^{-ka}}+\frac{u_1e^{-kb}-e^{-ka}}{e^{-kb}-e^{-ka}}. \tag{2.23}$$

На основі аналітичного вигляду функції (2.23) можна сформулювати наступне твердження.

Твердження. Функція вигідності (2.23) адитивна тоді і тільки тоді, коли виконується умова:

$$u_1+u_2=1. \tag{2.24}$$

Справді, при виконанні умови (2.24) функція (2.23) набирає вигляду:

$$u(x,t)=\frac{(1-u_1)e^{-kx}}{e^{-kb}-e^{-ka}}-\frac{u_1t}{T}+\frac{u_1e^{-kb}-e^{-ka}}{e^{-kb}-e^{-ka}}, \tag{2.25}$$

тобто аргументи t і x відокремлюються адитивним чином

$$u(x,t)=\varphi(x)+\psi(t). \tag{2.26}$$

Функції $\varphi(x)$ і $\psi(t)$, взагалі кажучи, можна зобразити багатьма способами, по-різному розкладаючи на доданки вільний від аргументів член функції (2.25)

$$\frac{u_1 e^{-kb} - e^{-ka}}{e^{-kb} - e^{-ka}}. \tag{2.27}$$

Однак, найдоцільніше функцію (2.25) можна зобразити у вигляді:

$$u(x,t) = \frac{(1-u_1)(e^{-kx} - e^{-ka})}{e^{-kb} - e^{-ka}} + u_1\left(1 - \frac{t}{T}\right), \tag{2.28}$$

тобто

$$\varphi(x) = \frac{(1-u_1)(e^{-kx} - e^{-ka})}{e^{-kb} - e^{-ka}}, \tag{2.29}$$

$$\psi(t) = u_1\left(1 - \frac{t}{T}\right). \tag{2.30}$$

Функції (2.23) і (2.27) зображують функції вигідності ОПР не схильної до фінансового ризику і нейтральної до часового, якщо $k > 0$ і схильної до фінансового ризику і нейтральної до часового, якщо $k < 0$, де k – міра несхильності до ризику втрати грошових коштів.

Аналітичний вигляд функції (2.28) доводить, що ця функція вигідності задовольняє умови теореми 5.1. [62, с. 222], тобто можна зробити висновок, що грошовий X і часовий t фактори функції (2.28) є адитивно незалежними.

Згідно означення сформульованого у роботі [62], фактори Y і Z називаються адитивно незалежними, якщо відношення пріоритетності для будь-яких двох лотерей (при їх попарному порівнянні), кожна з яких характеризується своїм сумісним розподілом ймовірностей на $Y \times Z$, залежить тільки від маргінальних розподілів ймовірності, притаманних цим лотереям.

Теорема 5.1 [62, с. 222] стверджує, що фактори x і t адитивно незалежні тоді і тільки тоді, коли функція вигідності цих факторів адитивна і її можна зобразити у вигляді:

$$u(x,t) = k_1 u_1(x) + k_2 u_2(t). \tag{2.31}$$

Функція (2.28) задовольняє умову (2.31), і при цьому виконуються рівності:

$$k_1 = 1 - u_1 = u_2 = u(b,T), \tag{2.32}$$

$$k_2 = u_1 = u(a,0), \tag{2.33}$$

$$u_1(x) = \frac{e^{-kx} - e^{-ka}}{e^{-kb} - e^{-ka}}, \tag{2.34}$$

$$u_2(t) = 1 - \frac{t}{T}. \tag{2.35}$$

Формули (2.32) і (2.33) отримані на основі умов (2.13) і (2.12) відповідно.

Функція (2.35) є умовною функцією вигідності за часом t ОПР, нейтральної до часового ризику, і нормалізована умовами:

$$u_2(0) = 1 \tag{2.36}$$

і

$$u_2(T) = 0, \tag{2.37}$$

які легко перевіряються безпосередньою підстановкою у функцію (2.37) аргументів $t = 0$ і $t = T$.

Як показано у роботах [102; 103], функція (2.34) є функцією вигідності ОПР з постійною мірою несхильності до ризику k на грошовому проміжку $a \le x \le b$. Отже, в даному випадку функція (2.34) є умовною функцією вигідності ОПР з постійною мірою несхильності до ризику k, і ця функція нормалізована умовами:

$$u_1(a) = 0 \tag{2.38}$$

і

$$u_2(b) = 1. \tag{2.39}$$

Якщо умова (2.24) не виконується, то функція вигідності (2.23) не є адитивною, оскільки в ній присутній ненульовий мультиплікативний доданок:

$$\frac{(u_1 + u_2 - 1)e^{-kx}}{T(e^{-kb} - e^{-ka})} t.$$

Отже, на основі теореми 5.1 [62, с. 222], можна сформулювати висновок про те, що при порушенні умови (2.24), фінансовий x і часовий t фактори не є адитивно незалежними.

2. Побудова функції вигідності ОПР нейтральної щодо грошового параметру і з постійною мірою несхильності до ризику щодо часу.

Можна побудувати функцію вигідності для ОПР $u(x, t)$ з постійною мірою несхильності до ризику часової затримки коштів для часового аргументу t з проміжку $[0; T]$ і нейтральності щодо ризику втрати грошових коштів для фінансового аргументу x з проміжку $[a; b]$. При цьому міра несхильності до ризику ОПР за часовим аргументом t є постійною, відмінною від нуля величиною: $k_T = g = const \neq 0$ і ОПР є нейтральною щодо грошової компоненти, тобто міра несхильності до ризику за фінансовим аргументом x нульова: $k_X = 0$ (див. додаток А.1).

З врахуванням умов (2.1), (2.2), (2.12), (2.13) отримаємо таку функцію вигідності:

$$u(x,t)=\left(\frac{1-u_1-u_2}{(1-e^{gT})(b-a)}e^{gt}+\frac{u_2-e^{gT}(1-u_1)}{(1-e^{gT})(b-a)}\right)x+\frac{u_1b-a(1-u_2)}{(1-e^{gT})(b-a)}e^{gt}+ \\ +\frac{ae^{gT}-u_2a-u_1be^{gT}}{(1-e^{gT})(b-a)}. \tag{2.40}$$

З аналогічних міркувань, які були зроблені у попередньому випадку можна стверджувати, що за умови (2.24) функція (2.40) є адитивною і матиме вигляд:

$$u(x,t)=\frac{u_2-e^{gT}(1-u_1)}{(1-e^{gT})(b-a)}x+\frac{u_1b-a(1-u_2)}{(1-e^{gT})(b-a)}e^{gt}+\frac{ae^{gT}-u_2a-u_1be^{gT}}{(1-e^{gT})(b-a)}, \tag{2.41}$$

а розклавши вільний член у функції (2.41) певним чином (див. додаток А.1) її можна записати у вигляді (2.26), тобто:

$$u(x,t)=(1-u_1)\frac{x-a}{b-a}+u_1\frac{e^{gt}-e^{gT}}{1-e^{gT}}. \tag{2.42}$$

Функції (2.40) і (2.42) зображують функції вигідності ОПР нейтральної до фінансового ризику і не схильної до часового, якщо $g > 0$ і схильної до часового ризику і нейтральної до фінансового, якщо $g < 0$, де g – міра несхильності до ризику часової затримки грошових коштів.

Функція (2.42) задовольняє умови теореми 5.1 [62, с. 222], а це означає, що фактори X і T функції (2.42) є адитивно незалежними.

3. Побудова функції вигідності ОПР нейтральної до ризику щодо грошового параметру і нейтральної до ризику щодо часу.

Можна побудувати функцію вигідності $u(x, t)$ для випадку нейтральності ОПР до обох видів ризику (фінансового і часового), коли часовий аргумент t змінюється в межах $0 \le t \le T$, а грошовий аргумент x – $a \le x \le b$ [44]. З врахуванням умов (2.1), (2.2), (2.12), (2.13) отримаємо таку функцію вигідності (див. додаток А.2) :

$$u(x,t) = \frac{1-u_1}{b-a}x + \frac{(1-u_2)a - u_1 b}{T(b-a)}t + \frac{u_2 + u_1 - 1}{b-a}xt + \frac{u_1 b - a}{b-a}. \tag{2.43}$$

На основі аналітичного вигляду функції (2.43) можна стверджувати, що вона адитивна тоді і тільки тоді, коли виконується умова (2.24) і має вигляд:

$$u(x,t) = \frac{1-u_1}{b-a}x + \frac{(1-u_2)a - u_1 b}{T(b-a)}t + \frac{u_1 b - a}{b-a}, \tag{2.44}$$

тобто аргументи x і t відокремлюються адитивним чином. Функцію (2.44) можна записати у вигляді (2.26), розклавши певним чином її вільний член (див. додаток А.2). При цьому функцію вигідності (2.44) можна зобразити так:

$$u(x,t) = (1-u_1)\frac{x-a}{b-a} + u_1\left(1 - \frac{t}{T}\right), \tag{2.45}$$

Функції (2.43) і (2.45) зображують функції вигідності ОПР нейтральної до фінансового і нейтральної до часового ризиків.

Отже функція (2.43) є адитивною, а це означає згідно теореми 5.1 [62, с. 222], що фактори X і T є адитивно незалежними, а функцію вигідності можна зобразити у вигляді (2.31).

4. Побудова функції вигідності ОПР з постійною мірою несхильності до ризику щодо грошового параметру і ОПР з постійною мірою несхильності до ризику щодо часу.

Функція вигідності $u(x, t)$, де грошовий параметр $x \in [a;b]$, а часовий параметр $t \in [0;T]$ і при цьому міра несхильності до ризику втрати грошових коштів є сталою, відмінною від нуля величиною: $k_X = k = const \ne 0$ і міра несхильності до ризику часової затримки коштів є також сталою, відмінною від нуля величиною: $k_T = g = const \neq 0$ виглядає так (див. додаток А.3), з врахуванням умов (2.1), (2.2), (2.12), (2.13) :

$$u(x,t) = \frac{u_2 - e^{gT}(1-u_1)}{(1-e^{gT})(e^{-kb} - e^{-ka})} e^{-kx} + \frac{e^{-ka}e^{gT} - u_2 e^{-ka} - u_1 e^{-kb} e^{gT}}{(1-e^{gT})(e^{-kb} - e^{-ka})} - \\ - \left(\frac{u_2 + u_1 - 1}{(1-e^{gT})(e^{-kb} - e^{-ka})} e^{-kx} + \frac{e^{-ka}(1-u_2) - u_1 e^{-kb}}{(1-e^{gT})(e^{-kb} - e^{-ka})} \right) e^{gt}. \quad (2.46)$$

На основі аналітичного вигляду функції вигідності (2.46), як і у попередніх випадках, можна стверджувати, що вона адитивна тоді і тільки тоді, коли виконується умова (2.24), тобто $u_2 + u_1 = 1$ із врахуванням цієї умови функція (2.46) виглядатиме так:

$$u(x,t) = \frac{u_2 - e^{gT}(1-u_1)}{(1-e^{gT})(e^{-kb} - e^{-ka})} e^{-kx} - \frac{e^{-ka}(1-u_2) - u_1 e^{-kb}}{(1-e^{gT})(e^{-kb} - e^{-ka})} e^{gt} + \\ + \frac{e^{-ka}e^{gT} - u_2 e^{-ka} - u_1 e^{-kb} e^{gT}}{(1-e^{gT})(e^{-kb} - e^{-ka})}. \quad (2.47)$$

Функцію (2.47) можна зобразити у вигляді (2.26), розклавши її вільний від аргументів член певним чином (див. додаток А.3), тоді функція вигідності (2.47) виглядатиме так:

$$u(x,t) = u_2 \left(\frac{e^{-kx} - e^{-ka}}{e^{-kb} - e^{-ka}} \right) + u_1 \left(\frac{e^{gt} - e^{gT}}{1 - e^{gT}} \right). \quad (2.48)$$

Функції (2.46) і (2.48) зображують функції вигідності ОПР:

– не схильної до фінансового і часового ризиків, якщо $g > 0$ і $k > 0$;
– не схильної до фінансового ризику і схильної до часового, якщо $g < 0$ і $k > 0$;
– схильної до фінансового і часового ризиків, якщо $g < 0$ і $k < 0$;
– схильної до фінансового ризику і не схильної до часового ризику, якщо $g > 0$ і $k < 0$,

де g – міра несхильності до ризику часової затримки грошових коштів; k – міра несхильності до ризику недоотримання коштів.

Аналітичний вигляд функції (2.48), згідно теореми 5.1 [62, с. 222], доводить, що грошовий X і часовий T фактори функції (2.48) є адитивно незалежними і сама функція задовольняє умови цієї теореми.

Ми розглянули 4 загальних випадки побудови функції вигідності $u(x, t)$ за умов комбінування постійної відмінної від нуля міри несхильності до обох ризиків та нейтральності ОПР до обох ризиків (фінансового та часового). Деталізувавши ці загальні випадки відповідно до означення схильної, несхильної, нейтральної до ризику ОПР при постійній несхильності до певного (часового чи фінансового) ризику можна побудувати, на основі вище побудованих, такі функції вигідності ОПР:

– не схильної до фінансового і нейтральної до часового ризиків;
– схильної до фінансового і нейтральної до часового ризиків;
– нейтральної до фінансового і не схильної до часового ризиків;
– нейтральної до фінансового і схильної до часового ризиків;
– не схильної до фінансового і не схильної до часового ризиків;
– не схильної до фінансового ризику і схильної до часового ризику;
– схильної до фінансового і не схильної до часового ризиків;
– схильної до фінансового і схильної до часового ризиків;
– нейтральної до фінансового і нейтральної до часового ризиків.

Готовність кожної ОПР до прийняття певного фінансового рішення залежить від його ставлення до можливих втрат, які можуть стати результатом цього рішення.

Функція вигідності з грошовим і часовим аргументами служить для представлення ставлення ОПР до ризикових результатів. Важливість такої функції полягає в тому, що вона може використовуватися в явному вигляді як орієнтир при прийнятті фінансових рішень, які відповідають не лише намірам самої ОПР, але й того, кому вона делегує своє право прийняття рішення, яке відповідає цій функції вигідності.

Побудовані функції вигідності з грошовим і часовим аргументами можуть використовуватися і для моделювання економічних ситуацій і процесів через побудову економіко-математичних моделей, які б враховували ставлення ОПР до фінансового і грошового ризиків.

2.2. Дослідження ліній рівня вигідності

Лінією рівня є гладка крива, така, що величина $u(x_c, t_c)$ є сталою величиною, наприклад u_0, причому різні сталі породжують різні лінії рівня [79; 84; 85]. Іншими словами, у нашому випадку, лінія рівня є проекцією вигідності на площину xt.

Дослідимо функцію вигідності при постійній мірі несхильності до фінансового ризику і нейтральності до часового ризику (2.28) у випадку адитивної незалежності факторів грошей x і часу t на основі дослідження характеру її ліній рівня вигідності. Для цього у рівність (2.28), яка визначає цю функцію підставимо деяке постійне значення u_0:

$$u_0 = \frac{(1-u_1)(e^{-kx} - e^{-ka})}{e^{-kb} - e^{-ka}} + u_1\left(1 - \frac{t}{T}\right). \tag{2.49}$$

Зрозуміло, що при $u_0 = 0$ рівняння (2.49) має єдиний розв’язок $x = a$ і $t = T$. Також єдиною точкою визначається максимально можлива вигідність $u_0 = 1$ – це точка з координатами $x = b$ і $t = 0$. Отже, рівняння (2.49) має нетривіальні розв’язки при природному обмеженні

$$0 < u_0 < 1. \tag{2.50}$$

За умови (2.50) рівняння (2.49) можна розглядати як рівняння лінії рівня вигідності у неявному вигляді.

Якщо рівняння (2.49) розв’язати відносно однієї з змінних, наприклад, t, то отримаємо рівняння лінії рівної вигідності у явному аналітичному вигляді:

$$t = \frac{T}{u_1}\left(u_1 - u_0 + \frac{(1-u_1)(e^{-kx} - e^{-ka})}{e^{-kb} - e^{-ka}}\right). \tag{2.51}$$

Область визначення функції (2.51) повинна належати проміжкові $x \in [a;b]$, проте може не збігатися повністю з цим проміжком. Наприклад, якщо $u_1 < u_0$, то значення $x = a$ не є допустимим для функції (2.51). Справді, при $x = a$ отримаємо $t = \frac{T}{u_1}(u_1 - u_0) < 0$, якщо $u_1 < u_0$, а від'ємні часові моменти не належать до області визначення функції вигідності $u(x, t)$.

Отже, можна зробити висновок, що найменш вигідне грошове значення $x = a$ належить області визначення лінії рівня (2.51) тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$u_1 \geq u_0. \tag{2.52}$$

Знайдемо також умову, за якої області визначення функції (2.51) належить максимально вигідне грошове значення $x = b$: $t = \frac{T}{u_1}(1 - u_0)$, якщо $x = b$. Враховуючи умову, що часовий фактор функції вигідності $u(x, t)$ обмежений зверху величиною $t = T$, отримуємо таку нерівність $\frac{T}{u_1}(1 - u_0) \leq T$, тобто

$$u_0 + u_1 \geq 1. \tag{2.53}$$

Легко переконатися, що при виконанні умов (2.52) і (2.53) областю визначення функції (2.51) є весь грошовий діапазон $[a; b]$, оскільки ця функція є монотонно зростаючою, а це підтверджується тим, що похідна функції (2.51) додатна:

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{kT}{u_1} \cdot \frac{(1 - u_1)e^{-kx}}{e^{-kb} - e^{-ka}} > 0. \tag{2.54}$$

Отже, за умов $u_0 \leq u_1$ і $u_0 \geq 1 - u_1$ областю визначення функції (2.51) є весь грошовий діапазон $x \in [a; b]$. Обидві ці умови можуть виконуватися, якщо виконується нерівність $1 - u_1 \leq u_1$, тобто, якщо $u_1 \geq 1/2$.

Отже, якщо $u_1 < 1/2$, то не існує ліній рівної вигідності, які би були визначені на всьому проміжку $a \leq x \leq b$.

Якщо $u_1 = 1/2$, то існує тільки одна лінія рівної вигідності з повною областю допустимих значень $a \leq x \leq b$, а саме лінія, яка відповідає половинній вигідності $u_0 = 1/2$, чи

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \tag{2.55}$$

або в явному вигляді

$$t = T \cdot \frac{e^{-kx} - e^{-ka}}{e^{-kb} - e^{-ka}}. \qquad (2.56)$$

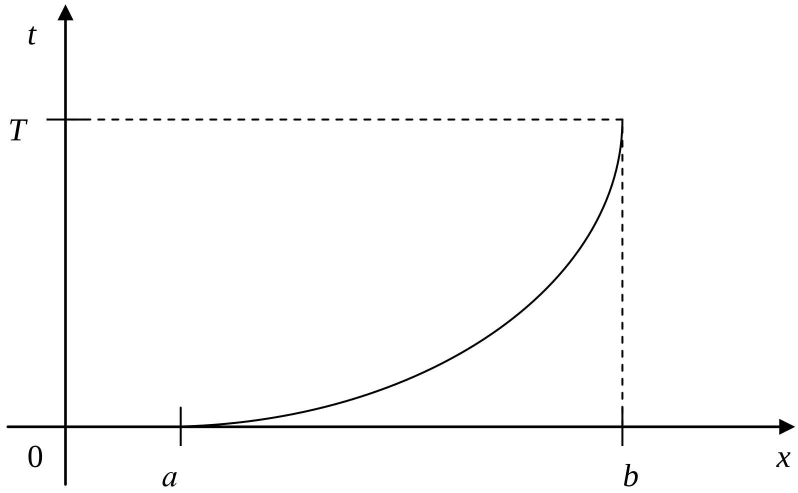


Рис. 2.1. Графік лінії рівня вигідності ОПР (2.56) за умов $u_1 = u_0 = 1/2$ і k <0.

Графічно функція (2.56) зображується у вигляді опуклої кривої (рис. 2.1), якщо постійна міра несхильності до фінансового ризику від’ємна ($k < 0$), тобто ОПР схильна до цього виду ризику або у вигляді вгнутої кривої (рис. 2.2), якщо міра несхильності до фінансової складової ризику додатна ($k < 0$), тобто якщо ОПР не схильна до ризику.

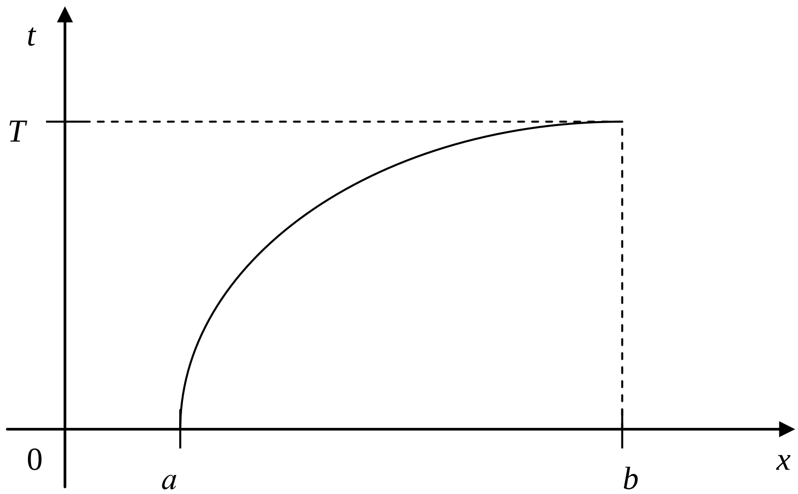


Рис. 2.2. Графік лінії однакової вигідності для постійно несхильної до ризику ОПР ($k < 0$) за умови $u_1 = u_0 = 1/2$

Повне сімейство ліній однакового рівня вигідності при $u_1 = 1/2$ аналітично записується в такому вигляді:

$$t = T\left(1 - 2u_0 + \frac{e^{-kx} - e^{-ka}}{e^{-kb} - e^{-ka}}\right). \qquad (2.57)$$

Знайдемо тепер область визначення лінії рівня вигідності (2.57) за умови $u_0 < 1/2$. Для цього прирівняємо праву частину рівності (2.57) до максимально допустимого часового моменту *T*:

$$T\left(1 - 2u_0 + \frac{e^{-kx} - e^{-ka}}{e^{-kb} - e^{-ka}}\right) = T \qquad (2.58)$$

і розв'яжемо рівняння (2.58) відносно грошової величини *x*:

$$\frac{e^{-kx} - e^{-ka}}{e^{-kb} - e^{-ka}} = 2u_0;$$

$$e^{-kx} - e^{-ka} = 2u_0(e^{-kb} - e^{-ka});$$

$$e^{-kx} = e^{-ka} + 2u_0(e^{-kb} - e^{-ka});$$

$$x = -\frac{1}{k}\ln\left(e^{-ka} + 2u_0(e^{-kb} - e^{-ka})\right). \qquad (2.59)$$

За умови $u_0 < 1/2$ формула (2.59) виражає крайню праву точку області визначення функції (2.57), а сама область визначення буде проміжком

$$a \le x \le -\frac{1}{k}\ln\left(e^{-ka} + 2u_0(e^{-kb} - e^{-ka})\right) = a_1. \qquad (2.60)$$

При цьому найменшому значенню $x = a$ з проміжку (2.60) відповідає момент часу

$$t = T(1 - 2u_0), \qquad (2.61)$$

а правій крайній точці $x = a_1$ відповідає максимально допустимий момент часу $t = T$.

На рис. 2.3 зображено графік лінії рівня вигідності (2.57) за умов $u_1 = 1/2$ і $u_0 < 1/2$ і $k < 0$.

При постійній додатній мірі несхильності до ризику $k > 0$ лінія рівня вигідності при $u_1 = 1/2$, $u_0 < 1/2$ з тією ж областю визначення (2.60) і областю значень $T(1 - 2u_0) \le t \le T$ зображується вгнутою експоненціальною кривою (рис.2.4).

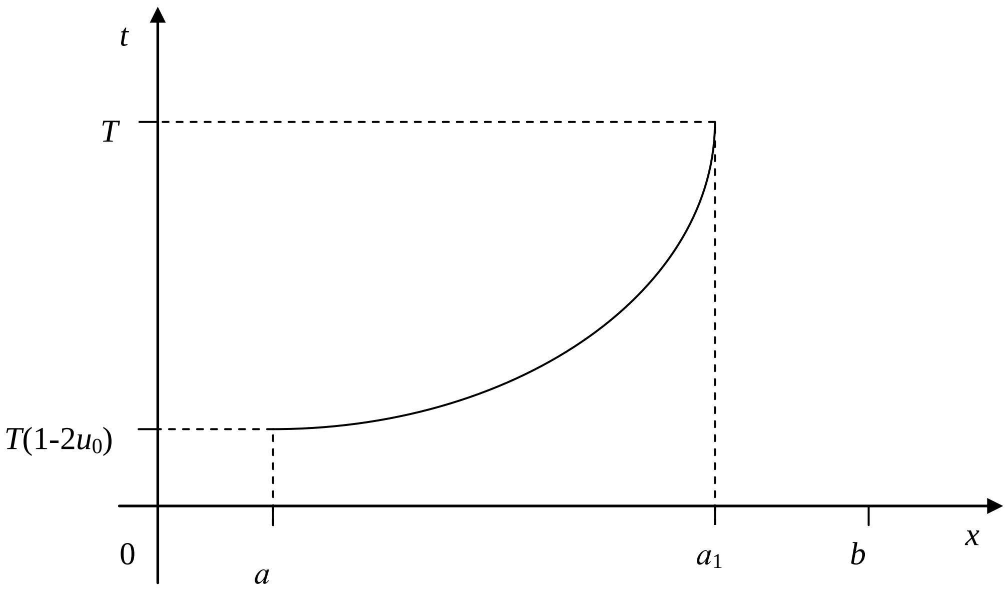


Рис. 2.3. Графік лінії рівня вигідності (2.57) за умов $u_1 = 1/2$, $u_0 < 1/2$ і $k < 0$

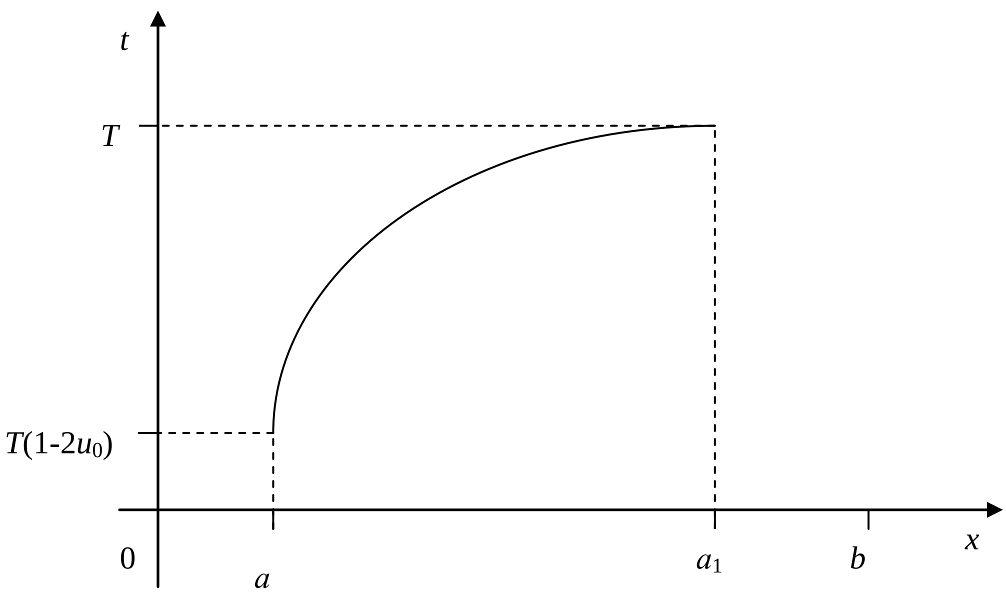


Рис. 2.4. Схематичний графік лінії рівня однакової вигідності за умов

$u_1 = 1/2$, $u_0 < 1/2$ і $k > 0$

Як видно з рис. 2.3 і 2.4 лінії рівня при $u_1 = 1/2$ і при вигідності меншій, ніж половина $(u_0 < 1/2)$ не проходять ні через точки з максимальною грошовою координатою $x = b$, ні через точки з мінімальною часовою координатою $t = 0$.

Дослідимо тепер лінію рівня при вигідності більшій, ніж половина $u_0 > 1/2$. Мінімальне грошове значення, яке входить в область визначення функції (2.57) за умови $u_0 > 1/2$ знайдемо, прирівнявши цю функцію до нуля:

$$T\left(1 - 2u_0 + \frac{e^{-kx} - e^{-ka}}{e^{-kb} - e^{-ka}}\right) = 0. \qquad (2.62)$$

Знайдемо розв'язок рівняння (2.62):

$$x = -\frac{1}{k}\ln\left(e^{-ka} + (2u_0 - 1)(e^{-kb} - e^{-ka})\right) = a_2. \qquad (2.63)$$

Отже, за умови $u_0 > 1/2$ функція (2.57) має область визначення, що належить проміжку

$$a_2 = -\frac{1}{k}\ln\left(e^{-ka} + (2u_0 - 1)(e^{-kb} - e^{-ka})\right) \le x \le b. \qquad (2.64)$$

При цьому максимально допустимому значенню $x = b$ відповідає момент часу

$$t = 2T(1 - u_0). \qquad (2.65)$$

За умов $u_1 = 1/2$, $u_0 > 1/2$ і $k < 0$ зобразимо графік лінії рівня вигідності (2.57) (рис.2.5).

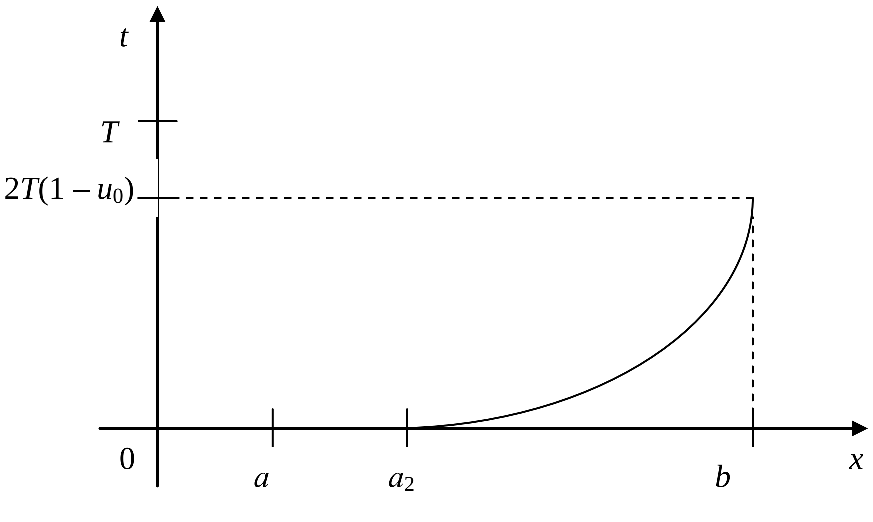


Рис. 2.5. Схематичний графік лінії рівня вигідності (2.57) за умов $u_1 = 1/2$, $u_0 > 1/2$ і $k < 0$

Зміна характеру ставлення до ризику на протилежний, тобто на $k > 0$ спричиняє зміну опуклості лінії рівня на вгнутість (рис. 2.6).

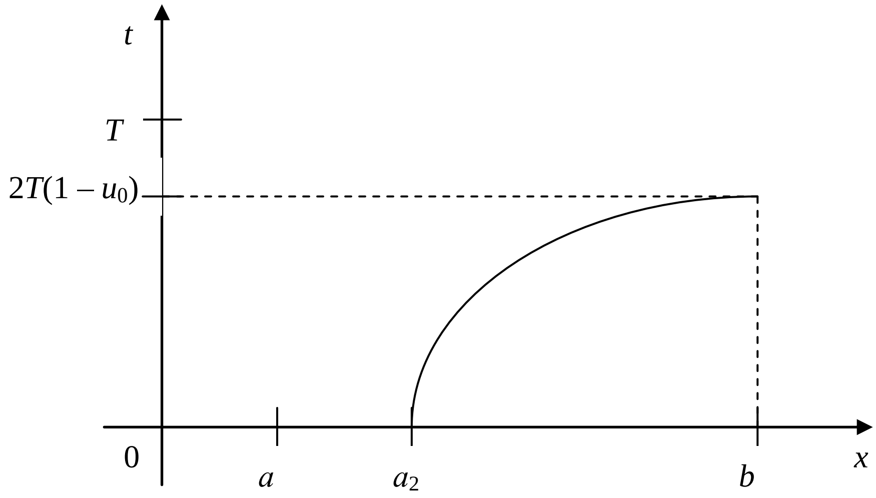


Рис. 2.6. Схематичний графік лінії рівня вигідності (2.57) за умов $u_1 = 1/2$, $u_0 > 1/2$ і $k > 0$

Як видно з графіків, зображених на рис. 2.5 і рис. 2.6, лінії рівня при вигідності більшій, ніж половина ($u_0 > 1/2$), проходять через точку з максимально сприятливою грошовою координатою $x = b$ та через точку з мінімально можливою часовою координатою $t = 0$ і не проходять через точки з мінімальною грошовою координатою $x = a$ і з максимальною часовою координатою $t = T$.

Дослідимо тепер поведінку лінії рівня вигідності (2.51) при $u_1 > 1/2$. Якщо при цьому виконується умова $1 - u_1 \le u_0 \le u_1$, то, як уже зазначалося, областю визначення такої функції є весь грошовий проміжок $a \le x \le b$. Зокрема, при $u_0 = u_1$ функція (2.51) спрощується:

$$t = \frac{T(1-u_1)}{u_1} \cdot \frac{e^{-kx} - e^{-ka}}{e^{-kb} - e^{-ka}}. \tag{2.66}$$

Мінімальному грошовому показникові $x = a$ функції (2.66) відповідає початковий момент часу $t = 0$, а максимальному грошовому показникові $x = b$ відповідає момент часу

$$t = \frac{T(1-u_1)}{u_1} < T\,. \tag{2.67}$$

Отже, множина значень лінії рівня (2.66) виражається часовим проміжком

$$0 \le t \le \frac{T(1-u_1)}{u_1}\,. \tag{2.68}$$

Графіки лінії рівня вигідності за умов $u_0 = u_1 > 1/2$ і умови ставлення ОПР до ризику виражену через міру несхильності до ризику (k) зобразимо на рис. 2.7 і рис. 2.8.

На основі графіків зображених на рис. 2.7 і рис. 2.8 можна зробити висновок, що за умов $u_0 = u_1 > 1/2$ лінії рівня вигідності не проходять через точки з найвіддаленішою часовою координатою $t = T$.

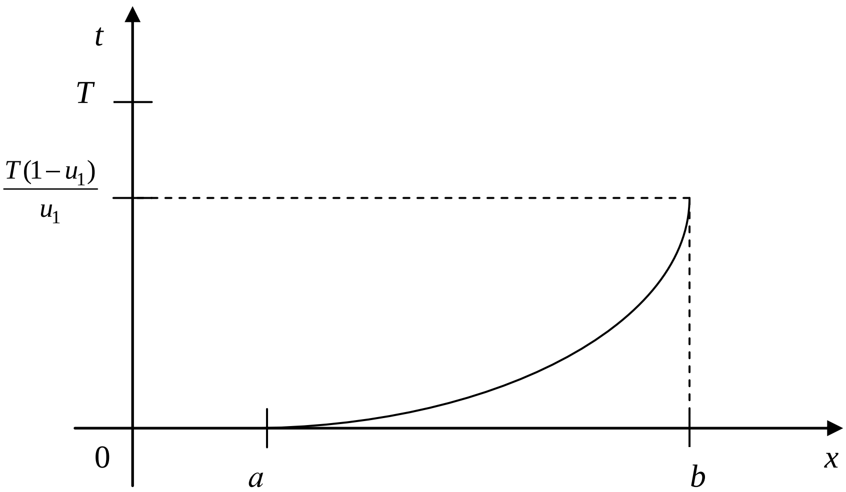


Рис. 2.7. Графік лінії рівня вигідності (2.51) за умов $u_0 = u_1 > 1/2$ і $k < 0$

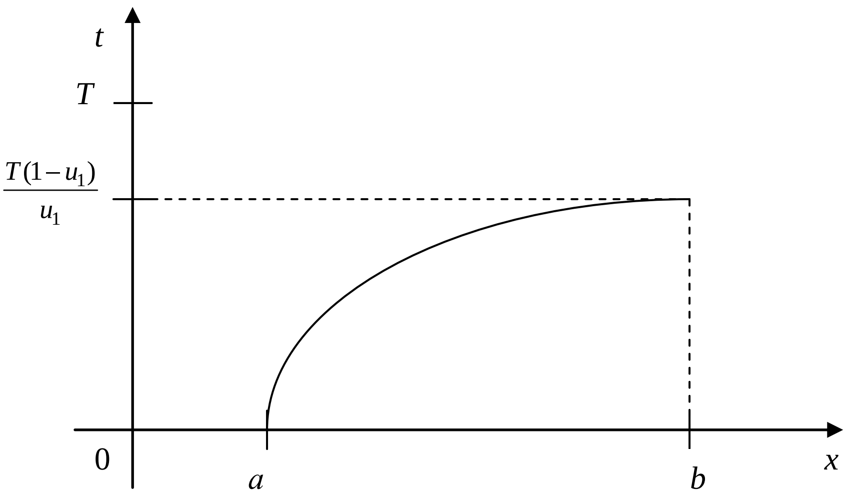


Рис. 2.8. Графік лінії рівня вигідності (2.51) за умов $u_0 = u_1 > 1/2$ і $k > 0$

Якщо $u_0 = 1 - u_1$, то рівняння лінії рівня (2.51) можна записати у вигляді

$$t = \frac{T}{u_1}\left(2u_1 - 1 + (1 - u_1)\frac{e^{-kx} - e^{-ka}}{e^{-kb} - e^{-ka}} \right). \qquad (2.69)$$

Максимальному грошовому аргументі $x = b$ згідно функції (2.69) відповідає максимальне часове значення $t = T$, а мінімальному грошовому показникові $x = a$ відповідає момент часу

$$t = \frac{T(2u_1 - 1)}{u_1} > 0. \qquad (2.70)$$

Отже, множиною значень функції (2.69) є часовий проміжок

$$\frac{T(2u_1 - 1)}{u_1} \le t \le T. \qquad (2.71)$$

Оскільки областю визначення функції (2.69) є весь грошовий діапазон, зобразимо її графіки на рис. 2.9 і 2.10. Характерною особливістю графіків, зображених на рис. 2.9 і 2.10 є те, що вони проходять через праву верхню точку (b; T) області визначення функції вигідності $u(x, t)$ і не проходять через точки, які мають нульову часову координату.

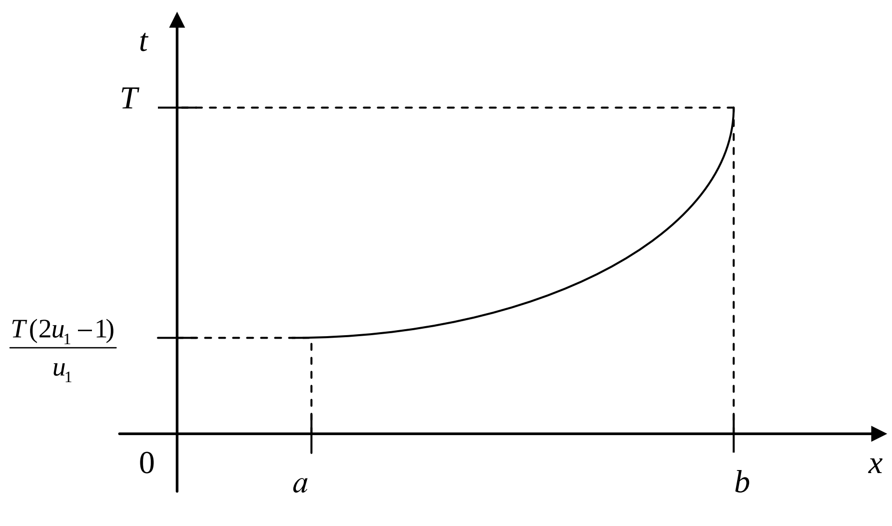


Рис. 2.9. Схематичний графік лінії рівня вигідності (2.51) за умов $u_0 = 1 - u_1$, $u_1 > 1/2$ і $k < 0$.

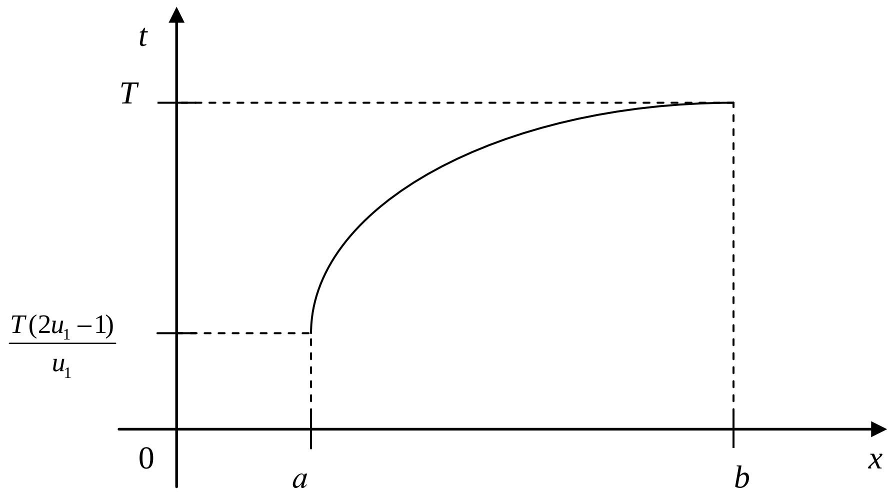


Рис. 2.10. Схематичний графік лінії рівня вигідності (2.51) за умов $u_0 = 1 - u_1$, $u_1 > 1/2$ і $k > 0$

Нехай тепер за умови $u_1 > 1/2$ виконується строга нерівність

$$1 - u_1 < u_0 < u_1. \tag{2.72}$$

Підставивши у функцію (2.51) мінімальне грошове значення $x = a$, знайдемо мінімально можливий момент часу:

$$t = t_{\min} = T\frac{u_1 - u_0}{u_1}. \tag{2.73}$$

Максимальному грошовому значенню $x = b$ відповідає максимально можливий момент часу

$$t = t_{\max} = T\frac{1 - u_0}{u_1}. \tag{2.74}$$

Враховуючи формули (2.73) і (2.74) робимо висновок, що при $u_1 > 1/2$ за умови (2.72) множина значень лінії рівня належить проміжку

$$0 < t_{\min} \le t \le t_{\max} < T. \tag{2.75}$$

Отже, знаючи область визначення функції (2.51) ($a \le x \le b$), її множину значень (2.75) і характер її поведінки при різних знаках міри несхильності до фінансової складової ризику, можемо схематично зобразити графік лінії рівня вигідності за умови $u_1 > 1/2$ і умови (2.72) (рис. 2.11 і 2.12).

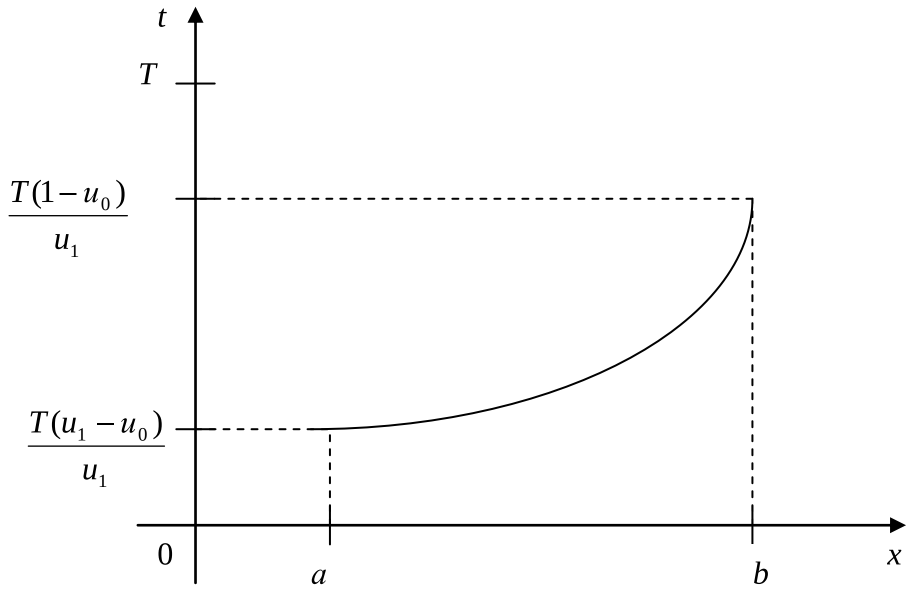


Рис. 2.11. Схематичний графік лінії рівня вигідності за умов $u_1 > 1/2$,

$1-u_1 < u_0 < u_1$ і $k < 0$

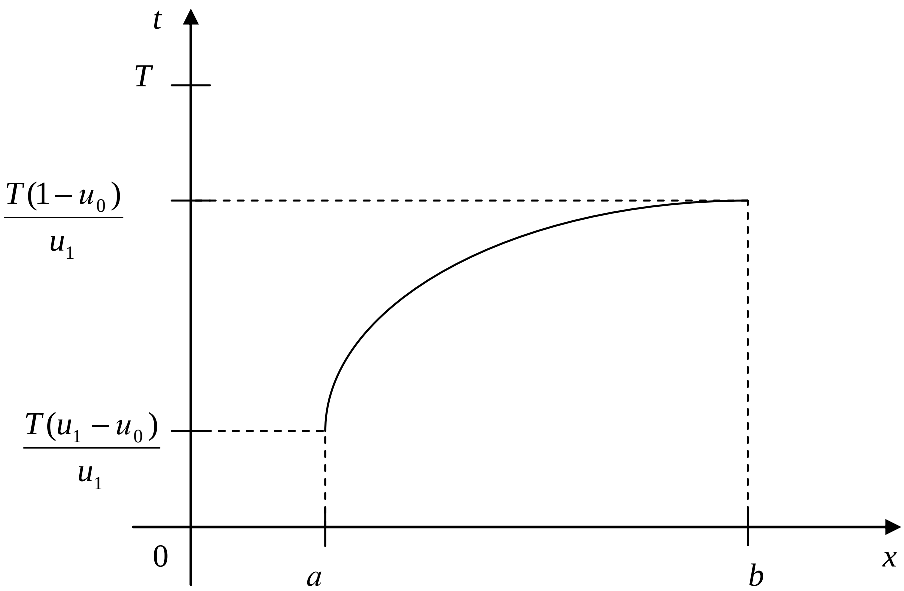


Рис. 2.12. Схематичний графік лінії рівня вигідності за умов $u_1 > 1/2$,

$1-u_1 < u_0 < u_1$ і $k > 0$

Як видно з рис. 2.11 і 2.12 лінія рівня вигідності (2.51) за умов $u_1 > 1/2$, $1-u_1 < u_0 < u_1$ не проходить ні через точки з мінімально можливою часовою координатою t = 0, ні через точки з максимально можливою часовою координатою $t = T$.

Розглянемо тепер поведінку лінії рівня вигідності за умови

$$1 > u_0 > u_1 > 1/2. \tag{2.76}$$

Оскільки умова (2.76) суперечить умові $u_0 \le u_1$, то областю визначення функції (2.51) у цьому випадку буде лише частина грошового діапазону $a \le x \le b$.

Для того щоб знайти мінімально можливе допустиме значення функції (2.51) за умови (2.76), прирівняємо її до нуля

$$\frac{T}{u_1}\left(u_1 - u_0 + (1-u_1)\frac{e^{-kx} - e^{-ka}}{e^{-kb} - e^{-ka}}\right) = 0 \tag{2.77}$$

і розв'яжемо отримане рівняння (2.77) відносно x

$$x_{\min} = -\frac{1}{k}\ln\left(e^{-ka} + \frac{u_0 - u_1}{1-u_1}(e^{-kb} - e^{-ka})\right). \tag{2.78}$$

Отже, областю визначення функції (2.51) за умови (2.76) і враховуючи (2.78), є грошовий проміжок

$$x_{\min} \le x \le b. \tag{2.79}$$

При цьому мінімально допустимому грошовому значенню $x_{\min}$ відповідає початковий момент часу t = 0, а максимально допустимому грошовому значенню $x = b$ відповідає момент часу

$$t = \frac{T(1-u_0)}{u_1}, \tag{2.80}$$

тобто множина значень функції (2.51) за умови (2.76) належить часовому проміжку

$$0 \le t \le \frac{T(1-u_0)}{u_1}. \tag{2.81}$$

Зобразимо тепер функцію (2.51) за умови (2.76) графічно (рис. 2.13 і рис. 2.14). Характерною особливістю графіків, зображених на рис. 2.13 і 2.14 є те, що вони не проходять через точки з мінімально можливою грошовою абсцисою $x = a$, ні через точки з максимально можливою часовою ординатою $t = T$.

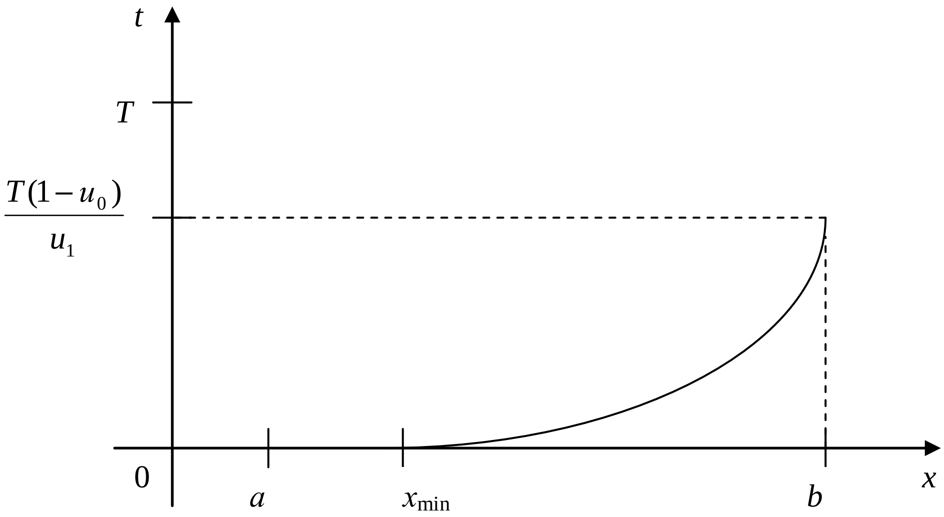


Рис. 2.13. Графік лінії рівня вигідності за умов $u_0 > u_1 > 1/2$ і $k < 0$.

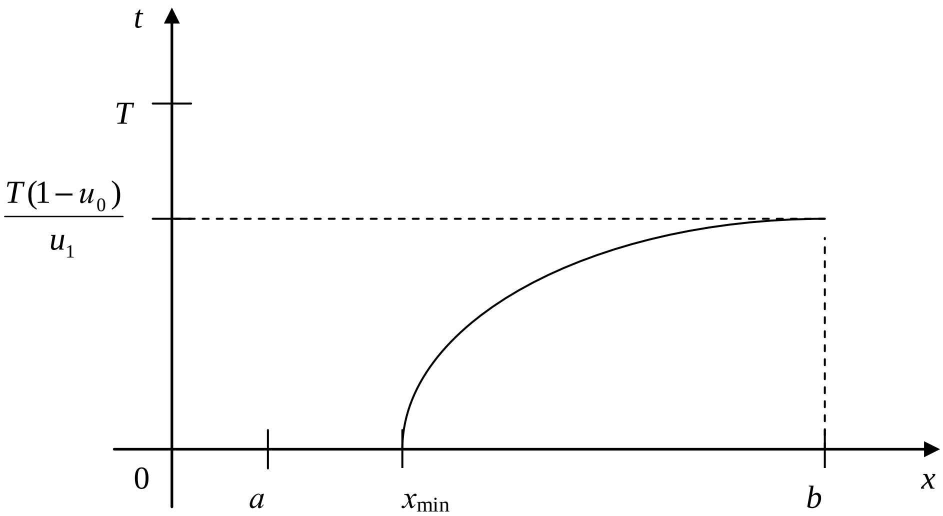


Рис. 2.14. Графік лінії рівня вигідності за умов $u_0 > u_1 > 1/2$ і $k > 0$.

Розглянемо тепер випадок лінії рівня вигідності за таких умов:

$$1 > u_1 > 1/2 \quad \text{і} \quad 0 < u_0 < 1 - u_1. \tag{2.82}$$

За умов (2.82) областю визначення функції (2.51) також не буде повний грошовий проміжок [a; b]. При цьому легко переконатися, що мінімально можливе грошове значення $x = a$ належить області допустимих значень цієї функції. Справді, при $x = a$ за умов (2.82) отримаємо:

$$0 < t = \frac{T(u_1 - u_0)}{u_1} < T. \tag{2.83}$$

Прирівнявши функцію (2.51) до значення T, отримаємо рівняння:

$$\frac{T}{u_1}\left(u_1 - u_0 + (1-u_1)\frac{e^{-kx} - e^{-ka}}{e^{-kb} - e^{-ka}}\right) = T, \qquad (2.84)$$

розв'язок якого

$$x = -\frac{1}{k}\ln\left(e^{-ka} + \frac{u_0}{1-u_1}(e^{-kb} - e^{-ka})\right) = x_{\max} < b \qquad (2.85)$$

визначає максимально допустиме число з області визначення функції (2.51).

Отже, графічно функція (2.51) за умов (2.82) зобразиться у вигляді кривих, як на рис. 2.15 і 2.16.

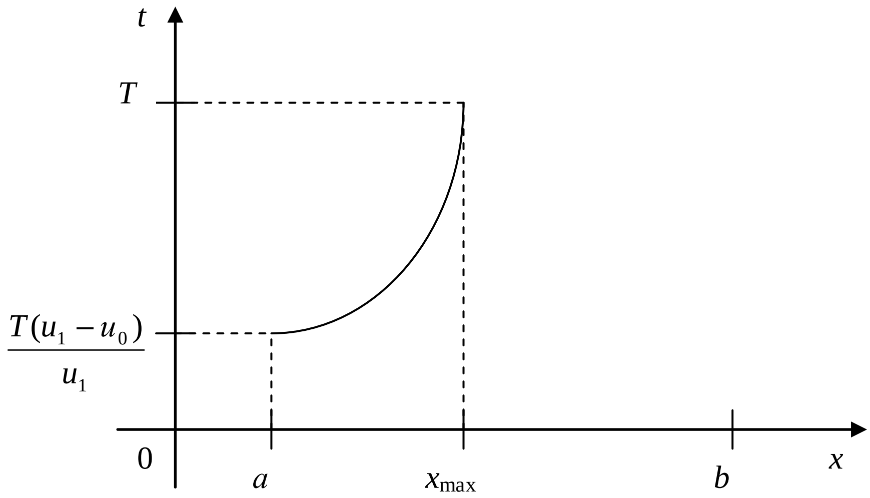


Рис. 2.15. Графік лінії рівня за умов (2.82) і $k < 0$

Отже, за умов (2.82) лінії рівня вигідності на проходять ні через точки з максимальною грошовою абсцисою $x = b$, ні через точки з мінімальною часовою ординатою $t = 0$.

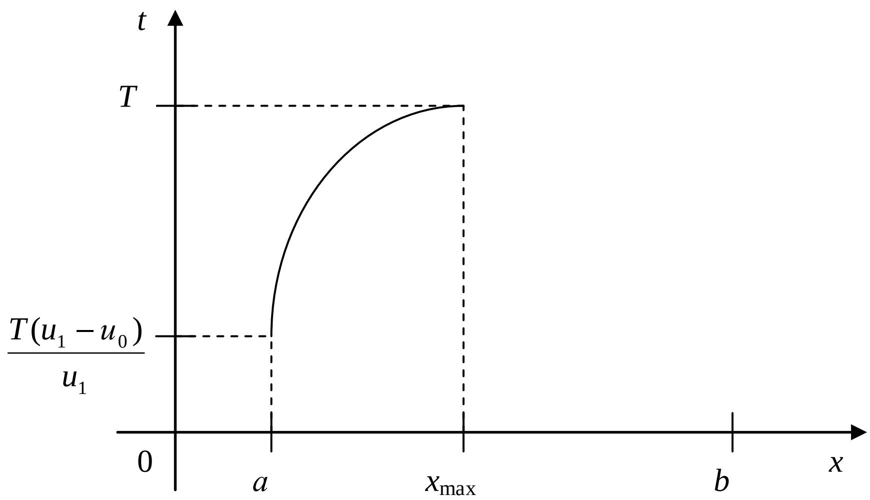


Рис. 2.16. Графік лінії рівня за умов (2.82) і $k > 0$

Нам залишилося дослідити поведінку лінії рівня вигідності (2.51) у випадку

$$u_1 < 1/2. \tag{2.86}$$

Як було показано вище, за умови (2.86) функція (2.51) не може бути визначена на всьому грошовому проміжку [a; b]. Дослідимо її область визначення спочатку у найпростішому випадку

$$u_1 = u_0. \tag{2.87}$$

За умови (2.87), як було показано вище, аналітичний вигляд функції (2.51) дещо спрощується і має вигляд (2.66). Неважко переконатися, що лінія рівня (2.66) проходить через точку з координатами (a; 0). Точку ($x = a$; $t = 0$) вербально можна описати так: “нехай буде мінімальна сума, зате відразу”.

Проте крива (2.66) не проходить через точку з максимальною сумою $x = b$. Справді, при $x = b$

$$t = \frac{T(1-u_1)}{u_1} > T\,, \tag{2.88}$$

за умови (2.86).

Крайню праву точку з області допустимих значень функції (2.66) знайдемо, розв’язавши рівняння

$$T = \frac{T(1-u_1)}{u_1} \cdot \frac{e^{-kx} - e^{-ka}}{e^{-kb} - e^{-ka}}\,; \tag{2.89}$$

$$\frac{e^{-kx} - e^{-ka}}{e^{-kb} - e^{-ka}} = \frac{u_1}{1-u_1}\,;$$

$$x = -\frac{1}{k}\ln\left(e^{-ka} + \frac{u_1}{1-u_1}(e^{-kb} - e^{-ka})\right) = x_1. \tag{2.90}$$

Отже, можна зробити висновок, що функція (2.66) за умови (2.86) визначена на грошовому проміжку

$$x \in [a; x_1] \tag{2.91}$$

і приймає значення на всьому допустимому часовому проміжку [0; T].

Схематичний графік функції (2.66) у даному випадку подано на рис. 2.17 і 2.18.

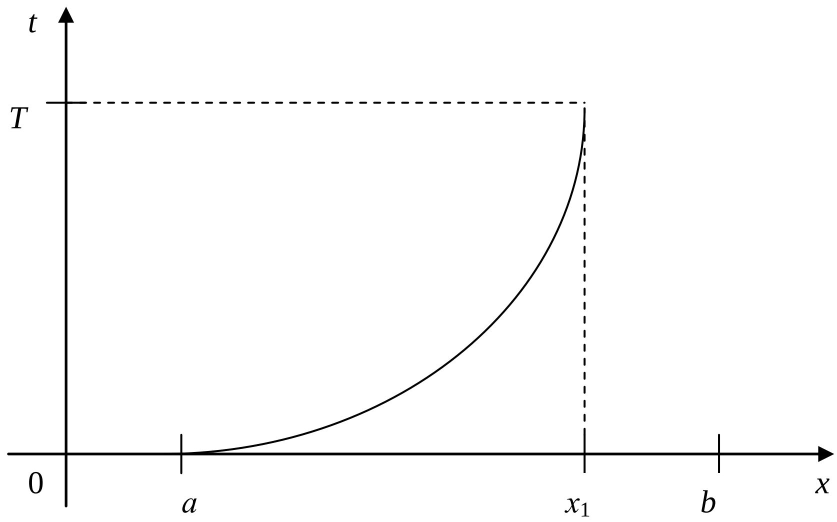


Рис. 2.17. Схематичний графік лінії рівня вигідності (2.66) за умов (2.86) і $k < 0$

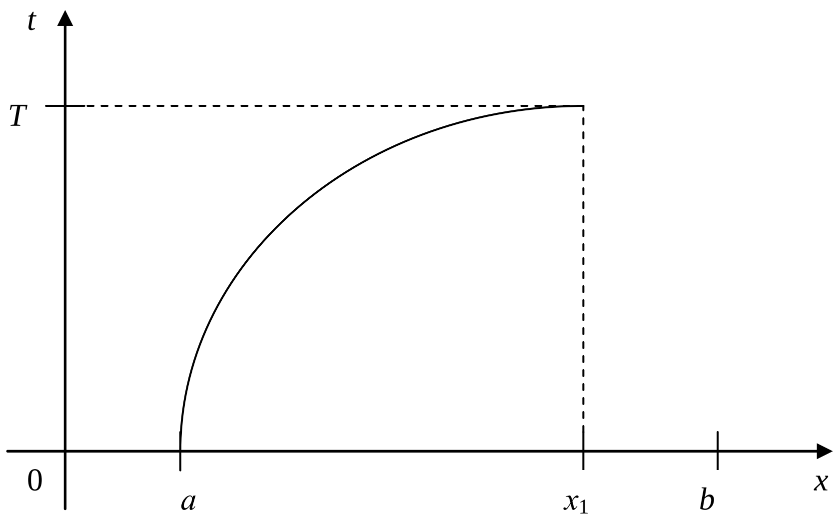


Рис. 2.18. Схематичний графік лінії рівня вигідності (2.66) за умов (2.86) і $k > 0$

Випадок $u_0 \neq u_1$ для зручності дослідження розіб’ємо на підвипадки:

а) $u_1 < u_0$;

б) $u_1 > u_0$.

Випадок а). При $u_1 < u_0$ в область допустимих значень функції (2.51) не входить мінімальна грошова сума $x = a$. Справді, при $x = a$

$$t = \frac{T}{u_1}(u_1 - u_0) < 0.$$

Зате точка з максимальною грошовою сумою $x = b$ може належати області допустимих значень функції (2.51) за умови $u_1 < u_0$, оскільки

$$0 < t = \frac{T}{u_1}(1 - u_0) \le T\,, \tag{2.92}$$

якщо виконується умова

$$1 - u_0 \le u_1 \text{ або } u_0 \ge 1 - u_1. \tag{2.93}$$

Зокрема, якщо виконується рівність

$$u_0 = 1 - u_1, \tag{2.94}$$

то лінія рівня (2.51) проходить через точку (b; T), яка визначає максимальну суму $x = b$ в найпізніше допустимий термін $t = T$.

Як було показано вище, за умови (2.94) функція (2.51) записується у вигляді (2.69). Знайдемо мінімальне грошове значення, яке входить в область визначення функції (2.69). Для цього розв'яжемо рівняння

$$2u_1 - 1 + (1 - u_1)\frac{e^{-kx} - e^{-ka}}{e^{-kb} - e^{-ka}} = 0. \tag{2.95}$$

Звідси

$$x = -\frac{1}{k}\ln\left(e^{-ka} + \frac{1 - 2u_1}{1 - u_1}(e^{-kb} - e^{-ka})\right) = x_{\min}. \tag{2.96}$$

Отже, за умови $0 < u_1 < 1/2$ лінія рівня (2.69) має область визначення

$$x \in [x_{\min}; b] \tag{2.97}$$

і приймає значення на всьому часовому проміжку [0; T].

Графік функції (2.69) для цього випадку зобразимо на рис. 2.19 і 2.20.

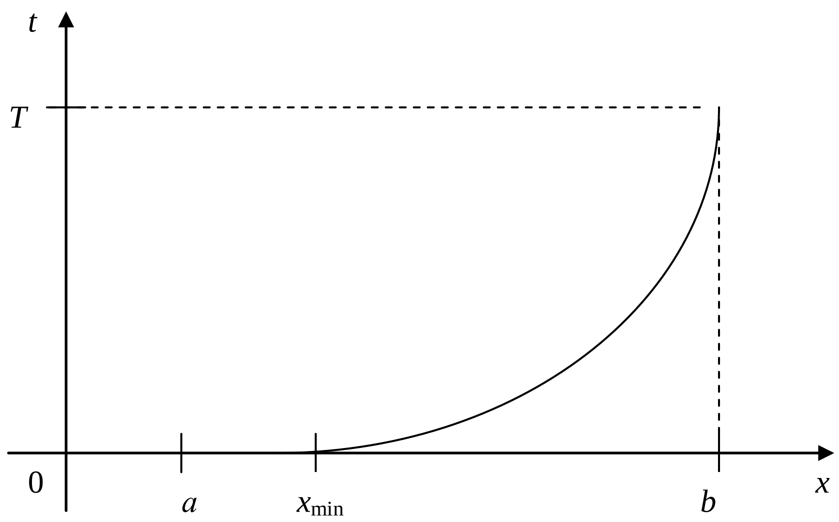


Рис. 2.19. Графік лінії рівня вигідності (2.69) за умов (2.86) і $k < 0$.

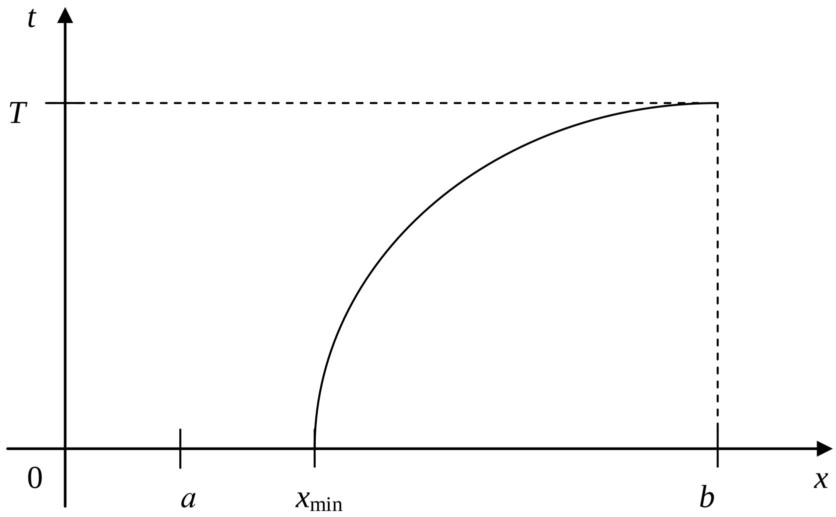


Рис. 2.20. Графік лінії рівня вигідності (2.69) за умов (2.86) і $k > 0$.

Якщо замість рівності (2.94) виконується строга нерівність

$$u_0 > 1 - u_1, \qquad (2.98)$$

то множина значень функції (2.51) обмежиться зверху величиною

$$t_{\max} = \frac{T}{u_1}(1 - u_0) < T, \qquad (2.99)$$

яка досягається при максимальній грошовій сумі $x = b$.

Мінімальний грошовий аргумент з області визначення в цьому випадку виражається формулою (2.78) і його значення відповідає початковому моменту часу $t = 0$.

Отже, маючи область визначення функції (2.51)

$$x \in \left[-\frac{1}{k} \ln\left(e^{-ka} + \frac{u_0 - u_1}{1 - u_1}(e^{-kb} - e^{-ka}) \right); b \right] \qquad (2.100)$$

і її множину значень

$$t \in \left[0; \frac{T}{u_1}(1 - u_0) \right] \qquad (2.101)$$

за умов (2.86) і (2.98) побудуємо графік цієї лінії рівня (рис. 2.21 і 2.22).

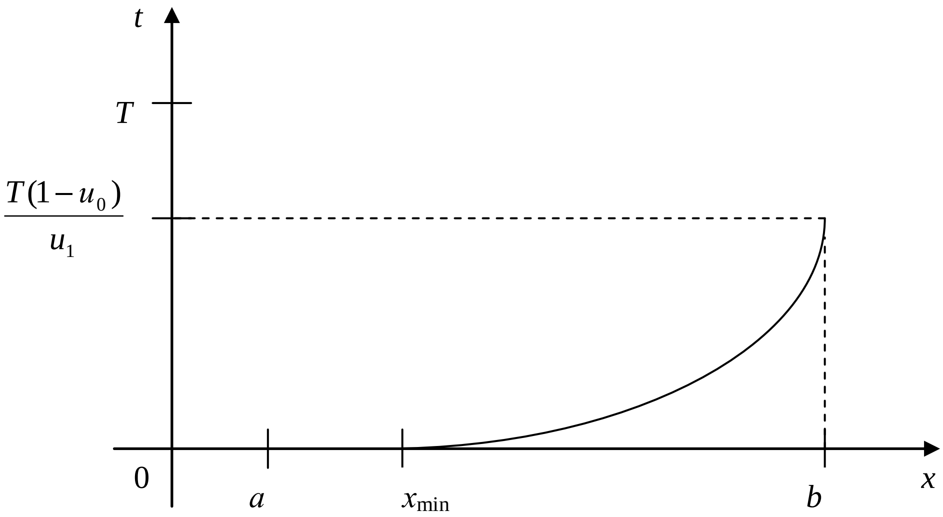


Рис. 2.21. Графік лінії рівня (2.51) за умов (2.86), (2.98) і $k < 0$.

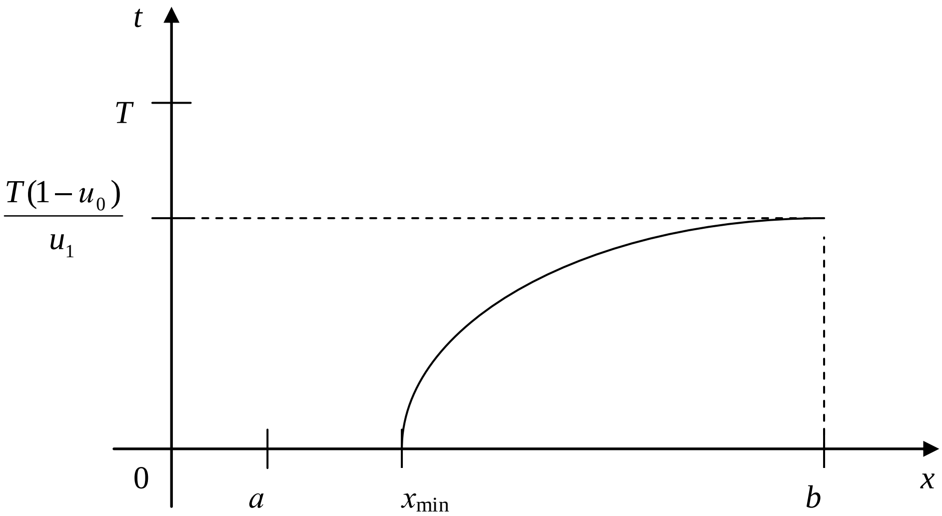


Рис. 2.22. Графік лінії рівня (2.51) за умов (2.86), (2.98) і $k > 0$.

Якщо виконується нерівність

$$u_1 < u_0 < 1 - u_1, \tag{2.102}$$

то ні точка з мінімальною можливою грошовою сумою $x = a$, ні точка з максимальною можливою грошовою сумою $x = b$ не належать області допустимих значень (2.51). Найбільший можливий аргумент функції (2.51) знайдемо, розв'язавши рівняння (2.84) і це буде (2.85). Отже, за умов (2.86) і (2.102) множина значень функції (2.51) збігається з усім часовим проміжком, а область визначення виражається проміжком

$$x \in \left[-\frac{1}{k}\ln\left(e^{-ka} + \frac{u_0 - u_1}{1-u_1}(e^{-kb} - e^{-ka}) \right); -\frac{1}{k}\ln\left(e^{-ka} + \frac{u_0}{1-u_1}(e^{-kb} - e^{-ka}) \right) \right]. \quad (2.103)$$

Графік функції з областю визначення (2.103) подано на рис. 2.23 і 2.24.

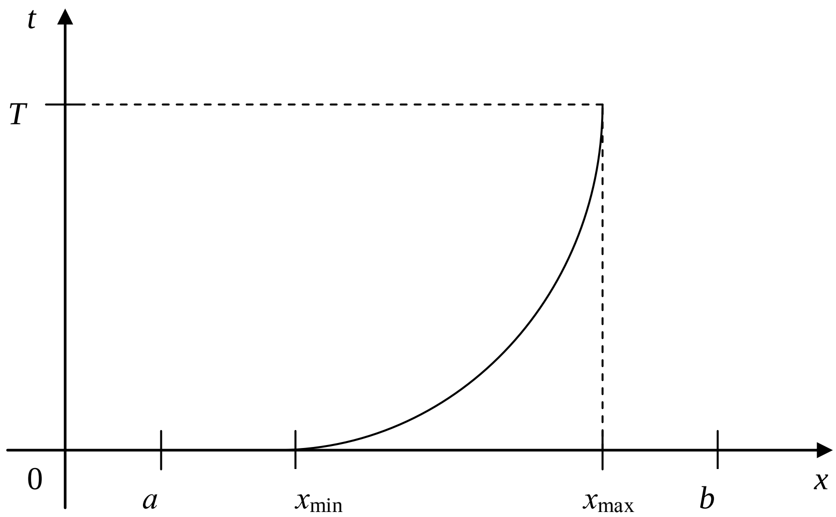


Рис. 2.23. Графік лінії рівня вигідності (2.51) за умов (2.86), (2.102) і $k < 0$

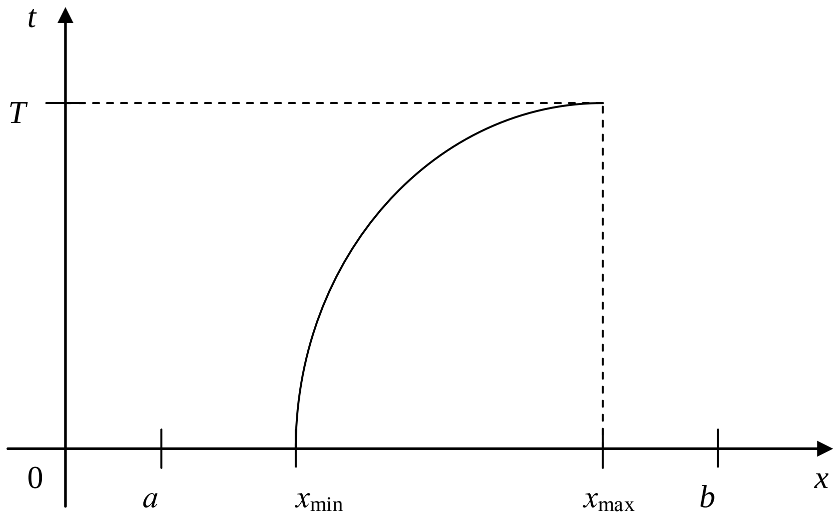


Рис. 2.24. Графік лінії рівня вигідності (2.51) за умов (2.86), (2.102) і $k > 0$

Випадок б). Якщо $u_1 > u_0$, то мінімальна можлива грошова величина $x = a$ належить області допустимих значень функції (2.51) і цій мінімальній величині відповідає момент часу

$$t = \frac{T}{u_1}(u_1 - u_0) > 0. \quad (2.104)$$

Найбільше допустиме значення виражається цією ж формулою, що і у випадку виконання умови $u_1 < u_0 < 1 - u_1$, тобто формулою (2.85). Отже, область допустимих значень лінії (2.51) за умови $1/2 > u_1 > u_0$ визначається проміжком

$$x \in \left[a; -\frac{1}{k} \ln\left(e^{-ka} + \frac{u_0}{1-u_1}(e^{-kb} - e^{-ka}) \right) \right]. \tag{2.105}$$

Множина значень функції (2.51) належить часовому проміжку

$$t \in \left[\frac{T}{u_1}(u_1 - u_0); T \right]. \tag{2.106}$$

Графік лінії рівня вигідності за умови $1/2 > u_1 > u_0$ зображено на рис. 2.25 і 2.26.

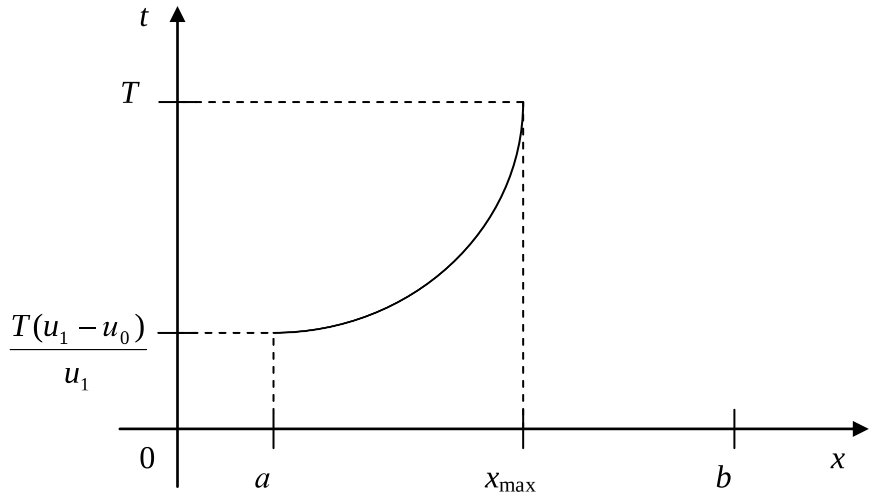


Рис. 2.25. Графік лінії рівня вигідності (2.51) за умов $1/2 > u_1 > u_0$ і $k < 0$

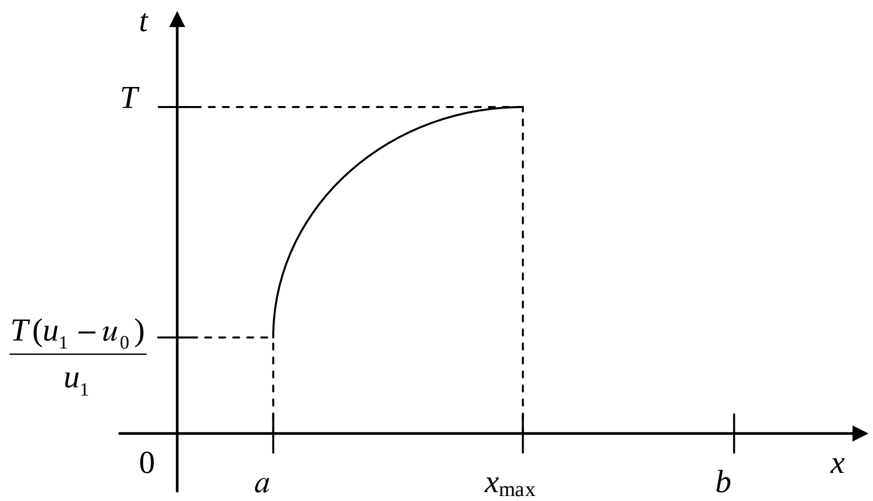


Рис. 2.26. Графік лінії рівня вигідності (2.51) за умов $1/2 > u_1 > u_0$ і $k > 0$

Отже, досліджено функцію вигідності (2.28) для ОПР з постійною мірою несхильності до фінансового ризику та нейтральної до часового ризику на основі дослідження її ліній рівня вигідності. Запропонований підхід дає змогу аналогічним чином, у разі потреби, досліджувати функції вигідності для ОПР: нейтральної до фінансового і часового ризиків; нейтральної до фінансового ризику та з постійною мірою несхильності до часового ризику; з постійною мірою несхильності до фінансового і часового ризиків тощо.

Відзначимо одну важливу властивість лінії рівня вигідності, а саме: всі точки, які розташовані під лінією рівня більш вигідні, ніж ті, що розташовані над нею.

Справді, нехай маємо точку (x_1; t_1) над лінією рівня і точку (x_2; t_2) під лінією рівня (рис. 2.27).

Якщо рівняння лінії рівня виражається формулою $t = \varphi(x)$, то можна записати нерівність

$$u(x_2, t_2) > u(x_2, \varphi(x_2)), \tag{2.107}$$

оскільки момент часу $\varphi(x_2)$ настане пізніше від моменту t_2:

$$\varphi(x_2) > t_2. \tag{2.108}$$

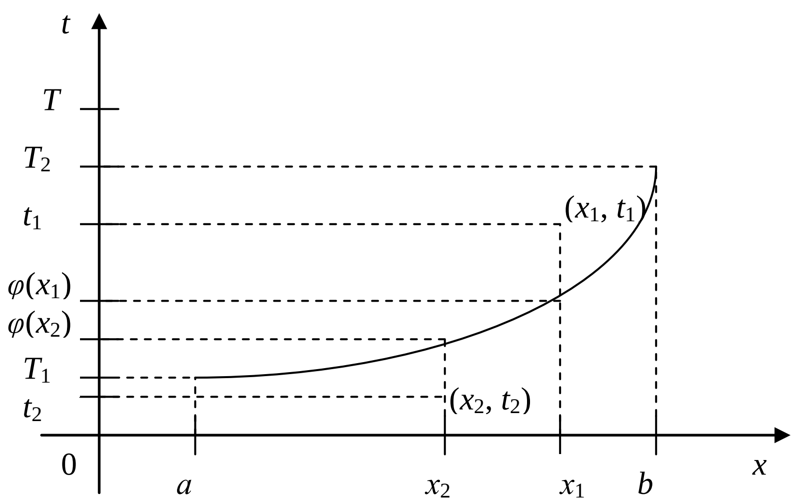


Рис. 2.27. Графічна ілюстрація властивості лінії рівня вигідності

Згідно означення лінії рівня виконується рівність

$$u(x_2,\varphi(x_2)) = u(x_1,\varphi(x_1)). \tag{2.109}$$

І, оскільки

$$\varphi(x_1) < t_1, \tag{2.110}$$

то

$$u(x_1,\varphi(x_1)) > u(x_1,t_1). \tag{2.111}$$

На основі нерівностей (2.107) і (2.111) і рівності (2.109) отримаємо

$$u(x_2,t_2) > u(x_1,t_1).$$

Отже, в даному випадку можна без зайвих обчислень відповісти на питання: що вигідніше для ОПР: менша сума, але раніше (точка (x_2; t_2)), чи більша сума, але пізніше (точка (x_1; t_1)).

Висновки до 2-го розділу

1. Функція вигідності корегує процес прийняття рішення у відповідності з індивідуальним сприйняттям ризику ОПР, оскільки знання функціональної залежності дає змогу передбачити події віддаленого майбутнього, виходячи з питань ставлення ОПР до ризику і, зокрема, з врахування її міри несхильності до ризику.

2. Побудовано двофакторну функцію вигідності з факторами гроші і час при комбінуванні постійної міри несхильності і нейтральності до грошового і часового ризиків, зокрема побудовано функції вигідності за умов:

– постійної міри несхильності до ризику щодо грошового параметру і нейтральності до часового ризику (2.23);
– нейтральності до грошового параметру і постійної міри несхильності до ризику щодо часу (2.40);
– нейтральності до ризику щодо грошового і нейтральності щодо часового параметрів (2.43);
– постійної міри несхильності до ризику щодо грошового параметру і постійної міри несхильності до ризику щодо часу (2.46).

З’ясовано, що для всіх побудованих функцій вигідності за умови (2.24) фактори гроші і час є адитивно незалежними. При чому за виконання цієї умови отримані функції вигідності з факторами гроші і час набирають вигляду (2.28), (2.42), (2.45), (2.48) відповідно. Побудовані функції вигідності дають змогу як безпосередньо приймати фінансові рішення, так і розробляти на їх основі економіко-математичні моделі для прийняття фінансових рішень в умовах ризику.

3. Запропоновано підхід до дослідження функцій вигідності з грошовим та часовим аргументами на основі досліджень характеру ліній рівня вигідності у випадку адитивної незалежності грошового і часового факторів, який розглянуто для функції вигідності (2.28) при постійній мірі несхильності до фінансового ризику і нейтральності до часового ризику. З’ясовано важливу властивість лінії рівня вигідності, а саме: всі точки, які розташовані під лінією рівня більш вигідні, ніж ті, що розташовані над нею.

РОЗДІЛ 3

МОДЕЛЮВАННЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ З ІНВЕСТУВАННЯ НА ОСНОВІ ФУНКЦІЇ ВИГІДНОСТІ З ГРОШОВИМ ТА ЧАСОВИМ АРГУМЕНТАМИ

3.1. Застосування функції вигідності для прийняття рішень щодо інвестиційних проектів

В економічній літературі [8; 9; 25; 34; 55; 65; 66; 69; 77; 78; 80; 88; 89; 98; 101; 106; 110; 132; 142; 161] досліджуються критерії ефективності інвестиційних проектів. Найвідоміші з них: чиста зведена вартість прибутків, внутрішня норма рентабельності, терпін окупності, чиста рентабельність тощо. Кожен з них має свої переваги і недоліки. Так, наприклад, показник чистої зведеної вартості вважається найважливішим, найбільш зрозумілим для інвестора, однак для його обчислення необхідно знати ставку дисконтування, проте для її правильного визначення майже відсутні науково обґрунтовані методичні рекомендації. Для обчислення внутрішньої норми рентабельності не потрібно знати дисконтну ставку, проте існує неоднозначність в обчисленні внутрішньої норми рентабельності для інвестиційних проектів з неординарними грошовими потоками [65; 66; 80; 142].

Відсутність єдиного загальновизначеного критерію ефективності інвестиційних проектів ускладнює задачу їх порівняння і відбору для реалізації. Звичайно, якщо один з проектів переважає інший за всіма показниками, тобто, якщо чиста зведена вартість першого проекту більша від чистої зведеної вартості другого проекту, і внутрішня норма рентабельності першого проекту більша від аналогічного показника другого проекту, і термін окупності першого проекту менший, ніж в другого і т. д., то в такому випадку зробити вибір на користь одного з проектів не складно.

Однак часто бувають випадки, коли, наприклад, перший проект має більшу внутрішню норму рентабельності, ніж другий, але й термін окупності його теж більший. Який з цих проектів кращий, однозначно сказати вже не так просто.

Тому задачу відбору одного з кількох альтернативних інвестиційних проектів можна розглядати як багатокритеріальну, навіть якщо абстрагуватися від технологічних, екологічних, соціальних показників проектів, а розглядати тільки фінансово-часові.

Як було сказано раніше, багатокритеріальні задачі належать до вкрай важкого для ОПР класу, в яких звичні прийоми часто приводять до прийняття неоптимальних, а то й хибних рішень. Тому не випадково, що інтерес до них проявляють дослідники різних розділів науки. Зокрема, психологи досліджують такі основні методи розв’язання багатокритеріальних задач [104]: метод усних протоколів, метод інформаційної дошки, метод фіксації руху очей. Очевидно, кожен з цих вище перерахованих методів може бути застосовний і до задачі відбору альтернативних інвестиційних проектів, особливо, коли часу на розв’язання задачі надто мало. Однак повністю покладатися тільки на ці методи не варто, тим більше, що економістами, математиками розроблено ряд інших підходів, не суто суб’єктивних, а й комбінованих об’єктивно-суб’єктивних, таких як відношення пріоритетності за якістю (ELECTRE), аналітичної ієрархії (AHP), багатокритеріальної теорії вигідності (MAUT), розглянутих раніше. Відомі також і формально об’єктивні підходи, при яких багатокритеріальну задачу зводять до задачі лінійного, динамічного чи стохастичного програмування [38; 62; 121; 123; 159; 160]. Проте процес зведення багатокритеріальної задачі відбору альтернативних інвестиційних проектів до задачі лінійного програмування теж не виключає суб’єктивного моменту, адже на даний час не існує науково обґрунтованого кількісного методу визначення переваг одного критерію над іншим. Тобто неможливо об’єктивно сказати, що, наприклад, критерій чистої зведеної вартості рівно вдвічі важливіший від критерію внутрішньої норми рентабельності. Така оцінка взагалі-то можлива, але знову ж таки як суб’єктивна, а не об’єктивна, як скажімо, оцінка співвідношення діаметра кола до його радіуса. Для різних інвесторів співвідношення між важливостями критеріїв чистої зведеної вартості прибутку і внутрішньої норми рентабельності і терміну окупності проекту можуть бути різними, більше того, навіть в одного інвестора в різних ситуаціях прийняття рішень ці співвідношення можуть змінюватися залежно від цілей, на які спрямована його діяльність.

Застосування вище перелічених підходів (пріоритетності за якістю, аналітичної ієрархії, багатокритеріальної теорії вигідності) теж вимагає від особи, що вирішує задачу відбору проектів, визначеності щодо її особистих переваг одних критеріїв над іншими.

Для розв’язання задачі вибору альтернативного інвестиційного проекту можна використовувати також методи вербального аналізу рішень, які враховують когнітивні (пізнавальні) і поведінкові аспекти поведінки особи, що приймає інвестиційне рішення. Деякі з них, зокрема метод замкнутих процедур біля опорних ситуацій (ЗАПРОС) [76; 104], вимагають знань не лише про переваги потенційного інвестора, а й залучення експертних оцінок. Оскільки робота висококваліфікованих експертів вимагає значних фінансових затрат, то доцільність застосування таких методів повинна визначатися масштабністю проекту. З метою полегшення і здешевлення процесу отримання експертних оцінок розробляють спеціальні комп’ютерні експертні системи баз знань [172].

Крім багатокритеріальності задача відбору інвестиційних проектів має ще один важливий аспект, а саме ризик, невизначеність, оскільки, на відміну від облікових задач, спрямованих на оцінку минулого і теперішнього, інвестиційні проекти спрямовані в майбутнє, і чим воно віддаленіше, тим міра ризику, невизначеності більша.

Як уже зазначалося, ризик може бути зумовлений різними факторами і мати різні прояви і наслідки. Фактори ризику інвестиційних проектів можна класифікувати за різними схемами. Найчастіше при цьому виділяють власне фінансову групу факторів, до якої зокрема належить ризик інфляції, тобто ризик знецінення купівельних можливостей через підвищення рівня цін на товари і послуги. Якщо інвестиційний проект передбачає хоча б часткове вкладення коштів чи споживання майбутньої продукції поза межами держави, то фактором ризику можуть ставати коливання курсів обміну валют, що може призвести до ризику операцій (можливості збитків від здійснення різних видів активних операцій, внаслідок неуважності, халатності або шахрайства службовців банку, які відповідають за проведення цих операцій [74, с. 27]) чи ризику трансляції (можливості валютних збитків при переоцінці валют активів і пасивів у національну валюту [74, с. 30]). Проекти, які передбачають чи закупівлю сировини за кордоном, чи збут продукції за кордон, ризиковані не тільки через можливі суттєві коливання курсів валют, а й через можливість введення обмежувальних квот, змін у митних обмеженнях тощо. Фактори ризику інвестиційних проектів можуть бути соціально-економічні, економіко-політичні, кримінально-економічні, психолого-економічні.

Одні з них, як наприклад, зростання безробіття, зниження купівельно-спроможного попиту, відомі і вивчаються давно, інші, такі як контрафактне виробництво, інші види порушення прав інтелектуальної власності, несанкціонований доступ до електронних грошових потоків (космічних грошових потоків), вплив рекламних акцій на попит, порівняно нові і ще недостатньо досліджені.

Форми прояву ризиків на фінансово-часові показники прослідкуємо на прикладі моделі одноперіодного інвестиційного проекту.

Припустимо, що проект передбачає одноразове вкладення коштів C_0 ($C_0 < 0$) в початковий момент часу $t = 0$, і також разове надходження коштів C_1 ($C_1 > 0$) через деякий термін $t = T$. Очевидним необхідним критерієм прийнятності такого проекту є додатність номінального прибутку:

$$Пр_н = C_1 + C_0 > 0. \tag{3.1}$$

Додатність номінального прибутку еквівалентна додатності номінальної рентабельності

$$R_н = \frac{C_1 + C_0}{-C_0} > 0. \qquad (3.2)$$

Внутрішня норма рентабельності за період часу *T* для цього проекту знаходиться як розв'язок рівняння

$$\frac{C_1}{1 + IRR(T)} + C_0 = 0. \qquad (3.3)$$

Звідси $1 + IRR(T) = -\frac{C_1}{C_0}$;

$$IRR(T) = -\frac{C_1 + C_0}{C_0}. \qquad (3.4)$$

Як бачимо з формул (3.2) і (3.4), для цього проекту номінальна рентабельність дорівнює внутрішній нормі рентабельності за час *T*:

$$R_н = IRR(T). \qquad (3.5)$$

Внутрішня норма рентабельності за одиничний період часу знаходиться як розв'язок рівняння

$$\frac{C_1}{(1 + IRR(1))^T} + C_0 = 0. \qquad (3.6)$$

Звідки

$$IRR(1) = \sqrt[T]{-\frac{C_1}{C_0}} - 1. \qquad (3.7)$$

Якщо відома дисконтна ставка за одиничний період часу $r(1)$, то можна обчислити чисту зведену вартість прибутку інвестиційного проекту

$$NPV = \frac{C_1}{(1 + r(1))^T} + C_0. \qquad (3.8)$$

Для прийнятності проекту потрібно, щоб величина *NPV*, обчислена за формулою (3.8) була додатна:

$$\frac{C_1}{(1 + r(1))^T} + C_0 > 0. \qquad (3.9)$$

Маючи чисту зведену вартість проекту, можна обчислити його чисту рентабельність, яка дорівнює відношенню зведеного прибутку до затрат:

$$R_{зв} = \frac{NPV}{-C_0} = \left(\frac{C_1}{(1+r(1))^T} + C_0 \right) \Big/ (-C_0)\,. \tag{3.10}$$

Зведена (чиста) рентабельність проекту також повинна бути додатною величиною $R_{зв} > 0$:

$$\left(\frac{C_1}{(1+r(1))^T} + C_0 \right) \Big/ (-C_0) > 0\,. \tag{3.11}$$

Легко переконатися, що умови прийнятності проекту (3.9) і (3.11) еквівалентні між собою.

Умову прийнятності проекту формулюють також на основі порівняння внутрішньої норми рентабельності і дисконтної ставки, а саме, якщо внутрішня норма рентабельності менша від дисконтної ставки,

$$IRR(1) < r(1), \tag{3.12}$$

то проект відхиляється, а умовою прийнятності проекту є виконання нерівності, протилежної до (3.12):

$$IRR(1) > r(1), \tag{3.13}$$

Справді, з нерівності (3.13) випливає, що

$$1 + IRR(1) > 1 + r(1);$$

$$(1+IRR(1))^T > (1+r(1))^T;$$

$$\frac{C_1}{(1+IRR(1))^T} < \frac{C_1}{(1+r(1))^T};$$

$$C_0 + \frac{C_1}{(1+IRR(1))^T} = 0 < \frac{C_1}{(1+r(1))^T} + C_0\,,$$

а остання нерівність еквівалентна умові (3.9) додатності чистої зведеної вартості прибутку. За умови (3.9) легко визначається і термін окупності проекту – це час T.

Якщо на проект впливає ризик дисконтної ставки, тобто справжня дисконтна ставка за час T – $r_2(T)$ виявиться більшою від прогнозної

$$r_2(T) > (1+r(1))^T - 1, \tag{3.14}$$

а номінальні фінансово-часові показники проекту залишаться таким як і раніше, то частина характеристик проекту залишиться незмінною, а частина зміниться. Зокрема, не зміниться номінальний прибуток, номінальна рентабельність, внутрішня норма рентабельності, але зменшаться чиста зведена вартість, зведена рентабельність. Якщо при цьому вони залишаться додатними, то проект залишиться окупним з тим же терміном *T*, але якщо чиста зведена вартість виявиться від'ємною

$$NPV_2 = \frac{C_1}{1 + r_2(T)} + C_0 < 0, \tag{3.15}$$

то такий проект стає збитковим за критерієм чистої зведеної вартості чи зведеної рентабельності, залишаючись при цьому номінально рентабельним.

Ризик проекту може проявитися і в зниженні номінальних надходжень через період часу *T* до рівня $C_3 < C_1$. Тоді знизиться і номінальний прибуток, і номінальна рентабельність, і норма внутрішньої рентабельності. Якщо дисконтна ставка при цьому виявиться правильно спрогнозованою, чи меншою від реальної, як це розглядалося у попередньому випадку, то також знизяться і чистий зведений прибуток, і чиста зведена рентабельність проекту, сам же проект може залишитися при цьому окупним з тим же терміном окупності *T*, а може стати збитковим, або тільки за зведеним прибутком, або і за номінальним, якщо $C_3 < -C_0$.

Можлива також ситуація, що реальна дисконтна ставка виявиться нижче від прогнозованої

$$r_3(T) < (1 + r(1))^T - 1, \tag{3.16}$$

якщо, наприклад, вже під час реалізації даного проекту знизиться швидкість інфляції, національний банк знизить облікову ставку чи знизить норми обов'язкового резервування комерційним банком, а ті в свою чергу знизять відсоткові ставки за надання кредитів.

У такому випадку зниження чистої зведеної вартості прибутку буде менш суттєвим, ніж зниження номінального прибутку. Більше того, чистий зведений прибуток може взагалі не знизитися, якщо буде виконуватися рівність

$$\frac{C_3}{1+r_3(T)} = \frac{C_1}{(1+r(1))^T}, \quad (3.17)$$

тобто, якщо фактична дисконтна ставка дорівнюватиме

$$r_3(T) = \frac{C_3(1+r(1))^T}{C_1} - 1. \quad (3.18)$$

Тоді $NPV_3 = \frac{C_1}{(1+r(1))^T} + C_0$.

Очевидно, що при ставці (3.18) не знизиться також і чиста зведена рентабельність проекту: якщо ж фактична дисконтна ставка виявиться ще нижчою, ніж як за формулою (3.18),

$$r_3(T) < \frac{C_3(1+r(1))^T}{C_1} - 1,$$

то чистий зведений прибуток інвестиційного проекту навіть зросте порівняно з прогнозним, не зважаючи на зниження номінального прибутку:

$$NPV_3 = \frac{C_1}{1+r_3(T)} + C_0 > \frac{C_1}{(1+r(1))^T} + C_0.$$

Можлива також ситуація, що заплановане надходження в розмірі C_1 надійде, але через більший від запланованого проміжок часу $T_4 > T$. Зрозуміло, що ні номінальний прибуток, ні номінальна рентабельність проекту від цього не зміняться.

Внутрішня норма рентабельності за період T_4 дорівнюватиме при цьому внутрішній нормі рентабельності за період T для випадку, коли б затримки надходжень не було би:

$$IRR(T_4) = IRR(T) = -\frac{C_1 + C_0}{C_0}. \quad (3.19)$$

Проте в перерахунку на одиничний проміжок часу внутрішня норма рентабельності у випадку затримки отримання коштів знизиться:

$$IRR(1) = \sqrt[T_4]{-\frac{C_1}{C_0}} - 1 < \sqrt[T]{-\frac{C_1}{C_0}} - 1. \quad (3.20)$$

Знизиться також чиста зведена вартість прибутку:

$$NPV_4 = \frac{C_1}{(1+r(1))^{T_4}} + C_0 < \frac{C_1}{(1+r(1))^{T}} + C_0,$$

якщо, звісно дисконтна ставка була визначена правильно.

Зросте також строк окупності проекту з терміну T до T_4.

Ризик проекту може проявитися і в розбитті разового надходження C_1 на кілька дрібніших у різні періоди часу, якщо, наприклад, кошти планувалося отримати з різних джерел. Тоді проект з одноперіодного перетворюється на багатоперіодний:

$$C_0, C_{51}(T_{51}), C_{52}(T_{52}), \ldots, C_{5q}(T_{5q}), \qquad (3.21)$$

де часові моменти T_{51}, T_{52} ,…, T_{5q} впорядковані від найранішого до найпізнішого

$$T_{51} < T_{52} < \ldots < T_{5q}. \qquad (3.22)$$

Для проекту (3.21) також можна обчислити характеристики, причому одні з них і далі знаходяться легко, як, наприклад, номінальний прибуток

$$Пр_{н5} = C_0 + C_{51} + C_{52} + \cdots + C_{5q}, \qquad (3.23)$$

інші – дещо складніше, як, наприклад, внутрішня норма рентабельності, для знаходження якої потрібно розв'язати складне рівняння

$$C_0 + \frac{C_{51}}{(1+IRR(1))^{T_{51}}} + \frac{C_{51}}{(1+IRR(1))^{T_{52}}} + \cdots + \frac{C_{5q}}{(1+IRR(1))^{T_{5q}}} = 0. \qquad (3.24)$$

Отже, як бачимо на прикладі простого одноперіодного інвестиційного проекту, ризик його може мати різні прояви, а сам проект може набувати багатьох різних варіантів. При цьому може змінюватися або частина характеристик проекту або й усі його характеристики.

Якщо б інвестиційні проекти не підлягали ризику, чи вплив ризику був би не значний, яким би можна було знехтувати, то задачу відбору альтернативних проектів можна було б зобразити схемою: нехай нам потрібно розглянути n проектів $П_1$, $П_2$,…, $П_n$, які оцінюються за m критеріями ефективності K_1, K_2,…, K_m; для кожного з проектів $П_i \ (i = \overline{1,n})$ відома його оцінка a_{ij} за будь-яким K_i $(i=\overline{1,m})$ критерієм ефективності. Ці оцінки зручно подати у вигляді двовимірної матриці:

		Критерії			
		K_1	K_2	$\ldots$	K_m
Проекти	$П_1$	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1m}
	$П_2$	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2m}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$П_n$	a_{n1}	a_{n2}	$\ldots$	a_{nm}

(3.25)

Задачу вибору одного чи кількох кращих проектів можна розв’язати одним з вище згаданих способів, зокрема методом багатокритеріальної корисності.

Проте застосовувати ці методи можна лише з певною долею обережності; окремі їх недоліки уже було зазначено раніше, а з аналізу можливих впливів ризику можна зробити висновок ще про один недолік цих методів щодо інвестиційних проектів, а саме: застосовність майже всіх методів розв’язування багатокритеріальних задач базується на припущенні про взаємну незалежність критеріїв, але критерії ефективності проектів навряд чи можна вважати взаємно незалежними, скажімо, не може бути, щоб номінальний прибуток був додатний, а номінальна рентабельність – від’ємною; або така закономірність: при незмінних витратах збільшення чистої зведеної вартості прибутку призводить до збільшення зведеної рентабельності; або таке: при сталих фінансових показниках чим більший термін окупності проекту, тим нижчою стає його внутрішня норма рентабельності за одиничний період часу.

Необхідність врахування ризику ще більше ускладнює і без того непросту задачу відбору інвестиційних проектів. Зобразити їх формально можна, попередньо виділивши s основних економічних ситуацій, які можуть настати і вплинути на показники розглядуваних проектів. Якщо для кожної k-ї ситуації $(k=\overline{1,s})$ для $П_j$-го проекту $(i=\overline{1,n})$ обчислено показник за критерієм $K_j\ (j=\overline{1,m})$, то для цього показника a_{ijk} вже потрібно використовувати три індекси, тобто матриця, на основі якої потрібно прийняти рішення щодо кращого проекту, вже не двовимірна, а тривимірна, яку при наявності засобів стереозображень можна подати у вигляді паралелепіпеда, а для зображення її на папері чи моніторі комп'ютера її можна подати у вигляді s шарів двовимірних матриць виду (3.25)

1-ша економічна ситуація

		Критерії			
		K_1	K_2	…	K_m
Проекти	$П_1$	a_{111}	a_{121}	…	a_{1m1}
	$П_2$	a_{211}	a_{221}	…	a_{2m1}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	$П_n$	a_{n11}	a_{n21}	…	a_{nm1}

2-га економічна ситуація

		Критерії			
		K_1	K_2	…	K_m
Проекти	$П_1$	a_{112}	a_{122}	…	a_{1m2}
	$П_2$	a_{212}	a_{222}	…	a_{2m2}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	$П_n$	a_{n12}	a_{n22}	…	a_{nm2}

…………………………………………………

s-та економічна ситуація

		Критерії			
		K_1	K_2	…	K_m
Проекти	$П_1$	a_{11s}	a_{12s}	…	a_{1ms}
	$П_2$	a_{21s}	a_{22s}	…	a_{2ms}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	$П_n$	a_{n1s}	a_{n2s}	…	a_{nms}

(3.26)

На основі зображення задачі у формі (3.26) можна розглянути наступний підхід до її розв’язання, а саме:

1) розв’язуючи кожну з s задач як багатокритеріальну, впорядковувати проекти за черговістю їх можливого прийняття, тобто в кожній окремій задачі кожному проекту буде визначено місце від 1-го до n-го;
2) остаточний порядок між проектами встановити за сумою місць по кожній економічній ситуації; ця сума може бути звичайною чи з відповідними вагами, якщо, скажімо, відомі ймовірності настання економічних ситуацій.

Застосування такого підходу пов’язане з труднощами розв’язання багатокритеріальних задач.

Можна також розглянути інші способи розшарування тривимірної матриці оцінок на двовимірні, наприклад, за окремими проектами:

Проект $П_1$

		Критерії			
		K_1	K_2	…	K_m
Економічні ситуації	E_1	a_{111}	a_{121}	…	a_{1m1}
	E_2	a_{112}	a_{122}	…	a_{1m2}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	E_s	a_{11s}	a_{12s}	…	a_{1ms}

Проект $П_2$

		Критерії			
		K_1	K_2	…	K_m
Економічні ситуації	E_1	a_{211}	a_{221}	…	a_{2m1}
	E_2	a_{212}	a_{222}	…	a_{2m2}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	E_s	a_{21s}	a_{22s}	…	a_{2ms}

………………………………………………

Проект $П_n$

		Критерії			
		K_1	K_2	…	K_m
Економічні ситуації	E_1	a_{n11}	a_{n21}	…	a_{nm1}
	E_2	a_{n12}	a_{n22}	…	a_{nm2}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	E_s	a_{n1s}	a_{n2s}	…	a_{nms}

(3.27)

Спосіб розшарування (3.27) дає можливість для кожного окремого проекту побачити сукупність всіх його характеристик за різними критеріями у різних варіантах економічних ситуацій. Однак для того, щоб визначити котрі з цих проектів кращі, треба вміти на основі їх матричних оцінок сформувати однозначну числову чи вербальну, а науково-обґрунтованих рекомендацій для вирішення таких задач ще практично не розроблено.

Розглянемо ще один спосіб розшарування тривимірної матриці оцінок проектів на двовимірні, а саме, за окремими критеріями:

Критерій K_1

		Економічні ситуації			
		E_1	E_2	…	E_s
Проекти	$П_1$	a_{111}	a_{112}	…	a_{11s}
	$П_2$	a_{211}	a_{212}	…	a_{21s}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	$П_n$	a_{n11}	a_{n12}	…	a_{n1s}

Критерій K_2

		Економічні ситуації			
		E_1	E_2	…	E_s
Проекти	$П_1$	a_{121}	a_{122}	…	a_{12s}
	$П_2$	a_{221}	a_{222}	…	a_{22s}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	$П_n$	a_{n21}	a_{n22}	…	a_{n2s}

…………………………………………………..

Критерій K_m

		Економічні ситуації			
		E_1	E_2	…	E_s
Проекти	$П_1$	a_{1m1}	a_{1m2}	…	a_{1ms}
	$П_2$	a_{2m1}	a_{2m2}	…	a_{2ms}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	$П_n$	a_{nm1}	a_{nm2}	…	a_{nms}

(3.28)

Кожна з таблиць (3.28) є типовою, дослідженою в роботах [23; 103], ситуацією прийняття управлінських рішень. Але прийняття остаточного рішення знову-таки впирається в суб’єктивне питання порівняльної важливості критеріїв якості інвестиційних проектів.

Оскільки без суб’єктивного фактора в розглядуваній задачі не обійтись, то залучення його можна запропонувати на початковому етапі його розв’язання. Отже,

1. Кожен проект $П_i \ (i = \overline{1,n})$ в кожній економічній ситуації $E_j \ (j = \overline{1,s})$ має свій набір грошових потоків у певні моменти часу

$$C_{ij0},\, C_{ij1}(T_1),\, C_{ij2}(T_2), \ldots,\, C_{ijq_{ij}}(T_{q_{ij}})\,. \tag{3.29}$$

На основі функції вигідності $u(x,\ t)$ особи, що приймає рішення про інвестиційні проекти, кожному з грошово-часових показників можна поставити у відповідність, тобто обчислити, числове значення вигідності:

$$u_{ij} = u\big(C_{ij0},\, C_{ij1}(T_1),\, C_{ij2}(T_2), \ldots,\, C_{ijq_{ij}}(T_{q_{ij}})\big). \tag{3.30}$$

2. Отримані вигідності записати у вигляді таблиці:

Вигідність

		Економічні ситуації			
		E_1	E_2	…	E_s
Проекти	$П_1$	u_{11}	u_{12}	…	u_{1s}
	$П_2$	u_{21}	u_{22}	…	u_{2s}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	$П_n$	u_{n1}	u_{n2}	…	u_{ns}

(3.31)

Задачу (3.31) можна розв’язати на основі одного з відомих критеріїв: Бернуллі-Лапласа, Вальда, Севіджа, Гурвіца, Гурвіца-Севіджа тощо [47; 48; 67; 103; 159].

Якщо відомі ймовірності настання економічних ситуацій $p_j(E_j)\ (j=\overline{1,s})$, де $p_1+p_2+\cdots+p_s=1$, то можна скористатися критерієм Байєса максимуму сподіваного виграшу

$$K_B \Leftrightarrow \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{s} p_j u_{ij} \,. \tag{3.32}$$

Як бачимо, у даному випадку критерій (3.32) збігається з критерієм максимуму сподіваної вигідності.

За відомих ймовірностей $p_j\ (j=\overline{1,s})$ можна також скористатися комбінованими критеріями: Байєса-Севіджа, Ходжеса-Лемана, Гермеєра. Якщо ймовірності настання економічних ситуацій невідомі, але відомі певні обмеження на них, то для їх найправдоподібнішого визначення можна скористатися принципом невизначеності Гібса-Джейнса [22; 103; 104], а потім вже одним з відомих критеріїв, який враховує ці ймовірності.

3.2. Модель розподілу інвестиційних коштів між різнотерміновими вкладами

Нехай власник, фізична чи юридична особа, деякого грошового активу S має намір вкласти цей актив у комерційний банк з метою отримання певного доходу. Припустимо, що власник має можливість вибору між двома видами вкладів: на період T_1 із ставкою доходності r_1 і на період T_2 із ставкою доходності r_2. Для визначеності вважатимемо, що більшому індексу відповідає триваліший період ($T_2 > T_1$) і, відповідно, вищий рівень доходності ($r_2 > r_1$).

Якщо керуватися вигідністю тільки щодо грошового фактору, то, очевидно, вигідніше покласти кошти в банк на триваліший період, щоб отримати більший дохід. Але, якщо враховувати, що вигідність отримання певної суми з часом зменшується, то питання про вибір вигідного варіанту вкладення стає не таким простим і очевидним. Адже цілком можлива ситуація, коли вигідніше вкласти кошти на менший період:

$$u(S(1+r_1),T_1) > u(S(1+r_2),T_2) \qquad (3.33)$$

де $u(x, t)$ – функція вигідності власника активу.

Чи, можливо, певну частину коштів x варто вкласти на період T_1, а решту, $(S - x)$ – на період T_2. При цьому вигідність такого вкладення може виявитися вищою, ніж вкладення тільки в один з видів активу:

$$\begin{cases} u(x(1+r_1),T_1;(S-x)(1+r_2),T_2) > u(S(1+r_1),T_1) \\ u(x(1+r_1),T_1;(S-x)(1+r_2),T_2) > u(S(1+r_2),T_2). \end{cases} \qquad (3.34)$$

У такому разі доцільно максимізувати вигідність вкладення

$$u(x(1+r_1),T_1;(S-x)(1+r_2),T_2) \to \max. \qquad (3.35)$$

При вирішенні ділових питань не можна бути ні надто обережним, оскільки через це можна втрати свою вигоду, ні надто сміливим, бо це може привести до банкрутства. Тому при прийнятті ділових рішень науковці рекомендують користуватися нейтральною стратегію прийняття рішень і відповідною їй лінійною функцією вигідності. Саме на лінійну функцію вигідності в основному опираються рішення задач оптимального вибору в умовах ризику і невизначеності.

Тому дослідимо спочатку випадок нейтрального ставлення до фінансового і часового ризику власника активу. Як було показано раніше, функція вигідності ОПР для часового проміжку $[0;\ T]$ має вигляд (2.45), відповідно для часового проміжку $[T_1;\ T_2]$ виглядатиме так:

$$u(x,t) = \frac{(1-u_1)(x-a)}{b-a} + u_1\left(1 - \frac{t-T_1}{T_2-T_1}\right), \qquad (3.36)$$

якщо при цьому фінансовий (x) і часовий (t) фактори адитивно незалежні. Область допустимих значень (ОДЗ) функції (3.36) є прямокутником, який отримується в результаті декартового добутку грошового проміжку $[a;\ b]$ на часовий $[T_1;\ T_2]$:

$$\text{ОДЗ} = [a;b]\times[T_1;T_2]. \tag{3.37}$$

Безпосередньою підстановкою переконуємося, що функція (3.36) задовольняє рівність

$$u(a,T_1) = u_1. \tag{3.38}$$

Для даної конкретної постановки задачі можна вибрати значення мінімального допустимого грошового показника

$$a = S(1+r_1), \tag{3.39}$$

а максимальне значення

$$b = S(1+r_2). \tag{3.40}$$

Однак, рівності (3.39) і (3.40), взагалі кажучи, не обов’язкові, достатньо, щоби виконувалася система нерівностей

$$\begin{cases} 0 < a \le S(1+r_1); \\ b \ge S(1+r_2). \end{cases} \tag{3.41}$$

Функція вигідності (3.36) дає змогу порівнювати прості альтернативи: отримання певної суми x_1 в момент часу t_1 з сумою x_2 в момент часу t_2. Однак функція (3.36) не дає можливості порівнювати складні альтернативи з простими. Наприклад, як порівняти складну альтернативу:

1) отримати суму x_1 в момент часу t_1 і x_2 в момент часу t_2;

з простішими:

2) отримати кошти x_3 в момент часу t_1, якщо $x_3 < x_1 + x_2$ і $t_1 < t_2$;

3) отримати суму x_4 в момент часу $t_2 > t_1$ і $x_4 > x_1 + x_2$;

4) отримати суму $x_5 = x_1 + x_2$ в момент часу t_3, якщо $t_1 < t_3 < t_2$.

Тим більше, функція вигідності (3.36) від двох змінних не дає можливості порівнювати між собою складні (комбіновані) альтернативи.

Отже, крім функції вигідності (3.36) для розв’язання задачі (3.35) потрібно побудувати функцію вигідності від чотирьох аргументів

$$u(x_1,t_1;x_2,t_2), \tag{3.42}$$

яка б була підпорядкована функції (3.36), і давала б змогу порівнювати складні альтернативи.

Обговоримо тепер властивості функції (3.42). Обидва її часові аргументи повинні належати цьому ж часовому проміжку, що і часовий аргумент функції (3.36):

$$\begin{cases} T_1 \le t_1 \le T_2; \\ T_1 \le t_2 \le T_2. \end{cases} \tag{3.43}$$

Фінансові аргументи повинні бути невід’ємні:

$$\begin{cases} x_1 \ge 0; \\ x_2 \ge 0, \end{cases} \tag{3.44}$$

а їх сума повинна належати тому ж грошовому проміжку, на якому визначена функція (3.36)

$$a \le x_1 + x_2 \le b. \tag{3.45}$$

Якщо часові аргументи функції (3.42) рівні між собою: $t_1 = t_2$, то повинна виконуватись рівність

$$u(x_1, t_1; x_2, t_1) = u(x_1 + x_2, t_1), \tag{3.46}$$

тобто вигідність отримання коштів x_1 в момент часу t_1 і коштів x_2 в цей же момент часу t_1 дорівнює вигідності отримання суми ($x_1 + x_2$) в момент часу t_1.

Якщо часові аргументи функції (3.42) не рівні між собою, наприклад, $t_1 < t_2$, то повинна виконуватись така подвійна нерівність

$$u(x_1 + x_2, t_2) \le u(x_1, t_1; x_2, t_2) \le u(x_1 + x_2, t_1). \tag{3.47}$$

Нерівність (3.47) означає, що отримати кошти x_1 в момент t_1 і кошти x_2 в момент t_2 вигідніше, ніж отримати їх суму ($x_1 + x_2$) в пізніший момент часу t_2 і менш вигідно, ніж отримати цю ж суму ($x_1 + x_2$) раніше – в момент t_1.

При цьому знак рівності у формулі (3.47) можливий лише у випадку рівності нулеві одного з грошових аргументів функції (3.42). Зокрема, якщо $x_1 = 0$, то формула (3.47) запишеться у вигляді

$$u(x_2, t_2) = u(0, t_1; x_2, t_2) < u(x_2, t_1). \tag{3.48}$$

Якщо рівний нулеві другий грошовий аргумент: $x_2 = 0$, то формула (3.47) набирає вигляду

$$u(x_1,t_2) < u(x_1,t_1;0,t_2) = u(x_1,t_1). \tag{3.49}$$

У випадку, коли обидва грошові аргументи функції (3.42) відмінні від нуля ($x_1 > 0$, $x_2 > 0$), нерівність (3.47) стає строгою

$$u(x_1+x_2,t_2) < u(x_1,t_1;x_2,t_2) < u(x_1+x_2,t_1). \tag{3.50}$$

Нерівність (3.50) означає, що повинен існувати момент часу t_3 між t_1 та t_2 ($t_1 < t_3 < t_2$) такий, що виконується рівність

$$u(x_1,t_1;x_2,t_2) = u(x_1+x_2,t_3). \tag{3.51}$$

Рівність (3.51) означає, що складна альтернатива отримання грошової величини x_1 в момент часу t_1 і грошової величини x_2 в момент часу t_2 рівна за вигідністю простій альтернативі отримання суми коштів ($x_1 + x_2$) в деякий проміжний час t_3.

З урахуванням формули (3.36) рівність (3.51) записується у вигляді

$$u(x_1,t_1;x_2,t_2) = \frac{(1-u_1)(x_1+x_2-a)}{b-a} + u_1\left(1-\frac{t_3-T_1}{T_2-T_1}\right), \tag{3.52}$$

де $t_3 = t_3(x_1,t_1;x_2,t_2)$ – деяка функція від двох грошових і двох часових аргументів, причому область визначення цієї функції така ж, як і в усієї функції (3.42):

$$T_1 \le t_1 \le T_2; \quad T_1 \le t_2 \le T_2; \quad x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0; \quad a \le x_1 + x_2 \le b. \tag{3.53}$$

Грошову частину області визначення можна зобразити графічно у вигляді рівнобедреної трапеції (рис. 3.1).

Властивості функції $t_3 = t_3(x_1,t_1;x_2,t_2)$ отримуються на основі формул (3.46), (3.48), (3.49). Отже, на основі формули (3.46) отримуємо

$$t_3(x_1,t_1;x_2,t_1) = t_1. \tag{3.54}$$

З формули (3.48) випливає, що

$$t_3(0,t_1;x_2,t_2) = t_2, \tag{3.55}$$

а на основі формули (3.49) знаходимо

$$t_3(x_1,t_1;0,t_2)=t_1. \tag{3.56}$$

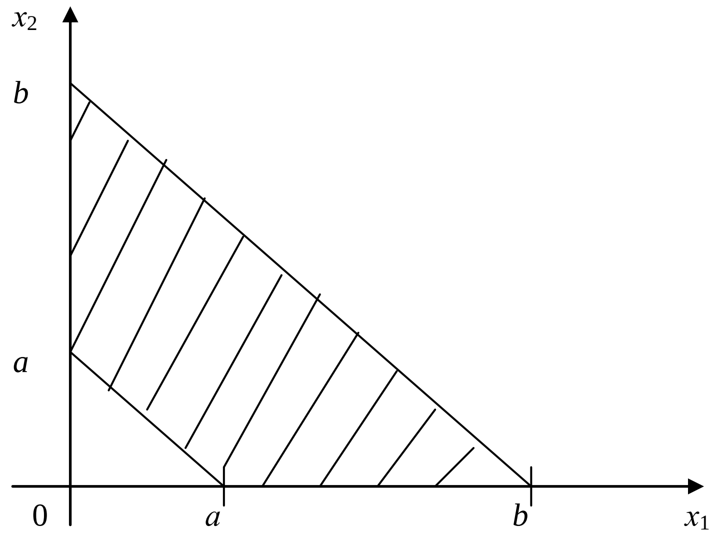


Рис. 3.1. Грошова частина області допустимих значень функції (3.42) і функції t_3.

Функцій, які задовольняють умови (3.54) – (3.56), існує багато. Найпростіша з них має вигляд

$$t_3=\frac{x_1}{x_1+x_2}t_1+\frac{x_2}{x_1+x_2}t_2. \tag{3.57}$$

Підставивши значення (3.57) у формулу (3.52), отримаємо

$$u(x_1,t_1;x_2,t_2)=\frac{(1-u_1)(x_1+x_2-a)}{b-a}+u_1\left(1-\frac{\frac{x_1}{x_1+x_2}t_1+\frac{x_2}{x_1+x_2}t_2-T_1}{T_2-T_1}\right). \tag{3.58}$$

Перевіримо, чи задовольняє функція (3.58) властивості (3.46), (3.48) і (3.49).

Якщо часові аргументи функції (3.58) збігаються ($t_1 = t_2$), то

$$u(x_1,t_1;x_2,t_2)=u(x_1,t_1;x_2,t_1)=$$

$$=\frac{(1-u_1)(x_1+x_2-a)}{b-a}+u_1\left(1-\frac{\frac{x_1}{x_1+x_2}t_1+\frac{x_2}{x_1+x_2}t_1-T_1}{T_2-T_1}\right)=$$

$$= \frac{(1-u_1)(x_1+x_2-a)}{b-a} + u_1\left(1-\frac{t_1-T_1}{T_2-T_1}\right) = u(x_1+x_2,t_1),$$

тобто рівність (3.46) виконується.

Підставимо тепер у функцію (3.58) значення $x_1 = 0$:

$$u(x_1,t_1;x_2,t_2) = u(0,t_1;x_2,t_2) = \frac{(1-u_1)(x_2-a)}{b-a} + u_1\left(1-\frac{t_2-T_1}{T_2-T_1}\right) =$$

$$= u(x_2,t_2) < \frac{(1-u_1)(x_2-a)}{b-a} + u_1\left(1-\frac{t_1-T_1}{T_2-T_1}\right) = u(x_2,t_1),$$

якщо $t_1 < t_2$.

Отже, умова (3.48) для функції (3.58) виконується. Аналогічно перевіряється і виконання умови (3.49).

Підставимо тепер у функцію (3.58) значення, які випливають з постановки задачі про розподіл коштів між різнотерміновими видами вкладів:

$$\begin{gathered} x_1 = x(1+r_1); \quad t_1 = T_1; \\ x_2 = (S-x)(1+r_2); \quad t_2 = T_2. \end{gathered} \tag{3.59}$$

У результаті отримаємо

$$u(x(1+r_1),T_1;(S-x)(1+r_2),T_2) = \frac{(1-u_1)(x(1+r_1)+(S-x)(1+r_2)-a)}{b-a} +$$
$$+u_1\left[1-\frac{1}{T_2-T_1}\left(\frac{x(1+r_1)T_1+(S-x)(1+r_2)T_2}{x(1+r_1)+(S-x)(1+r_2)}-T_1\right)\right]$$

або після спрощення

$$\begin{aligned} u(x(1+r_1),T_1;(S-x)(1+r_2),T_2) = \frac{(1-u_1)(x(1+r_1)+(S-x)(1+r_2)-a)}{b-a} + \\ +u_1\frac{x(1+r_1)}{x(1+r_1)+(S-x)(1+r_2)}. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Отже, функція (3.60) є нелінійною на проміжку $0 \le x \le S$ і дає можливість порівняти вигідності різних можливих варіантів вкладень: чи повністю на триваліший термін (x = 0), чи повністю на коротший термін (x = S), чи комбінованого вкладення $0 < x < S$.

Знайдемо спочатку значення функції (3.60) у крайніх точках її області допустимих значень.

Якщо $x = 0$, то

$$u(0,T_1,S(1+r_2),T_2) = \frac{(1-u_1)(S(1+r_2)-a)}{b-a}. \tag{3.61}$$

При $x = S$

$$u(S(1+r_1),T_1,0,T_2) = \frac{(1-u_1)(S(1+r_1)-a)}{b-a} + u_1. \tag{3.62}$$

Дослідимо, за якої умови альтернативи $x = 0$ і $x = S$ рівні за вигідністю. Для цього прирівняємо праві частини функцій (3.61) і (3.62):

$$\frac{(1-u_1)(S(1+r_2)-a)}{b-a} = \frac{(1-u_1)(S(1+r_1)-a)}{b-a} + u_1;$$

$$(1-u_1)(S(1+r_2)-a) = (1-u_1)(S(1+r_1)-a) + u_1(b-a);$$

$$(1-u_1)S(r_2-r_1) = u_1(b-a);$$

$$u_1 = \frac{S(r_2-r_1)}{S(r_2-r_1)+b-a}. \tag{3.63}$$

Зокрема, якщо $a = S(1+r_1)$, $b = S(1+r_2)$, то формула (3.63) дає значення $u_1 = 1/2$. Якщо $u_1 > 1/2$, то вигідніша альтернатива $x = S$, а якщо $u_1 < 1/2$, то вигідніше покласти гроші на коротший термін.

Щоб дослідити зміну вигідності (3.60) всередині проміжку (0; S), обчислимо її похідну:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(1-u_1)(r_1-r_2)}{b-a} - \frac{u_1}{T_2-T_1}\big[((1+r_1)T_1-(1+r_2)T_2)(x(1+r_1)+(S-x)(1+r_2)) -$$
$$-(x(1+r_1)T_1+(S-x)(1+r_2)T_2)(r_1-r_2)\big]/(x(1+r_1)+(S-x)(1+r_2))^2.$$

(3.64)

Формула (3.64) виражає швидкість зміни вигідності загального вкладення грошей від розміру їх вкладу на коротший термін. Розмірність величини (3.64) виражається в одиницях, обернених до грошових (1/г.о.).

Для того щоб знайти точки екстремуму вигідності (3.60), тобто точки максимальної і мінімальної вигідності, прирівняємо похідну (3.64) до нуля:

$$\frac{(1-u_1)(r_1-r_2)}{b-a}-\frac{u_1}{T_2-T_1}\left[((1+r_1)T_1-(1+r_2)T_2)(x(1+r_1)+(S-x)(1+r_2))-\right.$$
$$\left.-(x(1+r_1)T_1+(S-x)(1+r_2)T_2)(r_1-r_2)\right]/(x(1+r_1)+(S-x)(1+r_2))^2=0.$$

(3.65)

Розв'яжемо рівняння (3.65) попередньо звівши його до еквівалентного квадратного рівняння тобто домноживши його на додатну величину $(x(1+r_1)+(S-x)(1+r_2))^2$.

$$\frac{(1-u_1)(r_1-r_2)}{b-a}(x(1+r_1)+(S-x)(1+r_2))^2-\frac{u_1}{T_2-T_1}\left[((1+r_1)T_1-(1+r_2)T_2)\times\right.$$
$$\left.\times(x(1+r_1)+(S-x)(1+r_2))-(x(1+r_1)T_1+(S-x)(1+r_2)T_2)(r_1-r_2)\right]=0.$$

(3.66)

Звівши подібні доданки в рівнянні (3.66), його можна записати в стандартній формі

$$C_0x^2+C_1x+C_2=0, \tag{3.67}$$

де

$$C_0=\frac{(1-u_1)(r_1-r_2)^3}{b-a}; \tag{3.68}$$

$$C_1=\frac{2(1-u_1)(r_1-r_2)^2}{b-a}S(1+r_2)-\frac{u_1}{T_2-T_1}\left[((1+r_1)T_1-(1+r_2)T_2)(r_1-r_2)+(r_1-r_2)\times\right.$$
$$\left.\times((1+r_1)T_1-(1+r_2)T_2)\right],$$

або, після спрощення

$$C_1=\frac{2(1-u_1)(r_1-r_2)^2}{b-a}S(1+r_2); \tag{3.69}$$

$$C_2=\frac{(1-u_1)(r_1-r_2)}{b-a}S^2(1+r_2)^2-\frac{u_1}{T_2-T_1}\left[((1+r_1)T_1-(1+r_2)T_2)S(1+r_2)+\right.$$
$$\left.+(r_1-r_2)S(1+r_2)T_2\right];$$

$$C_2=\frac{(1-u_1)(r_1-r_2)}{b-a}S^2(1+r_2)^2+u_1S(1+r_1)(1+r_2). \tag{3.70}$$

Зокрема, якщо $a = S(1+r_1),\ b = S(1+r_2)$, то формули (3.68)-(3.70) перетворюються відповідно у наступні

$$C_0 = -\frac{(1-u_1)(r_2-r_1)^2}{S}; \tag{3.71}$$

$$C_1 = 2(1-u_1)(r_2-r_1)(1+r_2); \tag{3.72}$$

$$C_2 = S[u_1(1+r_1)(1+r_2)-(1-u_1)(1+r_2)^2]$$

$$C_2 = S(1+r_2)(u_1(1+r_1)-(1-u_1)(1+r_2)). \tag{3.73}$$

З формул (3.68) і (3.71) випливає, що за умови розглядуваної задачі коефіцієнт C_0 може бути тільки від'ємний

$$C_0 < 0, \tag{3.74}$$

на основі формул (3.69) і (3.72) коефіцієнт C_1 постійно додатний

$$C_1 > 0, \tag{3.75}$$

а знак коефіцієнта C_2, як видно з формули (3.73), залежить від співвідношення між ставками доходності r_1 і r_2 та параметром u_1. Отже, якщо виконується співвідношення

$$\frac{u_1}{1-u_1} = \frac{1+r_2}{1+r_1}, \tag{3.76}$$

то коефіцієнт C_2 рівний нулеві, і рівняння (3.67) є неповне. З урахуванням формул (3.71) і (3.72) рівняння (3.67) має вигляд

$$-\frac{(1-u_1)(r_2-r_1)^2}{S}x^2 + 2(1-u_1)(r_2-r_1)(1+r_2)x = 0$$

або, після спрощення

$$(r_2-r_1)x^2 - 2S(1+r_2)x = 0. \tag{3.77}$$

Рівняння (3.77) має два дійсні корені:

$$x_1 = 0; \tag{3.78}$$

$$x_2 = \frac{2S(1+r_2)}{r_2-r_1}. \tag{3.79}$$

Розв'язок (3.78) належить області допустимих значень функції (3.60) ($0 = x_1 < S$), а розв'язок (3.79) не належить цій області, бо

$$x_2 = \frac{2S(1+r_2)}{r_2 - r_1} > S\,.$$

Отже, за умови (3.76) вигідність (3.60) має в своїй області допустимих значень одну точку екстремуму, яка знаходиться в крайній лівій точці цієї області.

Неважко переконатися, що ця точка екстремуму є точкою мінімуму функції (3.60). Справді, ліва частина рівняння (3.67) при переході через точку $x = 0$ змінює свій знак з мінуса на плюс, а, отже, і похідна (3.64) функції (3.60) теж при переході через цю точку змінює свій знак з мінуса на плюс, а це і є ознакою мінімуму функції (3.60). Таким чином, за умови (3.76) вигідність (3.60) монотонно зростає при зростанні частки вкладу x від 0 до S, тобто свого найбільшого значення вигідність набуває саме при $x = S$. Тобто власник активу в цьому випадку вибирає саме короткотерміновий вид вкладу, повністю відмовляючись при цьому від довготермінового, незважаючи на можливу суттєво вищу відсоткову ставку більш тривалого виду вкладу.

Дослідимо тепер випадок, коли замість рівності (3.76) виконується нерівність

$$\frac{u_1}{1-u_1} > \frac{1+r_2}{1+r_1}\,. \tag{3.80}$$

За умови (3.80) вільний член C_2 рівняння (3.67) додатний ($C_2 > 0$). Оскільки коефіцієнт C_0 при цьому від'ємний, а C_1 додатний, то згідно теореми Вієта це означає, що рівняння (3.67) має два дійсні корені, причому один з них від'ємний, а другий додатний

$$x_1 = \frac{-C_1 + \sqrt{C_1^2 - 4C_0C_2}}{2C_0} < 0;$$

$$x_2 = \frac{-C_1 - \sqrt{C_1^2 - 4C_0C_2}}{2C_0} > 0\,. \tag{3.81}$$

Зрозуміло, що від'ємний корінь x_1 не задовольняє умову досліджуваної задачі. Легко переконатися, що корінь x_2 також не належить області допустимих значень вигідності (3.60). Справді,

$$x_2 = \frac{-2(1-u_1)(r_2-r_1)(1+r_2)-\sqrt{C_1^2-4C_0C_2}}{-2(1-u_1)(r_2-r_1)^2/S} > \frac{S(1+r_2)}{r_2-r_1} > S.$$

Отже, за умови (3.80) похідна (3.64) на проміжку [0; S] постійно додатна, а, отже, вигідність (3.60) зростає. Отже, власник грошового активу за умови (3.80), прийме те саме рішення, що і за умови (3.76), тобто всю суму S йому доцільно покласти на рахунок з меншим терміном повернення.

Дослідимо тепер випадок, коли виконується нерівність, протилежна до (3.80)

$$\frac{u_1}{1-u_1} < \frac{1+r_2}{1+r_1}. \tag{3.82}$$

За умови (3.82) кількість дійсних різних коренів рівняння (3.67) залежить від знаку його дискримінанта. Обчислимо його

$$\frac{D}{4} = (1-u_1)^2(r_2-r_1)^2(1+r_2)^2 + (1-u_1)(r_2-r_1)^2(1+r_2)(u_1(1+r_1)-(1-u_1)(1+r_2));$$

$$\frac{D}{4} = (1-u_1)(r_2-r_1)^2(1+r_2)(1+r_1)u_1 > 0. \tag{3.83}$$

Отже, рівняння (3.67) за умови (3.82) має два дійсні додатні розв'язки

$$x_{1,2} = S\frac{(1-u_1)(r_2-r_1)(1+r_2)\mp(r_2-r_1)\sqrt{(1-u_1)(1+r_2)(1+r_1)u_1}}{(1-u_1)(r_2-r_1)^2}$$

або після спрощення,

$$x_1 = S\frac{1+r_2-\sqrt{(1+r_2)(1+r_1)u_1/(1-u_1)}}{r_2-r_1} \tag{3.84}$$

і

$$x_2 = S\frac{1+r_2+\sqrt{(1+r_2)(1+r_1)u_1/(1-u_1)}}{r_2-r_1}. \tag{3.85}$$

Очевидно, що розв'язок (3.85) більший, ніж S, отже, не входить в область визначення функції (3.60). Розв'язок x_1, що виражається формулою

(3.84), за умови $0 < x_1 < S$ виражає найменш вигідний варіант розподілу коштів між різнотерміновими вкладами. Яку альтернативу тоді потрібно вибрати, чи короткотерміновий вклад, чи повністю довготерміновий, потрібно відповідно до того, яке з значень більше, чи $u(S(1+r_1),T_1)$, чи $u(S(1+r_2),T_2)$.

Вибір між різнотерміновими вкладами для ОПР з функцією вигідності (3.36) наведено у додатку Б (табл. Б.1), а реалізацію даної ситуації засобами електронних таблиць у таблиці Б.2.

Розглянемо тепер випадок нейтрального ставлення до часового ризику і постійної міри несхильності до грошового ризику власника активу. Функція вигідності, як було показано в п. 2.1, має вигляд (2.28) для часового проміжку $[T\,; 0]$, а для проміжку $[T_1; T_2]$ виглядатиме так:

$$u(x,t) = \frac{(1-u_1)(e^{-kx} - e^{-ka})}{e^{-kb} - e^{-ka}} + u_1\left(1 - \frac{t - T_1}{T_2 - T_1}\right), \tag{3.86}$$

якщо при цьому фактори x і t адитивно незалежні.

З міркувань, які зроблені вище, нам необхідно побудувати функцію вигідності від 4-х аргументів виду (3.42), яка повинна мати властивості (3.43)-(3.51). Властивість (3.51) означає рівність вигідностей складної альтернативи: отримання грошової величини x_1 в момент часу t_1 і грошової величини x_2 в момент часу t_2; та простої альтернативи: отримання суми коштів $(x_1 + x_2)$ в деякий проміжний час t_3. Тоді з врахуванням (3.86) рівність (3.51) запишеться у вигляді:

$$u(x_1,t_1,x_2,t_2) = u(x_1 + x_2, t_3) = \frac{(1-u_1)(e^{-kx} - e^{-ka})}{e^{-kb} - e^{-ka}} + u_1\left(1 - \frac{t_3 - T_1}{T_2 - T_1}\right), \tag{3.87}$$

де t_3 – функція від 4-х аргументів (2-х грошових і 2-х часових) з областю визначення (3.53).

Функція $t_3(x_1,\ t_1,\ x_2,\ t_2)$ також володіє властивостями (3.54)-(3.56). Однією з функцій, яка задовольняє умови (3.54)-(3.56) є така:

$$t_3 = \frac{e^{-kx_1} - 1}{e^{-kx_1} + e^{-kx_2} - 2} t_1 + \frac{e^{-kx_2} - 1}{e^{-kx_1} + e^{-kx_2} - 2} t_2 . \qquad (3.88)$$

Підставимо значення (3.88) у функцію вигідності (3.87), при цьому отримаємо:

$$u(x_1, t_1, x_2, t_2) = \frac{(1 - u_1)(e^{-k(x_1 + x_2)} - e^{-ka})}{e^{-kb} - e^{-ka}} +$$
$$+ u_1 \left(1 - \frac{1}{T_2 - T_1} \left(\frac{e^{-kx_1} - 1}{e^{-kx_1} + e^{-kx_2} - 2} t_1 + \frac{e^{-kx_2} - 1}{e^{-kx_1} + e^{-kx_2} - 2} t_2 - T_1 \right) \right). \qquad (3.89)$$

Перевіримо, чи задовольняє функція (3.89) властивостям (3.46), (3.48) і (3.49).

Якщо часові аргументи функції вигідності (3.89) збігаються, тобто $t_1 = t_2$, то

$$u(x_1, t_1, x_2, t_1) = \frac{(1 - u_1)(e^{-k(x_1 + x_2)} - e^{-ka})}{e^{-kb} - e^{-ka}} + u_1 \left(1 - \frac{t_1 - T_1}{T_2 - T_1} \right) = u(x_1 + x_2, t_1),$$

отже рівність (3.46) виконується.

Підставимо тепер і функцію (3.89) значення $x_1 = 0$:

$$u(0, t_1, x_2, t_1) = \frac{(1 - u_1)(e^{-kx_2} - e^{-ka})}{e^{-kb} - e^{-ka}} + u_1 \left(1 - \frac{t_2 - T_1}{T_2 - T_1} \right) = u(x_2, t_2) <$$
$$< \frac{(1 - u_1)(e^{-kx_2} - e^{-ka})}{e^{-kb} - e^{-ka}} + u_1 \left(1 - \frac{t_1 - T_1}{T_2 - T_1} \right) = u(x_2, t_1),$$

якщо $t_1 < t_2$. Отже умова (3.48) для функції вигідності (3.89) також виконується. Аналогічно перевіряється і виконання для цієї ж функції умови (3.49).

Підставимо тепер (як і у випадку функції вигідності ОПР нейтральної за обома видами ризиків) у функцію (3.89) значення, які випливають з постановки задачі про розподіл коштів між різнотерміновими видами вкладів (3.59), а саме

$$x_1 = x(1 + r_1); \quad t_1 = T_1;$$
$$x_2 = (S - x)(1 + r_2); \quad t_2 = T_2.$$

Внаслідок чого отримаємо

$$u(x(1+r_1),T_1,(S-x)(1+r_2),T_2)=\frac{(1-u_1)(e^{-k(x(1+r_1)+(S-x)(1+r_2))}-e^{-ka})}{e^{-kb}-e^{-ka}}+u_1\times$$
$$\times\left(1-\frac{1}{T_2-T_1}\left(\frac{e^{-kx(1+r_1)}-1}{e^{-kx(1+r_1)}+e^{-k(S-x)(1+r_2)}-2}T_1+\frac{e^{-k(S-x)(1+r_2)}-1}{e^{-kx(1+r_1)}+e^{-k(S-x)(1+r_2)}-2}T_2-T_1\right)\right).$$

або після спрощення

$$u(x(1+r_1),T_1,(S-x)(1+r_2),T_2)=\frac{(1-u_1)(e^{-k(x(1+r_1)+(S-x)(1+r_2))}-e^{-ka})}{e^{-kb}-e^{-ka}}+$$
$$+u_1\frac{e^{-kx(1+r_1)}-1}{e^{-kx(1+r_1)}+e^{-k(S-x)(1+r_2)}-2}. \quad (3.90)$$

Функція (3.90) є нелінійною на проміжку [0; S] і дає можливість порівняти вигідності різних можливих варіантів вкладень: чи повністю на тривалий термін (x = 0), чи повністю на короткий термін ($x = S$), чи комбінованого вкладення ($0 < x < S$).

Знайдемо спочатку значення функції вигідності (3.90) у крайніх точках проміжку [0; S] – області допустимих значень цієї функції.

Якщо $x = 0$, то

$$u(0,T_1,S(1+r_2),T_2)=\frac{(1-u_1)(e^{-kS(1+r_2)}-e^{-ka})}{e^{-kb}-e^{-ka}}. \quad (3.91)$$

Якщо $x = S$, то

$$u(S(1+r_1),T_1,0,T_2)=\frac{(1-u_1)(e^{-kS(1+r_1)}-e^{-ka})}{e^{-kb}-e^{-ka}}+u_1. \quad (3.92)$$

Вияснимо, за якої умови альтернативи $x = 0$ і $x = S$ рівні між собою. Для цього прирівняємо праві частини рівностей (3.91) і (3.92):

$$\frac{(1-u_1)(e^{-kS(1+r_2)}-e^{-ka})}{e^{-kb}-e^{-ka}}=\frac{(1-u_1)(e^{-kS(1+r_1)}-e^{-ka})}{e^{-kb}-e^{-ka}}+u_1;$$
$$(1-u_1)(e^{-kS(1+r_2)}-e^{-ka})=(1-u_1)(e^{-kS(1+r_1)}-e^{-ka})+u_1(e^{-kb}-e^{-ka});$$
$$(1-u_1)(e^{-kS(1+r_2)}-e^{-kS(1+r_1)})=u_1(e^{-kb}-e^{-ka});$$
$$u_1=\frac{e^{-kS(1+r_2)}-e^{-kS(1+r_1)}}{e^{-kS(1+r_2)}-e^{-kS(1+r_1)}+e^{-kb}-e^{-ka}}. \quad (3.93)$$

Якщо виконуються рівності (3.39) і (3.40), тобто $a = S(1 + r_1)$, $b = S(1 + r_2)$, то формула (3.93) дає значення $u_1 = 1/2$.

Дослідимо зміну вигідності (3.90) всередині проміжку $0 < x < S$. Для цього обчислимо похідну функції (3.90) за змінною x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{k(1-u_1)(r_2 - r_1)}{e^{-kb} - e^{-ka}} e^{-k(x(1+r_1)+(S-x)(1+r_2))} - \frac{ku_1}{(e^{-kx(1+r_1)} + e^{-k(S-x)(1+r_2)} - 2)^2} \times$$
$$\times ((r_2 + r_1 + 2)e^{-k(x(1+r_1)+(S-x)(1+r_2))} - (1+r_1)e^{-kx(1+r_1)} - (1+r_2)e^{-k(S-x)(1+r_2)}. \tag{3.94}$$

Прирівняємо похідну (3.94) до нуля:

$$\frac{k(1-u_1)(r_2 - r_1)}{e^{-kb} - e^{-ka}} e^{-k(x(1+r_1)+(S-x)(1+r_2))} - \frac{ku_1}{(e^{-kx(1+r_1)} + e^{-k(S-x)(1+r_2)} - 2)^2} \times$$
$$\times ((r_2 + r_1 + 2)e^{-k(x(1+r_1)+(S-x)(1+r_2))} - (1+r_1)e^{-kx(1+r_1)} - (1+r_2)e^{-k(S-x)(1+r_2)} = 0$$

і розв’яжемо отримане рівняння для того, щоб знайти точки екстремуму функції (3.90). Поділимо отримане рівняння на $k \neq 0$ і домножимо на додатну величину $(e^{-kx(1+r_1)} + e^{-k(S-x)(1+r_2)} - 2)^2$:

$$\frac{(1-u_1)(r_2 - r_1)}{e^{-kb} - e^{-ka}} e^{-k(x(1+r_1)+(S-x)(1+r_2))} (e^{-kx(1+r_1)} + e^{-k(S-x)(1+r_2)} - 2)^2 +$$
$$+ u_1(1+r_1)e^{-kx(1+r_1)} + u_1(1+r_2)e^{-k(S-x)(1+r_2)} - u_1(r_2 + r_1 + 2)e^{-k(x(1+r_1)+(S-x)(1+r_2))} = 0. \tag{3.95}$$

Рівняння (3.95) є трансцендентним і в явному вигляді не розв’язується. Однак, використовуючи обчислювальну техніку, зокрема засоби MS Excel, його можна розв’язати наближено, вмонтованими у MS Excel підпрограмами з меню СЕРВИС (TOOLS): “Подбор параметров… “ (Gold Seek…) або “Поиск решения…” (Solver…).

Засобами MS Excel знайдено корінь рівняння за формулою (3.95) для ОПР схильної до ризику ($k < 0$) і для несхильності до ризику ($k > 0$) (див. табл. 3.1., реалізація обчислень засобами MS Excel наведена у додатку Б, табл. Б. 3).

Таблиця 3.1.

Знаходження частки вкладу для короткотермінового періоду

Параметр	Назва параметра	Ставлення ОПР до фінансового ризику	
		Схильність	**Несхильність**
k	Міра несхильності ОПР до ризику	0,00025	-0,00021
r1	Ставка доходності для короткотермінового вкладу	0,2	0,2
r2	Ставка доходності для довготермінового вкладу	0,28	0,28
u1	Значення функції вигідності у точці (a,T1)	0,6	0,6
S	Величина грошового активу (тис.грн.)	100000	100000
a	Мінімальне значення грошового показника (тис.грн.)	120000	120000
b	Максимальне значення грошового показника (тис.грн.)	128000	128000
x	Частка грошового вкладу на період Т1 (тис.грн.)	11244,63	43290,29
S-x	Частка грошового вкладу на період Т2 (тис.грн.)	88755,37	56709,71
	Друга похідна	-4,98E+08	-7,80E-04

Перевіримо, чи знайдені корені є точками максимуму для функції (3.90). Для цього знайдемо другу похідну цієї функції за змінною x:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{(1-u_1)(r_2-r_1)}{e^{-kb}-e^{-ka}}(-2k(1+r_1)e^{-2kx(1+r_1)} + 2k(1+r_2)e^{-2k(S-x)(1+r_2)} + 2k(r_2-r_1)\times$$
$$\times e^{-k(x(1+r_1)+(S-x)(1+r_2))} + 4k(1+r_1)e^{-kx(1+r_1)} - 2k(1+r_2)e^{-k(S-x)(1+r_2)}) -$$
$$-u_1 k(1+r_2)(1+r_1)e^{k(S-x)(1+r_2)} + u_1 k(1+r_2)(1+r_1)e^{kx(1+r_1)}. \qquad (3.96)$$

Підставимо у вираз (3.96), що виражає другу похідну функції (3.90) знайдене значення x і також засобами MS Excel перевіримо її знак. Як видно з табл. 3.1. для знайдених значень x похідна в обидвох випадках (схильності і несхильності до фінансового ризику) є від’ємною, а це означає, що знайдені x є точками мінімуму цієї функції.

Якщо аналізувати знайдені значення x, то можна зробити такий висновок: коли ОПР схильна до фінансового ризику ($k < 0$), то вона із загальної суми S = 100000 тис. грн. покладе більшу суму на коротший термін з ставкою доходності r_1 = 20 % (x = 43290.29 тис. грн.), ніж у випадку, коли вона не схильна до фінансового ризику (x = 11244.63 тис. грн.).

Оцінимо тепер вигідність такого розподілу коштів між різнотерміновими вкладами згідно умов (3.34) (таблиця 3.2).

Таблиця 3.2.

Вигідність розподілу інвестиційних коштів між різнотерміновими вкладами для власника активу з функцією вигідності (3.86) на основі моделі (3.35)

Параметр	**Назва параметра**	**Ставлення ОПР до фінансового ризику**	
		Схильність	**Несхильність**
k	Міра несхильності ОПР до ризику	0,00025	-0,00021
r1	Ставка доходності для короткотермінового вкладу	0,2	0,2
r2	Ставка доходності для довготермінового вкладу	0,28	0,28
u1	Значення функції вигідності у точці (a,T1)	0,6	0,6
S	Величина грошового активу (тис.грн.)	100000	100000
a	Мінімальне значення грошового показника (тис.грн.)	120000	120000
b	Максимальне значення грошового показника (тис.грн.)	128000	128000
x	Частка грошового вкладу на період T1 (тис.грн.)	11244,63	43290,29
S-x	Частка грошового вкладу на період T2 (тис.грн.)	88755,37	56709,71
u(x(1+r1),T1, (S-x)(1+r2), T2)	Вигідність вкладання коштів частинами	0,69	0,74
u(S(1+r1), T1)	Вигідність вкладання коштів на короткотерміновий період	0,6	0,6
u(S(1+r2), T2)	Вигідність вкладання коштів на довготерміновий період	0,4	0,4

Для ОПР не схильної до фінансового ризику вигідність розподілу коштів між різнотерміновими видами вкладів вища ($u(x(1+r_1),T_1,(S-x)(1+r_2),T_2)=$ 0.69), ніж вигідність вкладання усієї суми коштів S = 100000 тис. грн. тільки на короткий період ($u(S(1+r_1), T_1)$ = 0.6) або тільки на довший період ($u(S(1+r_2), T_2)$ = 0.4).

Для ОПР схильної до фінансового ризику вигідність розподілу коштів між різнотерміновими видами вкладів вища ($u(x(1+r_1),T_1,(S-x)(1+r_2),T_2)=$ 0.74), ніж вигідність вкладання усієї суми коштів S = 100000 тис. грн. тільки на короткий період ($u(S(1+r_1), T_1)$ = 0.6) або тільки на довший період ($u(S(1+r_2), T_2)$ = 0.4). Реалізацію обчислень засобами електронних таблиць наведено у додатку Б, таблиця Б.4.

Отже, аналізуючи вигідності вкладів, у випадках схильності і несхильності до фінансового ризику, ОПР, індивідуальні пріоритети якої виражаються функцією (3.90), керуючись вигідністю вкладення, прийме рішення про розподіл коштів між різнотерміновими вкладами у пропорціях наведених у таблиці 3.2.

Моделі даного підрозділу впроваджені в діяльність науково-виробничої компанії “САНА” Лтд (м. Київ).

Висновки до 3-го розділу

1. Розглянуто задачу відбору одного з кількох альтернативних інвестиційних проектів в умовах ризику як багатокритеріальну у контексті фінансово часових показників. Проаналізовано можливості застосування до задачі відбору інвестиційних проектів методів до розв’язання багатокритеріальних задач, зокрема методу ELECTRE (відношення пріоритетності за якістю), методу AHP (аналітичної ієрархії), методу MAUT (багатокритеріальної теорії вигідності).

2. Розглянуто підхід щодо представлення і розв’язання задачі відбору інвестиційних проектів у вигляді двовимірної (за вимірами проекти і критерії) (3.25) та тривимірної (за вимірами проекти, критерії та економічні ситуації) матриць. Запропоновано способи розшарування тривимірної матриці для розв’язання цієї задачі (3.26)-(3.28).

3. Запропоновано при розгляді задачі відбору інвестиційних проектів врахування суб’єктивного фактора у вигляді функції вигідності ОПР з факторами гроші та час (3.30).

4. Отримано модель (3.35) розподілу інвестиційних коштів власника грошового активу між різнотерміновими вкладами з різними ставками доходності у різні періоди з використанням двофакторної функції вигідності.

5. Побудовано модель (3.60) розподілу інвестиційних коштів для власника активу нейтрального до фінансового і часового ризиків з за умови адитивної незалежності грошового і часового факторів.

З’ясовано, що при нейтральному ставленні до фінансового і часового ризиків, ОПР – власник активу вибирає короткотерміновий вид вкладу, повністю відмовляючись при цьому від довготермінового. А за умови (3.82) обере короткотерміновий чи довготерміновий вид вкладу залежно від того, вигідність якого більша.

6. Побудовано модель (3.90) розподілу інвестиційних коштів для власника активу при постійній мірі несхильності до фінансового ризику і

нейтральності до часового за умови адитивної незалежності грошового і часового факторів.

Показано, що при постійній мірі несхильності до фінансового ризику і нейтральності до часового ризику ОПР буде приймати рішення про розподіл інвестиційних коштів між різнотерміновими видами вкладів. У випадках схильності і не схильності ОПР до фінансового ризику, вигідність розподілу коштів перевищує вигідності вкладання усієї суми лише на короткий термін і усієї суми тільки на довгий термін (табл. 3.2).

РОЗДІЛ 4

МОДЕЛЮВАННЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ З ОПТИМАЛЬНОГО СТРАХУВАННЯ НА ОСНОВІ ФУНКЦІЇ ВИГІДНОСТІ З ГРОШОВИМ ТА ЧАСОВИМ АРГУМЕНТАМИ

Оскільки успіх у бізнесі передбачає не ухилення від ризику, а зниження його до мінімального рівня, то в роботі розглянемо один з прийомів зменшення ризику – страхування.

Страхування є одним з прийомів, які дають змогу мінімізувати (обмежити) ризик або переуступити його за певну плату. З позиції теорії прийняття рішень необхідно аби ця плата окуплялась отриманою від застосування страхування вигодою.

Суть страхування полягає у тому, що страхувальник (фізична чи юридична особа) передає страховику (страховій компанії) за певну плату (страховий внесок) свій ризик. При укладанні договору страхування кожна із сторін думає про свою вигоду: страховик припускає, що отримає у вигляді страхових внесків суму більшу, аніж потратить на відшкодування збитків, а страхувальник сподівається отримати у вигляді страхової компенсації більше, ніж заплатить страхових внесків.

Страхові компанії прагнуть не мати справи з дуже великими і небезпечними ризиками, а також з тими, що у минулому принесли негативні результати. Однак саме страхування таких ризикових ситуацій і представляє для страхувальників найбільший інтерес.

Феномен страхування пробують пояснити психологічними особливостями сприйняття (ставлення до) ризику різних ОПР, а саме схильністю, нейтральністю і не схильністю до ризику. Такі особливості дає змогу виражати функція вигідності і моделі побудовані на її основі. Тому, потрібно оцінювати витрати на страхування і його корисний ефект, і для такого оцінювання необхідні відповідні моделі.

У роботі [162] розглядається модель визначення частки страхового активу. Центральне місце в цій моделі займає деякий власник активу S, який бажає застрахувати певну частину x цього активу. Для цього власник активу сплачує страховій компанії внесок rx, а у разі втрати активу отримує компенсацію qx.

Якщо при цьому власник активу має інформацію про ймовірність недоторканості свого активу p, то модель визначення частки, яку доцільно застрахувати має вигляд:

$$F(x) = pu(S - rx) + (1 - p)u(qx) \to \max, \tag{4.1}$$

$$0 \le x \le S. \tag{4.2}$$

де $u(x)$ – функція вигідності власника активу.

Досліджувалися модифікації цієї моделі, зокрема, на випадок можливої невиплати компенсації [100; 102], на випадок втрати частини активу [99].

Однак у цих моделях не згадується той факт, що страхування активу проводиться на певний період часу, що втрата активу можлива як на початку періоду, так і наприкінці страхового періоду. Проте для власника активу ця обставина навряд чи байдужа. Отже, потрібна модель, яка враховує не тільки грошовий, а й часовий аспекти страхування.

Побудова такої моделі і є метою даного дослідження. В основі цієї моделі повинна бути функція вигідності власника активу – потенційного страхувальника, залежна і від грошового і від часового показника.

Якщо власник активу S хоче застрахувати певну його частину на період T, то область допустимих значень його функції вигідності $u(y, t)$ доцільно зобразити у вигляді прямокутника: $\{- S \le y \le 0; 0 \le t \le T\}$ (рис. 4.1).

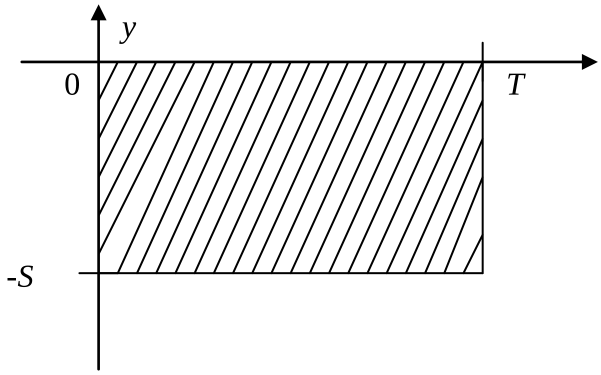


Рис. 4.1. Область визначення функції вигідності власника активу S

Властивості функції вигідності повинні відповідати очевидному твердженню про те, що втрачати вигідніше якнайменше і якнайпізніше. При цьому найменш вигідним варіантом для власника активу є повна втрата його в початковий момент часу, тому такій події потрібно надати нульове значення вигідності:

$$u(-S;0) = 0. \tag{4.3}$$

Меншій за абсолютним розміром втраті повинне відповідати більше значення вигідності за умови рівності часових аргументів:

$$u(y_1, t) < u(y_2, t), \tag{4.4}$$

якщо $|y_1| > |y_2|$, тобто

$$y_1 < y_2. \tag{4.5}$$

Однакова за грошовим розміром втрата вигідніша в пізніший момент часу:

$$u(y, t_1) < u(y, t_2), \tag{4.6}$$

якщо

$$t_1 < t_2 \text{ і } y < 0. \tag{4.7}$$

Отже, функція вигідності $u(y, t)$ повинна бути зростаючою по кожному зі своїх аргументів. При цьому максимальна вигідність для власника активу відповідає ситуації відсутності втрат протягом всього часового періоду від 0 до T. Отже, повинна виконуватись умова

$$u(0, t) = 1 \tag{4.8}$$

для всіх $t \in [0;T]$.

Як і в моделі (4.1)-(4.2) вважатимемо, що для страхування частини x активу його власник повинен сплатити страховій компанії внесок rx, а у випадку втрати активу отримає компенсацію qx. При цьому для коефіцієнтів r та q повинна виконуватись умова:

$$0 < r < q \le 1. \tag{4.9}$$

Економічний сенс умови (4.9) очевидний: додатність безрозмірного коефіцієнта r означає, що страховий внесок повинен бути реальний, перевага коефіцієнта q над r означає, що у випадку втрати активу компенсація повинна принаймні переважати страховий внесок, а умова $q \le 1$ повинна оберігати власника від спокуси навмисного пошкодження свого активу з метою отримання надмірної компенсації, і стимулювати його вживати інших запобіжних заходів недоторканості активу.

При цьому приймемо спрощувальне припущення про те, що страховий внесок ($y = -rx$) сплачується одноразово в початковий момент часу $t = 0$, що відповідає певному значенню вигідності власника активу $u(-rx, 0)$. Така одномоментна форма сплати страхового внеску найвигідніша для страхової компанії, однак в ряді випадків з метою заохочення клієнтів страхові компанії дозволяють сплачувати страховий внесок певними частинами через певні проміжки часу. Проте в цьому дослідженні поки що зупинимося на одномоментній формі сплати страхового внеску.

Припускаємо також, що у випадку втрати активу S компенсація qx сплачується практично зразу ж у момент втрати t, хоч на практиці нерідкі випадки, коли від моменту втрати активу $t_в$ до моменту отримання компенсації $t_к$ проходить значний проміжок часу $\Delta T = t_к - t_в$.

Отже, потрібно мати значення функції вигідності, яке враховує втрату активу S в певний момент часу t і отримання за це компенсації qx в цей же момент часу t: $u(-S + qx, t)$

Як і в моделі (4.1)-(4.2) вважатимемо, що ймовірність недоторканості активу дорівнює p ($0 < p < 1$), і, відповідно, ймовірність можливої втрати активу становить $(1 - p)$ на протязі періоду T. Крім того, потрібно знати закон розподілу ймовірності можливої втрати активу на часовому проміжку $[0; T]$. Нехай щільність цього розподілу описується функцією $\varphi(t)$ причому $\varphi(t) \geq 0$ для всіх $t \in [0;T]$ і

$$\int_0^T \varphi(t)dt = 1 - p. \tag{4.10}$$

За таких умов модель визначення оптимальної частки страхування активу матиме такий вигляд:

$$F(x) = pu(-rx,0) + \int_0^T u(-S + qx,t)\varphi(t)dt \to \max, \text{ де } x \in [0;S]. \tag{4.11}$$

4.1. Модель страхування для власника активу нейтрального до грошового і часового ризиків

Дослідимо запропоновану модель у випадку, коли функція вигідності власника активу записується у вигляді:

$$u(y,t) = 1 + \frac{y}{S}\left(1 - \frac{t}{K \cdot T}\right), \tag{4.12}$$

$$y \in [-S;0], t \in [0;T], K > 1. \tag{4.13}$$

Економічний зміст безрозмірного коефіцієнта K полягає у доцільності для власника активу його недоторканості протягом K страхових періодів.

Легко перевірити, що функція (4.12) задовольняє умови (4.3)-(4.8).

Зауважимо також, що функція (4.12) лінійна по кожному зі своїх аргументів y і t зокрема, тобто лінійна за грошовим аргументом y при фіксованому значенні t, лінійна за часовим аргументом t при фіксованому значенні y, однак не є лінійною за сукупністю аргументів. Лінійність функції вигідності (4.12) за кожним зі своїх аргументів відповідає нейтральному ставленні власника активу і до грошової складової ризику і до часової. Функція (4.12) незалежна за вигідністю відносно своїх аргументів, але не є адитивно незалежною, оскільки вона містить мультиплікативний доданок $\left(-\frac{yt}{SKT}\right)$.

Підставимо тепер функцію вигідності (4.12) в цільову функцію (4.11):

$$F(x) = p\left(1-\frac{rx}{S}\right)+\int_0^T\left(1+\frac{qx-S}{S}\left(1-\frac{t}{KT}\right)\right)\varphi(t)dt. \tag{4.14}$$

Для обчислення інтегрального доданка функції (4.14) потрібно задатися функцією $\varphi(t)$, тобто видом розподілу в часі можливої випадкової втрати активу.

1. *Випадок рівномірного розподілу*. У цьому випадку функція $\varphi(t)$ є сталою і з урахуванням умови (4.10) знаходимо

$$\varphi(t) = \frac{1-p}{T}. \tag{4.15}$$

Підставимо сталу (4.15) у функцію (4.14) і отримаємо:

$$F(x) = p\left(1-\frac{rx}{S}\right)+\int_0^T\left(1+\frac{qx-S}{S}\left(1-\frac{t}{KT}\right)\right)\frac{1-p}{T}dt;$$

$$F(x) = p\left(1-\frac{rx}{S}\right)+\frac{qx(1-p)}{S}-\frac{(qx-S)(1-p)}{2S\cdot K}. \tag{4.16}$$

Зокрема, при $x = 0$

$$F(0) = p+\frac{1-p}{2K}, \tag{4.17}$$

а при $x = S$

$$F(S) = p(1-r)+q(1-p)+\frac{(1-q)(1-p)}{2K}. \tag{4.18}$$

Знайдемо умову, за якої страхувати актив вигідніше, ніж не страхувати. Для цього розв’яжемо нерівність

$$F(0) < F(S). \tag{4.19}$$

Враховуючи (4.17) і (4.18), отримаємо

$$p+\frac{1-p}{2K}<p(1-r)+q(1-p)+\frac{(1-q)(1-p)}{2K};$$

$$\frac{q(1-p)}{2K}+pr<q(1-p);$$

$$p\left(r+q\left(1-\frac{1}{2K}\right)\right)<q\left(1-\frac{1}{2K}\right);$$

$$p<\frac{q\left(1-\frac{1}{2K}\right)}{r+q\left(1-\frac{1}{2K}\right)}. \qquad (4.20)$$

Отже, якщо виконується умова (4.20), то власнику активу доцільно повністю застрахувати актив. При виконанні нерівності, протилежної до (4.20), тобто якщо виконується умова

$$p>\frac{q(1-1/2K)}{r+q(1-1/2K)}, \qquad (4.21)$$

то від страхування активу краще відмовитися.

У разі виконання рівності

$$p=\frac{q(1-1/2K)}{r+q(1-1/2K)} \qquad (4.22)$$

розглядувана модель не дає однозначної відповіді про оптимальний розмір страхової частки активу.

Результат рішення у даному випадку наведено у додатку В (табл. В.1), а реалізацію обчислень на MS Excel у табл. В.2.

2. *Випадок зростаючої щільності розподілу можливої випадкової втрати активу.* Якщо актив є засобом виробництва (транспортний засіб, верстат тощо), то в ході його експлуатації збільшується знос його окремих деталей, вузлів, і навіть якщо це не зменшує його продуктивності, то з часом зростає ймовірність виходу його з ладу. Тому потрібно дослідити випадок зростаючої з часом щільності розподілу можливої випадкової втрати активу. Отже, нехай на проміжку [0; T] функція $\varphi(t)$ має вигляд

$$\varphi(t)=\alpha+\beta t, \qquad (4.23)$$

де $\beta > 0, \alpha \geq 0$.

Зв'язок між коефіцієнтами α та β знайдемо, підставивши функцію (4.23) в умову (4.10):

$$\int_0^T (\alpha + \beta t)dt = 1 - p;$$

$$\alpha T + \frac{\beta T^2}{2} = 1 - p;$$

$$\alpha = \frac{1}{T}\left(1 - p - \frac{\beta T^2}{2}\right). \tag{4.24}$$

Максимально можливе значення β знайдемо прирівнявши праву частину формули (4.24) до нуля

$$1 - p - \frac{\beta T^2}{2} = 0;$$

$$\beta_{\max} = \frac{2(1-p)}{T^2}. \tag{4.25}$$

Отже, за умови

$$0 < \beta \leq \frac{2(1-p)}{T^2} \tag{4.26}$$

з урахуванням формули (4.24) отримаємо функцію щільності розподілу в такому вигляді

$$\varphi(t) = \frac{1}{T}\left(1 - p - \frac{\beta T^2}{2}\right) + \beta t. \tag{4.27}$$

Графічно функція (4.27) зображується у вигляді зростаючого відрізка (рис. 4.2).

Підставимо тепер формулу (4.27) в цільову функцію (4.14):

$$F(x) = p\left(1 - \frac{rx}{S}\right) + \int_0^T \left(1 + \frac{qx - S}{S}\left(1 - \frac{t}{KT}\right)\right)(\alpha + \beta t)dt.$$

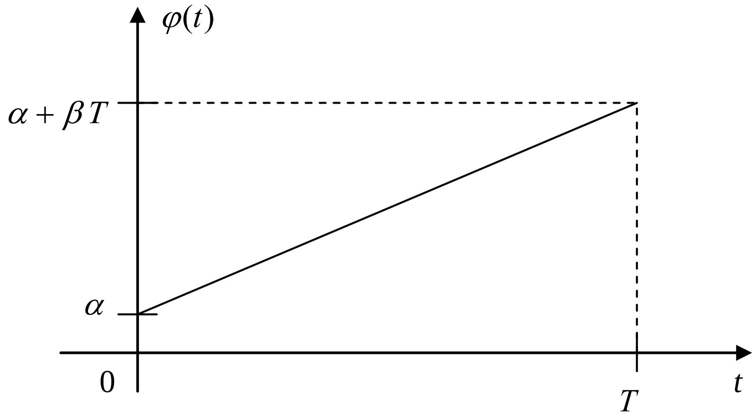


Рис. 4.2. Графік лінійної зростаючої функції щільності розподілу можливої можливої випадкової втрати активу в певний момент часу страхового періоду.

Шляхом безпосереднього інтегрування знайдемо:

$$F(x) = p\left(1 - \frac{rx}{S}\right) + \alpha\left(T + \frac{qx - S}{S}T - \frac{(qx - S)T}{2SK}\right) + \\ + \beta\left(\frac{T^2}{2} + \frac{qx - S}{S} \cdot \frac{T^2}{2} - \frac{(qx - S)T^2}{3SK}\right). \tag{4.28}$$

З урахуванням формули (4.24) цільова функція (4.28) набирає вигляду

$$F(x) = p\left(1 - \frac{rx}{S}\right) + \left(1 - p - \frac{\beta T^2}{2}\right)\left(1 + \frac{qx - S}{S}\left(1 - \frac{1}{2K}\right)\right) + \\ + \frac{\beta T^2}{2}\left(1 + \frac{qx - S}{S}\left(1 - \frac{2}{3K}\right)\right). \tag{4.29}$$

Неважко переконатися, що при спрямуванні коефіцієнта β до нуля цільова функція (4.29) прямує до функції (4.16), яка відповідає рівномірному розподілу випадкової величини активу.

Аналогічно, як і функція (4.16), функція (4.29) лінійна щодо x, а, отже, власник активу на її основі може прийняти лише одне з двох рішень: страхувати актив повністю чи не страхувати взагалі, залежно від того, яке значення переважає, чи $F(S) > F(0)$, чи навпаки.

Отже, при $x = 0$ отримаємо

$$F(0)=p+\left(1-p-\frac{\beta T^2}{2}\right)/(2K)+\frac{\beta T^2}{3K};$$

$$F(0)=p+\frac{1-p}{2K}+\frac{\beta T^2}{12K}. \qquad (4.30)$$

На основі формули (4.30) можна зробити висновок, що сподівана вигідність відмови від страхування лінійно залежить від кутового коефіцієнта β щільності розподілу випадкової втрати активу; чим більше значення β, тим сподівана вигідність відмови від страхування більша.

Також за зростаючим законом, але вже не лінійним, а квадратичним, сподівана вигідність відмови від страхування залежить від періоду *T*. У цьому також полягає і відмінність сподіваної вигідності (4.30) від сподіваної вигідності відмови від страхування (4.17), яка формально не залежить від періоду страхування.

Інші властивості функції (4.30) та (4.17) спільні. А саме, сподівана вигідність відмови від страхування лінійно залежить від ймовірності недоторканості активу *p*, чим більша ця ймовірність, тим більша сподівана вигідність відмови від страхування. Крім того, сподівана вигідність відмови від страхування як за формулою (4.17), так і за формулою (4.30) гіперболічно залежить від параметра *K*: чим довше потрібно зберігати актив, тим меншою є сподівана вигідність відмови від страхування.

І нарешті варто зауважити, що при нейтральному ставленні до ризику власника активу сподівана вигідність відмови від страхування не залежить від параметрів *r* та *q*, які пропонує страхова компанія.

Обчислимо тепер сподівану вигідність страхування активу в повному обсязі:

$$F(S)=p(1-r)+\left(1-p-\frac{\beta T^2}{2}\right)\left(1+(q-1)\left(1-\frac{1}{2K}\right)\right)+\frac{\beta T^2}{2}\left(1+(q-1)\left(1-\frac{2}{3K}\right)\right).$$

(4.31)

Як видно з формули (4.31) сподівана вигідність страхування активу в повному обсязі $F(S)$ на відміну від сподіваної вигідності відмови від страхування $F(0)$ залежить від усіх параметрів досліджуваної моделі, крім самого розміру активу S.

Найбільш прозорою ця залежність є від коефіцієнта r. Справді, якщо позначити

$$C = p + \left(1 - p - \frac{\beta T^2}{2}\right)\left(1 + (q-1)\left(1 - \frac{1}{2K}\right)\right) + \frac{\beta T^2}{2}\left(1 + (q-1)\left(1 - \frac{2}{3K}\right)\right),$$

то функцію (4.31) можна зобразити у вигляді

$$F(S) = C - pr, \tag{4.32}$$

де величина C не залежить від r, а це, внаслідок додатності ймовірності p, означає, що сподівана вигідність страхування активу в повному обсязі є лінійною спадною функцією від параметра r, тобто чим більший розмір страхового внеску, тим менша сподівана вигідність страхування.

Такою ж лінійною і спадною є залежність величини $F(S)$ від ймовірності p збережності активу протягом періоду T, якщо при цьому виконується умова

$$C_1 = 1 - r - q - \frac{1-q}{2K} < 0. \tag{4.33}$$

Справді, якщо позначити

$$C_2 = \left(1 - \frac{\beta T^2}{2}\right)\left(1 + (q-1)\left(1 - \frac{1}{2K}\right)\right) + \frac{\beta T^2}{2}\left(1 + (q-1)\left(1 - \frac{2}{3K}\right)\right), \tag{4.34}$$

то сподівана вигідність страхування активу в повному обсязі (4.31) запишеться у вигляді

$$F(S) = C_2 + C_1 p, \tag{4.35}$$

де C_1 від'ємне згідно умови (4.33).

Отже, чим меншою є ймовірність p збережності активу S протягом періоду T, тим вищою є сподівана вигідність страхування активу в повному обсязі. Умова (4.33) не є при цьому обтяжливою. Зокрема вона виконується, якщо q = 1, тобто коли страхова компанія обіцяє клієнтові повне відшкодування його можливих втрат. Умова (4.33) виконується також і при значеннях q, близьких до одиниці.

Якщо виконується рівність

$$q = \frac{1 - r - 1/2K}{1 - 1/2K}, \tag{4.36}$$

то коефіцієнт C_1 у формулі (4.35) стає нульовим і, як наслідок, сподівана вигідність страхування активу в повному обсязі стає незалежною від ймовірності збережності активу. При ще менших значеннях компенсаційного коефіцієнта, тобто при

$$q < \frac{1 - r - 1/2K}{1 - 1/2K} \tag{4.37}$$

коефіцієнт C_1 у формулі (4.35) стає додатний, і сподівана вигідність повного страхування активу виявляється залежною від ймовірності p недоторканості активу за зростаючим законом: чим вища ймовірність p, тим більша сподівана вигідність повного страхування активу. При цьому свого максимального значення досягне при p = 1, тобто при гарантованій збережності активу протягом страхового періоду.

Така парадоксальна і, здавалося б, сприятлива для страхової компанії залежність насправді не є вигідною для компанії при великих значеннях p, оскільки разом зі зростанням сподіваної вигідності страхування для клієнтів зростає також і сподівана вигідність його відмови від страхування, а, отже, компанія може втратити клієнта.

Зокрема, при p = 1 згідно формули (4.30) вигідність відмови від страхування

$$F(0) = 1 + \frac{\beta T^2}{12K}, \tag{4.38}$$

а вигідність повного страхування згідно формули (4.31) становить

$$F(S) = 1 - r + \frac{\beta T^2}{12K}(1 - q), \tag{4.39}$$

і, отже, $F(0) > F(S)$.

Ця ж нерівність зберігається і при значеннях p, близьких до одиниці.

Дослідимо тепер залежність сподіваної вигідності повного страхування від компенсаційного коефіцієнта q. Для цього позначимо

$$C_3 = p(1-r) + \frac{1-p-\beta T^2/2}{2K} + \frac{\beta T^2}{3K}; \tag{4.40}$$

$$C_4 = \left(1-p-\frac{\beta T^2}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2K}\right) + \frac{\beta T^2}{2}\left(1-\frac{2}{3K}\right)$$

або

$$C_4 = (1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right) - \frac{\beta T^2}{12K}. \tag{4.41}$$

При позначеннях (4.40) і (4.41) вираз (4.31) можна записати у вигляді

$$F(S) = C_3 + C_4 q. \tag{4.42}$$

З урахуванням умови (4.26) на коефіцієнт β знайдемо, що коефіцієнт C_4 може приймати тільки додатні значення

$$0 < (1-p)\left(1-\frac{2}{3K}\right) \le C_4 \le (1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right). \tag{4.43}$$

Таким чином сподівана вигідність повного страхування активу залежить лінійно за зростаючим законом від компенсаційного коефіцієнта q страхової компанії.

Аналогічною властивістю володіє і сподівана вигідність (4.18) повного страхування активу за умови рівномірно розподіленої в часі можливої випадкової втрати активу.

Щоб вияснити характер залежності сподіваної вигідності повного страхування $F(S)$ від швидкості зростання ймовірності втрати активу β, запишемо вираз (4.31) у такому вигляді

$$F(S) = p(1-r) + (1-p)\left(1+(q-1)\left(1-\frac{1}{2K}\right)\right) + \frac{\beta T^2}{12K}(1-q). \tag{4.44}$$

На основі формули (4.44) можна зробити висновок, що при повній компенсації вартості активу в разі його втрати, тобто при q = 1, сподівана вигідність страхування активу в повному обсязі не залежить від коефіцієнта β, тобто від швидкості зростання щільності ймовірності втрати активу. Справді, при q = 1 формула (4.44) набирає простого вигляду:

$$F(S) = 1 - pr. \tag{4.45}$$

Якщо ж коефіцієнт компенсаційних виплат менший від одиниці (q < 1), то залежність сподіваної вигідності повного страхування від швидкості зростання щільності ймовірності втрати активу є зростаючою за лінійним законом від свого найменшого значення при β = 0

$$F(S) = p(1-r) + (1-p)\left(1 + (q-1)\left(1 - \frac{1}{2K}\right)\right) \tag{4.46}$$

до найбільшого при $\beta = \frac{2(1-p)}{T^2}$:

$$F(S) = p(1-r) + (1-p)\left(1 + (q-1)\left(1 - \frac{1}{2K}\right)\right) + \frac{(1-p)(1-q)}{6K}.$$

Оскільки ми розглядали ситуацію для ОПР нейтральної до фінансового і часового ризиків з функцією вигідності (4.12) для випадку зростаючої щільності розподілу в часі можливої випадкової втрати активу, то у цьому випадку, коли функція сподіваної вигідності ОПР виражається формулою (4.29) ОПР буде вибирати між двома рішеннями: страхувати актив повністю чи відмовитися від страхування взагалі.

З'ясуємо, за якої умови ОПР доцільно застрахувати актив повністю. Очевидно, що це буде тоді, коли виконується нерівність $F(S) > F(0)$. Деталізуємо цю нерівність використавши формули (4.30) і (4.31):

$$p(1-r)+\left(1-p-\frac{\beta T^2}{2}\right)\left(1+(q-1)\left(1-\frac{1}{2K}\right)\right)+\frac{\beta T^2}{2}\left(1+(q-1)\left(1-\frac{2}{3K}\right)\right)>$$

$$>p+\frac{1-p}{2K}+\frac{\beta T^2}{12K}$$

або після спрощення

$$p<\frac{q(1-1/2K-\beta T^2/12K)}{q(1-1/2K)+r}. \tag{4.47}$$

Коли виконується нерівність протилежна до (4.47), тобто

$$p>\frac{q(1-1/2K-\beta T^2/12K)}{q(1-1/2K)+r}, \tag{4.48}$$

то ОПР від страхування активу доцільно відмовитися взагалі.

Реалізацію обчислень засобами MS Excel та обрахунок результату рішення з страхування для даного випадку наведено у додатку В (таблиці В.4, В.3).

4.2. Модель страхування для власника активу з нелінійною функцією вигідності

Розглянемо випадки функції вигідності з грошовим та часовим аргументами, яка залежить лінійно від часового аргументу і нелінійно від грошового, а саме, коли ОПР – власник активу, не схильний (випадок 1) і схильний (випадок 2) до грошового ризику – ризику недоотримання коштів.

Випадок 1. Розглянемо випадок функції вигідності, яка залежить від грошового аргументу нелінійно, а саме за квадратичним законом:

$$u(y,t)=1-\frac{y^2}{S^2}\left(1-\frac{t}{KT}\right), \tag{4.49}$$

де $-S\le y\le 0;\ 0\le t\le T,\ K>1.$

Перевіримо, чи функція (4.49) задовольняє умови (4.3)-(4.8).

Якщо y = - S, а t = 0, що відповідає втраті активу без компенсації в початковий момент часу, то згідно формули (4.49)

$$u(-S,0)=1-\frac{(-S)^2}{S^2}\left(1-\frac{0}{KT}\right)=0, \qquad (4.50)$$

тобто такій події відповідає найнижчий нульовий рівень вигідності. Формула (4.50) означає, що умова (4.3) виконується.

Якщо $y_1 < y_2$, то

$$u(y_1,t)=1-\frac{y_1^2}{S^2}\left(1-\frac{t}{KT}\right)<1-\frac{y_2^2}{S^2}\left(1-\frac{t}{KT}\right)=u(y_2,t),$$

що відповідає умовам (4.4), (4.5).

Якщо $y < 0$ і $t_1 < t_2$, то

$$u(y,t_1)=1-\frac{y^2}{S^2}\left(1-\frac{t_1}{KT}\right)<1-\frac{y^2}{S^2}\left(1-\frac{t_2}{KT}\right)=u(y,t_2),$$

а це означає, що умови (4.6), (4.7) також виконуються.

І, нарешті, при відсутності втрат, тобто при $y = 0$ вигідність

$$u(0,t)=1-\frac{0^2}{S^2}\left(1-\frac{t}{KT}\right)=1,$$

тобто є максимальною. Отже, функція (4.49) задовольняє також умову (4.8).

Функція (4.49) лінійна за часовим аргументом t і нелінійна за фінансовим y. Це відповідає нейтральному ставленню до часової складової ризику і не нейтральному – до грошової.

Щоб визначити локальну міру несхильності до грошової складової ризику, обчислимо частинні похідні функції (4.49) за аргументом y першого і другого порядків. Отже,

$$\frac{\partial u(y,t)}{\partial y}=-\frac{2y}{S^2}\left(1-\frac{t}{KT}\right), \qquad (4.51)$$

$$\frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial y^2}=-\frac{2}{S^2}\left(1-\frac{t}{KT}\right). \qquad (4.52)$$

На основі формул (4.51)-(4.52) обчислимо локальну міру несхильності до грошової складової ризику:

$$r(y) = -\frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial y^2} / \frac{\partial u(y,t)}{\partial y};$$

$$r(y) = -\frac{1}{y}. \tag{4.53}$$

Враховуючи той факт, що функція (4.49) визначена лише для не додатних значень y, бачимо, що функція (4.53) набуває лише додатних значень, якщо її аргумент y від'ємний, а при нульовому значенні y міра несхильності до ризику невизначена, а це означає, що ОПР з функцією вигідності (4.49) є не схильною до фінансового ризику.

Міра несхильності до ризику монотонно зростає при зростанні величини y від мінімального значення (y = - S) до нульового значення.

Графічно локальна міра несхильності до ризику зображається у вигляді частини гіперболи (рис. 4.3).

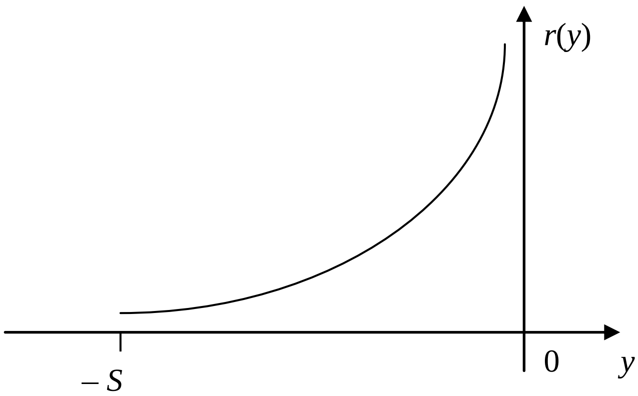


Рис. 4.3. Графік локальної міри несхильності до грошової складової ризику при функції вигідності $u(y,t) = 1 - \frac{y^2}{S^2}\left(1 - \frac{t}{KT}\right)$

Підставимо функцію (4.49) у модель (4.11):

$$F(x) = p\left(1 - \frac{r^2 x^2}{S^2}\right) + \int_0^T \left(1 - \frac{(qx - S)^2}{S^2}\left(1 - \frac{t}{KT}\right)\right)\varphi(t)dt. \tag{4.54}$$

Розглянемо спочатку випадок рівномірного розподілу в часі можливих випадкових втрат активу, коли функція $\varphi(t)$ стала і виражається формулою (4.15). Тобто, підставимо в отриманий інтеграл (4.54) функцію (4.15), яка відповідає рівномірному розподілу:

$$F(x) = p\left(1 - \frac{r^2 x^2}{S^2}\right) + \int_0^T \left(1 - \frac{(qx - S)^2}{S^2}\left(1 - \frac{t}{KT}\right)\right)\frac{1-p}{T}dt;$$

$$F(x) = p\left(1 - \frac{r^2 x^2}{S^2}\right) + (1-p)\left(1 - \frac{(qx - S)^2}{S^2}\left(1 - \frac{1}{2K}\right)\right). \qquad (4.55)$$

Якщо $x = 0$, то за формулою (4.55) отримаємо

$$F(0) = p + \frac{1-p}{2K}. \qquad (4.56)$$

Як бачимо, формула (4.56) аналогічна до формули (4.17), тобто сподівана вигідність відмови від страхування така сама, як і при нейтральному ставленні власника активу до ризику.

При $x = S$ обчислимо

$$F(S) = p(1 - r^2) + (1-p)\left(1 - (q-1)^2\left(1 - \frac{1}{2K}\right)\right). \qquad (4.57)$$

Формула (4.57) відрізняється від виразу (4.18), отже, сподівана вигідність повного страхування активу в даному випадку відмінна від аналогічної вигідності при нейтральному ставленні до ризику.

Найлегше ці вигідності порівнюються у випадку, коли компенсаційний коефіцієнт q дорівнює одиниці. Отже, при $q = 1$ вираз (4.57) спрощується до вигляду

$$F(S) = 1 - pr^2, \qquad (4.58)$$

а вираз (4.18) до вигляду

$$F(S) = 1 - pr. \qquad (4.59)$$

Отже, для допустимих значень r $(0 < r < 1)$ сподівана вигідність (4.58) більша, ніж сподівана вигідність (4.59).

Основна відмінність цільової функції (4.55) від функції (4.16) полягає у тому, що функція (4.55) нелінійна, а, отже, на відміну від лінійної (4.16) може набувати свого найбільшого значення не тільки на кінцях проміжку визначення ($x = 0$ чи $x = S$), а і в деякій точці всередині проміжку $[0; S]$.

Щоб знайти цю точку максимуму, продиференціюємо функцію (4.55) за змінною x:

$$F'(x) = -\frac{2r^2 x}{S^2} p - \frac{q(1-p)}{S^2}\left(2 - \frac{1}{K}\right)(qx - S). \tag{4.60}$$

Отриману похідну (4.60) прирівняємо до нуля:

$$2r^2 px + q(1-p)\left(2 - \frac{1}{K}\right)qx - q(1-p)\left(2 - \frac{1}{K}\right)S = 0$$

і розв'яжемо отримане рівняння:

$$x = \frac{q(1-p)(2-1/K)S}{q^2(1-p)(2-1/K) + 2r^2 p}. \tag{4.61}$$

З'ясуємо, за яких умов отриманий розв'язок (4.61) належить проміжку (0; S). Очевидно це буде тоді, коли виконується нерівність:

$$\frac{q(1-p)(2-1/K)}{q^2(1-p)(2-1/K) + 2r^2 p} < 1$$

або після спрощення

$$q^2 - q + \frac{2r^2 p}{(1-p)(2-1/K)} > 0. \tag{4.62}$$

Розв'яжемо рівняння, прирівнявши ліву частину нерівності (4.62) до нуля:

$$q^2 - q + \frac{2r^2 p}{(1-p)(2-1/K)} = 0. \tag{4.63}$$

Дискримінант цього рівняння виглядатиме так:

$$D = 1 - \frac{8r^2 p}{(1-p)(2-1/K)}$$

і, очевидно, буде додатним за умови

$$\frac{8r^2 p}{(1-p)(2-1/K)} < 1$$

або після спрощення, коли для ймовірності недоторканості активу буде виконуватися умова:

$$p < \frac{2 - 1/K}{2 - 1/K + 8r^2}. \qquad (4.64)$$

Знайдемо корені рівняння (4.63) за умови (4.64), при цьому отримаємо:

$$q_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{8r^2 p}{(1-p)(2-1/K)}}\right); \qquad (4.65)$$

$$q_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{8r^2 p}{(1-p)(2-1/K)}}\right).$$

Очевидно, що обидва корені q_1 і q_2 додатні. Але оскільки $q_2 < 1/2$, то навряд чи страхова компанія буде мати багато клієнтів, маючи компенсаційний коефіцієнт менший 50%. Тому детальніше зупинимося на розв'язку q_1. Зважаючи на те, що рівняння (4.63) є параболою, гілки якої спрямовані вгору, а отже, для того, щоб $x \in (0; S)$, необхідне виконання умови для компенсаційного коефіцієнта $q > q_1$, а з врахуванням рівності (4.65) і умови (4.9) матимемо

$$\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{8r^2 p}{(1-p)(2-1/K)}}\right) < q \le 1. \qquad (4.66)$$

Отже, за умови (4.66) для компенсаційного коефіцієнта q і умови (4.64) для ймовірності недоторканості активу p розв'язок (4.61) належатиме проміжку $(0; S)$.

Щоб переконатися, що вираз (4.61) є точкою максимуму сподіваної вигідності (4.55), достатньо знайти її похідну другого порядку:

$$F''(x) = -\frac{2r^2}{S^2}p - \frac{q^2(1-p)}{S^2}\left(2 - \frac{1}{K}\right). \qquad (4.67)$$

Як бачимо похідна (4.67) є від'ємною величиною, що є достатньою умовою максимуму.

Отже, коли ОПР не схильна до фінансового ризику з функцією вигідності (4.49) і її сподівана вигідність виражається функцією (4.55) у випадку рівномірного розподілу в часі можливих втрат активу, то така ОПР може відмовитися від страхування активу S взагалі, якщо $F(0) > F(S)$, а врахувавши вирази (4.56) і (4.57) і спростивши отриману нерівність, одержимо таку умову:

$$1 \geq p > \frac{(1-(q-1)^2)(1-1/2K)}{(1-(q-1)^2)(1-1/2K)+r^2}. \tag{4.68}$$

Коли ж виконується умова

$$p < \frac{(1-(q-1)^2)(1-1/2K)}{(1-(q-1)^2)(1-1/2K)+r^2}, \tag{4.69}$$

то ОПР доцільно повністю застрахувати актив.

Однак, як було показано вище, ОПР може застрахувати і частку активу S, виражену рівністю (4.61), але це буде для випадку, коли виконуються умови (4.66) для компенсаційного коефіцієнта і (4.64) для ймовірності недоторканості активу.

Реалізацію обчислень засобами MS Excel та обрахунки результатів страхування для випадку рівномірного розподілу в часі можливих випадкових втрат активу наведено у додатку В (таблиці В.6, В.5).

Розглянемо тепер модель визначення оптимальної частки страхування для функції (4.49) у випадку зростаючої щільності розподілу можливої випадкової втрати активу.

Підставимо у модель (4.11) функцію вигідності (4.49) і щільність розподілу (4.23):

$$F(x) = p\left(1-\frac{r^2x^2}{S^2}\right)+\int_0^T\left(1-\frac{(qx-S)^2}{S^2}\left(1-\frac{t}{KT}\right)\right)(\alpha+\beta t)dt. \tag{4.70}$$

Проінтегрувавши функцію (4.70) отримаємо:

$$\begin{aligned} F(x) = p\left(1-\frac{r^2x^2}{S^2}\right)+\alpha\left(T-\frac{(qx-S)^2T}{S^2}+\frac{(qx-S)^2T}{2S^2K}\right)+ \\ +\beta\left(\frac{T^2}{2}-\frac{(qx-S)^2T^2}{2S^2}+\frac{(qx-S)^2T^2}{3S^2K}\right). \end{aligned} \tag{4.71}$$

Враховуючи формулу (4.24), яка пов’язує коефіцієнти α та β, функція (4.71) запишеться у такому вигляді:

$$F(x) = p\left(1-\frac{r^2x^2}{S^2}\right)+\left(1-p-\frac{\beta T^2}{2}\right)\left(1-\frac{(qx-S)^2}{S^2}\left(1-\frac{1}{2K}\right)\right)+ \\ +\frac{\beta T^2}{2}\left(1-\frac{(qx-S)^2}{S^2}\left(1-\frac{2}{3K}\right)\right). \tag{4.72}$$

Якщо коефіцієнт β прямує до нуля, то цільова функція (4.72) прямує до функції (4.55), яка відповідає рівномірному розподілові можливої випадкової величини активу.

Знайдемо значення функції (4.72) на кінцях проміжку [0; S].

Якщо $x = 0$, то

$$F(0) = p+\frac{1-p}{2K}+\frac{\beta T^2}{12K}. \tag{4.73}$$

Значення функції (4.72) в точці $x = 0$ аналогічне до такого ж значення для лінійної функції вигідності (4.12), на що вказує ідентичність формул (4.30) і (4.73).

Обчислимо тепер значення функції (4.74) в точці $x = S$:

$$F(S) = p(1-r^2)+\left(1-p-\frac{\beta T^2}{2}\right)\left(1-(q-1)^2\left(1-\frac{1}{2K}\right)\right)+ \\ +\frac{\beta T^2}{2}\left(1-(q-1)^2\left(1-\frac{2}{3K}\right)\right). \tag{4.74}$$

З формули (4.74) видно, що сподівана вигідність страхування активу в повному обсязі $F(S)$ залежить від усіх параметрів досліджуваної моделі, окрім самого розміру активу S.

Проаналізуємо залежність цих параметрів. Найлегше цю залежність видно від коефіцієнта r. Якщо позначити

$$C_1 = p+\left(1-p-\frac{\beta T^2}{2}\right)\left(1-(q-1)^2\left(1-\frac{1}{2K}\right)\right)+\frac{\beta T^2}{2}\left(1-(q-1)^2\left(1-\frac{2}{3K}\right)\right),$$

то функцію (4.74) можна записати у вигляді:

$$F(S) = C_1 - pr^2\,. \tag{4.75}$$

З формули (4.75) видно, що сподівана вигідність страхування активу в повному обсязі є спадною квадратичною функцією відносно параметра r (оскільки C_1 не залежить від r), тобто чим більший розмір страхового внеску r, тим менша вигідність страхування.

Проаналізуємо залежність сподіваної вигідності страхування активу в повному обсязі від параметру p – ймовірності збережності активу протягом періоду T. Якщо позначимо через

$$C_2 = 1 - r^2 - \left(1 - (q-1)^2\left(1 - \frac{1}{2K}\right)\right)$$

або після спрощення

$$C_2 = 1 - r^2 - (1 - (q-1)^2) - \frac{(q-1)^2}{2K}\,, \tag{4.76}$$

а через

$$C_3 = \left(1 - \frac{\beta T^2}{2}\right)\left(1 - (q-1)^2\left(1 - \frac{1}{2K}\right)\right) + \frac{\beta T^2}{2}\left(1 - (q-1)^2\left(1 - \frac{2}{3K}\right)\right), \tag{4.77}$$

то сподівану вигідність страхування активу в повному обсязі (4.74) можна записати так:

$$F(S) = C_3 + C_2 p\,. \tag{4.78}$$

Формула (4.78) аналогічна до (4.35) – сподіваної вигідності страхування активу в повному обсязі для функції вигідності (4.35) лінійної за грошовим і часовим аргументами.

Розглянемо залежність коефіцієнта C_2, вираженого рівністю (4.76) відносно коефіцієнта компенсації q. Для цього розв’яжемо рівняння, прирівнявши вираз (4.76) до нуля:

$$1 - r^2 - (1 - (q-1)^2) - \frac{(q-1)^2}{2K} = 0;$$

$$2K(1 - r^2) - 2K + 2Kq^2 - 4Kq + 2K - q^2 + 2q - 1 = 0.$$

Після спрощення отримаємо таке квадратне, відносно параметра q, рівняння:

$$(2K-1)q^2-(4K-2)q+(2K-2Kr^2-1)=0. \qquad (4.79)$$

Обчислимо дискримінант рівняння (4.79):

$$D=(4K-2)^2-4(2K-1)(2K-2Kr^2-1)=16K^2r^2\left(1-\frac{1}{2K}\right)$$

і знайдемо його корені:

$$q_1=1+\frac{2Kr\sqrt{1-1/2K}}{2K-1},\ q_2=1-\frac{2Kr\sqrt{1-1/2K}}{2K-1}.$$

Зважаючи на умову (4.9), а саме ту її частину, що стосується компенсаційного коефіцієнта: $0<q\le 1$, зрозуміло, що корінь q_1 рівняння (4.79) не задовольняє цієї умови. Отож, розглянемо корінь q_2. Якщо виконується рівність

$$q=q_2=1-\frac{2Kr\sqrt{1-1/2K}}{2K-1}, \qquad (4.80)$$

то коефіцієнт C_2 у формулі (4.78) перетворюється в нуль, а отже сподівана вигідність страхування активу в повному обсязі не залежить від ймовірності p збережності активу.

Якщо виконується нерівність

$$q<1-\frac{2Kr\sqrt{1-1/2K}}{2K-1}, \qquad (4.81)$$

то коефіцієнт C_2 у виразі (4.78) буде додатний, а отже, сама сподівана вигідність повного страхування активу є залежною від ймовірності p збережності активу за зростаючим законом, як і для випадку лінійної функції вигідності за обома параметрами, тобто: чим вища ймовірність недоторканості активу, тим більша сподівана вигідність повного страхування активу, а свого максимального значення досягне при p = 1 – гарантованій збережності активу протягом страхового періоду T.

Однак, як і в п. 4.1, аналізуючи залежність сподіваної вигідності відмови від страхування (4.73) від ймовірності p бачимо, що вона є лінійною, за зростаючим законом, тобто чим більша ймовірність збережності активу, тим більша сподівана вигідність відмови від страхування. Отже, при великих значеннях p отримуємо ситуацію, коли одночасно зростає сподівана вигідність повного страхування для клієнта і сподівана вигідність його відмови від страхування, а це не завжди вигідно для компанії, так як вона може втратити клієнта.

Якщо виконується умова

$$1-\frac{2Kr\sqrt{1-1/2K}}{2K-1}<q\le 1, \tag{4.82}$$

тобто для q = 1 і q близьких до одиниці, то коефіцієнт C_2 < 0. З рівності (4.78) можна зробити висновок про те, що зменшення ймовірності p збережності активу веде до збільшення сподіваної вигідності страхування активу в повному обсязі, оскільки функція (4.78) є спадною лінійною функцією за умови (4.82).

При p = 1, формула (4.73) вигідності відмови від страхування спрощується до

$$F(0)=1+\frac{\beta T^2}{12K}, \tag{4.83}$$

(і є аналогічною до формули (4.38) для лінійного випадку функції вигідності), а вигідність повного страхування (4.74) до формули:

$$F(S)=1-r^2+\frac{\beta T^2}{12K}(q-1)^2. \tag{4.84}$$

З формул (4.83) і (4.84) можна зробити висновок, що $F(0) > F(S)$, тобто у цьому випадку краще відмовитися від страхування активу. Ця нерівність зберігається і при значення p близьких до одиниці.

Дослідимо тепер залежність сподіваної вигідності повного страхування від компенсаційного коефіцієнта q. Якщо позначити

$$C_4=-\frac{1-p}{2K}-\frac{\beta T^2}{12K}; \tag{4.85}$$

$$C_5=\frac{1-p}{K}+\frac{\beta T^2}{6K}; \tag{4.86}$$

$$C_6 = 1 - pr^2 - \frac{1-p}{2K} - \frac{\beta T^2}{12K}, \tag{4.87}$$

то враховуючи позначення (4.85)-(4.87) сподівана вигідність повного страхування (4.74) запишеться у вигляді квадратичної функції:

$$F(S) = C_4 q^2 + C_5 q + C_6. \tag{4.88}$$

З виразу (4.85) видно, що коефіцієнт C_4 – від'ємний: $C_4 < 0$, а зважаючи на умову (4.26) для коефіцієнта β отримаємо, що

$$-\frac{2(1-p)}{3K} < C_4 < -\frac{1-p}{2K}. \tag{4.89}$$

Отже, сподівана вигідність страхування активу в повному обсязі залежить за спадним квадратичним законом від коефіцієнта компенсації q страхової компанії: чим вищий компенсаційний коефіцієнт q, тим нижча сподівана вигідність повного страхування активу.

Вияснимо тепер залежність сподіваної вигідності повного страхування $F(S)$ від швидкості зростання ймовірності втрати активу β. Для цього вираз (4.74) запишемо у такому вигляді:

$$F(S) = p(1-r^2) + (1-p)\left(1-(q-1)^2\left(1-\frac{1}{2K}\right)\right) + \frac{\beta T^2}{12K}(q-1)^2. \tag{4.90}$$

З виразу (4.90) видно, що за умови повної компенсації вартості активу (при $q = 1$) у разі його втрати, сподівана вигідність страхування активу у повному обсязі не залежить від коефіцієнта β швидкості зростання щільності ймовірності втрати активу (як і для випадку лінійної функції вигідності). При $q = 1$ вираз (4.90) перетворюється у більш простіший:

$$F(S) = 1 - pr^2. \tag{4.91}$$

Якщо коефіцієнт компенсації менший за одиницю ($q < 1$), то сподівана вигідність повного страхування залежить за лінійним зростаючим законом від швидкості зростання щільності ймовірності втрати від свого найменшого значення $\beta = 0$

$$F(S)=p(1-r^2)+(1-p)\left(1-(q-1)^2\left(1-\frac{1}{2K}\right)\right) \quad (4.92)$$

до найбільшого $\beta=\frac{2(1-p)}{T^2}$ (згідно умови (4.26) для коефіцієнта β)

$$F(S)=p(1-r^2)+(1-p)\left(1-(q-1)^2\left(1-\frac{1}{2K}\right)\right)+\frac{1-p}{6K}(q-1)^2. \quad (4.93)$$

Для ОПР не схильної до фінансового ризику з функцією вигідності (4.49) і сподіваною вигідністю (4.72) для зростаючої щільності у часі можливої випадкової втрати активу можлива ситуація, коли ОПР потрібно буде приймати рішення між страхуванням активу у повному обсязі і відмовою від страхування взагалі. Це рішення залежатиме від того, яка нерівність виконуватиметься: $F(S) > F(0)$ чи $F(S) < F(0)$. ОПР доцільно буде застрахувати актив повністю у випадку виконання нерівності для ймовірності недоторканості активу:

$$p<\frac{(1-(q-1)^2)(1-1/2K-\beta T^2/12K)}{(1-(q-1)^2)(1-1/2K)+r^2} \quad (4.94)$$

і відмовитися від страхування взагалі у разі виконання нерівності протилежної до (4.94), тобто

$$1\ge p>\frac{(1-(q-1)^2)(1-1/2K-\beta T^2/12K)}{(1-(q-1)^2)(1-1/2K)+r^2}. \quad (4.95)$$

Оскільки функція (4.72) є нелінійною відносно фінансового показника, то вона може набувати свого найбільшого значення не тільки на кінцях проміжку визначення [0; S], а й у деякій точці всередині цього проміжку. Для відшукання такої точки (якщо вона існує) продиференціюємо функцію (4.72) за зміною x:

$$F'(x)=-\frac{2pr^2}{S^2}x-\left(1-p-\frac{\beta T^2}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2K}\right)\cdot\frac{2q(qx-S)}{S^2}-\frac{\beta T^2}{2}\left(1-\frac{2}{3K}\right)\cdot\frac{2q(qx-S)}{S^2};$$

$$F'(x)=-\frac{2q(qx-S)}{S^2}\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)-\frac{2pr^2}{S^2}x. \quad (4.96)$$

Прирівняємо похідну (4.96) до нуля:

$$-\frac{2q(qx-S)}{S^2}\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)-\frac{2pr^2}{S^2}x=0 \tag{4.97}$$

і розв'яжемо рівняння (4.97) відносно змінної x:

$$-\frac{2q^2}{S^2}x\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)-\frac{2pr^2}{S^2}x+\frac{2q}{S^2}S\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)=0;$$

$$x=\frac{qS\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)}{q^2\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)+pr^2}. \tag{4.98}$$

З'ясуємо, за яких умов розв'язок (4.98) належить проміжку (0; S). Очевидно, це буде за умови

$$\frac{q\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)}{q^2\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)+pr^2}<1$$

або після спрощення

$$q^2-q+\frac{pr^2}{(1-p)(1-1/2K)-\beta T^2/12K}>0. \tag{4.99}$$

Розв'яжемо рівняння відносно компенсаційного коефіцієнта q прирівнявши ліву частину нерівності (4.99) до нуля

$$q^2-q+\frac{pr^2}{(1-p)(1-1/2K)-\beta T^2/12K}=0. \tag{4.100}$$

Обчислимо дискримінант рівняння (4.100):

$$D=1-\frac{4pr^2}{(1-p)(1-1/2K)-\beta T^2/12K}.$$

Очевидно, що D > 0, коли $\frac{4pr^2}{(1-p)(1-1/2K)-\beta T^2/12K}<1$ або після спрощення, коли

$$p < \frac{1 - 1/2K - \beta T^2/12K}{1 - 1/2K + 4r^2}. \tag{4.101}$$

Отже, розв’язки рівняння (4.100) будуть такі:

$$q_3 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4pr^2}{(1-p)(1-1/2K) - \beta T^2/12K}}\right); \tag{4.102}$$

$$q_4 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4pr^2}{(1-p)(1-1/2K) - \beta T^2/12K}}\right).$$

Зрозуміло, що розв’язок $0 < q_4 < 1/2$, а такий компенсаційний коефіцієнт зацікавить не багатьох клієнтів (якщо такі взагалі будуть). Тому зупинимося на розв’язку $q_3 > 0$. Оскільки рівняння (4.100) є параболою, вітки якої спрямовані вгору, то розв’язок (4.98) належатиме проміжку $(0; S)$, коли $q > q_3$ або з використанням виразу (4.102) і умови (4.9) для компенсаційного коефіцієнта отримаємо

$$1 \geq q > \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4pr^2}{(1-p)(1-1/2K) - \beta T^2/12K}}\right). \tag{4.103}$$

Зазначимо, що права частина нерівності (4.103) має зміст за виконання умови (4.101) для ймовірності недоторканості активу.

Переконаємося, що вираз (4.98) є точкою максимуму сподіваної вигідності (4.72). Для цього знайдемо похідну другого порядку функції (4.72):

$$F''(x) = -\frac{2q^2}{S^2}\left((1-p)\left(1 - \frac{1}{2K}\right) - \frac{\beta T^2}{12K}\right) - \frac{2pr^2}{S^2}. \tag{4.104}$$

Як бачимо, (4.104) – від’ємна, що є достатньою умовою максимум функції. Отже, ОПР за виконання умов (4.103) і (4.101) застрахує не весь актив, а лише його частку виражену формулою (4.98), саме ця частка є оптимальною для даної ОПР і за даних умов.

Реалізацію обчислень засобами MS Excel та обрахунки результатів страхування для випадку зростаючої щільності розподілу в часі можливих випадкових втрат активу наведено у додатку В (таблиці В.8, В.7).

Випадок 2. Дослідимо запропоновану модель (4.11) у випадку, коли функція вигідності власника активу записується у вигляді:

$$u(y,t)=1-\sqrt{-\frac{y}{S}\left(1-\frac{t}{KT}\right)}, \tag{4.105}$$

якщо $y\in[-S;0], t\in[0;T], K>1$.

Спочатку перевіримо виконання умов (4.3)-(4.8) для функції вигідності (4.105).

Якщо y = -S і t = 0, тобто маємо ситуацію повної втрати активу (без компенсації) у початковий момент часу, то вигідність такої ситуації повинна мати найнижчий нульовий рівень

$$u(-S,0)=1-\sqrt{-\frac{-S}{S}\left(1-\frac{0}{KT}\right)}=0,$$

що і видно з отриманого виразу, а це означає виконання умови (4.3) для функції (4.105).

Якщо $y_1 < y_2$, то

$$u(y_1,t)=1-\sqrt{-\frac{y_1}{S}\left(1-\frac{t}{KT}\right)}<1-\sqrt{-\frac{y_2}{S}\left(1-\frac{t}{KT}\right)}=u(y_2,t),$$

а це означає, що умови (4.4)-(4.5) виконуються для функції (4.105).

Якщо $t_1 < t_2$ і $y < 0$, то

$$u(y,t_1)=1-\sqrt{-\frac{y}{S}\left(1-\frac{t_1}{KT}\right)}<1-\sqrt{-\frac{y}{S}\left(1-\frac{t_2}{KT}\right)}=u(y,t_2),$$

це означає, що умови (4.6)-(4.7) також виконуються.

І нарешті, при y = 0, тобто при відсутності втрат протягом усього страхового періоду, вигідність для власника активу повинна бути максимальною:

$$u(0,t)=1-\sqrt{-\frac{0}{S}\left(1-\frac{t}{KT}\right)}=1.$$

Отже для функції (4.105) виконується і умова (4.8).

Визначимо локальну міру несхильності до ризику фінансової складової. Для цього обчислимо частинні похідні 1-го та 2-го порядків за аргументом y:

$$\frac{\partial u(y,t)}{\partial y}=\frac{(-y)^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{S}}\left(1-\frac{t}{KT}\right);$$

$$\frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial y^2}=\frac{(-y)^{-\frac{3}{2}}}{4\sqrt{S}}\left(1-\frac{t}{KT}\right);$$

$$r(y)=-\frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial y^2}\Bigg/\frac{\partial u(y,t)}{\partial y}=\frac{1}{2y}. \qquad (4.106)$$

При від'ємних значеннях y функція несхильності до фінансового ризику (4.106) набирає від'ємних значень (а, отже, ОПР з функцією вигідності (4.105) є схильною до фінансового ризику). А при y = 0 міра несхильності до ризику невизначена.

Графічно локальну міру несхильності до ризику зображено на рис. 4.4.

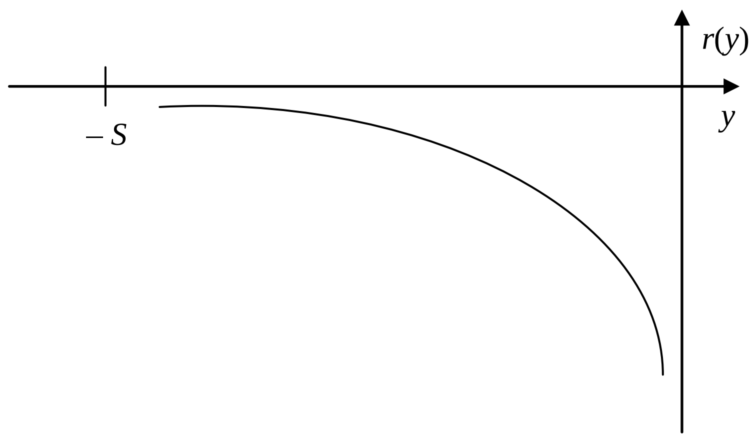


Рис. 4.4. Графік локальної міри несхильності до фінансової складової ризику при функції вигідності (4.105)

Підставимо функцію вигідності (4.105) у модель визначення оптимальної частки страхування активу (4.11):

$$F(x) = p\left(1-\sqrt{\frac{rx}{S}}\right) + \int_0^T \left(1-\sqrt{\frac{S-qx}{S}}\left(1-\frac{t}{KT}\right)\right)\varphi(t)dt\,, \tag{4.107}$$

де $x \in [0;S], \quad S > qx$.

Нехай функція $\varphi(t)$ відповідає рівномірному розподілі в часі можливих випадкових втрат активу і виражається формулою (4.15). Тоді отримаємо:

$$F(x) = p\left(1-\sqrt{\frac{rx}{S}}\right) + \int_0^T \left(1-\sqrt{\frac{S-qx}{S}}\left(1-\frac{t}{KT}\right)\right)\frac{1-p}{T}dt\,,$$

$$F(x) = p\left(1-\sqrt{\frac{rx}{S}}\right) + (1-p)\left(1-\sqrt{\frac{S-qx}{S}}\left(1-\frac{1}{2K}\right)\right). \tag{4.108}$$

При $x = 0$, (4.108) перетворюється у

$$F(0) = p + \frac{1-p}{2K}. \tag{4.109}$$

Формула (4.109) аналогічна до формул (4.17) (лінійний випадок) і (4.56) (квадратичний випадок фінансового аргументу функції вигідності).

При $x = S$,

$$F(S) = p(1-\sqrt{r}) + (1-p)\left(1-\sqrt{1-q}\left(1-\frac{1}{2K}\right)\right). \tag{4.110}$$

Формула (4.110) відрізняється від (4.57), яка виражає повне страхування для функції вигідності, яка залежить від грошової компоненти за квадратичним законом.

Порівняємо вигідності функцій (4.57) і (4.110) для одного з найлегших випадків, а саме, коли компенсаційний коефіцієнт $q = 1$. За такої умови функція (4.110) спрощується:

$$F(S) = 1 - p\sqrt{r}\,. \tag{4.111}$$

Для допустимих значень r ($0 < r < 1$) сподівана вигідність (4.111) менша, ніж (4.58).

Так як функція (4.108) є нелінійною, тому можливо, що свого найбільшого значення вона може набувати не лише на кінцях проміжку [0;

S], а й в деякій точці всередині цього відрізку. Для цього продиференціюємо функцію (4.108) за аргументом x:

$$F'(x) = -\frac{pr}{2S}\sqrt{\frac{S}{rx}} + (1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)\frac{q}{2S}\sqrt{\frac{S}{S-qx}}\,. \qquad (4.112)$$

Прирівняємо похідну (4.112) до нуля

$$-\frac{pr}{2S}\sqrt{\frac{S}{rx}} + (1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)\frac{q}{2S}\sqrt{\frac{S}{S-qx}} = 0 \qquad (4.113)$$

і розв'яжемо отримане рівняння відносно змінної x. Запишемо рівняння (4.113) у вигляді:

$$(1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)\frac{q}{2S}\sqrt{\frac{S}{S-qx}} = \frac{pr}{2S}\sqrt{\frac{S}{rx}}$$

і піднесемо обидві частини отриманої рівності до квадрату:

$$(1-p)^2\left(1-\frac{1}{2K}\right)^2\frac{q^2}{4S(S-qx)} = \frac{p^2 r}{4Sx};$$

$$x\left((1-p)^2\left(1-\frac{1}{2K}\right)^2 q^2 + p^2 rq\right) = p^2 rS;$$

$$x = x_0 = \frac{p^2 rS}{q^2(1-p)^2(1-1/2K)^2 + p^2 rq}\,. \qquad (4.114)$$

З'ясуємо, за якої умови розв'язок x_0, виражений виразом (4.114) належатиме проміжку (0; S). Очевидно це буде тоді, коли

$$\frac{p^2 r}{q^2(1-p)^2(1-1/2K)^2 + p^2 rq} < 1$$

або перетворивши нерівність відносно компенсаційного коефіцієнта q отримаємо

$$\frac{(1-p)^2(1-1/2K)^2}{p^2 r}q^2 + q - 1 > 0\,. \qquad (4.115)$$

Розв'яжемо рівняння відносно q, прирівнявши ліву частину нерівності (4.115) до нуля

$$\frac{(1-p)^2(1-1/2K)^2}{p^2 r}q^2+q-1=0. \qquad (4.116)$$

Розв’язки цього рівняння будуть такі:

$$q_5=\frac{p^2 r}{2(1-p)^2(1-1/2K)^2}\left(-1+\sqrt{1+\frac{4(1-p)^2(1-1/2K)^2}{p^2 r}}\right); \qquad (4.117)$$

$$q_6=\frac{p^2 r}{2(1-p)^2(1-1/2K)^2}\left(-1-\sqrt{1+\frac{4(1-p)^2(1-1/2K)^2}{p^2 r}}\right).$$

Очевидно, що $q_6 < 0$, тому розглянемо розв’язок q_5. Оскільки рівняння (4.116) є рівнянням параболи, гілки якої спрямовані вгору і зважаючи на умову (4.115) матимемо, до $q > q_5$, а враховуючи (4.117) і умову (4.9) для компенсаційного коефіцієнта отримаємо:

$$1\ge q>\frac{p^2 r}{2(1-p)^2(1-1/2K)^2}\left(\sqrt{1+\frac{4(1-p)^2(1-1/2K)^2}{p^2 r}}-1\right). \qquad (4.118)$$

Отже, розв’язок x_0, виражений формулою (4.114) належить проміжку $(0; S)$ за умови (4.118).

Перевіримо, чи вираз (4.114) є точкою максимуму сподіваної вигідності (4.108). Для цього знайдемо похідну другого порядку за змінною x:

$$F''(x)=\frac{p}{4x^2}\sqrt{\frac{rx}{S}}+(1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)\frac{q^2}{4(S-qx)^2}\sqrt{\frac{S-qx}{S}}.$$

Підставимо у похідну другого порядку значення x_0, виражене формулою (4.114), для того, щоб з’ясувати знак похідної у цій точці. При цьому отримаємо:

$$F''(x_0)=\frac{p}{4}\left(\frac{q^2(1-p)^2(1-1/2K)^2}{p^2 rS}+\frac{q}{S}\right)^2\sqrt{\frac{p^2 r^2}{q^2(1-p)^2(1-1/2K)^2+p^2 rq}}+$$

$$+(1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)\frac{q^2(q(1-p)^2(1-1/2K)^2+p^2 r)^2}{4Sq^2(1-p)^4(1-1/2K)^4}\frac{(1-p)(1-1/2K)\sqrt{q}}{\sqrt{q(1-p)^2(1-1/2K)^2+p^2 r}}$$

або після спрощення

$$F''(x_0) = \frac{p^2 r}{4\sqrt{q^2(1-p)^2(1-1/2K)^2 + p^2 rq}} \left(\frac{q^2(1-p)^2(1-1/2K)^2}{p^2 rS} + \frac{q}{S} \right)^2 +$$

$$+ \frac{\sqrt{q}(q(1-p)^2(1-1/2K)^2 + p^2 r)^{3/2}}{4S(1-p)^2(1-1/2K)^2} > 0.$$

Отже, $F''(x_0)$ додатна величина, а значить розв'язок (4.114) виражає мінімум функції (4.108), що не задовольняє модель (4.11). Це означає, що функція (4.108) всередині проміжку (0; S) не має максимумів, тобто є опуклою. Отже, у випадку, коли функція вигідності ОПР виражається функцією (4.105), а отже ОПР є схильною до ризику, і сподівана вигідність для випадку рівномірного розподілу в часі можливих випадкових втрат активу виражається функцією (4.108), то ОПР буде вибирати між двома рішеннями: страхувати актив S у повному обсязі чи відмовитися від страхування взагалі. З аналогічних міркувань, які зроблені у попередніх пунктах цього розділу і беручи до уваги вирази (4.109) і (4.110) отримаємо таке: ОПР доцільно застрахувати актив повністю тоді, коли для ймовірності недоторканості активу p виконується така умова:

$$p < \frac{(1-\sqrt{1-q})(1-1/2K)}{(1-\sqrt{1-q})(1-1/2K) + \sqrt{r}}. \quad (4.119)$$

Коли ж виконується умова протилежна до (4.119), тобто

$$p > \frac{(1-\sqrt{1-q})(1-1/2K)}{(1-\sqrt{1-q})(1-1/2K) + \sqrt{r}}, \quad (4.120)$$

то у цьому випадку доцільніше відмовитися від страхування.

Реалізацію обчислень засобами MS Excel та обрахунки результатів страхування для випадку рівномірного розподілу в часі можливих випадкових втрат активу наведено у додатку В (таблиці В.10, В.9).

Розглянемо тепер модель визначення оптимальної частки страхування для функції вигідності (4.105) для випадку зростаючої щільності розподілу можливої випадкової втрати активу.

Підставимо у модель (4.11) функцію вигідності (4.105) і щільність розподілу (4.23):

$$F(x) = p\left(1-\sqrt{\frac{rx}{S}}\right)+\int_0^T\left(1-\sqrt{\frac{S-qx}{S}}\left(1-\frac{t}{KT}\right)\right)(\alpha+\beta t)dt\,.$$

Безпосереднім інтегруванням знайдемо:

$$F(x) = p\left(1-\sqrt{\frac{rx}{S}}\right)+\alpha\left(T-T\sqrt{\frac{S-qx}{S}}+\frac{T}{2K}\sqrt{\frac{S-qx}{S}}\right)+ \\ +\beta\left(\frac{T^2}{2}-\frac{T^2}{2}\sqrt{\frac{S-qx}{S}}+\frac{T^2}{3K}\sqrt{\frac{S-qx}{S}}\right). \quad (4.121)$$

Враховуючи формулу (4.24) – зв’язку коефіцієнтів α та β, – цільова функція (4.121) перетвориться на таку:

$$F(x) = p\left(1-\sqrt{\frac{rx}{S}}\right)+\left(1-p-\frac{\beta T^2}{2}\right)\left(1-\sqrt{\frac{S-qx}{S}}\left(1-\frac{1}{2K}\right)\right)+ \\ +\frac{\beta T^2}{2}\left(1-\sqrt{\frac{S-qx}{S}}\left(1-\frac{2}{3K}\right)\right). \quad (4.122)$$

Якщо спрямувати коефіцієнт β до нуля, то цільова функція (4.122) прямуватиме до функції (4.108), що відповідає рівномірному розподілу випадкової величини активу для функції (4.105).

Знайдемо спочатку значення функції (4.122) на кінцях проміжку [0; S].

Отже, при $x = 0$

$$F(0) = p+\left(1-p-\frac{\beta T^2}{2}\right)\left(1-1+\frac{1}{2K}\right)+\frac{\beta T^2}{2}\left(1-1+\frac{2}{3K}\right);$$

$$F(0) = p+\frac{1-p}{2K}+\frac{\beta T^2}{12K}\,. \quad (4.123)$$

Формула (4.123) аналогічна до формул (4.30) (для випадку лінійної залежності фінансового аргументу функції вигідності) і (4.73) (для випадку квадратичної залежності фінансового аргументу функції вигідності) для зростаючої щільності розподілу можливої випадкової втрати активу.

Обчислимо тепер сподівану вигідність страхування в повному обсязі:

$$F(S) = p\left(1-\sqrt{r}\right)+\left(1-p-\frac{\beta T^2}{2}\right)\left(1-\sqrt{1-q}\left(1-\frac{1}{2K}\right)\right)+\frac{\beta T^2}{2}\left(1-\sqrt{1-q}\left(1-\frac{2}{3K}\right)\right). \tag{4.124}$$

Так як сподівана вигідність страхування активу в повному обсязі $F(S)$ залежить від усіх параметрів досліджуваної моделі, окрім самого розміру активу S, розглянемо залежності між цими параметрами.

Найбільш помітною є залежність $F(S)$ від параметра r:

$$F(S) = C_7 - p\sqrt{r}, \tag{4.125}$$

де $C_7 = p+\left(1-p-\frac{\beta T^2}{2}\right)\left(1-\sqrt{1-q}\left(1-\frac{1}{2K}\right)\right)+\frac{\beta T^2}{2}\left(1-\sqrt{1-q}\left(1-\frac{2}{3K}\right)\right)$.

З формули (4.125), і з того, що ймовірність p – додатна величина, випливає, що сподівана вигідність страхування активу в повному обсязі є спадною функцією від параметра r, тобто, чим більший розмір страхового внеску, тим менша сподівана вигідність страхування.

З'ясуємо залежність величини $F(S)$ від ймовірності p збережності активу протягом періоду T. Найкраще зобразити таку залежність у вигляді:

$$F(S) = C_9 + C_8 p, \tag{4.126}$$

де

$$C_8 = -\sqrt{r}+\sqrt{1-q}\left(1-\frac{1}{2K}\right), \tag{4.127}$$

$$C_9 = \left(1-\frac{\beta T^2}{2}\right)\left(1-\sqrt{1-q}\left(1-\frac{1}{2K}\right)\right)+\frac{\beta T^2}{2}\left(1-\sqrt{1-q}\left(1-\frac{2}{3K}\right)\right)$$

або після спрощення

$$C_9 = 1 - \sqrt{1-q}\left(1 - \frac{1}{2K}\right) + \frac{\beta T^2}{12K}.$$

Якщо $C_8 < 0$, а це буде тоді, коли виконується нерівність

$$\frac{1 - r - 1/K(1 - 1/2K)}{1 - 1/K(1 - 1/2K)} < q \le 1$$

(q = 1 означає, що страхова компанія обіцяє клієнтові повне відшкодування його можливих втрат), то залежність величини $F(S)$ від ймовірності p є лінійною і спадною, тобто, чим менша ймовірність p збережності активу S протягом періоду T, тим вищою є сподівана вигідність страхування.

Якщо виконується рівність

$$q = \frac{1 - r - 1/K(1 - 1/2K)}{1 - 1/K(1 - 1/2K)}, \tag{4.128}$$

то коефіцієнт C_8 у формулі (4.126) перетворюється в нуль, а отже сподівана вигідність страхування активу в повному обсязі $F(S)$ стає незалежною від ймовірності збережності активу.

Якщо виконується нерівність

$$q < \frac{1 - r - 1/K(1 - 1/2K)}{1 - 1/K(1 - 1/2K)}, \tag{4.129}$$

то коефіцієнт C_8 стає додатним, і як наслідок, сподівана вигідність повного страхування активу $F(S)$ є залежною від ймовірності p недоторканості активу за зростаючим законом: чим вища ймовірність p, тим більша сподівана вигідність повного страхування активу. Свого максимального значення сподівана вигідність повного страхування активу досягає при p = 1, – гарантованій збережності активу протягом страхового періоду.

Ситуація, яка складається за умови (4.129) є дещо парадоксальною. Сприятлива для страхової компанії залежність насправді не є вигідною для неї при великих значеннях p, оскільки із зростанням сподіваної вигідності страхування для клієнта зростає і сподівана вигідність його відмови від страхування, і, як наслідок компанія може втратити клієнта.

При p = 1, згідно формули (4.123) вигідність відмови від страхування $F(0) = 1 + \frac{\beta T^2}{12K}$, а вигідність повного страхування за цієї ж умови згідно формули (4.124) $F(S) = 1 - \sqrt{r} + \frac{\beta T^2}{12K}\sqrt{1-q}$, а отже, $F(0) > F(S)$, тобто у цьому випадку краще відмовитися від страхування. Ця ж нерівність зберігається і при значеннях p, близьких до 1.

Дослідимо тепер залежність сподіваної вигідності повного страхування від коефіцієнта компенсації q. Для цього формулу (4.124) запишемо у такому вигляді:

$$F(S) = C_{10} + C_{11}\sqrt{1-q}, \tag{4.130}$$

де $C_{10} = p\left(1-\sqrt{r}\right) + \left(1 - p - \frac{\beta T^2}{2}\right) + \frac{\beta T^2}{2}$,

$$C_{11} = -\left(1 - p - \frac{\beta T^2}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2K}\right) - \frac{\beta T^2}{2}\left(1 - \frac{2}{3K}\right). \tag{4.131}$$

Як видно з (4.131) $C_{11} < 0$, отже сподівана вигідність повного страхування активу залежить за зростаючим законом від компенсаційного коефіцієнта q.

Вияснимо тепер характер залежності сподіваної вигідності повного страхування $F(S)$ від швидкості зростання ймовірності втрати активу β, для цього запишемо вираз (4.124) у такому вигляді:

$$F(S) = p\left(1-\sqrt{r}\right) + (1-p)\left(1 - \sqrt{1-q}\left(1 - \frac{1}{2K}\right)\right) + \frac{\beta T^2}{12K}\sqrt{1-q}. \tag{4.132}$$

У випадку повної компенсації вартості активу (q = 1) у разі його втрати, сподівана вигідність страхування активу у повному обсязі не залежить від коефіцієнта β, тобто від швидкості зростання щільності ймовірності втрати активу і формула (4.132) набирає простішого вигляду:

$$F(S) = 1 - p\sqrt{r}. \tag{4.133}$$

Формула (4.133) є аналогічною до (4.111) – для випадку рівномірного розподілу в часі можливих випадкових втрат активу для функції вигідності (4.105).

У випадку, коли компенсаційний коефіцієнт q < 1, то залежність сподіваної вигідності повного страхування $F(S)$ від швидкості зростання щільності ймовірності втрати активу є зростаючою за лінійним законом від свого найменшого значення при $\beta = 0$ (беручи до уваги умову (4.26)):

$$F(S) = p\left(1-\sqrt{r}\right) + (1-p)\left(1-\sqrt{1-q}\left(1-\frac{1}{2K}\right)\right) \qquad (4.134)$$

до найбільшого при $\beta = \dfrac{2(1-p)}{T^2}$:

$$F(S) = p\left(1-\sqrt{r}\right) + (1-p)\left(1-\sqrt{1-q}\left(1-\frac{1}{2K}\right)\right) + \frac{(1-p)\sqrt{1-q}}{6K};$$

$$F(S) = p\left(1-\sqrt{r}\right) + (1-p)\left(1-\sqrt{1-q}\left(1-\frac{1}{3K}\right)\right). \qquad (4.135)$$

Оскільки функція (4.122) є нелінійною відносно фінансового показника, то вона може досягати свого найбільшого (максимального) значення не лише на кінцях проміжку визначення [0; S], а у деякій точці всередині цього проміжку.

Для цього продиференціюємо функцію (4.122) за змінною x, фінансовою складовою функції вигідності:

$$F'(x) = -\frac{pr}{2S}\sqrt{\frac{S}{rx}} - \left(1-p-\frac{\beta T^2}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2K}\right)\left(\sqrt{\frac{S-qx}{S}}\right)' -$$
$$-\frac{\beta T^2}{2}\left(1-\frac{2}{3K}\right)\left(\sqrt{\frac{S-qx}{S}}\right)';$$

$$F'(x) = -\frac{pr}{2S}\sqrt{\frac{S}{rx}} - \left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right) - \frac{\beta T^2}{12K}\right)\frac{q}{2S}\sqrt{\frac{S}{S-qx}}. \qquad (4.136)$$

Прирівняємо похідну (4.136) до нуля:

$$-\frac{pr}{2S}\sqrt{\frac{S}{rx}}-\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)\frac{q}{2S}\sqrt{\frac{S}{S-qx}}=0. \qquad (4.137)$$

Запишемо рівняння (4.137) у такому вигляді:

$$\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)\frac{q}{2S}\sqrt{\frac{S}{S-qx}}=\frac{pr}{2S}\sqrt{\frac{S}{rx}}$$

і піднесемо обидві частини отриманої рівності до квадрату:

$$\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)^2\frac{q^2}{4S(S-qx)}=\frac{p^2 r}{4Sx};$$

$$\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)^2 q^2 x+p^2 rqx=p^2 rS;$$

$$x=x_0=\frac{p^2 rS}{\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)^2 q^2+p^2 rq}. \qquad (4.138)$$

Очевидно, що корінь рівняння (4.137) x, виражений формулою (4.138) належатиме проміжку визначення (0; S), тоді, коли

$$\frac{p^2 r}{\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)^2 q^2+p^2 rq}<1$$

або після спрощення

$$\frac{1}{p^2 r}\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)^2 q^2+q-1>0. \qquad (4.139)$$

Розв’яжемо рівняння відносно компенсаційного коефіцієнта q прирівнявши ліву частину нерівності (4.139) до нуля:

$$\frac{1}{p^2 r}\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)^2 q^2+q-1=0. \qquad (4.140)$$

Отримаємо такі два розв’язки рівняння (4.140):

$$q_7 = \frac{p^2 r}{2\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)^2}\left(-1+\sqrt{1+\frac{4\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)^2}{p^2 r}}\right), \quad (4.141)$$

$$q_8 = \frac{p^2 r}{2\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)^2}\left(-1-\sqrt{1+\frac{4\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)^2}{p^2 r}}\right).$$

Зрозуміло, що розв'язок $q_8 < 0$ не задовольняє умови (4.9) для компенсаційного коефіцієнта, тому розглянемо розв'язок q_7. Оскільки рівняння (4.140) є рівнянням параболи, гілки якої спрямовані вгору, а беручи до уваги умову (4.139) отримаємо, що $q > q_7$, а враховуючи (4.141) і умову (4.9) отримаємо

$$\frac{p^2 r}{2\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)^2}\left(\sqrt{1+\frac{4\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)^2}{p^2 r}}-1\right) < q \le 1. \quad (4.142)$$

Отже, за умови (4.142) розв'язок x_0, виражений формулою (4.138) належить проміжку (0; S).

З'ясуємо, чи вираз (4.138) є точкою максимуму для функції (4.122). Для цього знайдемо похідну другого порядку функції (4.122) за змінною x:

$$F''(x) = \frac{p}{4x^2}\sqrt{\frac{rx}{S}} + \left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)\frac{q^2}{4S(S-qx)^2}\sqrt{\frac{S-qx}{S}}. \quad (4.143)$$

Підставимо значення (4.138) у похідну другого порядку (4.143) функції (4.122) і з'ясуємо знак похідної:

$$F''(x_0)=\frac{p}{4}\left(\frac{q^2\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)^2}{p^2 rS}+\frac{q}{S}\right)^2\sqrt{\frac{p^2r^2}{q^2\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)^2+p^2rq}}+$$

$$+\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)\frac{q^2\left(q\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)^2+p^2r\right)^2}{4Sq^2\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)^4}\times$$

$$\times\frac{\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)\sqrt{q}}{\sqrt{q\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)^2+p^2r}}$$

або після спрощення

$$F''(x_0)=\frac{p^2r}{4\sqrt{q^2\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)^2+p^2rq}}\left(\frac{q^2\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)^2}{p^2rS}+\frac{q}{S}\right)^2+$$

$$+\frac{\sqrt{q}\left(q\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)^2+p^2r\right)^{3/2}}{4S\left((1-p)\left(1-\frac{1}{2K}\right)-\frac{\beta T^2}{12K}\right)^2}>0.$$

Отже, друга похідна функції (4.122) у точці x_0, вираженій формулою (4.138) є додатною величиною, а значить точка x_0 є точкою мінімуму, що не відповідає нашій моделі оптимального страхування (4.11).

Отже, коли ОПР схильна до фінансового ризику і її функція вигідності виражається формулою (4.105), сподівана вигідність функцією (4.122) для випадку зростаючої щільності розподілу можливої випадкової втрати активу, то ОПР буде вибирати між страхуванням активу у повному обсязі і відмовою від страхування. Виходячи із міркувань зроблених у попередніх пунктах цього розділу у подібних ситуаціях і враховуючи вирази (4.123) і (4.124) отримаємо, що ОПР доцільно прийняти рішення про страхування активу S у повному обсязі, коли ймовірність недоторканості активу буде задовольняти таку умову:

$$p < \frac{(1-\sqrt{1-q})(1-1/2K-\beta T^2/12K)}{(1-\sqrt{1-q})(1-1/2K)+\sqrt{r}}. \qquad (4.144)$$

У разі виконання умови протилежної до (4.144), тобто

$$p > \frac{(1-\sqrt{1-q})(1-1/2K-\beta T^2/12K)}{(1-\sqrt{1-q})(1-1/2K)+\sqrt{r}}, \qquad (4.145)$$

то ОПР доцільно відмовитися від страхування активу повністю.

Реалізацію обчислень засобами MS Excel та обрахунки результатів страхування для випадку зростаючої щільності розподілу в часі можливих випадкових втрат активу наведено у додатку В (таблиці В.12, В.11).

Запропоновані у даному розділі економіко-математичні моделі для оптимального страхування активу впроваджені в діяльність Відкритого акціонерного страхового товариства “Терен” (м. Тернопіль).

Висновки до 4-го розділу

1. Розширено модель оптимального страхування активу для функції вигідності з двома аргументами. Розроблено модель визначення оптимальної частки страхування активу, яка враховує грошовий і часовий аспекти страхування (4.11) за допомогою функції вигідності з грошовим та часовим аргументами для ситуацій рівномірного розподілу та зростаючої з часом щільності розподілу можливої випадкової втрати активу.

2. Побудовано модель оптимального страхування активу (4.14) для ОПР нейтральної до фінансового і грошового ризиків, тобто для функції вигідності (4.12) лінійної за грошовим і часовим аргументами. Отримано моделі оптимального страхування у випадку рівномірного розподілу (4.16) та зростаючої щільності розподілу (4.29) в часі можливої випадкової втрати активу.

Для випадку зростаючою з часом щільності розподілу можливих випадкових втрат активу обчислено сподівану вигідність відмови від страхування (4.30) і сподівану вигідність страхування активу у повному обсязі (4.31). З’ясовано залежності сподіваної вигідності відмови від страхування від параметрів моделей. Зокрема встановлено, що вона залежить:

- лінійно, за зростаючим законом, від кутового коефіцієнта щільності розподілу випадкових втрат активу та ймовірності збережності активу;
- квадратично, за зростаючим законом, від періоду страхування;
- гіперболічно, за спадним законом, від кількості страхових періодів.

Також досліджено залежності та економічний зміст сподіваної вигідності страхування активу у повному обсязі від параметрів моделі. Зокрема встановлено, що вона залежить:

- лінійно, за зростаючим законом, від кутового коефіцієнта щільності розподілу випадкових втрат активу та компенсаційного коефіцієнта;
- лінійно, за спадним законом, від коефіцієнта страхового внеску;
- з’ясовано умови залежності від ймовірності збережності активу.

Встановлено, що при рівномірному розподілі та при зростаючій щільності розподілу в часі можливої випадкової втрати активу ОПР з функцією вигідності (4.12), обиратиме між рішеннями: страхувати актив повністю чи відмовитися від страхування взагалі. Зроблено розрахунки для вибору рішення.

3. Побудовано модель (4.54) оптимального страхування активу для ОПР не схильної до фінансового ризику і нейтральної до часового, тобто для функції вигідності (4.49) квадратичної за грошовим аргументом і лінійної за часовим. Для такої функції вигідності побудовано моделі оптимального страхування (4.55), (4.72) та для обрахування оптимальної частки страхування (4.61) і (4.98) для випадків рівномірного розподілу і зростаючої з часом щільності розподілу можливої випадкової втрати активу та встановлено умови для прийняття ОПР рішення з страхування активу, а саме: страхувати актив повністю, відмовитися від страхування взагалі чи страхувати частку активу. Зроблено розрахунки для вибору рішення.

З’ясовано, що величина сподіваної вигідності відмови від страхування для випадків рівномірного розподілу (4.56) і зростаючої щільності розподілу (4.73) у часі можливих випадкових втрат активу така сама, як і для випадку функції вигідності лінійної за обома аргументами.

Для випадку зростаючої з часом щільності розподілу можливих випадкових втрат активу досліджено залежності та економічний зміст сподіваної вигідності страхування активу у повному обсязі (4.74) від параметрів моделі. Зокрема встановлено, що вона залежить:

- квадратично, за спадним законом, від коефіцієнта страхового внеску та компенсаційного коефіцієнта;
- лінійно, за зростаючим законом, від кутового коефіцієнта щільності розподілу випадкових втрат активу;
- з’ясовано умови залежності від ймовірності збереженості активу.

З’ясовано умови для компенсаційного коефіцієнта (4.103) та ймовірності збереженості активу (4.101) для обрахунку оптимальної частки страхування (4.98), а також умови для прийняття рішень з відмови від страхування активу і повного страхування.

4. Побудовано модель (4.107) оптимального страхування активу для ОПР схильної до фінансового ризику і нейтральної до часового, тобто для функції вигідності (4.105) ірраціональної за грошовим аргументом і лінійної за часовим. Побудовано моделі оптимального страхування при рівномірному розподілі (4.108) та при зростаючій з часом щільності розподілу (4.122) можливої випадкової втрати активу. Встановлено, що за такої функції вигідності, при рівномірному розподілі та при зростаючій щільності розподілу можливої випадкової втрати активу ОПР обиратиме між рішеннями: страхувати актив повністю чи відмовитися від страхування взагалі. Зроблено розрахунки для вибору рішення.

Побудовано моделі для визначення сподіваної вигідності відмови від страхування для рівномірного розподілу (4.109) і зростаючої щільності розподілу (4.123) у часі можливих випадкових втрат активу. З’ясовано що величина сподіваної вигідності відмови від страхування для цих випадків така сама, як для випадку функції вигідності лінійної за обома аргументами і для функції квадратичної за грошовим аргументом і лінійної за часовим.

Побудовано моделі (4.110) і (4.124) для визначення сподіваної вигідності страхування активу у повному обсязі для рівномірного розподілу та зростаючої з часом щільності розподілу можливих випадкових втрат активу відповідно.

Розглянуто залежності сподіваної вигідності страхування активу у повному обсязі від параметрів моделі для випадку зростаючої з часом щільності розподілу можливих випадкових втрат активу. Зокрема встановлено, що вона залежить:

– за спадним законом від коефіцієнта страхового внеску;
– за зростаючим законом від компенсаційного коефіцієнта;
– за лінійним, зростаючим законом, від кутового коефіцієнта щільності розподілу випадкових втрат активу;
– з’ясовано умови залежності від ймовірності збережності активу.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

1. На сучасному етапі, в умовах розвитку ринкової економіки в Україні, складаються об’єктивно-суб’єктивні фактори, що призводять до ускладнення задач прийняття фінансових рішень. У реальних ситуаціях результати фінансових рішень не завжди можна передбачити наперед. Вибір альтернативного рішення в умовах невизначеності і ризику здійснюється за допомогою кількісних та якісних методів. Кількісна оцінка пріоритетності альтернативних дій залежить від особистих характеристик ОПР, тому повинна бути відносною. В основі кількісної оцінки пріоритетності альтернативних дій лежить теорія вигідності. Вирішення проблеми прийняття ефективних фінансових рішень в ринковій системі на основі функції вигідності вимагає проведення дослідження з розробки економіко-математичних методів та моделей в умовах невизначеності і ризику

2. Аналіз літературних джерел та практичних розробок показав, що задачі прийняття рішень з розгляданням вигідностей і ймовірностей були першими, які привернули увагу дослідників-економістів. Постановка таких задач полягала у тому, що ОПР вибирає певні дії, де на отриманий результат дії впливають випадкові події, непідвласні людині. Але маючи деякі знання про ймовірність цих подій, ОПР може розрахувати найбільш вигідну сукупність і почерговість своїх дій. Саме такий підхід, що базується на спільному використанні теорії вигідності і теорії ймовірності для побудови моделей було запропоновано наприкінці 40-х років 20 ст. Дж. фон Нейманом і О. Моргенштерном. Цими вченими було сформульовано ряд припущень (аксіом) про поведінку людини і доведено основну теорему теорії вигідності про існування, з точністю до монотонного строгого лінійного перетворення, деякої функції, яка встановлює людський вибір – функції вигідності.

3. Показано, що прийняття рішень з використанням функції вигідності є інструктивним підходом, який призначений для ОПР, яка готова напружено і систематизовано обдумувати важливі проблеми при прийнятті рішень, при

цьому ОПР зазвичай користується принципом найбільшої вигідності (максимізації своєї функції вигідності). У моделях прийняття рішень з використанням функції вигідності враховується психологічний аспект ризику, який дає змогу ОПР впливати на результати наслідків рішень шляхом проведення оцінки їх вигідності. Графічна і функціональна форма функції вигідності дають інформацію про ставлення ОПР до ризику (схильність, несхильність, нейтральність), яке є суб'єктивною характеристикою кожної особи. Перевагою теорії вигідності є те, що вона враховує як кількісні (затрати ресурсів) так і якісні (людський фактор) аспекти варіантів рішень. Як правило, при прийнятті рішень необхідно враховувати міру несхильності до ризику, яку відображає кривизна функції вигідності.

4. У результаті проведеного аналізу літературних джерел показано, що серед факторів, від яких залежить вигідність, особливої уваги заслуговує часове вимірювання, адже для ОПР не байдуже, коли отримати певну суму: тепер чи у майбутньому. На думку економістів, вигідність певного наслідку дій для ОПР є тим меншою, чим більше часу повинно пройти до отримання нею відповідної грошової суми. Тому доцільно розглядати властивості функції вигідності з двома факторами: гроші та час і розробляти економіко-математичні моделі на їх основі для прийняття фінансових рішень.

5. Побудовано функцію вигідності з факторами гроші і час при комбінуванні постійної міри несхильності і нейтральності до фінансового і часового ризиків, зокрема побудовано функції вигідності за умов:

– постійної міри несхильності до ризику щодо грошового параметру і нейтральності до часового ризику (2.23);
– нейтральності до грошового параметру і постійної міри несхильності до ризику щодо часу (2.40);
– нейтральності до ризику щодо грошового і нейтральності щодо часового параметрів (2.43);

– постійної міри несхильності до ризику щодо фінансового параметру і постійної міри несхильності до ризику щодо часу (2.46),

а також побудовано функції вигідності (2.28), (2.42), (2.45), (2.48) для цих випадків відповідно за умови адитивної незалежності факторів гроші і час

6. Запропоновано підхід до дослідження функцій вигідності з грошовим та часовим аргументами на основі дослідження ліній рівня вигідності для випадку адитивної незалежності грошового і часового факторів, який розглянуто для функції вигідності (2.28) при постійній мірі несхильності до фінансового ризику і нейтральності до часового ризику. З'ясовано важливу властивість лінії рівня вигідності, а саме: всі точки, які розташовані під лінією рівня більш вигідні, ніж ті, що розташовані над нею.

7. Розглянуто задачу відбору одного з кількох альтернативних інвестиційних проектів в умовах ризику як багатокритеріальну у контексті фінансово часових показників. Запропоновано підхід щодо представлення і розв'язання її у вигляді двовимірної (за вимірами проекти і критерії) (3.25) та тривимірної (за вимірами (проекти, критерії та економічні ситуації) матриць. З'ясовано, що в процесі розв'язання задачі відбору інвестиційних проектів необхідне врахування суб'єктивного фактора у вигляді функції вигідності ОПР з факторами гроші та час (3.30).

8. Побудовано модель (3.35) розподілу інвестиційних коштів власника грошового активу між різнотерміновими вкладами з різними ставками доходності у різні періоди з використанням функції вигідності з грошовим та часовим аргументами ОПР, за умови адитивної незалежності грошового і часового факторів:

– при нейтральному ставленні ОПР до фінансового і грошового ризиків (3.60). Встановлено, у цьому випадку, ОПР – власник активу вибирає короткотерміновий вид вкладу, повністю відмовляючись при цьому від довготермінового. А за умови (3.82) обере короткотерміновий чи довготерміновий вид вкладу залежно від того, вигідність якого більша.

– при постійній мірі несхильності до фінансового ризику і нейтральності до часового (3.90). Показано, що при постійній мірі несхильності до фінансового ризику і нейтральності до часового ризику ОПР буде приймати рішення про розподіл інвестиційних коштів між різнотерміновими видами вкладів.

9. Виходячи з моделі оптимального страхування активу для функції вигідності з одним аргументом, дістала подальший розвиток модель оптимального страхування активу для функції вигідності з двома аргументами гроші і час. Розроблено модель (4.11) для оптимального страхування активу, яка враховує грошовий і часовий аспекти страхування за допомогою функції вигідності для ситуацій рівномірного розподілу та зростаючої з часом щільності розподілу можливої випадкової втрати активу, яка дає змогу ОПР (страхувальнику) приймати рішення щодо оптимального страхування як грошових, так і виробничих засобів, а страховику управляти його фінансовими ресурсами та прогнозувати поведінку конкурентів на страховому ринку.

10. Побудовано модель (4.14) оптимального страхування активу для ОПР нейтральної до фінансового і грошового ризиків, тобто для функції лінійної за грошовим і часовим аргументами. З’ясовано, що при рівномірному розподілі та при зростаючій щільності розподілу можливої випадкової втрати активу ОПР обиратиме між рішеннями: страхувати актив повністю чи відмовитися від страхування взагалі. Зроблено розрахунки для вибору рішення.

11. Побудовано моделі оптимального страхування активу для ОПР не схильної (4.54) і схильної (4.107) до фінансового ризику та нейтральної до часового, тобто для функції нелінійної за грошовим аргументом і лінійної за часовим. З’ясовано умови для випадків рівномірного розподілу та зростаючої щільності розподілу можливої випадкової втрати активу, прийняття ОПР рішення з страхування активу. Для випадку несхильності ОПР до

фінансового ризику побудовано моделі (4.61) і (4.98) для обрахунку оптимальної частки страхування активу. Зроблено розрахунки для вибору рішення і обрахунку оптимальної частки страхування активу.

12. Моделі, які розроблені у даному дисертаційному дослідженні, належать до класу економіко-математичних, оскільки функції побудовані з урахуванням економічного змісту та властивостей їх компонент та всі математичні перетворення, використані в процесі дослідження моделей, проведені з урахуванням їх економічного змісту.

У результаті виконаних обчислень на основі реальних даних суб’єктів господарювання показано, що побудовані в даному дисертаційному дослідженні економіко-математичні моделі, які доведені до практичної реалізації засобами MS Excel, дають змогу приймати ефективні фінансові рішення з урахуванням об’єктивно-суб’єктивних чинників в умовах невизначеності й ризику.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аналіз вигід і витрат: Практичний посібник: Пер. з англ. С. Соколик. – К.: Основи, 1999. – 176 с.
2. Баззел Р., Кокс Д., Браун Р. Информация и риск в маркетинге: Пер. с англ. – М.: Финстатинформ, 1993. – 96 с.
3. Балабанов И.Т. Основы финансового капитала. Как управлять капиталом? – М.: Финансы и статистика, 1994. – 384 с.
4. Балабанов И.Т. Финансовый менеджмент. – М.: Финансы и статистика, 1994. – 224 с.
5. Бернс В., Хавранек П. М. Руководство по оценке эффективности инвестиций: Пер. с англ. и дополн. изд. – М.: АОЗТ “Интерэксперт”, ИНФРА-М, 1995. – 528 с.
6. Бернулли Д. Опыт новой теории измерения жребия (1738) // Теория потребительского поведения и спроса. – Спб.: Экономическая школа, 1993. – С.11– 27 – (Вехи экономической мысли, вып. 1).
7. Бирман Г., Шмидт С. Экономический анализ инвестиционных проектов: Пер. с англ. /Под ред. Л. П. Белых. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 247 с.
8. Бланк И.А. Инвестиционный менеджмент. – К.: МП "ИТЕМ" ЛТД, "Юнайтед Лондон Трейд Лимитед", 1995. – 448 с.
9. Бланк И.А. Основы финансового менеджмента. – К.: Ника-Центр, Т.2, 2000. – 512 с.
10. Блекуэлл Д., Гиршик М.А. Теория игр и статистических решений. – М.: Иностр.лит., 1958. – 318 с.
11. Бочаров В. В. Финансово-кредитные методы регулирования рынка инвестиций. – М.: Финансы и статистика, 1993. – 144 с.
12. Бромвич М. Анализ экономической эффективности капиталовложений: Пер. с англ. А.Г. Пивовар. – М.: ИНФРА-М, 1996. – 432 с.
13. Ван Хорн Дж. К. Основы управления финансами: Пер. с англ. / Гл. ред. серии Я.В.Соколов. – М.: Финансы и статистика, 1997.– 800 с.

14. Василик О.Д. Державні фінанси України: навч. посібник. – К.: Вища школа, 1997. – 383 с.
15. Вентцель Е.С. Исследования операций: задачи, принципы, методология. – М.: Наука,1980. – 208 с.
16. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1994. – 576 с.
17. Вилкас Э. И., Майминас Е. З. Решения: теория, информация, моделирование. – М.: Радио и связь, 1981. – 328 с.
18. Вилкас Э.И.Оптимальность в играх и решениях. – М.:Наука,1990. – 256 с.
19. Вітлінський В.В. Аналіз, оцінка і моделювання економічного ризику. – К.: ДЕМІУР, 1996. – 212 с.
20. Вітлінський В.В. Врахування ризику та інфляції в моделюванні та оцінюванні інвестиційних проектів. – К., 1995. – 11с. – Деп. у КДЕУ 20.02.95, N497-Ук95.
21. Вітлінський В.В. Економічний ризик: системний аналіз, менеджмент. – К, 1994. – 245 с. – Деп. у КДЕУ 17.10.94, N2035-Ук94.
22. Вітлінський В. В., Верченко П. І. Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком. – К.: КНЕУ, 2000. – 292 с.
23. Вітлінський В.В., Наконечний С.І. Ризик у менеджменті. – К.: ТОВ Борисфен-М, 1996. – 326с.
24. Вопросы анализа и процедуры принятия решений: Пер. с англ. / Под ред. И.Ф.Шахнова. – М.: Мир, 1976. – 230 с.
25. Воронцовский А.В. Инвестиции и финансирование. – СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 1998. – 528 с.
26. Ворст Й., Ревентлоу П. Экономика фирмы: Пер. с датского. – М.: Высшая школа, 1994. – 272 с.
27. Гаврилец Ю.Н. Об использовании функции полезности в экономическом анализе //Экономика и математические методы, т. 24, № 5(2). – М.: Наука, 1988. – С. 781–791.
28. Гальчинський А., Геєць В., Семиноженко В. Україна: наука та інноваційний розвиток. – К., 1997. – 66 с.

29. Геєць В. Економіка України: моделі реформування, зміна структури та прогноз розвитку. – К.: Інс-т держ. управління і самоврядування при КМ України, 1993. – 120 с.
30. Геєць В., Степанкова Т., Кваснюк Б. та ін. Від кризи до росту. Концепції довгострокової політики та економічного співробітництва України: Методичні рекомендації. – К.: НАН України, Ін-т економіки, 1995. – 88 с.
31. Герасимчук Н., Борисенко З., Задорожна О. та ін. Структурно-інвестиційна політика. – К.: Інс-т економіки НАН України, 1996. – 139 с.
32. Герасимчук Н.С., Борисенко З.Н., Мельничук Н.А. и др. Инвестиционная сфера экономики. – К.: Наукова думка, 1992. – 244 с.
33. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К., 1979. – 408 с.
34. Гойко А. Ф. Методи оцінки ефективності інвестицій та пріоритетні напрями їх реалізації. – К.: ВІРА-В, 1999. – 320 с.
35. Грабовый П.Г., Петрова С.Н., Полтавцев С.И. Риски в современном бизнесе. – М.: Аланс, 1994. – 200 с.
36. Губський Б.В. Інвестиційні процеси в глобальному середовищі. – К.: Наукова думка. 1998. – 390 с.
37. Дамари Р. Финансы и предпринимательство: Финансовые инструменты, используемые западными фирмами для роста и развития организаций: Пер. с англ. – Ярославль, “Елень”,1993. – 224 с.
38. Дем’янюк О. Б. Моделі прийняття інвестиційних рішень на основі функції вигідності з грошовим та часовим аргументами: Наукове видання (брошура). – Тернопіль: Економічна думка. – 2002. – 101 с.
39. Дем’янюк О.Б. Розробка і прийняття рішень на основі функції вигідності //Міжвідомчий науковий збірник “Моделювання та інформаційні системи в економіці” – К.: КНЕУ. – 2001.– випуск 65.–С. 259 –263.
40. Дем’янюк О.Б. Функція вигідності з часовим аргументом //Вісник Східноукраїнського Державного Університету. – 2000. – № 4(26)(ч. 2) – С. 66 – 69.

41. Дем'янюк О.Б. Функція вигідності особи, що приймає рішення з постійною мірою несхильності до фінансового ризику і нейтральності до часового ризику //Вісник Тернопільської академії народного господарства. Серія: Економіко-математичне моделювання: Зб. наук. праць . – 2000. – № 1 (7). – С. 22 – 26.
42. Дем'янюк О.Б. Лінії рівня для двофакторної функції вигідності особи, що приймає рішення з різним ставленням до фінансового і часового ризиків // Вісник Тернопільської академії народного господарства. Серія: Економіко-математичне моделювання: Зб. наук. праць. – 2000. – № 2 (8). – С. 26 – 45
43. Дем'янюк О.Б. Модель оптимального страхування з врахуванням грошового і часового аспектів страхування //За матеріалами VI міжнародної наукової конференції "Проблеми економічної інтеграції України в європейський союз: європейські порівняльні студії". – Тернопіль: Економічна думка, "Вісник Тернопільської академії народного господарства". – 2001. – спец. вип. № 18 (ч. 2). – С.184 –190.
44. Дем'янюк О.Б. Побудова двофакторної функції вигідності при нейтральності до фінансового і часового ризиків //Комп'ютерна математика. Оптимізація обчислень: Зб. наук. Праць. – Т. 2. – К.: НАН України, Інституту кібернетики ім. В. Глушкова, 2001. – С. 103 – 108.
45. Долан Э. Дж., Линдсей Д. Е. Рынок: микроэкономическая модель. – СПб., 1992. – 496 с.
46. Дубров Ю. А., Травкин С. И., Якимец В. Н. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. – М.: Наука, 1988. – 384 с.
47. Евланов Д. Основы теории принятия решений. – М.: Наука, 1979. – 212 с.
48. Евланов Д. Теория и практика принятия решений. – М.: Экономика, 1984. – 176 с.
49. Емельянов С. В., Ларичев О. И. Многокритериальные методы принятия решений. – М.: Знание, 1985. – 32 с.

50. Ефимова О. Как анализировать финансовое положение предприятия. – М.: Бизнес-школа Ител-Синтез, 1994. – 120 с.
51. Ефимова О. Финансовый анализ. – М.: Бухгалтерский учет, 1996. – 208 с.
52. Жуковин В. Е. Многокритериальные модели принятия решений с неопределенностью. – Тбилиси: Меуниереба, 1983. – 105 с.
53. Зеленкова Н. М. Финансирование и кредитирование капитальных вложений. – М.: Финансы, 1979. – 284 с.
54. Идрисов А.Б., Картышев С.В., Постников А.В. Стратегическое планирование и анализ эфективности инвестиций. – М.: “ФИЛИНЪ”, 1996. – 272с.
55. Инвестирование, финансирование, кредитование: стратегия и тактика предприятия. /Ушакова Н. Н. и др. – К.: КТЭУ, 1997. – 191 с.
56. Инвестиции и инновации: Словарь-справочник от А до Я / Под ред. Бора М.З., Денисова А.Ю. – М.: Издательство “ДИС”, 1998. – 208 с.
57. Иозайтис В.С., Львов Ю.А. Экономико-математическое моделирование производственных систем. – М.: Высшая школа, 1991. – 192 с.
58. Канторович Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. – М., 1959. – 344 с.
59. Карлберг, Конрад. Бизнес-анализ с помощью Excel: Пер. с англ. – К.: Диалектика, 1997. – 448 с.
60. Карлин С. Математические методы в теории игр, программирования и экономики. – М.: Мир, 1964. – 838 с.
61. Кини Р. Функция полезности многомерных альтернатив / Вопросы анализа и процедуры принятия решений. – М.: “Мир”, 1976. – С. 59 – 79.
62. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения: Пер. с англ. / Под ред. И. Ф. Шахнова. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.
63. Кныш М. И., Перекатов Б. А., Тютиков Ю. П. Стратегическое планирование инвестиционной деятельности. – СПб.: Издательский дом “Бизнес-процесс”, 1998. – 315 с.

64. Князевская Н.В., Князевский В.С. Принятие рисковых решений в экономике и бизнесе. – М.: “Контур”, 1998. – 160 с.
65. Ковалев В.В. Методы оценки инвестиционных проектов. – М: Финансы и статистика, 1998. – 144 с.
66. Ковалев В.В. Финансовый анализ: Управление капиталом. Выбор инвестиций. Анализ отчетности. – 2-е изд., перераб. и доп. – М: Финансы и статистика, 1997. – 512 с.
67. Ковальчук К.Ф. Интеллектуальная поддержка принятия экономических решений. – Донецк: ИЄП НАН Украины, 1996. – 224 с.
68. Количественные методы финансового анализа / Под ред. С.Дж. Брауна и М.П.Крицмена: Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 1996. – 336 с.
69. Комаринський Я., Яремчук І. Фінансово-інвестиційний аналіз. – К.: Українська енциклопедія ім. М. П. Бажана, 1996. – 304 с.
70. Кононенко А.Ф., Холезов А.Д., Чумаков В.В. Принятие решений в условиях неопределенности // ВЦ АН СССР. – М., 1991. –197 с.
71. Коренной А., Карпов В. Курс инновационного менеджмента. – К.: НИИ Статистика, 1997. – 336 с.
72. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1974. – 831 с.
73. Кошечкин С. А. Концепция риска инвестиционного проекта / www.koshechkin.narod.ru. – 16 с.
74. Кредитний ризик комерційного банку: Навчальний посібник /В. Вітлінський, О. Пернарівський, Я Наконечний, Т. Великоіваненко /за ред. В. Вітлінського. – К.: Т-во “Знання”, КОО, 2000. – 251 с.
75. Ларичев О.И. Наука и искусство принятия решений. – М.: Наука, 1979. – 200 с.
76. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных Странах: Учебник. – М.: Логос, 2000. – 296 с.

77. Лимитовский М.А. Основы оценки инвестиционных и финансовых решений. – М.: ТОО Инжирингово-консалтинговая компания “ДЕКА”, 1997. – 112 с.
78. Липсиц И. В., Коссов В. В. Инвестиционный проект: методы подготовки и анализа. – М.: БЕК, 1996. – 304 с.
79. Лопатников Л.И. Экономико-математический словарь. – М.: Наука, 1987. – 510 с.
80. Лукасевич И.Я. Анализ финансовых операций. Методы, модели, техника вычислений. – М.: Финансы, ЮНИТИ, 1998. – 400 с.
81. Льюс Р.Т., Райфа Х. Игры и решения. – М.: Иностр.лит.,1961. – 642 с.
82. Маршал Дж., Бансал В. Финансовая инженерия: Полное руководство по финансовым нововведениям: Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 1998. – 784 с.
83. Математические методы исследования операций /Ермольев Ю. М., Михалевич В. С., Ляшко И. И., Тюптя В.И. – К., 1979. – 384с.
84. Математическая энциклопедия: Гл. ред. И.М.Виноградов. – М.: Советская энциклопедия, т.1-т.5, 1979-1984. – 2952 с.
85. Математический энциклопедический словарь: Гл. ред. Ю.В.Прохоров. – М.: Советская энциклопедия, 1988. – 874 с.
86. Microsoft Excel 2000: Справочник, 2-е изд. – СПб.: Издательство “Питер”, 2000. – 512 с.
87. Microsoft Officce 2000: Справочник, 2-е изд. – СПб.: Издательство “Питер”, 2000. – 448 с.
88. Мелкумов Я. С. Экономическая оценка эффективности инвестиций и финансовых инвестиционных проектов. – М.: ИКЦ “ДИС”, 1997. – 160 с.
89. Мертенс А. В. Инвестиции: Курс лекций по современной финансовой теории. – К.: Киевское инвестиционное агентство, 1997. – 416 с.
90. Миддлотон Д. Бухгалтерский учет и принятие финансовых решений: Пер. с англ./ Под ред. И. Елисеевой. – М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997. – 408 с.

91. Мирзоахмедов Ф. М. Математические модели и методы управления производством с учетом случайных факторов. – К.: Наук. думка, 1991. – 224 с.
92. Мирун Н. И., Герасимович А. М. Банковское обслуживание малого бизнеса. – К., 1993. – 181 с.
93. Моделирование и анализ экономических процессов. – Новосибирск: Наука, 1985 (серия: Математический анализ экономических моделей). – 120 с.
94. Нейман Ю. Вводный курс теории вероятностей и математической статистики: Пер. с англ. – М.: Наука, 1968. – 448 с.
95. Нейман Дж., Фон Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970. – 707 с.
96. Немчинов В.С. Экономико-математические методы и модели. – М.: Мысль, 1965. – 478 с.
97. Нікбахт Е., Гропеллі А. Фінанси: Пер. з англ. – К.: Техніка, 1993. – 383 с.
98. Норткотт Д. Принятие инвестиционных решений: Пер. с англ. /Под ред. А.Н.Шохина. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 247 с.
99. Олексій Б. В., Штабалюк П.І. Модель оптимального страхування активу при ризику втрати його певної частини // Ризикологія в економіці та підприємництві. – К.: КНЕУ, Академія ДПС України, 2001. – С. 298 – 299.
100. Олексюк О.С. Застосування функції вигідності в моделі оптимального страхування ризику за умов інтеграції на мікрорівні // Вісник Тернопільської академії народного господарства, №1, 1997. – с.74 – 77.
101. Олексюк О. С. Методи оцінки інвестиційних проектів. – Тернопіль: “Збруч”, 2000. – 200 с.
102. Олексюк О.С. Моделювання прийняття ризикованих фінансових рішень. – К.: Вища школа, 1998. – 312 с.
103. Олексюк О.С. Системи підтримки прийняття фінансових рішень на мікрорівні. – К.: Наукова думка, 1998. – 507 с.

104. Олексюк О., Мельничук В., Штабалюк П., Олейко В., Дем'янюк О. Методи і системи прийняття фінансових рішень: Підручник. – Тернопіль: Збруч, 2001. – 358 с.
105. Опнер С.Л. Системный анализ для решения деловых и промышленных проблем. – М.: Сов. радио, 1969. – 216 с.
106. Оценка эффективности инвестиционных проектов /Виленский П., Лившиц В., Орлова Е., Смоляк С. – М.: Дело, 1998. – 248 с.
107. Первозванский А.А. Математические модели в управлении производством. – М.: Наука, 1975. – 616 с.
108. Первозванский А.А., Первозванская Т.Н. Финансовый рынок: расчет и риск. – М.: Инфра, 1994. – 192 с.
109. Пересада А.А. Інвестиційний процес в Україні. – К.: ТОВ "Лібра", 1998. – 392 с.
110. Пересада А.А. Основы инвестиционной деятельности. – К.: "Изд-во Либра", 1996. – 344 с.
111. Петраков Н. Я., Ротарь В. И. Фактор неопределенности и управление экономическими системами. – М.: Наука, 1985. – 191 с.
112. Питерс Т., Уотерлин Р.В поисках эффективного управления (опыт лучших компаний): Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1986. – 423 с.
113. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
114. Пфанцагль И. Теория измерений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 248 с.
115. Райсберг В.А. Предпринимательский риск (система оценок) // Приборы и системы управления. – 1991. – № 9. – С.1 – 7.
116. Райс Т., Койли Б. Финансовые инвестиции и риск: Пер. с англ. – К.: Торгово-издат. бюро BHV, 1995. – 592 с.
117. Райфа Г. Анализ решений. – М.: Наука, 1977. – 408 с.
118. Райфа Г., Шлейфер Р. Прикладная теория статистических решений. – М.: Статистика,1977. – 360 с.

119. Решке Х., Шелле Х. Мир управления проектами. – М.: Аланс, 1994. – 303 с.

120. Ріппа С.П. Прийняття рішень в економіці на основі комп'ютерних баз знань. – Львів.: Каменяр, 1997.– 268 с.

121. Руа Б. Проблемы и методы принятия решений в задачах с многими целевыми функциями // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. – М.: Мир, 1976. – С.20 – 58.

122. Рэдхэд К., Хьюс С. Управление финансовыми рисками: Пер. с англ. – М.: ИНФРА, 1996. – 288 с.

123. Саати Т. Л. Принятие решений: метод анализа иерархий. – М.: Радио и связь, 1993. – 231 с.

124. Салин В.Н. и др. Математико-экономическая методология анализа рисковых видов страхования. – М.: Анкил, 1997. – 126 с.

125. Самуельсон П. Економіка. – Львів: Світ, 1993. – 496 с.

126. Синки Дж. (мл.) Управление финансами в коммерческих банках: Пер. с англ. 4-го перераб. изд. /Под ред. Р. Я. Левиты, Б. С. Пинскера. – М.: Catallaxy, 1994. – 820 с.

127. Соколовська З. М. Багаторівнева оцінка ефективності реальних інвестиційних проектів підприємств //Збірник наук. праць “Методи та засоби управління розвитком транспортних систем”. – 2002. – випуск № 3.– С. 38-51.

128. Соколовська З. М. Аналіз інвестиційних проектів на базі імітаційних моделей // Збірник наук. праць “Вісник соціально-економічних досліджень”. – 2000. – випуск № 6. – С. 35-40.

129. Старик Д. Э. Как рассчитать эффективность инвестиций. – М.: АО “Финстатинформ”, 1996. – 92 с.

130. Стратегия и тактика антикризисного управления фирмой /Под общ. ред. проф. А. Градова и проф. Б. Кузина. – СПб.: Спец. лит., 1996. – 510 с.

131. Теория выбора и принятия решений /Макаров И., Виноградская Т., Рубчинский А., Соколов В. – М.: Наука, 1982. – 328 с.

132. Теплова Т.В. Финансовые решения: стратегия и тактика: Учебное пособие. – М.: ИЧП “Издательство Магистр”, 1998. – 164 с.
133. Толковый словарь рыночной экономики / Под общ. ред. Крутикова Ф.А. – М.: Рекл.-изд. фирма “Глория”, 1993. – 301 с.
134. Трифонов Ю.В., Плеханова А.Ф., Юрлов Ф.Ф. Выбор эффективных решений в экономике в условиях неопределенности: Монография. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1998. – 140 с.
135. Тронь В., Тронь А. Критерии оптимального выбора в неопределенных условиях: Учебное пособие. – К.: ИУНХ, 19986. – 218 с.
136. Трухаев Р.И. Модели принятия решений в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1981. – 258 с.
137. Уотишем Дж., Паррамоу К. Количественные методы в финансах: Пер. с англ. под ред. М. Р. Ефимовой. – М.: Финансы, ЮНИТИ, 1999. – 527 с.
138. Управление проектами /Под ред. В. Д. Шапиро. – Спб.: ДваТри, 1996. – 610 с.
139. Фаркар П. Х. Декомпозиция многомерных функций полезности с помощью фракционных гиперкубов // Статистические модели и многокритериальные задачи принятия решений. – М.: Статистика, 1979. – С.63 – 95.
140. Федоренко В. Г., Гойко А. Ф. Інвестознавство: Підручник /За наук. ред. В.Г. Федоренка. – К.: МАУП, 2000. – 408 с.
141. Федулов А.А. и др. Введение в теорию статистически ненадёжных решений. – М.: Статистика, 1979 . – 279 с.
142. Финансовое управление фирмой /В.И. Терехин, С.В. Моисеев, Д.В. Терехин, С.Н. Цыганков / Под ред. В.И. Терехина. – М.: ОАО “Изд-во “Экономика”, 1998. – 350 с.
143. Фишберн П. Многомерные функции полезности в теории ожидаемой полезности // Статистические модели и многокритериальные задачи принятия решений. – М.: Статистика, 1979. – С.10 – 44.

144. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
145. Фостер Р. Обновление производства: атакующие выигрывают: Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1987. – 272 с.
146. Фридмен М., Севидж Л. Дж. Анализ полезности при выборе среди альтернатив, предполагающих риск //Теория потребительского поведения и спроса. – Спб.: Экономическая школа, 1993. – С. 208 – 249 – (Вехи экономической мысли, вып. 1).
147. Хеддевик К. Финансовый и экономический анализ деятельности предприятий / Международная организация труда: Пер. с англ. Д.П.Лукичева и А.О.Лукичевой / Под ред. Ю.Н.Воропаева. – М.: Финансы и статистика, 1996. – 192 с.
148. Хелферт Э. Техника финансового анализа: Пер. с англ. – М.: “Аудит”, ЮНИТИ, 1996. – 663 с.
149. Хеннекен П.Л., Тортра А. Теория вероятностей и некоторые ее приложения: Пер. с франц. – М.: Наука, 1974. – 472 с.
150. Хикс Дж. Р. Стоимость и капитал. – М.: Прогресс, 1993. – 488 с.
151. Хозяйственный риск и методы его измерения /Бачкаи Т., Месена Д., Сеп Е., Хусти Э. – М., 1979. – 184 с.
152. Холт Роберт Н. Основы финансового менеджмента: Пер. с англ. – М.: “Дело”, 1993. – 128 с.
153. Хонко Я. Планирование и контроль капиталовложений: Сокр. пер. с швед. и англ. – М.: Экономика, 1987. – 191 с.
154. Черваньов Д.М., Нейкова Л.І. Менеджмент інноваційно-інвестиційного розвитку підприємств України. – К.: Т-во “Знання”, КОО, 1999. – 514 с.
155. Четыркин Е.М. Финансовый анализ производственных инвестиций. – М.: Дело, 1998. – 256 с.
156. Шарп У., Александер Г., Бейли Дж. Инвестиции: Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 1024 с.

157. Шевчук В.Я., Рогожин П.С. Основи інвестиційної діяльності. – К.: Генеза, 1997. – 384 с.
158. Шумейкер П. Модель ожидаемой полезности: разновидности, подходы, результаты и пределы возможностей: Пер с. англ. //THESIS, 1994. – вып. 5. – С.29 – 80.
159. Эддоус М., Стэнсфилд Р. Методы принятия решений: Пер. с англ. под ред. член-корр. РАН И. Елисеевой. – М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997. – 590 с.
160. Юдин Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. – М.: Сов. радио, 1974. – 400 с.
161. Яковлев А. И. Проектный анализ инвестиций и инноваций. – Харьков: Бизнес Информ, 1999. – 116 с.
162. Ястремський О.І. Моделювання економічного ризику. – К.: Либідь, 1992. – 176с.
163. Ястремський О.І. Основи теорії економічного ризику. – К.: “АРТЕК”, 1998. – 235с.
164. Alchain A. The meaning of utility measurement //Amer. econ. Rev., 1971. – Vol 42. – P. 26 – 50.
165. Baumol W.J. and Quandt R.E. Investment and discount rates under capital rationing: a programming approach. Econ. J., vol. 75, 1965. – P. 29 – 317.
166. Day R.H. Rational Choice and Economic Dehavior // Theory and Decision. 1997, №1. – P. 37 – 68.
167. Edwards W. Behavioural decision theory. Ann. Rev. Psychol., vol. 12, P. 473 – 98; reprinted in Edwards and Tversky (1967).
168. Fridman M. and Savage L. J. The utility analysis of choices involving risk //J. of polit. Econ.,1967. – Vol. 4. – P. 279 – 304.
169. Markowitz H. M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments . – Oxford; N. Y.: Blackwel, 1991. – 384 p.
170. Mosteller F., and Nogee P. An experimental measurement of utility. J. polit. Econ.; reprinted in Edwards and Tversky (1967).

171. Neuman and Morgentern 0. Theory of Games and Ekonomic Behavior, Princenton, 1987. – 212 p.

172. Richman H., Staszewski J., Simon H. A. Simulation of Expert Memory Using EPAMIV //Psychological Review. – 1995. – Vol. 102. – № 2.

173. Savage L. J. The Foundations of Statistics. – N. Y.: Wiley, 1954.

174. Simon H. A. The New Science of Management Decision. – N. Y.: Harper and Row Publishers, 1960.

175. Swalm R.O. Utility theory – insights into risk taking // Harvard bus. Rev., 1966. – Vol. 44, November-December. – P. 36–123.

176. Viner J. The utility concept in value theory and its critics // Journal of Political Economy. – 1925. – Vol. XXXIII. № 4. – P. 369–387; № 6. – P. 638–659.

177. Weingartner H.M. Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems. – New Jersey; Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1963. – 200 p.

ДОДАТКИ

Додаток А

Побудова функцій вигідності з грошовим та часовим аргументами

А.1. Побудова функції вигідності ОПР нейтральної щодо фінансового параметру і з постійною мірою несхильності до ризику щодо часу

Побудуємо функцію вигідності для ОПР $u(x, t)$ з постійною мірою несхильності до ризику часової затримки коштів для часового аргументу t з проміжку [0; T] і нейтральності щодо ризику втрати грошових коштів для фінансового аргументу x з проміжку [a; b]. При цьому міра несхильності до ризику ОПР за часовим аргументом t є постійною, відмінною від нуля величиною: $k_T = g = const \neq 0$ і ОПР є нейтральною щодо грошової компоненти, тобто міра несхильності до ризику за фінансовим аргументом x нульова: $k_X = 0$.

Нейтральність ОПР до ризику втрати грошових коштів означає, що функція вигідності $u(x, t)$ щодо грошового аргументу x є лінійною, тобто

$$u(x,t) = H(t)x + D(t). \qquad (А.1.1)$$

Для того, щоб встановити вигляд функцій $H(t)$ і $D(t)$ підставимо функцію (А.1.1) у рівняння (2.4), яке випливає з означення міри несхильності до ризику для монотонно спадних функцій, якою є наша функція вигідності за часовим аргументом t і отримаємо:

$$\frac{H''(t)x + D''(t)}{H'(t) + D'(t)} = g. \qquad (А.1.2)$$

Рівняння (А.1.2) еквівалентне системі двох взаємно незалежних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} H''(t) = gH'(t); \\ D''(t) = gD'(t). \end{cases} \qquad (А.1.3)$$

Загальний розв’язок системи (А.1.3) можна зобразити у вигляді:

$$\begin{cases} H(t) = C_{H_1} e^{gt} + C_{H_2}; \\ D(t) = C_{D_1} e^{gt} + C_{D_2}. \end{cases} \tag{A.1.4}$$

Підставимо знайдені функції $H(t)$ і $D(t)$ (A.1.4) у функцію (A.1.1). Отримаємо таку функцію:

$$u(x,t) = \left(C_{H_1} e^{gt} + C_{H_2}\right) x + C_{D_1} e^{gt} + C_{D_2}. \tag{A.1.5}$$

Невідомі коефіцієнти $C_{H_1}, C_{H_2}, C_{D_1}, C_{D_2}$ знайдемо, розв'язавши систему з чотирьох незалежних рівнянь. Два рівняння цієї системи отримаємо, наклавши на функцію (A.1.5) очевидні умову мінімальної вигідності (2.2) і умову максимальної вигідності (2.1). Ще два рівняння отримаємо аналогічно як у п. 2.1, задавшись значеннями функції $u(x, t)$ в лівій нижній (2.12) і правій верхній (2.13) вершинах прямокутника $[a;b] \times [0;T]$. Зважаючи на вищесказане, отримаємо таку систему з чотирьох незалежних рівнянь:

$$\begin{cases} \left(C_{H_1} + C_{H_2}\right) b + C_{D_1} + C_{D_2} = 1; \\ \left(C_{H_1} e^{gT} + C_{H_2}\right) a + C_{D_1} e^{gT} + C_{D_2} = 0; \\ \left(C_{H_1} + C_{H_2}\right) a + C_{D_1} + C_{D_2} = u_1; \\ \left(C_{H_1} e^{gT} + C_{H_2}\right) b + C_{D_1} e^{gT} + C_{D_2} = u_2. \end{cases} \tag{A.1.6}$$

Розв'яжемо систему рівнянь (A.1.6), здійснивши елементарні перетворення над її рівняннями. 1-ше рівняння залишимо без змін. На місці 2-го рівняння нової системи запишемо рівняння отримане відніманням від 1-го – 4-го рівняння, матимемо

$$C_{H_1}\left(1 - e^{gT}\right) + C_{D_1}\left(1 - e^{gT}\right) = 1 - u_2. \tag{A.1.7}$$

На третьому місці запишемо рівняння, отримане відніманням 2-го рівняння системи (A.1.6) від 4-го:

$$\left(C_{H_1} e^{gT} + C_{H_2}\right)(b - a) = u_2. \tag{A.1.8}$$

І на останньому місці нової системи запишемо рівняння, отримане відніманням від 1-го рівняння системи (A.1.6) 3-го рівняння:

$$\left(C_{H_1}+C_{H_2}\right)(b-a)=1-u_1. \quad (A.1.9)$$

Враховуючи (А.1.7)-(А.1.9) отримаємо систему рівнянь еквівалентну системі (А.1.6):

$$\begin{cases}\left(C_{H_1}+C_{H_2}\right)b+C_{D_1}+C_{D_2}=1;\\ C_{H_1}b\left(1-e^{gT}\right)+C_{D_1}\left(1-e^{gT}\right)=1-u_2;\\ \left(C_{H_1}e^{gT}+C_{H_2}\right)(b-a)=u_2;\\ \left(C_{H_1}+C_{H_2}\right)(b-a)=1-u_1.\end{cases} \quad (A.1.10)$$

Здійснимо ще одне елементарне перетворення над рівняннями системи (А.1.10), а саме від 4-го рівняння віднімемо 3-тє. При цьому отримаємо систему, еквівалентну системам (А.1.10) і (А.1.6):

$$\begin{cases}\left(C_{H_1}+C_{H_2}\right)b+C_{D_1}+C_{D_2}=1;\\ C_{H_1}b\left(1-e^{gT}\right)+C_{D_1}\left(1-e^{gT}\right)=1-u_2;\\ \left(C_{H_1}e^{gT}+C_{H_2}\right)(b-a)=u_2;\\ C_{H_1}\left(1-e^{gT}\right)(b-a)=1-u_1-u_2.\end{cases} \quad (A.1.11)$$

З останнього рівняння системи (А.1.11) знайдемо коефіцієнт C_{H_1}:

$$C_{H_1}=\frac{1-u_1-u_2}{(1-e^{gT})(b-a)}. \quad (A.1.12)$$

Підставивши значення (А.1.12) у 3-тє рівняння системи (А.1.11) можна знайти коефіцієнт C_{H_2}:

$$C_{H_2}=\frac{1}{b-a}\left(u_2-\frac{1-u_1-u_2}{(1-e^{gT})\,(b-a)}e^{gT}\,(b-a)\right);$$

$$C_{H_2}=\frac{u_2-e^{gT}\,(1-u_1)}{(1-e^{gT})(b-a)}, \quad (A.1.13)$$

а у 2-ге рівняння, знайдемо коефіцієнт C_{D_1}:

$$C_{D_1}=\frac{1}{1-e^{gT}}\left(1-u_2-\frac{1-u_1-u_2}{(1-e^{gT})\,(b-a)}b(1-e^{gT})\right);$$

$$C_{D_1} = \frac{u_1 b - a(1-u_2)}{(1-e^{gT})(b-a)}. \tag{А.1.14}$$

Останній невідомий коефіцієнт C_{D_2} можна знайти, підставивши коефіцієнти (А.1.12)-(А.1.14) у 1-ше рівняння системи (А.1.11):

$$C_{D_2} = 1 - \frac{u_1 b - a(1-u_2)}{(1-e^{gT})(b-a)} - \frac{b(1-u_1-u_2)}{(1-e^{gT})(b-a)} - \frac{b(u_2 - e^{gT}(1-u_1))}{(1-e^{gT})(b-a)};$$

$$C_{D_2} = \frac{ae^{gT} - u_2 a - u_1 b e^{gT})}{(1-e^{gT})(b-a)}. \tag{А.1.15}$$

Функція (А.1.5) з врахуванням коефіцієнтів (А.1.12)-(А.1.15) набуде вигляду:

$$u(x,t) = \left(\frac{1-u_1-u_2}{(1-e^{gT})(b-a)} e^{gt} + \frac{u_2 - e^{gT}(1-u_1)}{(1-e^{gT})(b-a)} \right) x + \frac{u_1 b - a(1-u_2)}{(1-e^{gT})(b-a)} e^{gt} + \\ + \frac{ae^{gT} - u_2 a - u_1 b e^{gT}}{(1-e^{gT})(b-a)}. \tag{А.1.16}$$

З аналогічних міркувань, які були зроблені у попередньому випадку можна стверджувати, що за умови (2.24) функція (А.1.16) є адитивною і матиме вигляд:

$$u(x,t) = \frac{u_2 - e^{gT}(1-u_1)}{(1-e^{gT})(b-a)} x + \frac{u_1 b - a(1-u_2)}{(1-e^{gT})(b-a)} e^{gt} + \frac{ae^{gT} - u_2 a - u_1 b e^{gT}}{(1-e^{gT})(b-a)}. \tag{А.1.17}$$

Функцію (А.1.17) можна записати у вигляді (2.26), розклавши вільний член у (А.1.17) так:

$$\frac{ae^{gT} - u_2 a - u_1 b e^{gT}}{(1-e^{gT})(b-a)} = -\frac{u_1 e^{gT}(b-a)}{(1-e^{gT})(b-a)} - \frac{(1-u_1)a(1-e^{gT})}{(1-e^{gT})(b-a)}. \tag{А.1.18}$$

Беручи до уваги (А.1.18), функцію (А.1.17) можна записати так:

$$u(x,t) = (1-u_1)\frac{x-a}{b-a} + u_1 \frac{e^{gt} - e^{gT}}{1-e^{gT}}. \tag{А.1.19}$$

Тоді згідно з (2.26):

$$\varphi(x) = (1 - u_1)\frac{x - a}{b - a}, \tag{A.1.20}$$

$$\psi(t) = u_1 \frac{e^{gt} - e^{gT}}{1 - e^{gT}}. \tag{A.1.21}$$

Функції (А.1.16) і (А.1.19) зображують функції вигідності ОПР нейтральної до фінансового ризику і не схильної до часового, якщо $g > 0$ і схильної до часового ризику і нейтральної до фінансового, якщо $g < 0$, де g – міра несхильності до ризику часової затримки грошових коштів.

Функція (А.1.19) задовольняє умови теореми 5.1 [62, с. 222], а це означає, що фактори X і T функції (А.1.19) є адитивно незалежними. Тоді функцію можна зобразити у вигляді (2.31), де коефіцієнти k_1 і k_2 визначаються рівняннями (2.32) і (2.33) відповідно, і функція

$$u_1(x) = \frac{x - a}{b - a} \tag{A.1.22}$$

є умовною функцією вигідності ОПР за грошовим аргументом.

Доведемо, що функція

$$u_2(t) = \frac{e^{gt} - e^{gT}}{1 - e^{gT}} \tag{A.1.23}$$

є умовною функцією вигідності за часовою складовою t.

Для цього побудуємо одновимірну монотонно спадну функцію вигідності (оскільки функція вигідності $u(x, t)$ є монотонно спадною за часовим аргументом t) з постійною, відмінною від нуля мірою несхильності до ризику, тобто $r(t) = g \neq 0$ при $t \in [0; T]$.

За означенням міри несхильності до ризику для монотонно спадної функції вигідності (1.7), отримаємо

$$\frac{u''(t)}{u'(t)} = g, \tag{A.1.24}$$

а сама функція $u(t)$ обмежується такими умовами:

$$u(0) = 1; u(T) = 0. \tag{A.1.25}$$

Обчислимо відповідну цій мірі несхильності функцію вигідності $u(t)$, побудова якої зводиться до розв'язання крайової задачі (А.1.24)-(А.1.25).

Розв'яжемо диференціальне рівняння (А.1.24), зробивши заміну $u'(t) = u_1(t)$ для пониження порядку рівняння. Тоді отримаємо диференціальне рівняння 1-го порядку:

$$u_1'(t) = g u_1(t)\,. \tag{А.1.26}$$

Рівняння (А.1.26) є лінійним, однорідним диференціальним рівнянням з відокремленими змінними і тому інтегрується в квадратурах, а його загальний розв'язок можна записати у вигляді:

$$u_1(t) = C_1 e^{gt}. \tag{А.1.27}$$

Загальний вигляд функції вигідності $u(t)$ (з врахуванням заміни) знайдемо інтегруванням функції $u_1(t)$ (А.1.27):

$$u(t) = \int C_1 e^{gt} dt = \frac{C_1}{g} e^{gt} + C_2\,. \tag{А.1.28}$$

Знайти сталі C_1 і C_2 можна розв'язавши систему рівнянь, яку отримано з врахуванням функції (А.1.28) і умови (А.1.25):

$$\begin{cases} \dfrac{C_1}{g} + C_2 = 1; \\ \dfrac{C_1}{g} e^{gT} + C_2 = 0. \end{cases} \tag{А.1.29}$$

Віднімемо від першого рівняння системи (А.1.29) друге, при цьому отримаємо:

$$\frac{C_1}{g}\left(1 - e^{gT}\right) = 1\,;$$

$$C_1 = \frac{g}{1 - e^{gT}}\,. \tag{А.1.30}$$

Підставивши значення сталої C_1 (А.1.30) у друге рівняння системи (А.1.29), можна визначити невідому сталу C_2:

$$\frac{g}{1 - e^{gT}} \cdot \frac{e^{gT}}{g} + C_2 = 0\,;$$

$$C_2 = -\frac{e^{gT}}{1-e^{gT}}. \qquad (А.1.31)$$

Знайдені сталі (А.1.30) і (А.1.31) підставимо у (А.1.28) і отримаємо функцію вигідності:

$$u(t) = \frac{g}{1-e^{gT}} \cdot \frac{1}{g} e^{gt} - \frac{e^{gT}}{1-e^{gT}} = \frac{e^{gt}}{1-e^{gT}} - \frac{e^{gT}}{1-e^{gT}};$$

$$u(t) = \frac{e^{gt} - e^{gT}}{1-e^{gT}}. \qquad (А.1.32)$$

Отже, монотонно спадна функція вигідності при сталій мірі несхильності до ризику має вигляд (А.1.32). Функції (А.1.32) і (А.1.23) є ідентичними, що означає, що функція (А.1.23) є умовною функцією вигідності за часовим фактором *t*.

А.2. Побудова функції вигідності ОПР нейтральної до ризику щодо грошового параметру і нейтральної до ризику щодо часу

Розглянемо проблему побудови функції вигідності $u(x,\ t)$ у випадку нейтральності ОПР до обох видів ризику (фінансового і часового), коли часовий аргумент t змінюється в межах $0 \le t \le T$, а грошовий аргумент x – $a \le x \le b$.

Те, що ОПР нейтральна до грошового ризику означає, що функція $u(x,t)$ є лінійною щодо аргументу x, тобто

$$u(x,t) = M(t)x + N(t). \qquad (А.2.1)$$

Оскільки, ми розглядаємо випадок, коли ОПР нейтральна і до ризику часової затримки коштів, то функції $M(t)$ і $N(t)$ у (А.2.1) є також лінійними функціями, тобто

$$M(t) = M_1 t + M_2; \quad N(t) = N_1 t + N_2. \qquad (А.2.2)$$

Підставивши функції (А.2.2) у функцію (А.2.1), отримаємо таку функцію вигідності:

$$u(x,t) = (M_1 t + M_2)x + N_1 t + N_2$$

або перетворивши

$$u(x,t) = M_2 x + N_1 t + M_1 t\, x + N_2. \qquad (А.2.3)$$

Невідомі коефіцієнти M_1, M_2, N_1, N_2 знайдемо виходячи з того, що функція вигідності (А.2.3), як у попередніх випадках, задовольняє умовам нульової вигідності (2.2) і максимальної вигідності (2.1), тобто

$$M_2 a + N_1 T + M_1 a T + N_2 = 0; \qquad (А.2.4)$$

$$M_2 b + N_2 = 1. \qquad (А.2.5)$$

Зрозуміло, що цих двох умов (А.2.4) і (А.2.5) недостатньо для однозначного визначення чотирьох невідомих коефіцієнтів M_1, M_2, N_1, N_2. Тому задамося ще двома незалежними умовами на функцію $u(x,\ t)$, а саме (2.12), (2.13) – значеннями у інших вершинах прямокутника $[a;b]\times[0;T]$.

Умови (2.12) і (2.1) призводять до рівнянь, які пов’язують два коефіцієнти M_2, N_2:

$$M_2 a + N_2 = u_1, \qquad (А.2.6)$$

а умови (2.13) і (2.2) пов’язують усі чотири коефіцієнти:

$$M_2 b + N_1 T + M_1 b T + N_2 = u_2. \qquad (А.2.7)$$

Тому об’єднаємо спочатку у систему рівняння (А.2.5) і (А.2.6).

$$\begin{cases} M_2 b + N_2 = 1; \\ M_2 a + N_2 = u_1. \end{cases} \qquad (А.2.8)$$

Щоб знайти невідомий коефіцієнт M_2, віднімемо від 1-го рівняння системи (А.2.8) 2-ге, отримаємо:

$$M_2 = \frac{1 - u_1}{b - a}. \qquad (А.2.9)$$

Знайдений коефіцієнт (А.2.9) підставимо у 1-ше рівняння системи (А.2.8) і при цьому отримаємо:

$$N_2 = 1 - \frac{1 - u_1}{b - a} \text{ або}$$

$$N_2 = \frac{u_1 b - a}{b - a}. \qquad (А.2.10)$$

Тепер об’єднаємо у систему рівняння (А.2.4) і (А.2.9):

$$\begin{cases} M_2 a + N_1 T + M_1 aT + N_2 = 0; \\ M_2 b + N_1 T + M_1 bT + N_2 = u_2 \end{cases}$$

і підставимо знайдені коефіцієнти (А.2.9) і (А.2.10) у цю систему. Отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{1-u_1}{b-a} a + N_1 T + M_1 aT + \frac{u_1 b - a}{b-a} = 0; \\ \frac{1-u_1}{b-a} b + N_1 T + M_1 bT + \frac{u_1 b - a}{b-a} = u_2. \end{cases} \quad (А.2.11)$$

Знайдемо коефіцієнт M_1 віднявши від 2-го рівняння системи (А.2.11) 1-ше:

$$M_1 T(b-a) = u_2 - (1-u_1);$$

$$M_1 = \frac{u_2 + u_1 - 1}{T(b-a)}. \quad (А.2.12)$$

Коефіцієнт (А.2.12) підставимо у 1-ше рівняння системи (А.2.11) для того, щоб знайти коефіцієнт N_1:

$$N_1 = \frac{1}{T}\left(-\frac{u_1 b - a}{b-a} - \frac{u_2 + u_1 - 1}{b-a} a - \frac{1-u_1}{b-a} a \right);$$

$$N_1 = \frac{(1-u_2)a - u_1 b}{T(b-a)}. \quad (А.2.13)$$

Підставимо знайдені коефіцієнти (А.2.9), (А.2.10), (А.2.12) і (А.2.13) у функцію (А.2.3):

$$u(x,t) = \frac{1-u_1}{b-a} x + \frac{(1-u_2)a - u_1 b}{T(b-a)} t + \frac{u_2 + u_1 - 1}{b-a} xt + \frac{u_1 b - a}{b-a}. \quad (А.2.14)$$

На основі аналітичного вигляду функції (А.2.14) можна стверджувати, що вона адитивна тоді і тільки тоді, коли виконується умова (2.24), при виконання умови (2.24) у функції (А.2.14) зникає мультиплікативний доданок $\frac{u_2 + u_1 - 1}{b-a} xt$ і вона набирає вигляду:

$$u(x,t) = \frac{1-u_1}{b-a} x + \frac{(1-u_2)a - u_1 b}{T(b-a)} t + \frac{u_1 b - a}{b-a}, \quad (А.2.15)$$

тобто аргументи x і t відокремлюються адитивним чином. Для того щоб функцію (А.2.15) можна було б записати у вигляді (2.26) розкладемо вільний член функції (А.2.15) так:

$$\frac{u_1 b - a}{b - a} = \frac{u_1(b - a)}{(b - a)} - \frac{(1 - u_1)a}{b - a}. \tag{А.2.16}$$

Тоді функцію вигідності (А.2.15) можна зобразити так:

$$u(x,t) = (1 - u_1)\frac{x - a}{b - a} + u_1\left(1 - \frac{t}{T}\right), \tag{А.2.17}$$

де

$$\varphi(x) = (1 - u_1)\frac{x - a}{b - a}; \tag{А.2.18}$$

$$\psi(t) = u_1\left(1 - \frac{t}{T}\right). \tag{А.2.19}$$

Функції (А.2.14) і (А.2.17) зображують функції вигідності ОПР нейтральної до фінансового і нейтральної до часового ризиків.

Отже функція (А.2.14) є адитивною, а це означає згідно теореми 5.1 [62, с. 222], що фактори X і T є адитивно незалежними, а функцію вигідності можна зобразити у вигляді (2.31), де функція

$$u_1(x) = \frac{x - a}{b - a}$$

є умовною функцією вигідності ОПР нейтральної до грошового ризику і нормалізується умовами (2.38)-(2.39), а функція

$$u_2(t) = 1 - \frac{t}{T}$$

є умовною функцією вигідності ОПР нейтральної до часового ризику і нормалізується умовами (2.36)-(2.37), і коефіцієнти k_1 і k_2 обчислюються за формулами (2.32)-(2.33) відповідно.

А.3. Побудова функції вигідності ОПР з постійною мірою несхильності до ризику щодо грошового параметру і ОПР з постійною мірою несхильності до ризику щодо часу

Побудуємо тепер функцію вигідності u(x, t), де грошовий параметр $x \in [a;b]$, а часовий параметр $t \in [0;T]$ і при цьому міра несхильності до ризику втрати грошових коштів є сталою, відмінною від нуля величиною: $k_X = k = const \neq 0$ і міра несхильності до ризику часової затримки коштів є також сталою, відмінною від нуля величиною: $k_T = g = const \neq 0$.

Оскільки одне з припущень про те, що міра несхильності до ризику щодо часу є постійною, відмінною від нуля величиною, то функцію вигідності u(x, t), у найпростішому варіанті, щодо компоненти t можна виразити так:

$$u(x,t) = P(x) - R(x)e^{gt}. \tag{А.3.1}$$

Вигляд функцій P(x) і R(x) встановимо так само як і у попередніх випадках, підставивши функцію (А.3.1) у рівняння (2.3), яке випливає з означення міри несхильності до ризику щодо грошового параметра, за яким функція (А.3.1) є монотонно зростаючою функцією. Отримаємо таку рівність:

$$-\frac{P''(x) - R''(x)e^{gt}}{P'(x) - R'(x)e^{gt}} = k. \tag{А.3.2}$$

Рівняння (А.3.2) є еквівалентним системі двох диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} P''(x) = -kP'(x); \\ R''(x) = -kR''(x). \end{cases} \tag{А.3.3}$$

Загальний розв’язок системи (А.3.3) можна зобразити у вигляді:

$$\begin{cases} P(x) = C_{P_1} e^{-kx} + C_{P_2}; \\ R(x) = C_{R_1} e^{-kx} + C_{R_2}. \end{cases} \tag{А.3.4}$$

Підставимо функції (А.3.4) у функцію (А.3.1) і отримаємо таку функцію вигідності

$$u(x,t) = C_{P_1} e^{-kx} + C_{P_2} - (C_{R_1} e^{-kx} + C_{R_2}) e^{gt} \tag{А.3.5}$$

з невідомими коефіцієнтами $C_{P_1}, C_{P_2}, C_{R_1}, C_{R_2}$.

Для того, щоб визначити ці коефіцієнти, на функцію (А.3.5), а отже і на її невизначені коефіцієнти, накладемо умови (2.1) і (2.2) – максимальної і мінімальної вигідності, при цьому отримаємо два рівняння:

$$C_{P_1} e^{-kb} + C_{P_2} - C_{R_1} e^{-kb} - C_{R_2} = 1 \tag{А.3.6}$$

$$\text{і} \quad C_{P_1} e^{-ka} + C_{P_2} - (C_{R_1} e^{-ka} + C_{R_2}) e^{gT} = 0. \tag{А.3.7}$$

Зрозуміло, що з системи, яка складалася б з рівнянь (А.3.6) і (А.3.7) ми однозначно не визначимо 4 невідомі коефіцієнти $C_{P_1}, C_{P_2}, C_{R_1}, C_{R_2}$, а тому задамося, як і у попередніх трьох випадках, умовами (2.12) і (2.13) – значеннями функції вигідності (А.3.5) у двох інших вершинах прямокутника $[a;b]\times[0;T]$. Отримаємо ще два такі рівняння:

$$C_{P_1} e^{-ka} + C_{P_2} - C_{R_1} e^{-ka} - C_{R_2} = u_1 \tag{А.3.8}$$

$$\text{і} \quad C_{P_1} e^{-kb} + C_{P_2} - (C_{R_1} e^{-kb} + C_{R_2}) e^{gT} = u_2. \tag{А.3.9}$$

Отже, отримаємо систему з 4-х незалежних рівнянь (А.3.6)-(А.3.9) з 4-ма невідомими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} C_{P_1} e^{-kb} + C_{P_2} - C_{R_1} e^{-kb} - C_{R_2} = 1; \\ C_{P_1} e^{-ka} + C_{P_2} - (C_{R_1} e^{-ka} + C_{R_2}) e^{gT} = 0; \\ C_{P_1} e^{-ka} + C_{P_2} - C_{R_1} e^{-ka} - C_{R_2} = u_1; \\ C_{P_1} e^{-kb} + C_{P_2} - (C_{R_1} e^{-kb} + C_{R_2}) e^{gT} = u_2. \end{cases} \tag{А.3.10}$$

Для розв'язання системи (А.3.10) здійснимо деякі елементарні перетворення над її рівняннями, зокрема додамо 1-ше рівняння системи спочатку до 3-го, помноженого на (–1):

$$C_{P_1}(e^{-kb} - e^{-ka}) + C_{R_1}(e^{-kb} - e^{-ka}) = 1 - u_1, \tag{А.3.11}$$

а потім віднімемо від 4-го:

$$C_{R_1} e^{-kb}(1 - e^{gT}) + C_{R_2}(1 - e^{gT}) = u_2 - 1. \qquad (А.3.12)$$

Ще одне рівняння перетворимо, віднявши 3-тє рівняння системи (А.3.10) від 2-го:

$$C_{R_1} e^{-ka}(1 - e^{gT}) + C_{R_2}(1 - e^{gT}) = -u_1. \qquad (А.3.13)$$

Отож отримаємо систему, яка складається з 1-го рівняння системи (А.3.10) (або рівняння (А.3.6)) і рівнянь (А.3.11)-(А.3.13):

$$\begin{cases} C_{P_1} e^{-kb} + C_{P_2} - C_{R_1} e^{-kb} - C_{R_2} = 1; \\ C_{P_1}(e^{-kb} - e^{-ka}) + C_{R_1}(e^{-kb} - e^{-ka}) = 1 - u_1; \\ C_{R_1} e^{-kb}(1 - e^{gT}) + C_{R_2}(1 - e^{gT}) = u_2 - 1; \\ C_{R_1} e^{-ka}(1 - e^{gT}) + C_{R_2}(1 - e^{gT}) = -u_1. \end{cases} \qquad (А.3.14)$$

Система рівнянь (А.3.14) є еквівалентною системі (А.3.10), оскільки її рівняння отримані шляхом елементарних перетворень рівнянь системи (А.3.10).

Для того, щоб зручніше було визначити невідомі коефіцієнти, здійснимо ще одне перетворення рівнянь системи (А.3.14), а саме, віднімемо від 3-го рівняння 4-те, а решту рівнянь залишимо без змін. Отже, отримаємо систему еквівалентну системі (А.3.14), а отже і системі (А.3.10):

$$\begin{cases} C_{P_1} e^{-kb} + C_{P_2} - C_{R_1} e^{-kb} - C_{R_2} = 1; \\ C_{P_1}(e^{-kb} - e^{-ka}) + C_{R_1}(e^{-kb} - e^{-ka}) = 1 - u_1; \\ C_{R_1} e^{-kb}(1 - e^{gT}) + C_{R_2}(1 - e^{gT}) = u_2 - 1; \\ C_{R_1}(e^{-kb} - e^{-ka})(1 - e^{gT}) = u_2 + u_1 - 1. \end{cases} \qquad (А.3.15)$$

З останнього рівняння системи (А.3.15) знайдемо коефіцієнт C_{R_1}:

$$C_{R_1} = \frac{u_2 + u_1 - 1}{(1 - e^{gT})(e^{-kb} - e^{-ka})}. \qquad (А.3.16)$$

Знайдений коефіцієнт (А.3.16) підставимо спочатку у 3-тє рівняння системи (А.3.15) для того, щоб визначити коефіцієнт C_{R_2}:

$$C_{R_2} = \frac{1}{1-e^{gT}}\left(u_2 - 1 - \frac{(u_2+u_1-1)e^{-kb}(1-e^{gT})}{(1-e^{gT})(e^{-kb}-e^{-ka})}\right);$$

$$C_{R_2} = \frac{e^{-ka}(1-u_2) - u_1 e^{-kb}}{(1-e^{gT})(e^{-kb}-e^{-ka})}, \tag{A.3.17}$$

а потім у 2-ге – щоб визначити невідомий коефіцієнт C_{P_1}:

$$C_{P_1} = \frac{1}{e^{-kb}-e^{-ka}}\left(1 - u_1 - \frac{(u_2+u_1-1)(e^{-kb}-e^{-ka})}{(1-e^{gT})(e^{-kb}-e^{-ka})}\right);$$

$$C_{P_1} = \frac{u_2 - e^{gT}(1-u_1)}{(1-e^{gT})(e^{-kb}-e^{-ka})}. \tag{A.3.18}$$

Останній невідомий коефіцієнт C_{P_2} знайдемо, підставивши уже знайдені коефіцієнти (А.3.16)-(А.3.18) у 1-ше рівняння системи (А.3.15):

$$C_{P_2} = 1 + \frac{e^{-ka}(1-u_2) - u_1 e^{-kb}}{(1-e^{gT})(e^{-kb}-e^{-ka})} + \frac{e^{-kb}(u_2+u_1-1)}{(1-e^{gT})(e^{-kb}-e^{-ka})} - \frac{e^{-kb}(u_2 - e^{gT}(1-u_1))}{(1-e^{gT})(e^{-kb}-e^{-ka})};$$

$$C_{P_2} = \frac{e^{-ka}e^{gT} - u_2 e^{-ka} - u_1 e^{-kb}e^{gT}}{(1-e^{gT})(e^{-kb}-e^{-ka})}. \tag{A.3.19}$$

Тоді функція вигідності (А.3.5) з коефіцієнтами (А.3.16)-(А.3.19) набуде такого вигляду:

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \frac{u_2 - e^{gT}(1-u_1)}{(1-e^{gT})(e^{-kb}-e^{-ka})}e^{-kx} + \frac{e^{-ka}e^{gT} - u_2 e^{-ka} - u_1 e^{-kb}e^{gT}}{(1-e^{gT})(e^{-kb}-e^{-ka})} - \\ & - \left(\frac{u_2+u_1-1}{(1-e^{gT})(e^{-kb}-e^{-ka})}e^{-kx} + \frac{e^{-ka}(1-u_2) - u_1 e^{-kb}}{(1-e^{gT})(e^{-kb}-e^{-ka})}\right)e^{gt}. \end{aligned} \tag{A.3.20}$$

На основі аналітичного вигляду функції вигідності (А.3.20), як і у попередніх випадках, можна стверджувати, що вона адитивна тоді і тільки тоді, коли виконується умова (2.24), тобто $u_2 + u_1 = 1$. Справді, при виконанні умови (2.24) у функції вигідності (А.3.20) зникає мультиплікативний доданок

$$-\frac{u_2+u_1-1}{(1-e^{gT})(e^{-kb}-e^{-ka})}e^{-kx}e^{gt}$$

і функція (А.3.20) набирає вигляду:

$$u(x,t)=\frac{u_2-e^{gT}(1-u_1)}{(1-e^{gT})(e^{-kb}-e^{-ka})}e^{-kx}-\frac{e^{-ka}(1-u_2)-u_1e^{-kb}}{(1-e^{gT})(e^{-kb}-e^{-ka})}e^{gt}+$$
$$+\frac{e^{-ka}e^{gT}-u_2e^{-ka}-u_1e^{-kb}e^{gT}}{(1-e^{gT})(e^{-kb}-e^{-ka})}. \tag{А.3.21}$$

Функцію (А.3.21) можна зобразити у вигляді (2.26), розклавши її вільний від аргументів член, наприклад, так:

$$\frac{e^{-ka}e^{gT}-u_2e^{-ka}-u_1e^{-kb}e^{gT}}{(1-e^{gT})(e^{-kb}-e^{-ka})}=-\frac{u_2e^{-ka}(1-e^{gT})}{(1-e^{gT})(e^{-kb}-e^{-ka})}-\frac{u_1e^{gT}(e^{-kb}-e^{-ka})}{(1-e^{gT})(e^{-kb}-e^{-ka})}.$$

Тоді функція вигідності (А.3.21) виглядатиме так:

$$u(x,t)=u_2\left(\frac{e^{-kx}-e^{-ka}}{e^{-kb}-e^{-ka}}\right)+u_1\left(\frac{e^{gt}-e^{gT}}{1-e^{gT}}\right), \tag{А.3.22}$$

тобто

$$\varphi(x)=u_2\left(\frac{e^{-kx}-e^{-ka}}{e^{-kb}-e^{-ka}}\right), \tag{А.3.23}$$

$$\psi(t)=u_1\left(\frac{e^{gt}-e^{gT}}{1-e^{gT}}\right). \tag{А.3.24}$$

Функції (А.3.20) і (А.3.22) зображують функції вигідності ОПР:

- не схильної до фінансового ризику і не схильної до часового, якщо $g>0$ і $k>0$;
- не схильної фінансового до ризику і схильної до часового, якщо $g<0$ і $k>0$;
- схильної до фінансового і схильної до часового ризиків, якщо $g<0$ і $k<0$;
- схильної до фінансового ризику і не схильної до часового ризику, якщо $g>0$ і $k<0$,

де g – міра несхильності до ризику часової затримки грошових коштів; k – міра несхильності до ризику недоотримання коштів.

Аналітичний вигляд функції (А.3.22), згідно теореми 5.1 [62, с. 222], доводить, що грошовий X і часовий T фактори функції (А.3.22) є адитивно незалежними і сама функція задовольняє умови цієї теореми, а саме, функція (А.3.22) зображається у вигляді (2.31), де коефіцієнти k_1 і k_2 визначаються рівностями (2.32) і (2.33) відповідно.

Функція

$$u_1(x) = \frac{e^{-kx} - e^{-ka}}{e^{-kb} - e^{-ka}}$$

є зростаючою функцією вигідності з постійною мірою несхильності до ризику k на проміжку $a \le x \le b$ [102; 103], а для нашого випадку, є умовною функцією вигідності щодо грошового аргументу при постійній мірі несхильності до ризику k і нормалізована умовами (2.38), (2.39).

Аналогічно, функція

$$u_2(t) = \frac{e^{gt} - e^{gT}}{1 - e^{gT}}$$

є спадною функцією вигідності з постійною мірою несхильності до часового ризику g на проміжку $0 \le t \le T$ (доведено у додатку А.1, функція (А.1.32)), а у нашому випадку є умовною функцією вигідності щодо часового аргументу t при постійній несхильності до ризику g і нормалізується умовами (2.36), (2.37).

Додаток Б

Реалізація обчислень вигідності розподілу інвестиційних коштів між різнотерміновими вкладами засобами MS Excel

Таблиця Б.1.

Вибір між різнотерміновими видами вкладів для ОПР
з функцією вигідності нейтральною до фінансового і часового ризиків

Параметр	**Назва параметра**	**Значення**	**Значення**	**Значення**	**Значення**	**Значення**
r1	Ставка доходності для короткотермінового вкладу	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
r2	Ставка доходності для довготермінового вкладу	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28
u1	Значення функції вигідності у точці (a,T1)	0,3	0,4	0,5	0,55	0,6
S	Величина грошового активу (тис.грн.)	100000	100000	100000	100000	100000
a	Мінімальне значення грошового показника (тис.грн.)	100000	110000	110000	120000	130000
b	Максимальне значення грошового показника (тис.грн.)	120000	130000	130000	150000	150000
$u(S(1+r1),T1)$	Вигідність вкладання коштів на короткотерміновий період	0,3	0,4	0,5	0,55	0,6
$u(S(1+r2),T2)$	Вигідність вкладання коштів на довготерміновий період	0,7	0,6	0,5	0,45	0,4
Результат		довготермі новий вклад	довготермі новий вклад	довготермі новий вклад	короткотер міновий вклад	короткотер міновий вклад

Таблиця Б.2. 198

Реалізація обчислень засобами MS Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1			Вибір між різнотерміновими видами вкладів для ОПР				
2			з функцією вигідності нейтральною до фінансового і часового ризиків				
3	**Параметр**	**Назва параметра**	**Значення**	**Значення**	**Значення**	**Значення**	**Значення**
4	r1	Ставка доходності для короткотермінового вкладу	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
5	r2	Ставка доходності для довготермінового вкладу	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28
6	u1	Значення функції вигідності у точці (a,T1)	0,3	0,4	0,5	0,55	0,6
7	S	Величина грошового активу (тис.грн.)	100000	100000	100000	100000	100000
8	a	Мінімальне значення грошового показника (тис.грн.)	100000	110000	110000	120000	130000
9	b	Максимальне значення грошового показника (тис.грн.)	120000	130000	130000	150000	150000
10	$u(S(1+r1),T1)$	Вигідність вкладання коштів на короткотерміновий період	=C6	=D6	=E6	=F6	=G6
11	$u(S(1+r2),T2)$	Вигідність вкладання коштів на довготерміновий період	=1-C6	=1-D6	=1-E6	=1-F6	=1-G6
12	Результат		=ЕСЛИ(C6/(1-C6)>=(1+C5)/(1+C4);"короткотерміновий вклад"; ЕСЛИ(C10>C11;"короткотерміновий вклад";"довготерміновий вклад"))	=ЕСЛИ(D6/(1-D6)>=(1+D5)/(1+D4);"короткотерміновий вклад"; ЕСЛИ(D10>D11;"короткотерміновий вклад";"довготерміновий вклад"))	=ЕСЛИ(E6/(1-E6)>=(1+E5)/(1+E4);"короткотерміновий вклад"; ЕСЛИ(E10>E11;"короткотерміновий вклад";"довготерміновий вклад"))	=ЕСЛИ(F6/(1-F6)>=(1+F5)/(1+F4);"короткотерміновий вклад"; ЕСЛИ(F10>F11;"короткотерміновий вклад";"довготерміновий вклад"))	=ЕСЛИ(G6/(1-G6)>=(1+G5)/(1+G4);"короткотерміновий вклад"; ЕСЛИ(G10>G11;"короткотерміновий вклад";"довготерміновий вклад"))

Таблиця Б.3.

Реалізація обчислень засобами MS Excel

	A	B	C	D
1			Знаходження частки вкладу для короткотермінового періоду	
2	**Параметр**	**Назва параметра**	**Ставлення ОПР до фінансового ризику**	
3			**Схильність**	**Несхильність**
4	k	Міра несхильності ОПР до ризику	0,00025	-0,00021
5	r1	Ставка доходності для короткотермінового вкладу	0,2	0,2
6	r2	Ставка доходності для довготермінового вкладу	0,28	0,28
7	u1	Значення функції вигідності у точці (a,T1)	0,6	0,6
8	S	Величина грошового активу (тис.грн.)	100000	100000
9	a	Мінімальне значення грошового показника (тис.грн.)	=C8*(1+C5)	=D8*(1+D5)
10	b	Максимальне значення грошового показника (тис.грн.)	=C8*(1+C6)	=D8*(1+D6)
11	x	Частка грошового вкладу на період T1 (тис.грн.)	11244,63	43290,29
12	S-x	Частка грошового вкладу на період T2 (тис.грн.)	=C8-C11	=D8-D11
13		Друга похідна	=((1-C7)*(C6-C5))/(EXP(-C4*C10)-EXP(-C4*C9))*(-2*C4*(1+C5)*EXP(-C4*C11*(1+C5))^2+2*C4*(1+C6)*EXP(-C4*(C8-C11)*(1+C6))^2+2*C4*(C6-C5)*EXP(-C4*C11*(1+C5))*EXP(-C4*(C8-C11)*(1+C6))+4*C4*(1+C5)*E8-2*C4*(1+C6)*EXP(-C4*(C8-C11)*(1+C6)))-(C7*(1+C5))*C4*(1+C6)*EXP(C4*(C8-C11)*(1+C6))+(C7*(1+C6))*C4*(1+C5)*EXP(C4*C11*(1+C5))	=((1-D7)*(D6-D5))/(EXP(-D4*D10)-EXP(-D4*D9))*(-2*D4*(1+D5)*EXP(-D4*D11*(1+D5))^2+2*D4*(1+D6)*EXP(-D4*(D8-D11)*(1+D6))^2+2*D4*(D6-D5)*EXP(-D4*D11*(1+D5))*EXP(-D4*(D8-D11)*(1+D6))+4*D4*(1+D5)*F8-2*D4*(1+D6)*EXP(-D4*(D8-D11)*(1+D6)))-(D7*(1+D5))*D4*(1+D6)*EXP(D4*(D8-D11)*(1+D6))+(D7*(1+D6))*D4*(1+D5)*EXP(D4*D11*(1+D5))

200

Таблиця Б.4.

Реалізація обчислень засобами MS Excel

	A	B	C	D
1		Вигідність розподілу інвестиційних коштів між різнотерміновими вкладами		
2		для власника активу з функцією вигідності (3.86) на основі моделі (3.35)		
3	**Параметр**	**Назва параметра**	**Ставлення ОПР до фінансового ризику**	
4			**Схильність**	**Несхильність**
5	k	Міра несхильності ОПР до ризику	0,00025	-0,00021
6	r1	Ставка доходності для короткотермінового вкладу	0,2	0,2
7	r2	Ставка доходності для довготермінового вкладу	0,28	0,28
8	u1	Значення функції вигідності у точці (a,T1)	0,6	0,6
9	S	Величина грошового активу (тис.грн.)	100000	100000
10	a	Мінімальне значення грошового показника (тис.грн.)	=C9*(1+C6)	120000
11	b	Максимальне значення грошового показника (тис.грн.)	=C9*(1+C7)	=D9*(1+D7)
12	x	Частка грошового вкладу на період T1 (тис.грн.)	11244,63	43290,29
13	S-x	Частка грошового вкладу на період T2 (тис.грн.)	=C9-C12	=D9-D12

201

Продовження таблиці Б.4.

	A	B	C	D
14	u(x(1+r1),T1, (S-x)(1+r2), T2)	Вигідність вкладання коштів частинами	=(1-C8)*(EXP(-C5*C12*(1+C6))*EXP(-C5*(C9-C12)*(1+C7))-EXP(-C5*C10))/(EXP(-C5*C11)-EXP(-C5*C10))+C8*(EXP(-C5*(C9-C12)*(1+C7))-1)/(EXP(-C5*C12*(1+C6))+EXP(-C5*(C9-C12)*(1+C7))-2)	=(1-D8)*(EXP(-D5*D12*(1+D6))*EXP(-D5*(D9-D12)*(1+D7))-EXP(-D5*D10))/(EXP(-D5*D11)-EXP(-D5*D10))+D8*(EXP(-D5*(D9-D12)*(1+D7))-1)/(EXP(-D5*D12*(1+D6))+EXP(-D5*(D9-D12)*(1+D7))-2)
15	u(S(1+r1), T1)	Вигідність вкладання коштів на короткотерміновий період	=C8	=D8
16	u(S(1+r2), T2)	Вигідність вкладання коштів на довготерміновий період	=1-C8	=1-D8

Додаток В

Реалізація моделей оптимального страхування активу на основі функції вигідності з грошовим та часовим аргументами засобами MS Excel

Таблиця В.1.

Страхування активу для ОПР з функцією вигідності (4.12)
за умови рівномірного розподілу в часі випадкових втрат активу

Параметр	**Назва параметра**	**Значення**	**Значення**	**Значення**	**Значення**
S	Величина активу (тис.грн.)	100000	100000	100000	100000
q	Компенсаційний коефіцієнт	0,95	0,95	0,95	0,95
r	Коефіцієнт страхового внеску компанії	0,025	0,025	0,025	0,025
p	Ймовірність збереженості активу	0,85	0,95	0,975	0,975
K	Кількість страхових періодів	3	3	3	3
Результат страхування		застрахувати весь актив	застрахувати весь актив	відмовитися	відмовитися

Таблиця В.2.

Реалізація обчислень засобами MS Excel

	A	B	C
1		Страхування активу для ОПР з функцією вигідності (4.12)	
2	за умови рівномірного розподілу в часі випадкових втрат активу		
3	**Параметр**	**Назва параметра**	**Значення**
4	*S*	Величина активу (тис.грн.)	100000
5	*q*	Компенсаційний коефіцієнт	0,95
6	*r*	Коефіцієнт страхового внеску компанії	0,025
7	*p*	Ймовірність збереженості активу	0,85
8	*K*	Кількість страхових періодів	3
9	Результат страхування		=ЕСЛИ(C7<(C5*(1-1/(2*C8)))/(C6+C5*(1-1/(2*C8)));"застрахувати весь актив";ЕСЛИ(C7>(C5*(1-1/(2*C8)))/(C6+C5*(1-1/(2*C8)));"відмовитися";""))

Продовження таблиці В.2.

	D	E	F
1			
2			
3	**Значення**	**Значення**	**Значення**
4	100000	100000	100000
5	0,95	0,95	0,95
6	0,025	0,025	0,025
7	0,95	0,975	0,975
8	3	3	3
9	=ЕСЛИ(D7<(D5*(1-1/(2*D8)))/(D6+D5*(1-1/(2*D8)));"застрахувати весь актив";ЕСЛИ(D7>(D5*(1-1/(2*D8)))/(D6+D5*(1-1/(2*D8)));"відмовитися";""))	=ЕСЛИ(E7<(E5*(1-1/(2*E8)))/(E6+E5*(1-1/(2*E8)));"застрахувати весь актив";ЕСЛИ(E7>(E5*(1-1/(2*E8)))/(E6+E5*(1-1/(2*E8)));"відмовитися";""))	=ЕСЛИ(F7<(F5*(1-1/(2*F8)))/(F6+F5*(1-1/(2*F8)));"застрахувати весь актив";ЕСЛИ(F7>(F5*(1-1/(2*F8)))/(F6+F5*(1-1/(2*F8)));"відмовитися";""))

Таблиця В.3.

Страхування активу для ОПР з функцією вигідності (4.12)
за умови зростаючої з часом щільності розподілу випадкової втрати активу

Параметр	**Назва параметра**	**Значення**		
S	Величина активу (тис.грн.)	100000		
q	Компенсаційний коефіцієнт	0,9		
r	Коефіцієнт страхового внеску компанії	0,025	Проміжні обчислення	
p	Имовірність збережності активу	0,965	0,96759677	
T	Період страхування	0,3		
K	Кількість страхових періодів	3		
бета	Кутовий коефіцієнт щільності розподілу випадкової втрати активу	0,05	0,77777778	
Результат страхування		застрахувати весь актив		

Таблиця В.4.

Реалізація обчислень засобами MS Excel

	A	B	C	D
1		Страхування активу для ОПР з функцією вигідності (4.12)		
2	за умови зростаючої з часом щільності розподілу випадкової втрати активу			
3	**Параметр**	**Назва параметра**	**Значення**	
4	*S*	Величина активу (тис.грн.)	100000	
5	*q*	Компенсаційний коефіцієнт	0,9	
6	*r*	Коефіцієнт страхового внеску компанії	0,025	Проміжні обчислення
7	*p*	Ймовірність збережності активу	0,965	=(C5*(1-1/(2*C9)-C10*C8^2/(12*C9)))/(C6+C5*(1-1/(2*C9)))
8	*T*	Період страхування	0,3	
9	*K*	Кількість страхових періодів	3	
10	*бета*	Кутовий коефіцієнт щільності розподілу випадкової втрати активу	0,05	=(2*(1-C7))/(C8^2)
11	Результат страхування		=ЕСЛИ(C7<D7;"застрахувати весь актив";ЕСЛИ(C7>D7;"відмовитися"))	

Таблиця В.5.

Страхування активу для ОПР з функцією вигідності (4.49)
за умови рівномірного розподілу в часі випадкових втрат активу

Параметр	**Назва параметра**	**Значення**	**Значення**	**Значення**	**Значення**
S	Величина активу (тис.грн.)	100000	100000	100000	100000
q	Компенсаційний коефіцієнт	0,95	0,95	0,95	0,95
r	Коефіцієнт страхового внеску компанії	0,025	0,025	0,025	0,025
p	Ймовірність збережності активу	0,9840	0,9960	0,9990	0,9995
K	Кількість страхових періодів	3	3	3	3
x	Оптимальна частка страхування активу (тис.грн.)	100144,95	87215,97	57514,76	39554,49
Результат страхування:		застрахувати повністю	87215,97	застрахувати повністю	відмовитися

	A	B	C	D	E	F
1			Страхування активу для ОПР з функцією вигідності (4.49)			
2			за умови рівномірного розподілу в часі випадкових втрат активу			
3	**Параметр**	**Назва параметра**	**Значення**	**Значення**	**Значення**	**Значення**
4	*S*	Величина активу (тис.грн.)	100000	100000	100000	100000
5	*q*	Компенсаційний коефіцієнт	0,95	0,95	0,95	0,95
6	*r*	Коефіцієнт страхового внеску компанії	0,025	0,025	0,025	0,025
7	*p*	Ймовірність збереженості активу	0,9840	0,9960	0,9990	0,9995
8	*K*	Кількість страхових періодів	3	3	3	3
9	*x*	Оптимальна частка страхування активу (тис.грн.)	=(C5*(1-C7)*(2-1/C8)*C4)/(C5^2*(1-C7)*(2-1/C8)+2*C6^2*C7)	=(D5*(1-D7)*(2-1/D8)*D4)/(D5^2*(1-D7)*(2-1/D8)+2*D6^2*D7)	=(E5*(1-E7)*(2-1/E8)*E4)/(E5^2*(1-E7)*(2-1/E8)+2*E6^2*E7)	=(F5*(1-F7)*(2-1/F8)*F4)/(F5^2*(1-F7)*(2-1/F8)+2*F6^2*F7)
10	Результат страхування:		=ЕСЛИ(И(C7<(2-1/C8)/(2-1/C8+8*C6^2);C5>1/2*(1+КОРЕНЬ(1-((8*C6^2*C7)/((1-C7)*(2-1/C8)))));C5<=1);C9;ЕСЛИ(И(C7>(1-(C5-1)^2)*(1-1/(2*C8))/((1-(C5-1)^2)*(1-1/(2*C8))+C6^2);C7<=1);"відмовитися";ЕСЛИ(C7<(1-(C5-1)^2)*(1-1/(2*C8))/((1-(C5-1)^2)*(1-1/(2*C8))+C6^2);"застрахувати повністю")))	=ЕСЛИ(И(D7<(2-1/D8)/(2-1/D8+8*D6^2);D5>1/2*(1+КОРЕНЬ(1-((8*D6^2*D7)/((1-D7)*(2-1/D8)))));D5<=1);D9;ЕСЛИ(И(D7>(1-(D5-1)^2)*(1-1/(2*D8))/((1-(D5-1)^2)*(1-1/(2*D8))+D6^2);D7<=1);"відмовитися";ЕСЛИ(D7<(1-(D5-1)^2)*(1-1/(2*D8))/((1-(D5-1)^2)*(1-1/(2*D8))+D6^2);"застрахувати повністю")))	=ЕСЛИ(И(E7<(2-1/E8)/(2-1/E8+8*E6^2);E5>1/2*(1+КОРЕНЬ(1-((8*E6^2*E7)/((1-E7)*(2-1/E8)))));E5<=1);E9;ЕСЛИ(И(E7>(1-(E5-1)^2)*(1-1/(2*E8))/((1-(E5-1)^2)*(1-1/(2*E8))+E6^2);E7<=1);"відмовитися";ЕСЛИ(E7<(1-(E5-1)^2)*(1-1/(2*E8))/((1-(E5-1)^2)*(1-1/(2*E8))+E6^2);"застрахувати повністю")))	=ЕСЛИ(И(F7<(2-1/F8)/(2-1/F8+8*F6^2);F5>1/2*(1+КОРЕНЬ(1-((8*F6^2*F7)/((1-F7)*(2-1/F8)))));F5<=1);F9;ЕСЛИ(И(F7>(1-(F5-1)^2)*(1-1/(2*F8))/((1-(F5-1)^2)*(1-1/(2*F8))+F6^2);F7<=1);"відмовитися";ЕСЛИ(F7<(1-(F5-1)^2)*(1-1/(2*F8))/((1-(F5-1)^2)*(1-1/(2*F8))+F6^2);"застрахувати повністю")))

Таблиця В.7.

Страхування активу для ОПР з функцією вигідності (4.49)
за умови зростаючої з часом щільності розподілу випадкової втрати активу

Параметр	**Назва параметра**	**Значення**
S	Величина активу (тис.грн.)	100000
q	Компенсаційний коефіцієнт	0,95
r	Коефіцієнт страхового внеску компанії	0,025
p	Ймовірність збереженості активу	0,996
T	Період страхування	0,3
K	Кількість страхових періодів	3
бета	Кутовий коефіцієнт щільності розподілу випадкової втрати активу	0,05
x	Оптимальна частка страхування активу (тис.грн.)	86637,25
Результат страхування:		86637,25

Таблиця В.8.

Реалізація обчислень засобами MS Excel

	A	B	C
1	Страхування активу для ОПР з функцією вигідності (4.49)		
2	за умови зростаючої з часом щільності розподілу випадкової втрати активу		
3	**Параметр**	**Назва параметра**	**Значення**
4	*S*	Величина активу (тис.грн.)	100000
5	*q*	Компенсаційний коефіцієнт	0,95
6	*r*	Коефіцієнт страхового внеску компанії	0,025
7	*p*	Ймовірність збереженості активу	0,996
8	*T*	Період страхування	0,3
9	*K*	Кількість страхових періодів	3
10	*бета*	Кутовий коефіцієнт щільності розподілу випадкової втрати активу	0,05

Продовження таблиці В.8.

	A	B	C
11	*x*	Оптимальна частка страхування активу (тис.грн.)	=(C5*C4*((1-C7)*(1-1/(2*C9))-C10*C8^2/(12*C9)))/(C5^2*((1-C7)*(1-1/(2*C9))-C10*C8^2/(12*C9))+C7*C6^2)
12	Результат страхування:		=ЕСЛИ(И(C7<(1-1/(2*C9)-C10*C8^2/(12*C9))/(1-1/(2*C9)+4*C6^2);C5>(1/2)*(1+КОРЕНЬ(1-(4*C7*C6^2)/((1-C7)*(1-1/(2*C9))-C10*C8^2/(12*C9))));C5<=1);C11;ЕСЛИ(И(C7>((1-(C5-1)^2)*(1-1/(2*C9)-C10*C8^2/(12*C9)))/((1-(C5-1)^2)*(1-1/(2*C9))+C6^2);C7<=1);"відмовитися";ЕСЛИ(C7<((1-(C5-1)^2)*(1-1/(2*C9)-C10*C8^2/(12*C9)))/((1-(C5-1)^2)*(1-1/(2*C9))+C6^2);"застрахувати повністю")))

Таблиця В.9.

Страхування активу для ОПР з функцією вигідності (4.105)
за умови рівномірного розподілу в часі випадкових втрат активу

Параметр	**Назва параметра**	**Значення**			
S	Величина активу (тис.грн.)	100000			
q	Компенсаційний коефіцієнт	0,95	Проміжні обчислення		
r	Коефіцієнт страхового внеску компанії	0,025			
p	Ймовірність збережності активу	0,95	0,80361		
K	Кількість страхових періодів	3			
Результат страхування		відмовитися			

Таблиця В.10.

Реалізація обчислень засобами MS Excel

	A	B	C	D
1		Страхування активу для ОПР з функцією вигідності (4.105)		
2		за умови рівномірного розподілу в часі випадкових втрат активу		
3	**Параметр**	**Назва параметра**	**Значення**	
4	*S*	Величина активу (тис.грн.)	100000	
5	*q*	Компенсаційний коефіцієнт	0,95	Проміжні обчислення
6	*r*	Коефіцієнт страхового внеску компанії	0,025	
7	*p*	Ймовірність збережності активу	0,95	=(1-КОРЕНЬ(1-C5))*(1-1/(2*C8))/(КОРЕНЬ(C6)+(1-КОРЕНЬ(1-C5))*(1-1/(2*C8)))
8	*K*	Кількість страхових періодів	3	
9	Результат страхування		=ЕСЛИ(C7<D7;"застрахувати весь актив";ЕСЛИ(C7>D7;"відмовитися"))	

Таблиця В.11.

Страхування активу для ОПР з функцією вигідності (4.105)
за умови зростаючої з часом щільності розподілу випадкової втрати активу

Параметр	**Назва параметра**	**Значення**			
S	Величина активу (тис.грн.)	100000			
q	Компенсаційний коефіцієнт	0,95	Проміжні обчислення		
r	Коефіцієнт страхового внеску компанії	0,025			
p	Ймовірність збережності активу	0,965	0,803491098		
T	Період страхування	0,3			
K	Кількість страхових періодів	3			
бета	Кутовий коефіцієнт щільності розподілу випадкової втрати активу	0,05	0,777777778		
Результат страхування		відмовитися			

Таблиця В.12.

Реалізація обчислень засобами MS Excel

	A	B	C	D
1		Страхування активу для ОПР з функцією вигідності (4.105)		
2	за умови зростаючої з часом щільності розподілу випадкової втрати активу			
3	**Параметр**	**Назва параметра**	**Значення**	
4	*S*	Величина активу (тис.грн.)	100000	
5	*q*	Компенсаційний коефіцієнт	0,95	Проміжні обчислення
6	*r*	Коефіцієнт страхового внеску компанії	0,025	
7	*p*	Ймовірність збережності активу	0,965	=(1-КОРЕНЬ(1-C5))*(1-1/(2*C9)-C10*C8^2/(12*C9))/(КОРЕНЬ(C6)+(1-КОРЕНЬ(1-C5))*(1-1/(2*C9)))
8	*T*	Період страхування	0,3	
9	*K*	Кількість страхових періодів	3	
10	*бета*	Кутовий коефіцієнт щільності розподілу випадкової втрати активу	0,05	=(2*(1-C7))/(C8^2)
11	Результат страхування		=ЕСЛИ(C7<D7;"застрахувати весь актив";ЕСЛИ(C7>D7;"відмовитися"))	