УДК 518.25

Семчишин Ліда Михайлівна
кандидат фізико-математичних наук, доцент
Чортківський навчально-науковий інститут підприємництва і бізнесу
Західноукраїнського національного університету
Lida55718@ukr.net

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ В ЕКОНОМІЦІ

Анотація. Розглянуто міжгалузеві моделі та їх місце серед моделей економічної динаміки. Запропоновано узагальнені динамічні моделі замкнутої виробничої системи. Проаналізовано економічне зростання при різних траєкторіях споживання. Проведено чисельні розрахунки моделі, аналіз пропорцій розширеного відтворення та узагальнення найпростішої динамічної міжгалузевої моделі. Створено оптимізаційні моделі з матрицями міжгалузевого балансу та запропоновано ефективний метод реалізації цих моделей. Проаналізовано етапи розв'язку моделі відповідно до теорії диференціальних рівнянь. Охарактеризовано складність алгоритму та показано його ефективність з точки зору комп'ютерної алгебри. Наведено спосіб зведення систем із $\lambda -$матрицями до систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Показано ефективність запропонованого алгоритму.

Ключові слова: модель; моделювання; математичне моделювання; економіко-математичні методи; оптимальний розв'язок; метод множників Лагранжа; модель В. Леонтьєва.

Семчишин Л.М. Применение математических методов в экономике. Рассмотрены межотраслевые модели и их место среди моделей экономической динамики. Предложено обобщенные динамические модели замкнутой производственной системы. Проанализированы экономический рост при различных траекториях потребления. Проведены численные расчеты модели, анализ пропорций расширенного воспроизводства и обобщение простейшей динамической межотраслевой модели. Созданы оптимизационные модели с матрицами межотраслевого баланса и предложен эффективный метод реализации этих моделей. Проанализированы этапы решения модели согласно теории дифференциальных уравнений. Охарактеризованы сложность алгоритма и показано его эффективность с точки зрения компьютерной алгебры. Приведены способ возведения систем с матрицами к системам линейных алгебраических уравнений. Показана эффективность предложенного алгоритма.

Ключевые слова: модель; моделирование; математическое моделирование; экономико-математические методы; оптимальное решение; метод множителей Лагранжа; модель В. Леонтьева.

Semchyshyn L.M. Application of mathematical methods in economics. Intersectoral models and their place among the models of economic dynamics are considered. Generalized dynamic models of a closed production system are proposed. Economic growth at different consumption trajectories is analyzed. Numerical calculations of the model, analysis of the proportions of extended reproduction and generalization of the simplest dynamic intersectoral model are performed. Optimization models with interbranch balance matrices are created and an effective method of realization of these models is offered. The stages of solving the model according to the theory of differential equations are analyzed. The complexity of the algorithm is characterized and its efficiency from the point of view of computer algebra is shown. The method of reduction of systems with matrices to systems of linear algebraic equations is given. The efficiency of the proposed algorithm is shown.

Key words: model; modeling; mathematical modeling; economic and mathematical methods; optimal solution; method multiplier Lagrange; model of V. Leontiev.

ВСТУП. Математичне моделювання в наукових експериментах разом із застосуванням на практиці є головним чинником прогнозування економічного процесу. Його продуктивність визначається можливостями ЕОМ та якістю обчислювальної послідовності дій і програм, що застосовуються. Сучасне наукове вивчення включає у себе необхідні засоби інструментів, математичні моделі і методи за допомогою яких можна здійснювати найбільш важливі зв'язки економічних змінних і об'єктів, оцінювати форму і параметри залежностей їх змінних, отримувати нові знання про об'єкти, визначати оптимальний розв'язок, охарактеризувати висновки, що відповідають вивченому об'єкту, стисло подати основний теоретичний матеріал. Найбільшою інтенсивністю економічних вивчень стає для математичних спеціалістів розвиток майбутнього математичного інструментарію. У теперішній час в економічній галузі на перше місце ставиться математична модель як основний інструмент вивчення та прогнозування розвитку економічних процесів і явищ.

Вивчення будь-якого явища та моделювання економічних об'єктів завжди об'єднує теорію (модель математичну) із практикою (даними і їх дослідженнями). Розглянемо приклади моделей економіки: економічного росту, рівноваги на товарних і фінансових ринках, ціноутворення і конкурентна рівновага...

Економіко-математичні вивчення охоплюють важливі аспекти на різних рівнях планування та управління. Ефективне розв'язання великої кількості економіко-математичних задач стало можливим лише завдяки використанню комп'ютерних технологій, математичних моделей та обчислювальних методів. Поєднання математики в економіці дозволяє окреслити й описати головні зв'язки між економічними показниками та об'єктами їх дослідження, для того, щоб одержати нові знання про об'єкт, зробити необхідні висновки і виділити правильні економічні судження. Першістю переважає у поєднання математики з економікою наукове розуміння і вміння застосувати необхідні об'єкти при побудові моделей.

Використання методів математики в економічних відкриттях надає можливість застосувати математичні пріоритети як основного способу вивчення економічних закономірностей і одержання теоретичних та практичних економічних узагальнень. Задачі де поєднується економіка з математикою належать до числа найскладніших задач. Найхарактернішими для таких задач є випадковість, невизначеність і динамічність економічних показників.

Моделювання для цих задач є основним методом дослідження. Такий метод ґрунтується на принципі порівняння, тобто можливості вивчення досліджуваного об'єкта через розгляд схожого йому і більш доступного об'єкта, його моделі.

Застосування математичного моделювання в економіці дозволяє глибше вивчити економічний аналіз, розширити область економічної інформації, активізувати економічні розрахунки.

Економіко-математичне моделювання є одним із найкращих методів опису виконання певної функції зі складними економічними показниками у вигляді математичних моделей. Тому проходить об'єднання економіки і математики.

Різні методи розв'язування задач лінійного програмування найкраще розроблені, легко реалізуються на обчислювальних машинах і тому широко застосовують в багатьох галузях економіки. Тільки лінійні моделі висвітлюють лише певну частину сукупності дослідження. Тому соціально-економічні процеси у більшій мірі не є лінійними. За умов невизначеності розвиваються та продовжують існувати галузі, об'єднання та окремі підприємства і тому їх можна описати нелінійними, стохастичними, динамічними моделями. Отже, для правильного управління окремими об'єктами потрібно застосовувати економіко-математичних моделі та методи. Тому кваліфікований спеціаліст, який використовує методи математичного моделювання у повсякденній практиці, певною мірою повинен бути [4]:

а) економістом – щоб використовувати економічну теорію для аналізу емпіричних даних;

б) математиком – щоб формулювати економічну теорію засобами математичної мови, зробивши її придатною для побудови формалізованих схем та перевірки їх коректності;

в) спеціалістом у економічній статистиці – щоб володіти процесами формування інформаційної бази даних і вміти порівнювати у відповідності до змінних економічної теорії реально виміряні макро- та мікроекономічні емпіричні показники;

г) спеціалістом в математичній статистиці – щоб використовувати для аналізу емпіричних даних кількісні методи.

До цього переліку слід додати необхідність обов'язкового знання та володіння комп'ютерною технікою, освоєння необхідних програмних продуктів, без використання яких сьогодні немислимий системний аналіз.

Застосування сукупності математичних знань в економіці ґрунтується на засвоєнні необхідних навиків обчислення. Економіко-математичні методи – інструмент у професійній діяльності економістів, з допомогою якого можна вирішити два основні задачі: перша – визначити, чому у виробничо-економічній системі склалася поточна кризова ситуація, тобто провести комплексний економічний аналіз стану фінансово-господарської діяльності та виробити прогнозну стратегію наслідків прийнятих управлінських рішень на перспективу. Друга задача полягає в кількісному обґрунтуванні деяких дій «що буде, якщо ….» для кожного з можливих сценаріїв розвитку, обираючи при цьому найбільш вигідний за заданим критерієм або множиною критеріїв.

Удосконалення аналізу різних сфер економіки, широке використання математичних методів є важливим напрямком, який підвищує ефективність діяльності процесів в суспільстві. Обґрунтуємо поняття моделі та моделювання. Модель – це такий матеріально або розумово зображуваний об'єкт, який у процесі дослідження замінює об'єкт-оригінал таким чином, що його безпосереднє вивчення дає нові знання про цей об'єкт. Іншими словами, модель – умовне зображення об'єкта, що певною мірою адекватно описує його функціональні характеристики, які істотно важливі для поставленої мети дослідження. Разом із тим, можна сказати, що модель – це інструмент кількісного аналізу певних явищ, крім того, вони розвивають інтелект і дають багато корисного для прийняття рішень [1]. Моделювання – це наукова теорія побудови і реалізації моделей, за допомогою яких досліджуються явища, процеси в природі і суспільному житті [4].

Дослідження властивостей, відношень обєктів, які вивчаються використовуючи математичні методи забезпечують перехід до математичних моделей. Серед них виділяють відповідні і розрахункові. Розрахункові моделі виражають властивості і відношення оригіналу за допомогою формул, рівнянь, графіків, таблиць, алгоритмів і т.д.. Відповідні моделі – змінні величини пов'язані з відповідними змінними величинами оригіналу з певними математичними залежностями.

Побудова економіко-математичних моделей – складний процес, який вимагає глибоких знань з економічної теорії, предмета дослідження і математичного інструментарію [2].

Оперування математичними методами та інструментами в наукових досліджень дає можливість майбутньому фахівцеві сформувати необхідні компоненти мислення: компетентність, світогляд і культуру, які будуть потрібні як у теоретичному плані, так і в практичній діяльності. Основне місце займають математичні методи в економіці. Це підтверджується вагомістю обчислень обсягів випуску продукції, попиту, цін, термінів і т.д., тобто обчислень змінних. Звідси випливає задача пошуку оптимальних обсягів виробництва, яка ґрунтується на допущеннях про лінійність зв'язку між витратами ресурсів і обсягами виготовленої продукції; між ціною, рекламою та попитом тощо. Але такі зв'язки насправді є нелінійними, тому точніші математичні моделі доцільно формулювати в термінах нелінійного програмування [3].

Зазначимо, що питання вивчення міжгалузевих моделей в економіко-математичних дослідженнях актуальне, відповідає на важливі методологічні та змістовні питання економічної науки, допомагає оцінити можливості та перспективи використання математичного моделювання в економіці.

У значній кількості прикладних задач виникає необхідність застосування математичних методів в економіці. Питання про використання цих методів розглядаються у багатьох публікаціях вітчизняних та зарубіжних вчених, а саме: Б.Є. Грабовецького [1], В.С. Григорківа [2], С.А. Жукова [3], О.Т. Іващука [4], І.М. Ляшенка [5], М.О. Недашковського, О.Я. Ковальчук [6] та інші.

Метою даного дослідження є аналіз економічного зростання при різних траєкторіях споживання, пропорцій розширеного відтворення та узагальнення найпростішої динамічної міжгалузевої моделі, створення оптимізаційної моделі з матрицями міжгалузевого балансу.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ. Нехай для деякої виробничої системи необхідно визначити план випуску продукції за умови найкращого способу використання її ресурсів. Відомі загальні запаси кожного ресурсу, норми витрат кожного ресурсу на одиницю продукції та ціни реалізації одиниці виготовленої продукції. Критерії оптимальності можуть бути різними, наприклад, максимізація виручки від реалізації продукції. Така умова подається лінійною залежністю загальної виручки від обсягів проданого товару та цін на одиницю продукції. Однак, загальновідомим є факт, що за умов ринкової конкуренції питання реалізації продукції є досить складним. Обсяг збуту продукції визначається передусім її ціною, отже, як цільову функцію доцільно брати максимізацію не всієї виготовленої, а лише реалізованої продукції. Необхідно визначати також і оптимальний рівень ціни на одиницю продукції, за якої обсяг збуту був би максимальним. Для цього її потрібно ввести в задачу як невідому величину, а обмеження задачі мають враховувати зв'язки між ціною, рекламою та обсягами збуту продукції. Цільова функція в такому разі буде виражена добутком двох невідомих величин: оптимальної ціни одиниці продукції на оптимальний обсяг відповідного виду продукції, тобто буде нелінійною. Отже, маємо задачу нелінійного програмування.

Також добре відома транспортна задача стає нелінійною, якщо вартість перевезення одиниці товару залежить від загального обсягу перевезеного за маршрутом товару. Тобто коефіцієнти при невідомих у цільовій функції, що в лінійній моделі були сталими величинами, залежатимуть від значень невідомих (отже, самі стають невідомими), що знову приводить до нелінійності у функціоналі.

У випадку коли в математичній моделі необхідно враховувати умови невизначеності та ризик, то задача стає нелінійною. Для вимірювання показника ризику часто використовують дисперсію, а для врахування обмеженості ризику вводять нелінійну функцію в систему обмежень, а мінімізація ризику будь-якого процесу досягається дослідженням математичної моделі з нелінійною цільовою функцією [5].

Розглянемо утворення найхарактерніших нелінійних моделей.

Сформулюємо задачу математичного програмування так: знайти такі значення змінних x_j $(j=\overline{1,n})$, щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального) значення:

$$\max(\min)\ F = f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (1)$$

за умов:

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n)\{\le, =, \ge\} b_i \ \ (i=\overline{1,m}); \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0 \ \ (j=\overline{1,n}). \qquad (3)$$

Якщо всі функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ та $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $i=\overline{1,m}$ є лінійними, то це називається задачею лінійного програмування, в протилежному випадку (якщо хоча б одна з функцій є нелінійною) то називається *задачею нелінійного програмування*.

При зведенні задачі нелінійного програмування до лінійного вигляду, призводить до значних похибок.

Застосовуючи симплексний метод можна звести нелінійну задачу до лінійної і отримати розв'язок, наближений до розв'язку початкової нелінійної задачі. З прикладу переконуємось, що при побудові наближених лінійних задач можна отримати неточний розв'язок, який непридатний для використання. Питання щодо існування розв'язку задачі нелінійного програмування потребує окремого дослідження [6].

Розглянемо основні труднощі розв'язування нелінійних задач [6].

1. Для лінійних задач можна завжди знайти оптимальний розв'язок симплексним методом. В результаті застосування алгоритму симплексного методу завжди отримують один з таких варіантів відповіді:

а) отримали оптимальний розв'язок;

б) умови задачі суперечливі, тобто розв'язку не існує;

в) цільова функція необмежена, тобто розв'язку також не існує.

Для задач нелінійного програмування не існує універсального методу розв'язання, що зумовило розроблення значної кількості різних методів розв'язування окремих типів задач нелінійного програмування.

Відомі точні методи розв'язування нелінійних задач, але в такому випадку існують труднощі обчислювального характеру, тобто навіть для сучасних обчислювальних систем такі алгоритми є досить трудомісткими, тому для розв'язування нелінійних задач потрібно застосовувати наближені методи.

2. Для задач лінійного програмування доведено наявність єдиного екстремуму, що досягається в одній (або кількох одночасно) з вершин багатогранника допустимих розв'язків задачі.

3. Класичний метод оптимізації. Метод множників Лагранжа. Як зазначалось вище для розв'язування задач нелінійного програмування не існує універсального методу, тобто до них необхідно застосовувати широке коло різних методів і обчислювальних алгоритмів. Застосування диференційного числення і залежать від конкретної постановки задачі та форми економіко-математичної моделі.

Ідея методу множників Лагранжа полягає в заміні початкової задачі більш простішою [6]. Для цього цільову функцію замінюють іншою, з більшою кількістю змінних, тобто такою, яка включає в себе умови, що подані як обмеження. Виконавши певні перетворення розв'язування задачі полягає в знаходженні екстремуму нової функції, на змінні якої не накладено ніяких обмежень. Тобто від початкової задачі пошуку умовного екстремуму переходимо до задачі відшукання безумовного екстремального значення іншої функції. Отже, завдяки такому перетворенню можливе застосування методів класичного знаходження екстремуму функції кількох змінних.

Розглянемо метод множників Лагранжа для розв'язування задачі нелінійного програмування, що має вигляд:

$$\max(\min)Z = f(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n) \tag{4}$$

за умов:

$$q_i(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n) = b_i \quad (i = \overline{1, m}), \tag{5}$$

де функції $f(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n)$ і $q_i(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n)$ мають бути диференційованими.

Задача (4)-(5) полягає в знаходженні екстремуму функції $f(x)$ за умов виконання обмежень q_i, $(i = \overline{1, m})$.

Переходимо до задачі пошуку безумовного екстремуму. Теоретично доведено, що постановки та розв'язання таких задач еквівалентні.

Замінюємо цільову функцію (4) на складнішу. Це є функція Лагранжа і має такий вигляд:

$$L(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n; \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad ..., \quad \lambda_m) =$$
$$f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n)), \tag{6}$$

де λ_i – деякі невідомі величини, множники Лагранжа.

Обчисливши частинні похідні, прирівнявши їх до нуля, отримаємо розв'язки $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ і $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*)$ – стаціонарні точки. Оскільки, ці розв'язки отримані з необхідної умови екстремуму, то вони визначають максимум, мінімум задачі (6).

Розглянемо найпростішу узагальнену модель відтворення валового внутрішнього продукту:

$$x(t) = a(t)x(t) + b(t)\frac{dx(t)}{dt} + c(t). \tag{7}$$

При дезагрегуванні цієї моделі до галузевого рівня ендогенні та екзогенні змінні $x(t)$, $\frac{dx(t)}{dt}$, $c(t)$ замінюються векторами стовпцями $X(t)$, $\frac{dX(t)}{dt}$, $C(t)$, а параметри a і b - квадратними матрицями A і B. Отримаємо систему лінійних диференціальних рівнянь першого степеня, нерозв'язану відносно похідних узагальнену динамічну модель В. Леонтьєва:

$$X(t) = A(t)X(t) + B(t)\frac{dX(t)}{dt} + C(t), \tag{8}$$

де $X(t) = [x_j(t)]$ – вектор-стовпець обсягів виробництва;

$\frac{dX(t)}{dt} = \left[\frac{dx_j(t)}{dt}\right]$ – вектор-стовпець абсолютних приростів виробництва;

$C(t)$ – вектор-стовпець споживання (разом із невиробничим нагромадженням);

$A(t) = (a_{ij}(t))$ – матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат (на відміну від коефіцієнтів статичного міжгалузевого балансу коефіцієнти в динамічній моделі включають також витрати на відшкодування вибуття і капітальний ремонт основних виробничих фондів) $(i, j \in J, \ J = \{1, ..., n\})$;

$B(t) = (b_{ij}(t))$ – матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів виробництва (витрати виробничого нагромадження на одиницю приросту відповідних видів продукції) $(i, j \in J, \ J = \{1, ..., n\})$.

В такому випадку статична модель міжгалузевого балансу може бути записана як:

$$X = A(t)X(t) + Y(t)$$

або

$$X = (E - A(t))^{-1} Y(t),$$

де $(E - A(t))^{-1}$ – матриця коефіцієнтів повних потреб у випуску продукції для одержання одиниць відповідних видів кінцевої продукції.

Відповідність між статичною і динамічною моделями міжгалузевого балансу для кожного t встановлюють за допомогою матричного рівняння:

$$Y(t) = B(t)\frac{dX(t)}{dt} + C(t). \tag{9}$$

Оскільки $\frac{dX(t)}{dt} = (E - A(t))^{-1} \frac{dY(t)}{dt}$, то замість (8) можна досліджувати систему диференціальних рівнянь:

$$Y(t) = B(t)(E - A(t))^{-1}\frac{dY(t)}{dt} + C(t), \qquad (10)$$

де $B(t)(E - A(t))^{-1}$ – матриця коефіцієнтів повного приросту капіталомісткості, тобто повних витрат виробничого нагромадження на одиничні прирости елементів використовуваного національного доходу.

Припускають, що $A(t)$ – матриця продукції. У подальшому аналізі зручно вважати матрицю $A(t)$ нерозкладною, а матрицю $B(t)$ – невиродженою. Тоді

$$(E - A(t))^{-1} > E + A(t),$$
$$B(t)(E - A(t))^{-1} > B(t).$$

Далі розглянемо також випадок, коли матриці $B(t)$ і $B(t)(E - A(t))^{-1}$ включають не все виробниче нагромадження, а тільки нагромадження основних виробничих фондів.

На перший погляд ці припущення неприпустимо штучні, оскільки дійсні матриці $A(t)$, як правило, розкладні, а матриці $B(t)$ мають нульові рядки (зокрема, за галузями, що виробляють тільки предмети споживання). Однак після зведення системи (10) до рівнянь тільки для фондоутворюючих галузей обидва припущення стають цілком правомірними.

Очевидно, що економічне значення мають тільки розв'язки $X(t) > 0$. Аналогічну вимогу в моделі без зовнішньої торгівлі може бути накладено на вектор $Y(t)$. Як буде описано далі, економічним передумовам моделі (8) відповідають тільки неспадні траєкторії $X(t)$, тобто $\frac{dX(t)}{dt} \geq 0$. Розв'язок системи (10) при $\frac{dY(t)}{dt} \geq 0$ через невід'ємність матриць $(E - A(t))^{-1}$ та $B(t)(E - A(t))^{-1}$ гарантує, що $Y(t) \geq 0$ і $\frac{dX(t)}{dt} \geq 0$. Однак останні умови можуть бути виконані і тоді, коли окремі компоненти вектора $\frac{dY(t)}{dt}$ від'ємні.

Відповідно до теорії диференціальних рівнянь розв'язок систем (8) і (10) здійснюють в три етапи:

а) визначають загальний розв'язок однорідної системи рівнянь при $C(t) = 0$;

б) знаходять частковий розв'язок неоднорідної системи;

в) з початкових умов обчислюють невизначені сталі загального розв'язку.

Динаміка замкнутої виробничої системи

Проаналізуємо систему однорідних рівнянь:

$$Y(t) = B(t)(E - A(t))^{-1}\frac{dY(t)}{dt}. \qquad (11)$$

Економічний зміст розв'язку цієї системи полягає в тому, що він характеризує граничні технологічні можливості розвитку виробництва при заданих матрицях A і B, коли всі ресурси національного доходу спрямовуються на розширене відтворення.

$A(t)$- матриця розміру $n \times m$, елементи якої є поліномами від t. Припустимо, що значення для t і коефіцієнтів многочленів беруться з деякого поля F таким чином: елементи матриці $A(t)$ обчислюються для деякого часткового значення t, наприклад, $t = t_0 \in F^{n \times m}$. $B(t)$ - вектор $(a_{1,m}(t), a_{2,m}(t), ..., a_{n,m}(t))^T$. Матриця $A(t)$ і вектор $B(t)$ мають степінь l, тобто $A(t) = \sum_{i=0}^{l} A_i t^i$, $B(t) = \sum_{i=0}^{l} B_i t^i$, $(i = \overline{1, n})$, $\frac{dY(t)}{dt} = \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{\Delta t}$.

Представимо матрицю $A(t)$ і вектор $B(t)$ у вигляді матричних многочленів:

$A(t) = t^l A_0 + t^{l-1} A_1 + ... + A_l$ та $B(t) = t^l B_0 + t^{l-1} B_1 + ... + B_l$. Розв'язок системи шукається у вигляді відношення двох поліномів з невідомими коефіцієнтами.

$X(t)=\sum_{j=0}^{nl} t^j x_{nl-j} \Big/ \sum_{j=0}^{nl} t^j y_{nl-j}$, де $x_0, x_1, ..., x_{\ln}$- вектори розмірності r, а $y_0, y_1, ..., y_{\ln}$ - скалярні величини. Тоді систему (11) можна записати наступним чином.

$$Y(t)=\frac{t^l B_0 + t^{l-1}B_1 + ... + B_l}{E-\left(t^l A_0 + t^{l-1}A_1 + ... + A_l\right)} \cdot \frac{y(t_i)-y(t_{i-1})}{\Delta t},$$

$$Y(t)=\frac{t^l B_0 + t^{l-1}B_1 + ... + B_l}{E-\left(t^l A_0 + t^{l-1}A_1 + ... + A_l\right)} \cdot y(t),$$

$$Y(t)=\left(t^l B_0 + t^{l-1}B_1 + ... + B_l\right) \cdot \left(E-\left(t^l A_0 + t^{l-1}A_1 + ... + A_l\right)\right)^{-1} \cdot y(t),$$

Оскільки $A(t)\in F^{n\times m}$, а $B(t)\in F^n$, то в загальному випадку, прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях , одержимо числову систему $m(l+s+1)$ рівнянь з $m(s+1)$ невідомими y_{ij} і $(s+1)$ невідомими y_j.

$$\begin{cases} A_0 B_0 - B_0 y_0 = 0; \\ A_0 X_1 + A_1 X_0 - \left(B_0 y_1 + B_1 y_0\right) = 0; \\ A_0 X_2 + A_2 X_0 + \left(B_0 y_2 + B_1 y_1 + B_2 y_0\right) = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{s=0}^{l} A_s X_{p-s} - \sum_{s=0}^{l} B_s y_{p-s} = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{l-1} X_{nl} + A_l X_{nl-1} - \left(B_{l-1} X_{nl} + B_l X_{nl-1}\right) = 0; \\ A_l X_{nl} - B_l y_{nl} = 0. \end{cases}$$

Для розв'язання даної системи може бути застосована обчислювальна схема розрізання, запропонована в [6]. Загальний розв'язок системи може бути поданий у вигляді:

$$Y_1(t)=\sum_{l=1}^{l} d_l K_l e^{\lambda_l t}, \qquad (12)$$

де λ_l – корені характеристичного рівняння n-го порядку

$$\det\left(E-\lambda B(t)\left(E-A(t)\right)^{-1}\right)=0. \qquad (13)$$

(λ_l збігаються з величинами, оберненими до власних значень матриці $B(t)\left(E-A(t)\right)^{-1}$);

K_l – відповідні до λ_l, власні вектори матриці $B(t)\left(E-A(t)\right)^{-1}$, тобто нетривіальні розв'язки системи однорідних рівнянь

$$\left[E-\lambda_l B(t)\left(E-A^{-1}(t)\right)\right]K_l = 0. \qquad (14)$$

Деякі корені λ_l, можуть виявитися комплексними. Разом з тим, будь-якому комплексному кореню відповідає спряжений до нього. Кожна пара комплексно спряжених коренів $\lambda=\alpha \pm i\beta$ подана в (12) парою доданків $Ce^{\alpha t}\cos\beta t + De^{\alpha t}\sin\beta t$, де C і D – постійні вектори розмірності n, що породжують коливання з постійною частотою p та амплітудою $e^{\alpha t}$.

Величини d_l у формулі (12) є невизначеними сталими, що однозначно визначаються з початкової умови $Y_1(0)=Y(0)$. Або

$$\sum_{l=1}^{n} d_l K_l = Y(0). \tag{15}$$

Остання рівність є системою з n лінійних рівнянь відносно $d_1,...,d_l$, яка має єдиний розв’язок.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ. Ефективність розв’язку нелінійних задач у великій мірі залежить від рівня раціонального розподілу ресурсів, в основі яких лежать оптимізаційні моделі.

Одним із найефективніших методів розв’язування економіко-математичних моделей є оптимізаційні задачі з лінійною формою взаємозв’язків. Вони мають задовольняти наступні вимоги:

- будь-яка задача повинна бути представлена в математичній формі за допомогою систем нерівностей або рівнянь;
- будь-який отриманий розв’язок не повинен суперечити економічному змісту задачі;
- система лінійних рівнянь повинна бути невизначеною;
- для знаходження оптимального розв’язку необхідно сформулювати критерій оптимальності і виразити його у формі цільової функції, яка в процесі розв’язку набуде екстремального значення.

Використання методів економіко-математичного моделювання дає змогу аналізувати якісно і кількісно складні економічні процеси. Нові методи моделювання, засновані на строгих математичних розв’язаннях економічних завдань із застосуванням виявлених законів економіки виробництва, у поєднанні із сучасною обчислювальною технікою сприяють створення високоефективних систем для аналізу стану і науково обґрунтованого прогнозування розвитку економіки підприємств, галузей і країни загалом, дають можливість усвідомлено управляти економічними процесами виробництва.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ. Спираючись на результати проведених досліджень, можемо сказати що існує достатня кількість методів та моделей, які можна застосовувати в економічних дослідженнях на макро- та мікрорівні.

Одержані результати збагачують теорію математичних методів і розширюють область застосування математичних моделей в економіці.

Отже, прогнозування та моделювання дає змогу здобути навички використання математичного апарату у дослідженні економічних процесів і розв’язанні економіко-математичних задач, як на мікрорівні так і на макрорівнях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Грабовецький Б.Є. Економічне прогнозування і планування: навч. посібник – Київ, 2003. – 188 с.
2. Григорків В. С. Моделювання економіки. Ч. 2: Навч. посібник – Чернівці: Рута, 2006. – 100 с.
3. Жуков С.А. Матемитичні методи та моделі в економіці: Навч. посібник /С.А. Жуков, В.С. Остапчук, О.І. Сторубльов// – К.: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2002. – 231 с.
4. Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник / За ред. О.Т. Іващука. Тернопіль. ТНЕУ, 2008. – 704 с.
5. Ляшенко І.М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку. – К. : Вища школа, 1999. – 236 с.
6. Недашковський М.О. Обчислення з λ-матрицями / М.О. Недашковський, О.Я. Ковальчук // – К.: Наукова думка, 2007. – 294 с.
7. Семчишин Л.М. Динамічні математичні моделі в економіці – Вісник Тернопільського національного економічного університету. – Тернопіль: Економічна думка, 2008. – Випуск 3. – С. 123-129.