Збірник праць Інституту математики НАН України 2010, т.7, № 3

УДК 62.50:531.36

А.М. Алілуйко, В.О. Єрьоменко

Тернопіл. нац. екон. ун-т, Тернопіль
E-mail: aliluyko@imath.kiev.ua

Синтез робастного керування для диференціальних рівнянь другого порядку

Algebraic methods for interval analysis in synthesis robust controls of linear second order differential systems are develop. For evaluation of solutions of the matrix interval equations the algorithm based on the iterative procedure of solving two algebraic equations with real coefficients, which are in accord with the boundary values of parameters of the investigated system is offered Efficiency of method is shown on an example of rotor systems.

Развиваются алгебраические методы интервального анализа в синтезе робастного управления линейных дифференциальных систем второго порядка. Для вычисления решений матричных интервальных уравнений предлагается алгоритм, основанный на итерационном решении двух линейных алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами, соответствующими граничным значениям параметров исследуемой системы. Эффективность метода демонстрируются на примере роторной системы.

1. Вступ. В сучасних прикладних дослідженнях виникають задачі аналізу та синтезу заданих сімейств динамічних систем, які описуються диференціальними рівняннями з невизначеними параметрами (див., наприклад, [1, 2, 3]). Синтез систем відносно множин параметричної невизначеності будемо називати робастним. Наприклад, задача синтезу робастного керування динамічних систем вигляду [4]

$$\dot{x} = \widetilde{A}x + \widetilde{B}u, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

де $\widetilde{A} \in \mathcal{M}_{n,n}$, $\widetilde{B} \in \mathcal{M}_{n,m}$, полягає у відшуканні множини регуляторів

$$u = -R^{-1}\widetilde{B}^T\widetilde{X}x, \tag{2}$$

які забезпечують оптимальну стабілізацію системи (1) з квадратичним критерієм якості

$$\widetilde{J}(x,u) = \int_0^\infty (x^T\widetilde{Q}x + u^T Ru)dt, \tag{3}$$

$0 \le \widetilde{Q} = \widetilde{Q}^T \in \mathcal{M}_{n,n}$, $0 < R \in \mathbb{R}_{m\times m}$, $\widetilde{J} \in \mathcal{M}_{1,1}$.

В якості множин параметричної невизначеності $\mathcal{M}_{n,n}$ системи класу систем (1) використовуються множина матриць, елементами яких є дійсні інтервали:

$$\mathcal{M}_{n,n} = \{M \in R^{n\times n} : \underline{M} \le M \le \overline{M}\}.$$

Робота присвячена синтезу керування, яке забезпечує робастну стійкість і робастну якість по відношенню до параметрів невизначеності, для дифернціальних систем другого порядку

$$\widetilde{M}\ddot{q} + (\widetilde{D} + \widetilde{G})\dot{q} + (\widetilde{P} + \widetilde{S})q = f(q, \dot{q}, t), \quad t \ge 0, \tag{4}$$

де $q, \dot{q} \in \mathbb{R}^n$ — вектори узагальнених координат та швидкостей, $\widetilde{M}, \widetilde{D}, \widetilde{G}, \widetilde{P}, \widetilde{S} \in \mathcal{M}_{n,n}$ — незалежні від часу матричні коефіцієнти. В моделях механіки матриця $\widetilde{M} = \widetilde{M}^T$ характеризує інерційні властивості системи, $\widetilde{D} = \widetilde{D}^T$ — матриця дисипативних сил, $\widetilde{G} = -\widetilde{G}^T$ — матриця гіроскопічних сил, $\widetilde{P} = \widetilde{P}^T$ — матриця потенціальних сил, $\widetilde{S} = -\widetilde{S}^T$ — матриця неконсервативних сил, а функція f описує вплив зовнішніх сил на динаміку системи (див., наприклад, [5]).

Для знаходження параметрів робастного регулятора використовується методика побудови оцінок (внутрішніх або зовнішніх) об'єднаної множини розв'язків інтервального рівняння Ріккаті. Для розв'язування такого рівняння застосовується інтервальний ітераційний процес, на кожному кроці якого розв'язується інтервальне матричне рівняння типу Ляпунова.

2. Постановка задачі. Для простоти запишемо модель керованої системи (4) у вигляді

$$\ddot{q} + \widetilde{L}\dot{q} + \widetilde{N}q = \widetilde{F}u, \tag{5}$$

де $q \in \mathbb{R}_n$, $u \in \mathbb{R}_m$, $\widetilde{L} = \widetilde{D} + \widetilde{G}, \widetilde{N} = \widetilde{P} + \widetilde{S} \in \mathcal{M}_{n,n}$, $\widetilde{F} \in \mathcal{M}_{n,m}$, $f(q, \dot{q}, t) = \widetilde{F}u$, u — вектор керування.

Покладаючи $x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{2n}$, перепишемо систему (5) у вигляді (1), де

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\widetilde{N} & -\widetilde{L} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,2n}, \;\; \widetilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \widetilde{F} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,m}. \tag{6}$$

Нехай в (3)

$$\widetilde{Q} = \begin{bmatrix} \widetilde{Q}_1 & \widetilde{Q}_2 \\ \widetilde{Q}_2^T & \widetilde{Q}_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad R > 0, \tag{7}$$

$\widetilde{Q}_1, \widetilde{Q}_2, \widetilde{Q}_3 \in \mathcal{M}_{n,n}$, $R \in \mathbb{R}_{m,m}$. Тоді параметри стабілізуючого робастного регулятора (2) з квадратичним критерієм якості (3) для системи (1) визначаються інтервальною матрицею $\widetilde{X} \in \mathcal{M}_{2n,2n}$, яка повинна бути симетричним додатно визначеним розв'язком інтервального рівняння Ріккаті

$$\widetilde{A}^T \widetilde{X} + \widetilde{X}\widetilde{A} - \widetilde{X}\widetilde{K}\widetilde{X} + \widetilde{Q} = 0, \quad \widetilde{K} = \widetilde{B}R^{-1}\widetilde{B}^T. \tag{8}$$

Тут і далі під інтервальним матричним рівнянням (8) будемо розуміти сукупність всіх точкових рівнянь

$$A^T X + XA - XKX + Q = 0, \tag{9}$$

де $A \in \widetilde{A}, K \in \widetilde{K}, Q \in \widetilde{Q}$.

Множину симетричних додатно визначених матриць X, які задовольняють рівняння (9), будемо називати об'єднаною множиною розв'язків $(\widetilde{X})$ інтервального матричного рівняння (8). Для синтезу керування системи (5) потрібно знайти зовнішні оцінки об'єднаної множини розв'язків, що приводить до множини більш простої структури, яка містить множину $\widetilde{X}$. Тобто, ставиться задача знайти інтервальну матрицю $\widetilde{X}_{ext} = [\underline{X}_{ext}; \overline{X}_{ext}]$, яка включає об'єднану множину розв'язків $\widetilde{X}$ інтервального рівняння (8). Зовнішні оцінки $\widetilde{X}_{ext}$ і керування $u = -R^{-1}\widetilde{B}^T\widetilde{X}_{ext}x$ забезпечують стійкість більш "широкої"множини систем $\widetilde{A}_{ext} \supseteq \widetilde{A}$, $\widetilde{B}_{ext} \supseteq \widetilde{B}$, оскільки оцінка $\widetilde{X}_{ext}$ містить додаткові розв'язки по відношенню до множини $\widetilde{X}$.

3. Метод розв'язування. Нехай пари матриць $(\underline{A}, \overline{B})$, $(\overline{A}, \underline{B})$, керовані. Відомо [4], що зовнішня оцінка $\widetilde{X}_{ext}$ об'єднаної множини розв'язків інтервального рівняння (8) дорівнює границі:

$$\widetilde{X}_{ext} = \lim_{k\to\infty} \widetilde{X}_{ext}(k),$$

де $\lim\limits_{k\to\infty} \widetilde{X}_{ext}(k)$ визначається через границі матриць з дійсними елементами

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{X}_{ext}(k) \stackrel{def}{=} \left[\lim_{k\to\infty} \underline{X}_{ext}(k), \lim_{k\to\infty} \overline{X}_{ext}(k)\right].$$

Матриці $\underline{X}_{ext}(k)$, $\overline{X}_{ext}(k)$ є розв'язками лінійних матричних рівнянь:

$$\begin{aligned}\left[\underline{A} - \overline{K}\underline{X}_{ext}(k)\right]^T \underline{X}_{ext}(k+1) + \underline{X}_{ext}(k+1)\left[\underline{A} - \overline{K}\underline{X}_{ext}(k)\right] &= \\ = -\left[\underline{Q} + \underline{X}_{ext}(k)\overline{K}\underline{X}_{ext}(k)\right],&\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\left[\overline{A} - \underline{K}\overline{X}_{ext}(k)\right]^T \overline{X}_{ext}(k+1) + \overline{X}_{ext}(k+1)\left[\overline{A} - \underline{K}\overline{X}_{ext}(k)\right] &= \\ = -\left[\overline{Q} + \overline{X}_{ext}(k)\underline{K}\overline{X}_{ext}(k)\right].&\end{aligned} \tag{11}$$

Нехай маємо блочне розбиття матриці

$$\widetilde{X}_{ext} = \begin{bmatrix} \widetilde{X}_1 & \widetilde{X}_2 \\ \widetilde{X}_2^T & \widetilde{X}_3 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \widetilde{X}_3 \in \mathcal{M}_{n,n}. \tag{12}$$

Враховуючи структуру матриць в (6), (7) та (12), підставимо матриці $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{Q}$ та $\underline{X}_{ext}(k)$ у рівняння (10). Тоді отримаємо

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & I \\ -\underline{N} & -\underline{L} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{F}R^{-1}\overline{F}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{X}_1(k) & \underline{X}_2(k) \\ \underline{X}_2^T(k) & \underline{X}_3(k) \end{bmatrix}\right)^T \begin{bmatrix} \underline{X}_1(k+1) & \underline{X}_2(k+1) \\ \underline{X}_2^T(k+1) & \underline{X}_3(k+1) \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} \underline{X}_1(k+1) & \underline{X}_2(k+1) \\ \underline{X}_2^T(k+1) & \underline{X}_3(k+1) \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0 & I \\ -\underline{N} & -\underline{L} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{F}R^{-1}\overline{F}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{X}_1(k) & \underline{X}_2(k) \\ \underline{X}_2^T(k) & \underline{X}_3(k) \end{bmatrix}\right) =$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} \widetilde{Q}_1 & \widetilde{Q}_2 \\ \widetilde{Q}_2^T & \widetilde{Q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{X}_1(k) & \underline{X}_2(k) \\ \underline{X}_2^T(k) & \underline{X}_3(k) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{F}R^{-1}\overline{F}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{X}_1(k) & \underline{X}_2(k) \\ \underline{X}_2^T(k) & \underline{X}_3(k) \end{bmatrix}\right)$$

В розгорнутому вигляді останнє рівняння набуває вигляду

$$\begin{aligned}\left(\underline{N} + \overline{F}R^{-1}\overline{F}^T\underline{X}_2^T(k)\right)^T \underline{X}_2^T(k+1) + \underline{X}_2(k+1)\left(\underline{N} + \overline{F}R^{-1}\overline{F}^T\underline{X}_2^T(k)\right) &= \\ = \underline{Q}_1 + \underline{X}_2(k)\overline{F}R^{-1}\overline{F}^T\underline{X}_2^T(k),&\end{aligned} \tag{13}$$

$$\left(\underline{N}+\overline{F}R^{-1}\overline{F}^{T}\underline{X}_{2}^{T}(k)\right)^{T}\underline{X}_{3}(k+1)-\underline{X}_{1}(k+1)+$$
$$+\underline{X}_{2}(k+1)\left(\underline{N}+\overline{F}R^{-1}\overline{F}^{T}\underline{X}_{3}(k)\right)=\underline{Q}_{2}+\underline{X}_{2}(k)\overline{F}R^{-1}\overline{F}^{T}\underline{X}_{3}(k), \tag{14}$$

$$\left(\underline{L}+\overline{F}R^{-1}\overline{F}^{T}\underline{X}_{3}(k)\right)^{T}\underline{X}_{3}(k+1)-\underline{X}_{2}(k+1)-\underline{X}_{2}^{T}(k+1)+$$
$$+\underline{X}_{3}(k+1)\left(\underline{L}+\overline{F}R^{-1}\overline{F}^{T}\underline{X}_{3}(k)\right)=\underline{Q}_{3}+\underline{X}_{3}(k)\overline{F}R^{-1}\overline{F}^{T}\underline{X}_{3}(k). \tag{15}$$

Вираз (2) для множини регуляторів, враховуючи блочний вигляд $\widetilde{B}$ та $\widetilde{X}$, буде таким:

$$u=-R^{-1}\widetilde{F}^{T}\left[\widetilde{X}_{2}^{T},\widetilde{X}_{3}\right]x. \tag{16}$$

З останнього співвідношення випливає, що синтез оптимального робастного керування, яке забезпечує робастну стійкість для системи (4) будується за допомогою лише оціночних матриць $\underline{X}_2$, $\underline{X}_3$ та $\overline{X}_2$, $\overline{X}_3$. Матриці $\underline{X}_2$ та $\underline{X}_3$ знаходяться відповідно з (13) та (15).

Рівняння (13) для $\widetilde{X}_2(k+1)$ являє собою рівняння типу Ляпунова, але для не обов'язково симетричної матриці $\widetilde{X}_2(k+1)$. Матричне рівняння (15) є рівнянням Ляпунова для симетричної додатно визначеної матриці $\widetilde{X}_3(k+1)$, яке можна розв'язати після знаходження матриці $\widetilde{X}_2(k+1)$.

Введемо позначення

$$\underline{V}=\underline{N}+\overline{F}R^{-1}\overline{F}^{T}\underline{X}_{2}^{T}(k),\quad \underline{W}=\underline{Q}_{1}+\underline{X}_{2}(k)\overline{F}R^{-1}\overline{F}^{T}\underline{X}_{2}^{T}(k)$$

і нехай $\underline{W}>0$. Тоді з рівняння (13) випливає

$$\underline{V}^{T}\underline{X}_{2}^{T}(k+1)+\underline{X}_{2}(k+1)\underline{V}=\underline{W}. \tag{17}$$

Розв'язок рівняння (17) можна подати у вигляді [6]

$$\underline{X}_{2}(k+1)=\underline{W}(\underline{V}+\underline{U}\,\underline{H})^{-1},$$

де симетричні додатно визначені матриці $\underline{U}$ та $\underline{H}$ знаходяться з рівнянь

$$\underline{U}\,\underline{U}=\underline{V}\,\underline{W}^{-1}\underline{V}^{T},\quad \underline{H}\,\underline{H}=\underline{W}.$$

Отже, для остаточної побудови нижніх оцінок $\underline{X}_2$, $\underline{X}_3$ оптимального робастного керування (16) досить розв'язати таке рівняння Ляпунова:

$$\left(\underline{L}+\overline{F}R^{-1}\overline{F}^T\underline{X}_3(k)\right)^T\underline{X}_3(k+1)+\underline{X}_3(k+1)\left(\underline{L}+\overline{F}R^{-1}\overline{F}^T\underline{X}_3(k)\right)=$$
$$=\underline{W}(\underline{V}+\underline{U}\,\underline{H})^{-1}+(\underline{V}+\underline{U}\,\underline{H})^{-T}\underline{W}+\underline{Q}_3+\underline{X}_3(k)\overline{F}R^{-1}\overline{F}^T\underline{X}_3(k). \quad (18)$$

Збіжність послідовностей $\{\underline{X}_2(k)\}$ та $\{\underline{X}_3(k)\}$ випливає з існування границі $\lim\limits_{k\to\infty}\underline{X}_{ext}(k)=\underline{X}_{ext}$.

За аналогією верхні оцінки $\overline{X}_2$, $\overline{X}_3$ знаходяться з рівнянь

$$\overline{X}_2(k+1)=\overline{W}(\overline{V}+\overline{U}\,\overline{H})^{-1},$$

$$\left(\overline{L}+\underline{F}R^{-1}\underline{F}^T\overline{X}_3(k)\right)^T\overline{X}_3(k+1)+\overline{X}_3(k+1)\left(\overline{L}+\underline{F}R^{-1}\underline{F}^T\overline{X}_3(k)\right)=$$
$$=\overline{W}(\overline{V}+\overline{U}\,\overline{H})^{-1}+(\overline{V}+\overline{U}\,\overline{H})^{-T}\overline{W}+\overline{Q}_3+\overline{X}_3(k)\underline{F}R^{-1}\underline{F}^T\overline{X}_3(k), \quad (19)$$

де

$$\overline{V}=\overline{N}+\underline{F}R^{-1}\underline{F}^T\overline{X}_2^T(k), \quad \overline{W}=\overline{Q}_1+\overline{X}_2(k)\underline{F}R^{-1}\underline{F}^T\overline{X}_2^T(k),$$

а $\overline{U}$ та $\overline{H}$ — симетричні додатно визначені матриці, які знаходяться з рівнянь

$$\overline{U}\,\overline{U}=\overline{V}\,\overline{W}^{-1}\overline{V}^T, \quad \overline{H}\,\overline{H}=\overline{W}.$$

4. Побудова робастного керування роторної системи. Розглянемо керовану роторну систему, що описується диференціальним рівнянням

$$M\ddot{x}+(D+iG)\dot{x}+(P+iS)x=Fu, \quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

з матричними коефіцієнтами [7]

$$M=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}, \qquad D=\begin{bmatrix} d & -p \\ -p & p+h \end{bmatrix},$$
$$P=\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k+r \end{bmatrix}, \quad S=\begin{bmatrix} \omega p & -\omega p \\ -\omega p & \omega p \end{bmatrix},$$

де x_1 і x_2 характеризують зміщення центрів відповідно головної маси m і додаткової маси s, h і r — відповідно демпфування та коефіцієнт

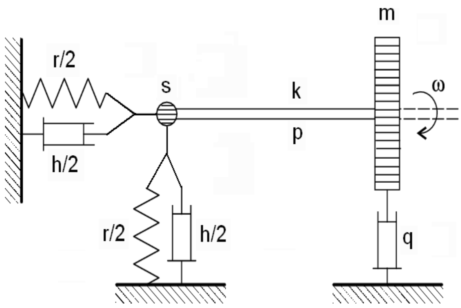

Рис. 1: Ротор Лаваля.

пружності на опорах. $k > 0$ — коефіцієнт пружності, ω — кутова швидкість обертання ротора, що породжує гіроскопічну силу ωg, p і q — відповідно внутрішнє і зовнішнє демпфування, $d = p + q > 0$. Ця модель ротора схематично зображена на рис. 1.

Помножимо комплексну систему (20) зліва на матрицю M^{-1} і зведемо її до виду (5) з дійсними коефіцієнтами

$$\widetilde{L} = \begin{bmatrix} M^{-1}D & -M^{-1}G \\ M^{-1}G & M^{-1}D \end{bmatrix}, \widetilde{N} = \begin{bmatrix} M^{-1}P & -M^{-1}S \\ M^{-1}S & M^{-1}P \end{bmatrix}, \widetilde{F} = \begin{bmatrix} M^{-1}F \\ O \end{bmatrix},$$

де $q = [x \;\; O]^T$, $O = [0 \;\; 0]^T$.

Побудуємо робастне керування при змінних параметрах $k \in [100; 150]$, $\omega \in [0, 20]$ і фіксованих значеннях інших параметрів $m = 1$, $s = 0.1$, $p = 1$, $q = 5$, $h = 10$, $r = 400$, причому, гіроскопічні сили не враховуються (G=0). В роботі [8] було показано, що даний ротор можна стабілізувати за допомогою керування, яке впливає лише на рух приєднаної маси s. Тому для проведення розрахунків покладемо

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leq F \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Нехай

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \leq \{Q_1, Q_3\} \leq \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad R = 1.$$

Оскільки, при переході від комплексної системи до дійсної її розмірність збільшилася у двічі, то в (18) та (19) невідомі оціночні матриці подамо у блочно–діагональному вигляді:

$$\begin{bmatrix} \underline{X}_2(k) & O \\ O & \underline{X}_2(k) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \underline{X}_3(k) & O \\ O & \underline{X}_3(k) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{X}_2(k) & O \\ O & \overline{X}_2(k) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{X}_3(k) & O \\ O & \overline{X}_3(k) \end{bmatrix}.$$

В цьому випадку, розв'язавши ітераційні рівняння (18), (19), отримаємо наступні об'єднані множини розв'язків:

$$\begin{bmatrix} 0.013991674 & 0.000399294 \\ 0.006281753 & 0.000225626 \end{bmatrix} \le X_2 \le \begin{bmatrix} 0.021586589 & 0.000801214 \\ 0.009887372 & 0.000448765 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0.172395292 & 0.009936108 \\ 0.009936108 & 0.004491140 \end{bmatrix} \le X_3 \le \begin{bmatrix} 0.368438230 & 0.021138449 \\ 0.021138449 & 0.009248278 \end{bmatrix}.$$

Результати ітераційного процесу подано в таблицях 1, 2.

Таблиця 1: Нижні оцінки $\underline{X}_2(k)$, $\underline{X}_3(k)$ для граничних значень параметрів $\omega = 0,\ k = 100$

	$\underline{X}_2(k),\ (\omega = 0,\ k = 100)$				$\underline{X}_3(k),\ (\omega = 0,\ k = 100)$			
k	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	2.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	6.6689	0.2235	6.6000	0.2212	1.1835	0.5035	0.5035	0.4685
2	0.5223	0.0175	0.4908	0.0165	0.8777	0.2502	0.2502	0.2051
3	0.0175	0.0005	0.0091	0.0003	0.7102	0.1199	0.1199	0.0782
4	0.0139	0.0003	0.0062	0.0002	0.5358	0.0512	0.0512	0.0231
5	0.0139	0.0003	0.0062	0.0002	0.3035	0.0179	0.0179	0.0064
6	0.0139	0.0003	0.0062	0.0002	0.1801	0.0101	0.0101	0.0045
7	0.0139	0.0003	0.0062	0.0002	0.1724	0.0099	0.0099	0.0044
8	0.0139	0.0003	0.0062	0.0002	0.1723	0.0099	0.0099	0.0044

Таблиця 2: Верхні оцінки $\overline{X}_2(k)$, $\overline{X}_3(k)$ для граничних значень параметрів $\omega = 20,\ k = 150$

	$\overline{X}_2(k),\ (\omega = 20,\ k = 150)$				$\overline{X}_3(k),\ (\omega = 20,\ k = 150)$			
k	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	2.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	0.5870	0.0251	0.5489	0.0236	2.9654	0.3866	0.3866	0.2448
2	0.0219	0.0008	0.0101	0.0004	1.1817	0.0839	0.0839	0.0303
3	0.0215	0.0008	0.0098	0.0004	0.4016	0.0225	0.0225	0.0094
4	0.0215	0.0008	0.0098	0.0004	0.3684	0.0211	0.0211	0.0092
5	0.0215	0.0008	0.0098	0.0004	0.3684	0.0211	0.0211	0.0092

Література

[1] *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление.— М.: Наука, 2002.— 303 с.

[2] *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств.— М.: Физматлит, 2007.— 280 с.

[3] *Мазко О.Г., Шрам В.В.* Умови стійкості та локалізації сімейства лінійних динамічних систем // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2009. — С. 1–19. — (Збірник праць Ін-ту математики НАН України. **6**, № 1).

[4] *Шашихин В.Н.* Методы интервального анализа в синтизе робастного управления // Вычислительные технологии. — 2001. — **6**, № 6. — С. 118–123.

[5] *Agafonov S.A.* Stability and motion stabilization of nonconservative mechanical systems // J. Mathematical Sciences. — 2002. — **112**, № 5. — P. 4419–4497.

[6] *Новицький В.В.* Синтез керованих гіроскопічних систем // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2007. — С. 196–200. — (Збірник праць Ін-ту математики НАН України. **4**, № 2).

[7] *Kliem W., Pommer C., Stoustrup J.* Stability of rotor systems: A complex modelling approach // Z. angew. Math. Phys. — 1998. — **49**. — P. 644–655.

[8] *Алілуйко А.М., Мазко О.Г.* Стійкість та стабілізація диференціальних систем другого порядку // Проблеми аналітичної механіки. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2006. — С. 7–24. — (Збірник праць Ін-ту математики НАН України. **3**, № 1).