Міністерство освіти і науки України

Західноукраїнський національний університет

А. М. Алілуйко, Н. В. Дзюбановська, І.В. Домбровський,

В.О. Єрьоменко, О.Ф. Лесик, В.М. Неміш,

С.А. Пласконь,М. І. Шинкарик

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ ТРЕНІНГІВ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Тернопіль

Економічна думка

2021

УДК 51(072)
ББК 22.11 я 73
М 54

Рецензенти: *Возняк Ольга Григорівна*, кандидат фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник, доцент кафедри економічної кібернетики та інформатики Західноукраїнського національного університету;

Мартинюк Сергій Володимирович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформатики та методики її викладання Тернопільського національного педагогічного університету ім. В. Гнатюка.

Розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри прикладної математики (протокол № 8 від 8.04.2021 р.)

Алілуйко А.М.
М 54 Методичні рекомендації для проведення тренінгів з вищої математики / А.М. Алілуйко, Н.В. Дзюбановська, І.В. Домбровський, В.О. Єрьоменко, О.Ф. Лесик, В.М. Неміш, С.А. Пласконь, М.І. Шинкарик. – Тернопіль : ЗУНУ, 2021. 104 с.

Методичні вказівки для проведення тренінгів з вищої математики укладено відповідно до програми курсу «Вища математика» для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Вони містять перелік економічних задач, який охоплює основні розділи вищої математики, вказівки до їх виконання, зразки розв'язування задач економічного та математичного змісту, короткі теоретичні відомості, список рекомендованої літератури.

УДК 51(072)
ББК 22.11 я 73

ВСТУП

«Методичні вказівки для проведення тренінгів з вищої математики» для студентів усіх спеціальностей ЗУНУ розроблені враховуючи сучасні зростаючі вимоги до економістів, як висококваліфікованих фахівців, здатних провести дослідження та прогнозування економічних явищ, змоделювати ту чи іншу економічну ситуацію.

Враховуючи необхідність в хороших спеціалістах в галузі прикладної математики оволодіння даним методичним матеріалом повинно виробити у студентів навики практичного використання математичних методів, формул та таблиць в процесі розв’язання економічних задач.

Виховання майбутніх економістів неможливо без досконалого володіння математичним апаратом.

Методичні вказівки мають на меті допомогти студентам економічних спеціальностей здобути грунтовну освіту з чітким розумінням практичного використання вищої математики для розв’язування різноманітних задач в галузі економіки.

“Методичні вказівки для проведення тренінгів з вищої математики” укладено відповідно до програми курсу вищої та прикладної математики для економічних спеціальностей вузу.

Перелік економічних задач охоплює основні розділи дисципліни “Вища математика” для студентів економічних спеціальностей:

- ЛІНІЙНА АЛГЕБРА;
- АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ;
- ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ;
- ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ;
- ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ;
- ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ.

Методичні вказівки містять короткі теоретичні відомості, велику кількість прикладів економічних задач з аналізом розв’язку, вправи для розв’язування.

Значна кількість економічних задач пропонується для самостійного розв’язування і передбачають розвиток практичних навиків розв'язування задач, направлені на глибоке та ґрунтовне вивчення основ вищої математики, розвиток логічного мислення студентів.

Взірці розв'язування задач

Множини наборів товарів, ресурсів та відповідних їм цін зручно подавати у вигляді матриць або векторів.

Задача 1. Галузь з трьох заводів виготовляє два види продукції. Матрицею A подано об'єми виготовленої продукції на кожному заводі за перший місяць, матрицею B – за другий місяць:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Знайти: а) об'єм продукції за два місяці; б) приріст об'ємів виробництва за другий місяць у порівнянні з першим за видами продукції і заводами; в) вартісне вираження виробленої продукції за два місяці (у доларах), якщо $\lambda = 8$ – курс долара по відношенню до гривні.

Розв'язування. а) Об'єм продукції за два місяці визначається сумою матриць A та B:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix},$$ де $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ – об'єм продукції j-го виду, який виготовлений i-м заводом за два місяці.

б) Приріст об'ємів виробництва за другий місяць у порівнянні з першим визначається різницею матриць:

$$D = B - A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Додатні елементи d_{ij} показують, що на заводі і об'єм виробництва j-ї продукції збільшився; від'ємні d_{ij} – зменшився; нульові d_{ij} – не змінився.

в) Для знаходження вартісного вираження виробленої продукції за два місяці потрібно знайти добуток λC.

Задача 2. Підприємство виготовляє продукцію трьох видів: P_1, P_2, P_3 і використовує сировину двох видів: S_1 і S_2. Норми витрат сировини задані матрицею *A*, де кожен елемент a_{ij} ($i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2$) показує витрати кількості одиниць сировини *j*-го виду на виготовлення одиниці продукції *i*-го виду. План виробництва заданий матрицею-рядком *C*, ціна одиниці кожного виду сировини – матрицею-стовпцем *B*.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 100 & 150 & 200 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

Знайти витрати сировини, які необхідні для планового виробництва продукції, і загальний вартість сировини.

Розв'язування. Витрати сировини можна задати матрицю $S = C\,A$, де елементи $s_{1j} = \sum_{k=1}^{3} c_{1k} a_{kj}$ – це витрати сировини *j*-го виду на виготовлення продукції *i*-го виду. Тоді

$$S = \begin{bmatrix} 100 & 150 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 & 1450 \end{bmatrix}.$$

Загальний вартість сировини P визначається як добуток матриць $P = S\,B$ або $P = CA\,B$. У даному випадку отримали

$$P = \begin{bmatrix} 800 & 1450 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix} = 800 \cdot 20 + 1450 \cdot 30 = 59500.$$

Задача 3. Робоча бригада виготовляє контролери, 60% яких вимагають додаткового налаштування при встановленні, а 40% не потребують налаштування. Відповідно до статистичних досліджень, ті з контролери, які потребували налаштування, вимагатимуть повторного налаштування через рік в 45% випадках, а в 55% через рік будуть працювати добре. Ті контролери, які не потребували початкового налаштування, будуть потребувати його через рік в 20% випадках і продовжують добре працювати в 80% випадках. Яка частка контролерів будуть працювати добре або потребуватимуть налаштування через 2 та 3 роки після встановлення?

Розв'язування. В момент після встановлення частка добра працюючих контролерів становить 0,6, а частка тих, які потребують налаштування – 0,4. Через рік частка тих добре працюючих складе: $0,4\cdot 0,8+0,6\cdot 0,55=0,65$. Частка тих, які вимагатимуть налаштування: $0,6\cdot 0,2+0,4\cdot 0.45=0,3$.

Введемо позначення:

$X_t=\begin{bmatrix}x_{1t} & x_{2t}\end{bmatrix}$ – матриця-рядок стану в момент часу *t*, де – x_{1t} – частка добре працюючих контролерів, а x_{2t} – частка контролерів, які потребують налаштування в момент часу *t*;

$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ – матриця переходу, де a_{ij} – частка контролерів, які в даний момент знаходяться в стані *i* (1 – потребують налаштування, 2 – не потребують налаштування), а через рік– в стані *j*.

Враховуючи позначення, маємо:

$$X_0=\begin{bmatrix}0,4 & 0,6\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}0,8 & 0,2\\ 0,55 & 0,45\end{bmatrix}.$$

Тоді через рік

$$X_1=X_0A=\begin{bmatrix}0,4 & 0,6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0,8 & 0,2\\ 0,55 & 0,45\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,65 & 0,35\end{bmatrix};$$

через 2 роки

$$X_2=X_1A=X_0AA=X_0A^2=$$

$$=\begin{bmatrix}0,4 & 0,6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0,8 & 0,2\\ 0,55 & 0,45\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0,8 & 0,2\\ 0,55 & 0,45\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,713 & 0,287\end{bmatrix};$$

через 3 роки

$$X_3=X_2A=X_0A^3=\begin{bmatrix}0,4 & 0,6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0,8 & 0,2\\ 0,55 & 0,45\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}0,728 & 0,272\end{bmatrix}.$$

Задача 4. В таблиці наведені дані про денну продуктивність 4 підприємств промислового холдингу, який виробляє 3 види продукції з використанням 2 видів сировини, а також тривалість роботи кожного підприємства за рік та ціна кожного виду сировини.

Вид продукції	Денна продуктивність підприємств				Витрати видів сировини	
	1	2	3	4	1	2
1 2 3	2 2 1	3 0 2	6 4 0	5 1 3	1 3 2	4 2 3
	Кількість робочих днів за рік				Ціна видів сировини	
	1	2	3	4	1	2
	200	120	150	170	100	200

Знайти:

1) річну продуктивність кожного підприємства по кожному виду продукції;

2) річні потреби кожного підприємства в кожному виді сировини;

3) річний об'єм фінансування кожного підприємства для постачання сировини, необхідної для виготовлення продукції кожного виду у вказаній кількості.

Розв'язування. Спочатку з приведеної таблиці випишемо матрицю продуктивності підприємств A, матрицю витрат сировини B та матрицю-рядок цін сировини P.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix},\ P = \begin{bmatrix} 100 & 200 \end{bmatrix}.$$

1) Кожному стовпцю матриці A відповідає денна продуктивність окремого підприємства. Якщо помножити елементи кожного стовпця на кількість робочих днів у році для відповідного підприємства, то отримаємо матрицю річної продуктивності кожного підприємства по кожному виду продукції A_N. Або інакше для обчислення A_N спочатку запишемо діагональну матрицю кількості робочих днів підприємств

$$N = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 170 \end{bmatrix},$$

і тоді

$$A_N = AN = \begin{bmatrix} 400 & 360 & 900 & 850 \\ 400 & 0 & 600 & 170 \\ 200 & 240 & 0 & 510 \end{bmatrix}.$$

2) Річні потреби кожного підприємства в кожному виді сировини B_N можна задати матрицею

$$B_N = BA_N = \begin{bmatrix} 2000 & 840 & 2700 & 2380 \\ 3000 & 2160 & 4800 & 5270 \end{bmatrix}.$$

3) Вартість річного об'єму сировини для кожного підприємства отримаємо, якщо помножимо матрицю P на B_N:

$$P_N = PB_N = \begin{bmatrix} 800000 & 516000 & 123000 & 1292000 \end{bmatrix}.$$

Задача 5. Приватне підприємство складається з двох відділень, загальний прибуток яких в минулому році склав 150 тис. грн. На цей рік заплановано збільшення прибутків першого відділення на 60%, другого – на 30%, щоб загальний прибуток виріс в 1,4 рази. Яка величина прибутку кожного відділення: а) в минулому році; б) в цьому році?

Розв'язування. Нехай x та y – прибутки першого і другого відділень в минулому році. Тоді умови задачі можна записати у вигляді системи рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ 1{,}6x + 1{,}3y = 210 \end{cases},$$

яку розв'яжемо методом Гаусса.

Виключимо невідому величину x із другого рівняння. Для цього перше рівняння помножимо на “– 1,6” і додамо до другого рівняння:

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ -0{,}3y = -30 \end{cases}.$$

Звідси $y = 100$, а $x = 150 - y = 50$.

Отже, а) прибуток в минулому році першого відділення – 50 тис. грн., другого – 100 тис. грн.;

б) прибуток в цьому році першого відділення – 80тис. грн., другого – 130 тис. грн.

Задача 6. Підприємство отримало річний прибуток 100000 грн., 10% якого відраховано до благодійного фонду, 7% сплачено у вигляді податку до пенсійного фонду (після відрахувань до благодійного фонду) та 20% до державного бюджету (після відрахувань до пенсійного фонду). Знайти суми виплат до благодійного фонду, пенсійного фонду та державного бюджету.

Розв'язування. Нехай x, y, z – благодійний внесок, пенсійні виплати та виплати до державного бюджету, відповідно. Тоді чистий прибуток становить $1000000 – (y + z)$, а благодійний внесок – $x = 0,1(100000 – (y + z))$. Перепишемо останнє рівняння у вигляді

$$x + 0,1y + 0,1z = 10000.$$

Об'єм виплат до пенсійного фонду становитимуть $y = 0,07(100000 - x)$, або

$$0,07x + y = 7000.$$

Об'єм виплат до держаного бюджету становлять $z = 0,2[100000 - (x + y)]$, або

$$0,2x + 0,2y + z = 20000.$$

Отримали неоднорідну систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} x + 0,1y + 0,1z = 10000 \\ 0,07x + y = 7000 \\ 0,2x + 0,2y + z = 20000 \end{cases},$$

яку розв'яжемо методом Крамера.

Основний визначник цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,07 & 1 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0,0014 - 0,02 - 0,007 = 0,9744 \neq 0.$$

Обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10000 & 0,1 & 0,1 \\ 7000 & 1 & 0 \\ 20000 & 0,2 & 1 \end{vmatrix} = 10000 + 140 - 2000 - 700 = 7440,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10000 & 0{,}1 \\ 0{,}07 & 7000 & 0 \\ 0{,}2 & 20000 & 1 \end{vmatrix} = 7000 + 140 - 140 - 700 = 6300,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}1 & 10000 \\ 0{,}07 & 1 & 7000 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 20000 \end{vmatrix} = 20000 + 140 + 140 - 2000 - 1400 - 140 = 16740.$$

Тепер знаходимо

$$x = \frac{7440}{0{,}9744} = 7635{,}468; \quad y = \frac{6300}{0{,}9744} = 6465{,}517; \quad z = \frac{16740}{0{,}9744} = 17179{,}803.$$

Отже, до благодійного фонду внесено 7635,468 грн., до пенсійного фонду – 6465,517 грн., до державного бюджету – 17179,803 грн.

Задача 7. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	7	1	3	2	2
S_2	7	2	1	2	3
S_3	7	2	2	1	2

Визначити кількість продукції P_1, P_2 ,P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо сировину буде повністю вичерпано. Вказати базовий розв'язок.

Розв'язування: Якщо вважати, що x_1, x_2, x_3, x_4 – це кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, то дану задачу можна записати в вигляді системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases},$$

що представляє собою математичну модель даної економічної задачі.

Розв'яжемо її методом Жордана-Гаусса, використовуючи таблиці:

Табл. 1. В першому рядку за ключовий елемент вибираємо 1. Цей рядок називається ключовим рядком. Переписуємо його без змін першим рядком другої таблиці. До відповідних елементів другого і третього рядків додаємо елементи першого помножені на “-2”. Результати записуємо другим і третім рядком таблиці 2.

	x_1	x_2	x_3	x_4	$в_i$
1	**1**	3	2	2	7
	2	1	2	3	7
	2	2	1	2	7
2	1	3	2	2	7
	0	**-5**	-2	-7	-7
	0	-4	-3	-2	-7
3	1	0	4/5	7/5	14/5
	0	1	2/5	1/5	7/5
	0	0	**-7/5**	-6/5	-7/5
4	**1**	0	0	5/7	2
	0	**1**	0	-1/7	1
	0	0	**1**	6/7	1

Табл. 2. В якості ключового елемента вибираємо “-5”. Результат ділення другого рядка на ключовий елемент, записуємо другим рядком третьої таблиці. Помноживши другий рядок таблиці 3 на “-3”, а потім на ”4”, додаючи отримані рядки відповідно до першого і третього рядків другої таблиці, отримуємо перший і третій рядки третьої таблиці, в яких відбувся процес виключення невідомої x_2.

Табл. 3. В третьому рядку ключовий елемент (-7/5) є коефіцієнтом при невідомій x_3. Тому ділимо третій рядок третьої таблиці на ключовий елемент (-7/5) і записуємо отриманий рядок третім рядком четвертої таблиці. Нам залишається виключити невідому x_3 з перших двох рядків третьої таблиці. Для цього третій рядок множимо спочатку на (-4/5) і додаємо до першого рядка третьої таблиці, а потім, множимо на (-2/5) і додаємо до другого рядка третьої таблиці. Результати дій записуємо першим і другим рядком четвертої таблиці. Таким чином ми отримали результуючу четверту таблицю, в якій кожний рядок має лише дві із чотирьох невідомих. Ця таблиця є розширеною матрицею системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 5/7x_4 = 2 \\ x_2 - 1/7x_4 = 1, \\ x_3 + 6/7x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 5/7x_4 \\ x_2 = 1 + 1/7x_4 \\ x_3 = 1 - 6/7x_4. \end{cases}$$

В останній системі рівнянь x_1, x_2, x_3 називаються базисними змінними, оскільки матриця, складена з коефіцієнтів при них є одиничною. Невідома x_4 називається вільною, тому що може приймати будь-які значення. Але в нашій задачі невідомі x_i *(i*=1, 2, 3, 4) виражають кількість реалізованої продукції, тому вони повинні бути невід'ємними, тобто $x_i \geq 0$. А значить

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 5/7x_4 \geq 0 \\ x_2 = 1 + 1/7x_4 \geq 0, \\ x_3 = 1 - 6/7x_4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 \leq 14/5 \\ x_4 \geq 0, \\ x_4 \leq 7/6 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x_4 \leq \min\{14/5; 7/6\} = 7/6.$$

Будь-якому значенню $x_4 \in [0; 7/6]$ відповідає невід'ємний розв'язок, який задовольняє умові задачі. Отже, для $x_4 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ – базовий розв'язок.

Задача 8. Три фірми виробили чотири види виробів A_1, A_2, A_3, A_4. Відповідно: 13 шт.; 12 шт.; 4 шт.; 11 шт.; II –13; 7; 21; 15; III – 2; 10; 12; 8. Ціна 1 шт. продукції в місті B_1 відповідно: 5 грн., 4, 3 грн., 2 грн., 1, 5 грн., в B_2 – 1; 1, 4; 3, 2; 1, 3; в B_3 – 2; 3, 6; 2, 5;1. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст.

Розв'язування. Запишемо матрицю продукції A_n, стрічки якої утворюються з чисел – кількості виробленої продукції кожною фірмою. Запишемо матрицю цін $B_ц$, стовпці якої утворені цінами на вироби в кожному з міст.

$$A_n = \begin{bmatrix} 13 & 12 & 4 & 11 \\ 13 & 7 & 21 & 15 \\ 2 & 10 & 12 & 8 \end{bmatrix}, \; B_ц = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4{,}3 & 1{,}4 & 3{,}6 \\ 2 & 3{,}2 & 2{,}5 \\ 1{,}5 & 1{,}3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Знайдемо добуток матриць A_n та $B_ц$:

$$\begin{bmatrix} 13 & 12 & 4 & 11 \\ 13 & 7 & 21 & 15 \\ 2 & 10 & 12 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4{,}3 & 1{,}4 & 3{,}6 \\ 2 & 3{,}2 & 2{,}5 \\ 1{,}5 & 1{,}3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 13\cdot 5+12\cdot 4{,}3+4\cdot 2+11\cdot 1{,}5 & 13\cdot 1+12\cdot 1{,}4+4\cdot 3{,}2+11\cdot 1{,}3 & 13\cdot 2+12\cdot 3{,}6+4\cdot 2{,}5+11\cdot 1 \\ 13\cdot 5+7\cdot 4{,}3+21\cdot 2+15\cdot 1{,}5 & 13\cdot 1+7\cdot 1{,}4+21\cdot 3{,}2+15\cdot 1{,}3 & 13\cdot 2+7\cdot 3{,}6+21\cdot 2{,}5+15\cdot 1 \\ 2\cdot 5+10\cdot 4{,}3+12\cdot 2+8\cdot 1{,}5 & 2\cdot 1+10\cdot 1{,}4+12\cdot 3{,}2+8\cdot 1{,}3 & 2\cdot 2+10\cdot 3{,}6+12\cdot 2{,}5+8\cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 141{,}5 & 56{,}9 & 90{,}2 \\ 939{,}6 & 103{,}7 & 118{,}7 \\ 89 & 64{,}8 & 78 \end{bmatrix}.$$

Матриця-добуток дає можливість аналізувати і порівнювати очікуваний дохід від продажу виробленої продукції. Наприклад: 141,5 – дохід першої фірми в місті B_1, 103,7 – дохід другої фірми в місті B_2, 118,7 – дохід другої фірми в місті B_3. З матриці також видно, що перша фірма одержить дохід в першому місті 141,5 грн., в другому – 56,9 грн., в третьому –90,2 грн., друга, відповідно – 939,6; 103,7; 118,7; третя – 89; 64,8; 78.

Модель Леонтєва багатогалузевої економіки

1. Рівняння системи

$$\begin{cases} x_1 = x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} + y_1 \\ x_2 = x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} + y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn} + y_n \end{cases}$$

називаються *балансовими співвідношеннями*, де x_i – загальний об’єм продукції, виробленої в i-ій галузі (план валового виробництва продукції) ($x_i \geq 0$), i = 1, 2, …, n; x_{ij} – об’єм продукції i-ї галузі, який використовується j-ю галуззю в процесі виробництва об’єму продукції x_i; y_i – об’єм продукції i-ї галузі, який призначений для реалізації (кінцевий продукт) ($y_i \geq 0$).

2. Величини $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ (i, j = 1, 2, …, n) називаються *коефіцієнтами прямих витрат*, які показують витрати i-ї галузі на виготовлення одиниці продукції j-ї галузі. Тоді балансові співвідношення можна записати у вигляді

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n \end{cases},$$

або у матричному вигляді (модель Леонтєва)

$$X = A \cdot X + Y,$$

де

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \ Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Вектор X називається *вектором валового виробництва*; вектор Y – *вектором кінцевого продукту*; матриця A – *матрицею прямих витрат*.

3. Вектор валового виробництва X при відомій матриці прямих витрат A і заданому векторі кінцевого продукту Y за деякий період часу знаходиться за формулою:

$$X = (E - A)^{-1} Y = BY.$$

4. Матриця $B = (E - A)^{-1}$ називається *матрицею повних витрат,* кожен елемент b_{ij} якої показує об'єм виробленої продукції i-ї галузі, який необхідний для виготовлення одиниці продукції j-ю галуззю.

5. Матриця $C = B - A$ називається *матрицею непрямих* (посередницьких) *витрат*.

6. Матриця $A \geq 0$ називається *продуктивною*, якщо для будь-якого вектора $Y \geq 0$ ($y_i \geq 0$, i = 1, 2, …, n) існує розв'язок $X \geq 0$ ($x_i \geq 0$, i = 1, 2, …, n) рівняння $X = A \cdot X + Y$.

Економічний зміст непродуктивності полягає в тому, що внутрішнє споживання окремих галузей перевищує їх валове виробництво.

Критерії продуктивності матриці:

а) Матриця A продуктивна тоді і тільки тоді, коли матриця $B=(E-A)^{-1}$ існує і її елементи невід'ємні.

б) Матриця A з невід'ємними елементами продуктивна, якщо сума елементів по будь-якому стовпцю (рядку) не перевищує одиниці та для хоча б одного стовпця (рядка) ця сума строго менша одиниці.

7. *Запасом продуктивності* продуктивної матриці A називається число $\alpha>0$, таке що всі матриці λA, де $1<\lambda<1+\alpha$, продуктивні, а матриця $(1+\alpha)A$ – не продуктивною.

8. *Модель рівноважних цін* (двоїста модель Леонтєва) описується системою балансових рівнянь

$$\begin{cases} p_1 = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{n1}p_n + v_1 \\ p_2 = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{n2}p_n + v_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n = a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{nn}p_n + v_n \end{cases},$$

де a_{ij} (i, j = 1, 2, …, n) – коефіцієнти прямих витрат; p_i – ціна одиниці продукції i-ї галузі; v_i – норма доданої вартості, яка показує величину доданої вартості (частина доходу, яка йде на виплату зарплати та податків, підприємницький прибуток та інвестиції) на одиницю виробленої продукції.

Систему балансових рівнянь можна записати в матричному вигляді

$$P = A^T \cdot P + V,$$

де

$$P=\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_n \end{bmatrix},\ V=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{bmatrix},\ A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Вектор P називається *век(тором цін*; вектор V – *вектором норм доданої вартості*; матриця A^T – *транспонованою матрицею прямих витрат*.

Вектор рівноважних цін P при відомій транспонованій матриці прямих витрат A^T і заданому векторі норм доданої вартості V за деякий період часу знаходиться за формулою:

$$P=(E-A^T)^{-1}V=B^TY,$$

де $B^T=(E-A^T)^{-1}$ – транспонована матриця повних витрат.

Модель рівноважних цін дозволяє, знаючи величини норм доданої вартості, здійснювати прогноз цін на продукцію галузей. Вона також дає можливість прогнозувати зміни цін та інфляцію, яка є наслідком змін цін в одній з галузей.

Задача 9. Прямі витрати двох галузей виробництва, а також обсяги кінцевих продуктів (у грошових одиницях) задані у таблиці:

Продукція цехів	Прямі витрати		Кінцевий продукт
	1	2	
1	0,11	0,06	154
2	0,21	0,11	157

Знайти: а) матрицю повних витрат та перевірити її на продуктивність; б) вектор кінцевого продукту; в) вектор валового виробництва; г) міжгалузеві витрати; д) матрицю непрямих витрат.

Розв'язування. а) З таблиці видно, що матриця прями витрат буде:

$$A=\begin{bmatrix}0{,}11 & 0{,}06\\ 0{,}21 & 0{,}11\end{bmatrix}.$$

Сума елементів кожного стовпця (рядка) менша одиниці, тому, згідно другого критерію продуктивності матриці, матриця A є продуктивною.

б) $Y=\begin{bmatrix}154\\157\end{bmatrix}$ є вектором кінцевого продукту.

в) Знайдемо вектор валового виробництва за формулою $X=(E-A)^{-1}Y$.

$$E - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}11 & 0{,}06 \\ 0{,}21 & 0{,}11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}89 & -0{,}06 \\ -0{,}21 & 0{,}89 \end{bmatrix}.$$

Для знаходження матриці $B = (E - A)^{-1}$, обчислимо визначник:

$$|E - A| = \begin{vmatrix} 0{,}89 & -0{,}06 \\ -0{,}21 & 0{,}89 \end{vmatrix} = 0{,}7921 - 0{,}0126 = 0{,}7795 \neq 0 .$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів матриці $E - A$:

$A_{11} = (-1)^2 \,|\,0{,}89\,| = 0{,}89$; $\qquad A_{12} = (-1)^3 \,|-0{,}21| = 0{,}21$;

$A_{21} = (-1)^3 \,|-0{,}06\,| = 0{,}06$; $\qquad A_{22} = (-1)^4 \,|\,0{,}89\,| = 0{,}89$.

Обернена матриця (матриця повних витрат) має вигляд:

$$B = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0{,}7795} \begin{bmatrix} 0{,}89 & 0{,}06 \\ 0{,}21 & 0{,}89 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1{,}14 & 0{,}08 \\ 0{,}27 & 1{,}14 \end{bmatrix}.$$

Остаточно маємо:

$$X = BY = \begin{bmatrix} 1{,}14 & 0{,}08 \\ 0{,}27 & 1{,}14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 154 \\ 157 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 188 \\ 221 \end{bmatrix}.$$

Отже, валове виробництво першої галуззі становить 188 у. од., а другої – 221 у. од.

г) Міжгалузеві витрати знайдемо за формулами $x_{ij} = a_{ij} x_j$:

$x_{11} = a_{11} x_1 = 0{,}11 \cdot 188 = 20{,}68$, $\quad x_{12} = a_{12} x_2 = 0{,}06 \cdot 221 = 13{,}26$,

$x_{21} = a_{21} x_1 = 0{,}21 \cdot 188 = 39{,}48$, $\quad x_{22} = a_{22} x_2 = 0{,}11 \cdot 221 = 24{,}31$.

д) Запишемо матрицю непрямих витрат C:

$$C = B - A = \begin{bmatrix} 1{,}14 & 0{,}08 \\ 0{,}27 & 1{,}14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}11 & 0{,}06 \\ 0{,}21 & 0{,}11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}03 & 0{,}02 \\ 0{,}06 & 0{,}03 \end{bmatrix}.$$

Задача 10. Перевірити на продуктивність матрицю

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

та знайти її запас продуктивності.

Розв'язування. Використаємо перший критерій продуктивності матриці. Для цього знайдемо матрицю $E - A$ та обернену до неї:

$$E - A = \begin{bmatrix} 0{,}7 & -0{,}5 \\ -0{,}8 & 0{,}6 \end{bmatrix}, \quad (E - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 30 & 25 \\ 40 & 35 \end{bmatrix}.$$

Видно, що матриця $(E-A)^{-1}$ існує і має невід'ємні елементи. Отже, A продуктивна.

Для знаходження запасу продуктивності знову будемо користуватися першим критерієм продуктивності матриці. У даному випадку

$$E-\lambda A=\begin{bmatrix}1-0{,}3\lambda & -0{,}5\lambda\\ -0{,}8\lambda & 1-0{,}4\lambda\end{bmatrix}.$$

Визначник цієї матриці

$$\Delta=|E-\lambda A|=(1-0{,}3\lambda)(1-0{,}4\lambda)-0{,}4\lambda^2=-0{,}28\lambda^2-0{,}7\lambda+1.$$

Тоді обернена матриця має вигляд:

$$(E-\lambda A)^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{1-0{,}3\lambda}{\Delta} & \dfrac{0{,}5\lambda}{\Delta}\\ \dfrac{0{,}8\lambda}{\Delta} & \dfrac{1-0{,}4\lambda}{\Delta}\end{bmatrix}.$$

Матриця λA буде продуктивною, якщо всі елементи матриці $(E-\lambda A)^{-1}$ будуть невід'ємними. Це можливо лише тоді, коли

$$\begin{cases}\Delta>0\\ 1-0{,}3\lambda\ge 0\\ 1-0{,}4\lambda\ge 0\\ \lambda>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3{,}515<\lambda<1{,}015\\ \lambda<10/3\\ \lambda\le 2{,}5\\ \lambda>1\end{cases}\Rightarrow \lambda\in(1;1{,}015).$$

При $\lambda\in(1;1{,}015)$ матриця λA продуктивна, а при $\lambda=1{,}015$ – непродуктивною. Отже, запас продуктивності матиці A дорівнює 0,015.

Задача 11. Баланс двох галузей промисловості за деякий період (у грошових одиницях) наведений в таблиці.

Галузь	Споживання		Кінцевий продукт	Валове виробництво
	Промисловість	Сільське господарство		
Промисловість	11	12	77	100
Сільське господарство	21	24	155	200

Знайти об'єм валового виробництва кожного виду продукції, якщо кінцевий продукт за галузями збільшився вдвічі.

Розв'язування. Знайдемо матрицю прямих витрат:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x_{11}}{x_1} & \dfrac{x_{12}}{x_2} \\ \dfrac{x_{21}}{x_1} & \dfrac{x_{22}}{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}11 & 0{,}06 \\ 0{,}21 & 0{,}12 \end{bmatrix}.$$

Матриця повних витрат:

$$B = (E - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}89 & -0{,}06 \\ -0{,}21 & 0{,}88 \end{bmatrix}^{-1} \approx \begin{bmatrix} 1{,}14 & 0{,}08 \\ 0{,}27 & 1{,}15 \end{bmatrix}.$$

Відповідно до умови задачі вектор кінцевої продукції повинен бути рівним

$$Y = 2 \cdot \begin{bmatrix} 77 \\ 155 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 154 \\ 310 \end{bmatrix}.$$

Вектор валового виробництва становить

$$X = BY = \begin{bmatrix} 1{,}14 & 0{,}08 \\ 0{,}27 & 1{,}15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 154 \\ 310 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 200{,}36 \\ 398{,}08 \end{bmatrix}.$$

Отже, валове виробництво в промисловості потрібно збільшити на 100,36 у. од., а в сільському господарстві – на 298,08 у. од.

Задача 12. Економічна система складається з трьох галузей. Нехай транспонована матриця прямих витрат та вектор норм добавленої вартості мають вигляд

$$A^T = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{bmatrix}, \; V = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Знайти вектор рівноважних цін P та зміну вектора рівноважних цін ΔP після підвищення норми доданої вартості в першій галузі на 10%.

Розв'язування. Спочатку знайдемо транспоновану матрицю повних витрат:

$$B^T = (E - A^T)^{-1} \approx \begin{bmatrix} 1{,}64 & 1{,}15 & 0{,}98 \\ 0{,}43 & 2{,}1 & 0{,}66 \\ 0{,}46 & 0{,}72 & 1{,}48 \end{bmatrix}.$$

Тоді рівноважні ціни становлять

$$P = B^T V = \begin{bmatrix} 11,48 \\ 10,98 \\ 7,21 \end{bmatrix}.$$

Після зміни норми доданої вартості, тобто $V = \begin{bmatrix} 3,3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, новий вектор рівноважних цін становитиме $P_1 = \begin{bmatrix} 11,97 \\ 11,11 \\ 7,35 \end{bmatrix}$, а вектор зміни цін буде мати вигляд $\Delta P = P_1 - P = \begin{bmatrix} 0,49 \\ 0,13 \\ 0,14 \end{bmatrix}$.

Таким чином, продукція першої галузі подорожчала на 4,27%, другої – на 1,18%, третьої галузі – на 1,94%.

Модель міжнародної торгівлі

Система рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = x_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = x_n \end{cases}$$

є *моделлю міжнародної торгівлі* (*лінійною моделлю торгівлі*), де x_i (i = 1, 2, …, n) – національний дохід i-ї держави; a_{ij} (i, j = 1, 2, …, n) – частка національного доходу, яку j-а держава витрачає на покупку товарів у i-й державі.

Вважаємо, що весь національний дохід витрачається на закупку товарів або всередині держави, або на імпорт із інших держав, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad (j = 1,2,\ldots,n).$$

Модель міжнародної торгівлі можна записати у матричному вигляді

$$A \cdot X = X,$$

де

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Матриця A, з властивістю, що сума елементів її довільного стовпчика дорівнює 1, називається *структурною матрицею торгівлі*, X – матриця-стовпчик складена з координат *вектора* $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ *національних доходів*.

Значить вектор $\vec{x}$ національних доходів є власним вектором структурної матриці торгівлі A, який відповідає власному значенню $\lambda = 1$.

Задача 13. Структурна матриця торгівлі трьох країн має вигляд

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Знайти співвідношення між національними доходами країн, при якому буде торгівля збалансована.

Розв'язування. Позначимо національні доходи відповідно x_1, x_2, x_3. Тоді знаходимо власний вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, який відповідає власному значенню $\lambda = 1$, розв'язавши рівняння $(A-E)X = 0$ або систему рівнянь $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Неважко знайти загальний розв'язок цієї системи:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} x_3 \\ x_2 = \frac{3}{2} x_3 \end{cases},$$

тому за власний вектор можна взяти вектор $\vec{x} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1 \right)$.

Одержаний результат означає, що збалансованість торгівлі цих трьох країн досягається при співвідношенні доходів $\frac{3}{2} : \frac{3}{2} : 1$ або $3:3:2$.

Задача 14. Завод виробляє вироби A і продає їх по 2 гривні за кожний. Керівництво заводу встановило, що сума $y_в$ загальних щотижневих витрат (у гривнях) на виготовлення виробів A кількістю x (тисяч одиниць) має таку закономірність:

$$y_в = 1000 + 1300x + 100x^2.$$

Визначити щотижневу кількість виготовлення та продажу виробів A, що забезпечує рівновагу витрат і доходу.

Розв'язування. Дохід від продажу x тисяч виробів A вартістю 2 гривні за кожний буде: $y_д = 2000x$. Для рівноваги доходу та витрат треба, щоб виконувалась рівність: $y_в = y_д$,

$$\text{тобто } 1000 + 1300x + 100x^2 = 2000x,$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 5.$$

Ця задача має дві точки рівноваги. Завод може виробляти 2000 ($x = 2$) виробів A з доходом і витратами 4000 гривень, або 5000 ($x = 5$

) виробів A з доходом і витратами 10 000 гривень.

Розглянемо на цьому прикладі можливості заводу. Позначимо щотижневий прибуток через P. Тоді:

$$P = y_{д} - y_{в} = 2000x - (1000 + 1300x + 100x^2) = -1000 + 700x - 100x^2 =$$
$$= -100(x-2)(x-5).$$

Звідси випливає, що при $x = 2$ або $x = 5$ маємо $P = 0$, тобто ці значення x будуть точками рівноваги.

Якщо $2 < x < 5$, тоді $x - 2 > 0$, $x - 5 < 0$ маємо $P > 0$, тобто завод одержить прибуток. При інших значеннях x, тобто коли $x \notin [2; 5]$, будемо мати $P < 0$ – завод несе збитки.

Задачі фінансової математики

1. Формули зростання за складними відсотками:

$$K_t = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t = K_0 (1+i)^t ,$$

де K_t – сума вкладу, нагромаджена через t років; K_0 – початкова сума вкладу; p – щорічний відсотковий приріст; t – період зростання в роках; $i = {}^{p}\!/_{100}$, $1 + i = r$ – коефіцієнт складних відсотків.

2. Неперервне зростання за складними відсотками:

$$K_t = K_0 \cdot e^{\frac{p}{100}t} = K_0 \cdot e^{it} .$$

Якщо $p > 0$, формула називається показниковим законом зростання, а при $p < 0$ – показниковим законом спадання.

3. Кінцеву величину K_t початкової суми K_0 через t років у випадку, коли питома відсоткова ставка – i, а проценти нараховуються m разів у рік, обчислюють за формулою:

$$K_t = K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt} .$$

4. Рахунки накопичення:

$$S = P \cdot S_{n/i} .$$

Тут S – величина рахунку накопичення; P – початковий внесок; $S_{n/i}$ – знаходиться в розрахунковій таблиці Д1 (в додатках).

5. Розрахунки ренти:

$$A = P \cdot a_{n/i},$$

де $a_{n/i} = i^{-1}\left[1-(1+i)^{-n}\right]$ табульована для різних значень $i = \frac{R}{100}$ та n.
Тут A – величина внеску на рентний рахунок; P – щорічна виплата протягом n років; R – величина щорічного відсоткового зростання.

6. Погашення боргу:

$$P = \frac{A}{a_{n/i}}.$$

Тут A – величина внеску взятого в борг; P – сума регулярного повернення; $a_{n/i}$ – знаходиться в розрахунковій таблиці Д1 (в додатках).

Задача 15. У місті проживає 249 тис. мешканців. Щорічно народонаселення збільшується на 1,7%. Яка кількість жителів буде в цьому місті через 12 років?

Розв'язування. Використаємо формулу зростання за складними процентами:

$$K_{12} = 249\left(1+\frac{1,7}{100}\right)^{12} \approx 305.$$

Отже, через 12 років у місті буде 305 тис. жителів.

Задача 16. Вкладник надає банку 2000 гривень під складні відсотки з умовою їх неперервного зростання на 12% річних. Обчислити нагромадження капіталу за 4 роки.

Розв'язування. Використаємо формулу непервного зростання за складними відсотками:

$$K_4 = 2000 \cdot e^{4 \cdot 0,12} \approx 3,2322 \text{ тис. грн.}$$

Задача 17. Сума $K_0 = 200$ тис. грн. вкладена під складні відсотки з розрахунку 12% річних терміном на 4 роки. Обчислити кінцеву суму, якщо відсотки нараховуються в кінці кожного місяця.

Розв'язування. Відомо, що $K_0 = 200$ тис. грн., $i = 0{,}12$, $m = 12,\ t = 4$. Отже,

$$К_4 = 200\left(1 + \frac{0{,}12}{12}\right)^{12\cdot 4} = 200 \cdot 1{,}01^{48} = 322{,}4 \text{ тис. грн.}$$

Задача 18. Кожного місяця студент вносить 100 гривень на свій рахунок накопичення з одержанням прибутку 5% щомісячно. Обчислити величину його накопичення після здійснення 12 внеску.

Розв'язування. Оскільки табличне значення $S_{n/i}$ рівне $S_{n/i} = S_{12/0{,}05} = 15{,}917127$, то $S = 100 \cdot 15{,}917127 \approx 1591{,}71$ грн.

Задача 19. В день 55-річчя працівниця фірми "Остер" відкрила рахунок ренти в страховій компанії "УНІВЕРСАЛЬНА" за умови щорічного отримання у свій день народження 1000 грн. протягом 15 років. Яку суму внесено на рахунок ренти, якщо кошти прийнято з 5% щорічним зростанням?

Розв'язування. Використаємо формулу $A = P \cdot a_{n/i}$. В нашій задачі регулярні виплати $P = 1000$ грн. Коефіцієнт $a_{n/i}$ взято із таблиці Д1 і рівний $a_{15/0{,}05} = 10{,}379658$. Значить $A = 1000 \cdot 10{,}379658 \approx 10379{,}66$ грн.

Отже, працівниця фірми повинна покласти на рахунок ренти 10379,66 грн., щоб одержувати по 1000 грн. щорічно протягом 15 років.

Задача 20. На час навчання студент університету отримав з фонду навчання в борг 8000 грн. Цей кредит йому надано із 8% щорічного зростання і умовою щорічного повернення боргу в кінці кожного року після закінчення університету протягом 15 років. Скільки коштів повинен повертати студент кожного року після закінчення університету?

Розв'язування. Шукана величина P щорічної сплати боргу студентом знаходиться за формулою $P = \dfrac{A}{a_{n/i}}$. В даному випадку борг $A = 8000$ грн., час його повернення $n = 15$, відсоток зростання $R = 8$, $i = \dfrac{R}{100} = 0{,}08$. Із таблиці Д 1 знаходимо $a_{15/0{,}08} = 8{,}559479.$ Тому

$$P = \frac{8000}{a_{15/0{,}08}} = \frac{8000}{8{,}559479} \approx 934{,}64 \text{ грн.}$$

Отже, для погашення боргу студент повинен в кінці кожного року сплачувати фонду навчання 934,64 грн.

Економічні задачі на застосування методів диференціального числення функції однієї змінної

Маржинальною вартістю називається гранично можлива вартість в умовах хоча б постійного відтворення виробництва відповідної продукції. Аналогічно визначають *маржинальні доходи* та *прибуток*.

Позначимо через $V(x)$, $D(x)$, $P(x)$ – витрати, дохід і прибуток виробництва x одиниць виробленої і проданої продукції. Тоді визначимо наступні величини.

Маржинальна вартість:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{V(x + \Delta x) - V(x)}{\Delta x}.$$

Маржинальний дохід:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta D(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{D(x + \Delta x) - D(x)}{\Delta x}.$$

Маржинальний прибуток:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x}.$$

Величину $V_{сер} = \dfrac{V(x)}{x}$ називають *середніми витратами* на одиницю випуску продукції.

Якщо функція $q(t)$ виражає об’єм виготовленої продукції q за час t, то похідна $q'(t_0)$ в момент часу t_0 є *продуктивністю праці* в момент t_0.

Задача 21. Б’юро економічного аналізу ВАТ “Ватра” встановило, що при виробництві x одиниць продукції A щоквартальні витрати $V(x)$ виражаються формулою

$$V(x) = 20\,000 + 40x \text{ (гривень)},$$

а дохід $D(x)$, одержаний від продажу x одиниць цієї продукції виражається формулою

$$D(x) = 100x - 0{,}001x^2 \text{ (гривень)}.$$

Кожного кварталу завод виробляє 3100 одиниць продукції A, але прагне збільшити випуск цієї продукції до 3200 одиниць. Обчислити приріст витрат, доходу та прибутку. Знайти середню величину приросту прибутку на одиницю приросту продукції.

Розв’язування. Запланований приріст продукції буде

$\Delta x = 3200 - 3100 = 100$ (одиниць продукції A).

Приріст витрат:

$$\Delta V(x) = V(3200) - V(3100) = (20000 + 40 \cdot 3200) -$$
$$-(20000 + 40 \cdot 3100) = 148000 - 144000 = 4000.$$

Приріст доходу:

$$\Delta D(x) = D(3200) - D(3100) = (100 \cdot 3200 - 0{,}01 \cdot 3200^2) -$$
$$-(100 \cdot 3100 - 0{,}01 \cdot 3100^2) = 217600 - 213900 = 3700.$$

Позначимо прибуток $P(x)$. Тоді

$$P(x) = D(x) - V(x) = 100x - 0{,}01x^2 - (20000 + 40x) =$$
$$= -20000 + 60x - 0{,}01x^2.$$

Приріст прибутку буде:

$$\Delta P(x) = P(3200) - P(100) = (-20000 + 60 \cdot 3200 - 0{,}01 \cdot 3200^2) -$$
$$-(-20000 + 60 \cdot 3100 - 0{,}01 \cdot 3100^2) = 69600 - 69900 = -300,$$

тобто зменшиться на 300 гривень. Середня величина прибутку на одиницю приросту продукції буде

$$\frac{\Delta P(x)}{\Delta(x)} = \frac{-300}{100} = -3.$$

Отже, кожна одиниця додаткової продукції зменшує прибуток на 3 гривні.

Задача 22. Залежність між витратами виробництва V і об'ємом виготовленої продукції x виражаються функцією $V = 100x - 0{,}06x^3$ (у.о.). Визначити середні та маржинальні витрати при об'ємі продукції 20 одиниць.

Розв'язування. Функція середніх витрат (на одиницю продукції) має вигляд: $V_{cep} = \dfrac{V}{x} = 100 - 0{,}06x^2$. При $x = 20$ середні витрати становлять $V_{cep}(20) = 100 - 0{,}06 \cdot 20^2 = 76$ (у.о.). Функція маржинальних витрат: $V'_{cep} = 100 - 0{,}18x^2$. При $x = 20$ маржинальні витрати становлять $V'_{cep}(20) = 100 - 0{,}18 \cdot 20^2 = 28$ (у.о.). Отже, середні витрати на виробництво одиниці продукції складають 76 у.о., а додаткові витрати на виготовлення додаткової одиниці продукції при заданому рівні виробництва ($x = 20$) складають 28 у.о.

Задача 23. Підприємство виготовляє x виробів, роздрібна вартість кожного з них дорівнює p, причому $p = 70 - 0{,}2x$, а функція витрат $V(x) = 2000 + 12x$ (у гривнях). Знайти маржинальний прибуток, якщо виготовлено і продано 50 і 200 виробів.

Розв'язування. У нашому випадку функцією доходу є:

$$D(x) = x \cdot p = x(70 - 0{,}2x) = 70x - 0{,}2x^2 .$$

Прибуток від виготовлення і продажу x виробів буде

$$P(x) = D(x) - V(x) = 70x - 0{,}2x^2 - (2000 + 12x) = -0{,}2x^2 + 58x - 2000.$$

Маржинальний прибуток для довільного x дорівнює

$$P'(x) = (-0{,}2x^2 + 58x - 2000)' = -0{,}4x + 58 .$$

Звідси, при $x = 50$ і $x = 200$ маємо:

$$P'(50) = -0{,}4 \cdot 50 + 58 = -20 + 58 = 38 ,$$

$$P'(200) = -0{,}4 \cdot 200 + 58 = -80 + 58 = -22 .$$

Отже, при зростанні і продажу кількості виробів підприємство матиме збитки у розмірі 22 гривні за кожен виріб.

Задача 24. Валовий продукт деякої держави є функція $ВП = 50 + t$ (мільярдів гривень), а кількість населення – $K = 80 + 3t$ (мільйонів), які залежать від часу t. Знайти швидкість зміни частини валового продукту держави, що припадає на кожного громадянина.

Розв'язування. Нехай функція

$$ВП_{сер}(t) = \frac{ВП}{K} = \frac{50+t}{80+3t}$$

– частина валового продукту держави, що припадає на кожного громадянина. Тоді швидкість зміни частини валового продукту є похідна

$$ВП'_{сер}(t) = \frac{(50+t)'(80+3t) - (50+t)(80+3t)'}{(80+3t)^2} = \frac{80+3t-150-3t}{(80+3t)^2} =$$

$$= \frac{80+3t-150-3t}{(80+3t)^2} = \frac{-70}{(80+3t)^2}.$$

Оскільки похідна від'ємна, то частина валового продукту, що припадає на кожного громадянина, з часом зменшується.

Нехай $V(x)$ – *функція споживання* (частина доходів, які витрачаються), а $S(x)$ – *функція збереження*, де x – національний дохід. Тоді

$$V(x) + S(x) = x.$$

Диференціюємо останнє рівняння, і отримаємо

$$V'(x) + S'(x) = 1,$$

де $V'(x)$ – гранична схильність до споживання, $S'(x)$ – гранична схильність до зберігання.

Задача 25. Функція споживання деякої країни має вигляд $V(x) = 0{,}36x^{5/4} + 0{,}25x + 20$, де x – сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти граничну схильність до споживання й граничну схильність до збереження, якщо дохід становить 16 млн. грош. од.

Розв'язування. Спочатку знайдемо граничну схильність до споживання:

$$V'(x) = 0{,}45x^{1/4} + 0{,}25.$$

При $x = 16$ маємо $V'(16) = 0{,}45\sqrt[4]{16} + 0{,}25 = 1{,}15$.

Гранична схильність до споживання та гранична схильність до зберігання пов'язані рівністю $V'(x) + S'(x) = 1$. Тому гранична схильність до зберігання має вигляд

$$S'(x) = 1 - V'(x) = 0{,}75 - 0{,}45x^{1/4}.$$

При $x = 16$ маємо $S'(16) = 1 - 1{,}15 = -0{,}15$.

Еластичність попиту Q відносно ціни p:

$$E_p(Q) = \lim_{\Delta p \to 0}\left(\frac{\Delta Q}{Q} : \frac{\Delta p}{p}\right) = \frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp}, \text{ або } E_p(Q) = p \cdot T_Q(p),$$

де

$$T_Q(p) = \frac{1}{Q}\frac{dQ}{dp}$$

– *відносна швидкість зміни (темп) функції*.

Оскільки з підвищенням ціни на товар попит на нього знижується, то $\frac{dQ}{dp} < 0$, тому за еластичність беремо:

$$E_c = -E_p(Q) = -\frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp}.$$

Якщо $E_c > 1$ (підвищенню ціни на 1% відповідає зниження попиту більше, ніж на 1%), то попит еластичний.

Якщо $E_c = 1$ – попит нейтральний.

Якщо $0 < E_c < 1$ – попит нееластичний.

Еластичність пропозиції $S(p)$ відносно ціни p:

$$E_p(S) = E_p = \lim_{\Delta p \to 0}\left(\frac{\Delta S}{S} : \frac{\Delta p}{p}\right) = \frac{p}{S}\frac{dS}{dp}.$$

Задача 26. Знайти еластичність попиту $Q = 15 - 2p$ стосовно ціни $p = 5$.

Розв'язування. Знайдемо еластичність попиту:

$$E_c = -\frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp} = -\frac{p}{Q}(-2) = \frac{2p}{Q} = \frac{2p}{15-2p}.$$

При $p=5$ маємо $E_c = 2$. Це означає, що попит є еластичним. При ціні 5 грн. підвищення її на 1% приведе до зниження попиту на 2%.

Задача 27. Залежність попиту Q від ціни p задана функцією $Q = 50(15-\sqrt{p})$. Знайти еластичність попиту. Визначити, при яких значеннях ціни попит буде: а) еластичним; б) нейтральним; в) нееластичним. Які рекомендації відносно ціни за одиницю продукції можна дати керівникам підприємства при $p=50$ і $p=150$.

Розв'язування. Знайдемо еластичність функції

$$E_p(Q) = \frac{p}{50(15-\sqrt{p})}\left(50(15-\sqrt{p})\right)' = -\frac{\sqrt{p}}{2(15-\sqrt{p})}.$$

Попит нейтральний, якщо $E_p(Q) = -\frac{\sqrt{p}}{2(15-\sqrt{p})} = -1$.

Розв'язком останнього рівняння є $p=100$. Оскільки $p>0$ і $Q=50(15-\sqrt{p})>0$ (тобто $p<225$), то при $0<p<100$ попит є нееластичним, а при $100<p<225$ – еластичним.

Якщо ціна одиниці продукції 50 грош. од., то попит є нееластичним і можна підвищити ціну. При цьому дохід зросте. При ціні продукції 150 грош. од. попит є еластичним. У такому випадку бажаним є зниження ціни, що приведе до збільшення доходу в результаті збільшення попиту на продукцію.

Задача 28. Обсяг випущеної продукції q заданий функцією $q = -\frac{7}{9}t^3 + 7t^2 + 98t + 50$, $t \in [0;8]$, де t – робочий час. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни через 1 годину після початку роботи й за годину до її завершення.

Розв'язування. Спочатку знайдемо продуктивність праці

$$z(t) = q'(t) = -\frac{7}{3}t^2 + 14t + 98.$$

Тоді знайдемо швидкість і темп зміни продуктивності праці, які виражаються похідною $z'(t)$ та логарифмічною похідною $T_z(t) = [\ln z(t)]' = \dfrac{z'(t)}{z(t)}$ відповідно:

$$z'(t) = -\frac{14}{3}t + 14, \; T_z(t) = \frac{-\frac{14}{3}t + 14}{-\frac{7}{3}t^2 + 14t + 98} = \frac{2t-6}{t^2 - 6t - 42}.$$

В задані моменти часу $t_1 = 1$ і $t_2 = 8 - 1 = 7$ відповідно матимемо: $z(1) = 109{,}67$, $z'(1) = 37{,}33$, $T_z(1) = 0{,}09$ та $z(7) = 81{,}67$, $z'(7) = -9{,}33$, $T_z(7) = 0{,}23$.

Отже, наприкінці робочого дня продуктивність праці знижується; зміна знака $z'(t)$ та $T_z(t)$ з «+» на «–» вказує на те, що швидкість і темп зміни продуктивності праці в перші години робочого дня збільшується і знижується в останні години.

Якщо аргумент x обчислений з відносною похибкою $\delta_x = \dfrac{\Delta x}{x}$, то функція $y = f(x)$ – з відносною похибкою $\delta_y = \dfrac{\Delta y}{y} = |E_x(y)|\delta_x$.

Задача 29. Витрати палива автомобілем на 100 км шляху залежно від швидкості руху v (км/год) описується функцією $V(v) = 15 - 0{,}4v + 0{,}002v^2$. Оцінити відносну похибку обчислення витрат палива за швидкості $v = 80$ км/год, визначену з точністю 5%.

Розв'язування. Знайдемо еластичність функції

$$E_v(V) = v\frac{V'(v)}{V(v)} = \frac{v(-0{,}4 + 0{,}004v)}{15 - 0{,}4v + 0{,}002v^2}.$$

При $v = 80$ отримаємо $|E_{80}(V)| = 1{,}52$. Тоді відносна похибка $\Delta_V = 1{,}52 \cdot 5 \approx 7{,}6\%$.

Задача 30. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією

$V=\dfrac{1}{30}x^2+8x+300$, $p=40-\dfrac{1}{10}x$ – залежність між питомою ціною і кількістю одиниць продукції *x,* яку можна продати по цій ціні. Розрахувати, за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, прибуток при цих умовах.

Розв'язування. Прибуток P визначається як різниця між доходами і сумарними витратами виробництва $P=D-V$.

В нас дохід – $D=p\cdot x=(40-\dfrac{1}{10}x)\cdot x=40x-\dfrac{1}{10}x^2$,

сумарні витрати – $V=\dfrac{1}{30}x^2+8x+300$,

прибуток – $P=40x-\dfrac{1}{10}x^2-\dfrac{1}{30}x^2-8x-300=-\dfrac{2}{15}x^2+32x-300.$

Знайдемо маржинальний прибуток – $P'=-4/15\cdot x+32$.

Максимальний прибуток буде тоді, коли $P'=0$, оскільки $P''=-4/15<0$.

При цьому $-4/15\cdot x+32=0$; $-4x+480=0$; $x=120$.

Отже, щоб прибуток був максимальним, треба випускати 120 од. продукції.

Маржинальні витрати – $V'(120)=\dfrac{1}{15}\cdot 120+8=16$, сумарні витрати – $V(120)=\dfrac{1}{30}\cdot 120^2+8\cdot 120+300=480+960+300=1740$.

Максимальний прибуток $P(120)=-\dfrac{2}{15}\cdot 120^2+32\cdot 120-300=1620$.

Задача 31. При відомій функції попиту $Q=Q(p)=7-p$ і пропозиції $S=S(p)=p+1$, де Q і S – кількість товару; p – ціна товару.

Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту і пропозиції для рівноважної ціни; в) зміну доходу при підвищенні ціни на 5% від рівноважної.

Розв'язування. а) рівноважна ціна – ціна, при якій попит і пропозиція врівноважуються. Тому, рівноважна ціна визначається з рівняння $Q(p)=S(p)$; $7-p=p+1$; $p=3$ грн.

б) знаходимо еластичність попиту і пропозиції за формулами:

$$E_p(Q)=\frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp},\ \ E_p(S)=\frac{p}{S}\frac{dS}{dp}.$$

В даному випадку

$$E_p(Q)=\frac{p}{7-p}\cdot(-1)=-\frac{p}{7-p};\ E_p(S)=\frac{p}{S}\cdot 1=\frac{p}{p+1}.$$

Для рівноважної ціни $p = 3$ маємо

$$E_{p=3}(Q)=-0{,}75;\ \ E_{p=3}(S)=0{,}75.$$

Знайдені значення еластичності за абсолютною величиною менші за 1, тоді і попит, і пропозиція даного товару при рівноважній ціні нееластичні відносно ціни, тобто зміна ціни не призведе до різкої зміни попиту і пропозиції. Так, при підвищенні ціни на 1%, попит зменшиться на 0,75%, а пропозиція підвищиться на 0,75%.

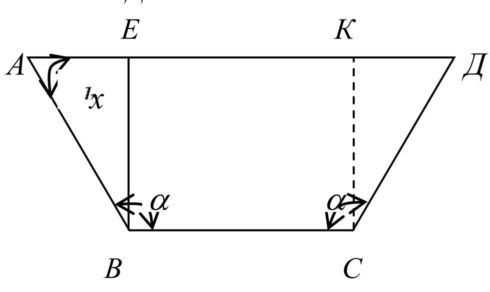
в) при підвищенні ціни p на 5% від рівноважної, попит зменшиться на $5\cdot 0{,}75=3{,}75\%$, а дохід зросте на 3,75%.

Задача 32. Під яким кутом α потрібно збити три однакових дошки, щоб одержати водонапійний жолоб найбільшої місткості.

Розв'язування. Найбільшу місткість буде мати жолоб тоді, коли поперечний переріз буде найбільшим. У цій задачі поперечний переріз має форму рівносторонньої трапеції.

Позначимо через $x=\angle ВАД$ і врахуємо, що ширина кожної дошки дорівнює a $(AB = BC = СД = a)$. Тоді висота трапеції $BE = a\sin x$. Окрім цього, $AE = a\cdot\cos x$, тому

$$АД = AE + EK + КД = a\cos x + a + a\cos x = a + 2a\cos x.$$



Площа трапеції дорівнює

$$S(x)=\frac{BC+AД}{2}\cdot BE=\frac{a+a+2a\cos x}{2}\cdot a\sin x=a^2(1+\cos x)\sin x$$

$(0\le x\le \pi/2)$.

Похідна функції

$$S'(x)=a^2(-\sin^2 x+\cos x(1+\cos x))=a^2(-\sin^2 x+$$
$$+\cos x+\cos^2 x)=a^2(1+\cos x)(2\cos x-1).$$

Оскільки похідна на інтервалі $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ перетворюється в нуль тільки при $x=\frac{\pi}{3}$, а $S(0)=0$, $S\left(\frac{\pi}{2}\right)=a^2$, $S(\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, то S приймає найбільше значення при $x=\frac{\pi}{3}$, тобто при $\alpha=120°$.

Крім цього,

$$S''=a^2(-2\sin x\cos x-\sin x-2\cos x\sin x)=-a^2\sin x(4\cos x+1).$$

При $x=\frac{\pi}{3}$ маємо $S''=-\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$, тобто $S''<0$. Це означає, що при $x=\frac{\pi}{3}$ функція $S(x)$ досягає максимуму. Отже, якщо три дошки збити під кутом $\alpha=120°$, то водонапійний жолоб матиме найбільшу місткість.

Концептуальні аспекти математичного моделювання

Математичне моделювання – це комплексне дослідження властивостей фізичного об’єкту з допомогою створеної його математичної моделі (найчастіше з використанням ЕОМ).

В різних сферах застосування етапи процесу моделювання мають свої специфічні риси, але в усіх випадках можна виділити декілька етапів, що присутні завжди. Визначимо одну з пропонованих на сьогоднішній день класифікацій:

1. *Постановка проблеми та її якісний аналіз*. Тут виділяють найважливіші риси та властивості модельованого об’єкту та

абстрагують другорядні, вивчають структуру та взаємозв'язок елементів, формулюють основні гіпотези (хоча би попередні).

2. *Побудова математичної моделі*. Це етап формалізації проблеми, вираження її у вигляді конкретнихматематичних залежностей та відношень. Як правило, спочатку визначається основна конструкція задачі (тип моделі), а потім відбувається уточнення окремих деталей.

3. *Математичний аналіз моделі.* Виясняються загальні властивості моделі, доводиться теорема існування розв'язку задачі (інакше наступні дослідження не проводяться), виясняють чи єдиний роозв'язок, які змінні в ходитимуть в розв'язок та в якому співвідношенні, в яких межах та з якою тенденцією вони змінюватимуться.

4. *Підготовка вихідної інформації.* Тут використовують методи теорії ймовірностей та математичної статистики.

5. *Чисельний розв'язок*. Розробляються алгоритми для розв'язування задачі, складаються програми для ПК. Завдяки швидкодії ЕОМ можна провести багаточислені експерименти з різними вихідними умовами та параметрами.

6. *Аналіз чисельних результатів та їх застосування*. Повністю вивчається питання про правильність та повноту результатів моделювання, адекватність моделі та її практичне застосування.

Змінні величини бувають незалежними чи залежними, дискретними чи неперервними, детермінованими або випадковими. Наприклад, залежною змінною є собівартість продукції, незалежною від процесу функціонування підприємства величиною є початковий розмір статутного фонду, дискретною — кількість видів продукції, неперервною —час, площа посіву тощо, детермінованою — норма висіву насіння кукурудзи на гектар, норма витрати сировини на одиницю продукції, випадковою — величина прибутку, кількість телят, які народяться у плановому періоді тощо.

Вхідні змінні економічної системи бувають двох видів: керовані x_j (j= *1, 2, ..., n),* значення яких можна змінювати в деякому інтервалі; і некеровані змінні y_r (r *= I 2, ...,s),* значення яких не залежать від волі людей і визначаються зовнішнім середовищем. Наприклад, обсяг придбаного пального — керована, а температура повітря — некерована змінна. Залежно від реальної ситуації керовані змінні можуть переходити у групу некерованих і навпаки. Наприклад, у разі насиченого ринку обсяги придбання дизельного палива є керованою змінною величиною, а за умов дефіциту цього ресурсу — некерованою.

Кожна економічна система має певну мету свого функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимуму чистого прибутку. Ступінь досягнення мети, здебільшого, має кількісну міру, тобто може бути описаний математично.

Нехай z— вибрана мета (ціль). За цих умов вдається, як правило, встановити залежність між величиною z, якою вимірюється ступінь досягнення мети, вхідними змінними та параметрами системи:

$$z=f(x_1,x_2,...x_n;y_1,y_2,...y_s;c_1,c_2,...,c_l), \qquad (1)$$

де параметри c_k $(k=1,2,...,l)$ є кількісними характеристиками системи.

Функцію z називають *цільовою функцією,* або *функцією мети.* Для економічної системи це є функція ефективності її функціонування та розвитку, оскільки значення z відображує ступінь досягнення певної мети.

У загальному вигляді задача математичного програмування формулюється так:

Знайти такі значення керованих змінних x_j, щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального значення).

Отже, потрібно відшукати значення

$$max(min)z=f(x_1,x_2,...,x_n;\ y_1,y_2,...,y_s;c_1,c_2,...,c_1) \qquad (2)$$

Можливості вибору x_j , завжди обмежені зовнішніми щодо системи умовами, параметрами виробничо-економічної системи тощо.

Наприклад, площа посіву озимої пшениці обмежена наявністю ріллі та інших ресурсів, сівозмінами, можливістю реалізації зерна, необхідністю виконання договірних зобов'язань тощо. Ці процеси можна описати системою математичних рівностей та нерівностей виду:

$$\varphi_i(x_1,x_2,...x_n;y_1,y_2,...y_s;c_1,c_2,...,c_l)\{\leq,=,\geq\}0, \quad i=1,2,...,m. \qquad (3)$$

Тут набір символів ($\leq,=,\geq$) означає, що для деяких значень поточного індексу i виконуються нерівності типу $\geq$, для інших — рівності (=), а для решти — нерівності типу $\leq$.

Система (3) називається *системою обмежень,* або *системою умов* задачі. Вона описує внутрішні технологічні та економічні процеси функціонування й розвитку виробничо-економічної системи, а також процеси зовнішнього середовища, які впливають на результат діяльності системи. Для економічних систем змінні x_j мають бути невід'ємними:

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,...,n). \qquad (4)$$

Залежності (2)–(4) утворюють *економіко-математичну модель* економічної системи.

Будь-який набір змінних $x_1,x_2,...x_n$ що задовольняє умови (3) і (4), називають *допустимим планом,* або *планом.* Очевидно, що кожний допустимий план є відповідною *стратегією економічної системи, програмою дій.* Кожному допустимому плану відповідає певне значення цільової функції, яке обчислюється за формулою (1).

Сукупність усіх розв'язків системи обмежень (3) і (4), тобто множина всіх допустимих планів утворює *область існування планів* (*область допустимих планів*).

План, за якого цільова функція набуває екстремального значення, називається *оптимальним.* Оптимальний план *є розв'язком задачі математичного програмування* (2)—(4).

Загальна лінійна економіко-математична модель економічних процесів та явищ – так звана загальна задача лінійного програмування подається у вигляді:

$$z=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n \ (max) \qquad (1)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \{\leq, \geq, =\} b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \{\leq, \geq, =\} b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \{\leq, \geq, =\} b_m. \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0. \qquad (3)$$

Отже, потрібно знайти значення змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, які задовольняють умови (2) і (3), і цільова функція (1) набуває екстремального (максимального чи мінімального) значення.

Для довільної задачі математичного програмування були введені поняття допустимого та оптимального планів.

Для загальної задачі лінійного програмування використовуються такі поняття.

Вектор $X= (x_1, x_2, ..., x_n)$ координати якого задовольняють систему обмежень (2) та умови невід'ємності змінних (3), називається *допустимим розв'язком (планом) задачі лінійного програмування.*

Допустимий план $X= (x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *опорним планом* задачі лінійного програмування, якщо він задовольняє не менше, ніж *m* лінійно незалежних обмежень системи (2) у вигляді рівностей, а також обмеження (3) щодо невід'ємності змінних.

Опорний план $X= (x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *невиродженим,* якщо він містить точно *m* додатних змінних, інакше він *вироджений.*

Опорний план $X^* =(x^*_1,x^*_2,...,x^*_n)$, за якого цільова функція (1) досягає максимального (чи мінімального) значення, називається *оптимальним розв'язком (планом) задачі лінійного програмування.*

Приклади побудови лінійних оптимізаційних математичних моделей економічних систем

Наведемо кілька вже формалізованих типових постановок економічних задач, що розв’язуються методами математичного програмування .

Задача визначення оптимального плану виробництва. Для деякої виробничої системи (цех, підприємство, галузь) треба визначити план випуску кожного виду продукції за умови найкращого способу використання ресурсів системи. У виробництві задіяний встановлений набір ресурсів: сировина, трудові ресурси, технічне оснащення та ін. Відомі загальні запаси ресурсів, нормативи витрат кожного ресурсу, прибуток на одиницю виготовленої продукції. Задаються також обмеження на виробництво продукції у певних співвідношеннях (задана асортиментність). Критерії оптимальності: максимум прибутку, максимум товарної продукції, мінімум витрат ресурсів.

Задача про дієту. Деякий раціон складається з кількох видів продуктів. Відомі вартість кожного за одиницю, кількість необхідних організму поживних речовин і його потреба в кожній речовині, вміст в одиниці кожного продукту кожної поживної речовини. Знайти оптимальний раціон — кількість кожного виду продукту, що враховує вимоги забезпечення організму потрібною кількістю поживних речовин. Критерій оптимальності: мінімальна вартість раціону.

Транспортна задача. Розглядається певна кількість пунктів виробництва і споживання деякої однорідної продукції (кількість пунктів виробництва і споживання не збігаються). Відомі обсяг продукції в кожному пункті виробництва і потреби кожного пункту споживання, також задана матриця, елементи якої є вартістю транспортування одиниці продукції з кожного пункту виробництва до кожного пункту споживання. Необхідно визначити оптимальні обсяги перевезень продукції, за яких найкраще врахована необхідність вивезення продукції від виробників і забезпечення вимог споживачів.

Критерій оптимальності: мінімальна сумарна вартість перевезень, мінімальні сумарні витрати часу.

Задача оптимального розподілу виробничих потужностей. Розглядається кілька підприємств, що виготовляють певну кількість видів продукції. Відомі фонд робочого часу кожного підприємства; потреби в продукції кожного виду; матриця потужностей виробництва всіх видів продукції, що виготовляється на кожному підприємстві, а також собівартість виробництва одиниці продукції кожного підприємства. Необхідно розподілити виробництво продукції по підприємствах у такий спосіб, щоб задовольнити потреби у виготовленні продукції та максимально використати виробничі потужності підприємств. Критерій оптимальності: мінімальні сумарні витрати на виготовлення продукції.

Задача про призначення. Нехай набір видів робіт може виконувати певна кількість кандидатів, причому кожного кандидата може бути призначено лише на одну роботу і кожна робота може бути виконана лише одним кандидатом. Відома матриця, елементи якої є ефективністю (в обраних одиницях) кожного претендента на кожній роботі. У задачі визначається оптимальний розподіл кандидатів на посади. Критерій оптимальності: максимальний сумарний ефект виконання робіт.

Задача комівояжера. Розглядається кілька міст. Комівояжеру необхідно, починаючи з міста, в якому він перебуває, обійти, не повертаючись нікуди двічі, всі міста і повернутись в початкове. Відома матриця, елементи якої — це вартість пересування (чи відстань) між усіма попарно пунктами подорожі. Знайти оптимальний маршрут. Критерій оптимальності: мінімальна сумарна вартість (відстань) пересування по маршруту.

Задача оптимального розподілу капіталовкладень. Планується діяльність групи (системи) підприємств протягом певного періоду, який розділено на якусь кількість підперіодів. Задана сума коштів, які можна вкладати в будь-яке підприємство чи розподіляти між ними протягом усього часу планування. Відомі величини збільшення виробництва продукції (за умови здійснення додаткових капіталовкладень) по кожному з підприємств групи у кожному з підперіодів. Необхідно визначити, у який спосіб розподіляти кошти на початку кожного підперіоду між підприємствами, щоб сумарний дохід за весь період був максимальним.

Задача 33. Господарство вирощує дві культури (зернові і картоплю), використовуючи такі ресурси: рілля – 5000 га., праця – 300 тис. людино-годин, можливий обсяг тракторних робіт – 28 тис. умовних гектарів із заданими нормативами затрат і виходу продукції. Мета виробництва – одержання максимального обсягу валової продукції у вартісному виразі. Побудувати економіко-математичну модель задачі.

Норми затрат і виходу продукції в господарстві

Культура	Затрати на 1 га посіву		Вихід валової продукції з 1 га, гр. од..
	Праці, людино-годин	Тракторних робіт, умовних гектарів	
Зернові (x_1) Картопля (x_2)	30 150	4 12	400 1000

Розв'язування. У задачі невідомими величинами є посівні площі зернових і картоплі. Позначимо їх через x_1 і x_2 і назвемо змінними задачі. Критерій оптимальності відповідно до вимог лінійного програмування також має бути сформульований математично. В цьому разі вартість валової продукції визначають як суму добутків вартості продукції з 1 га на посівні площі: $400x_1$ + $1000x_2$, гр. од.

Критерій оптимальності (цільову функцію, або функціонал, задачі) позначимо через z. У нашій задачі знаходимо максимум цільової функції, що записується так:

$$z_{max} = 400x_1 + 1000x_2.$$

Сформулюємо тепер математичну умову задачі. Максимум цільової функції має бути досягнутий при додержанні таких умов:

1) загальна площа зернових і картоплі не повинна перевищувати площі ріллі, тобто 5000 га:

x_1 + $x_2 \leq 5000$;

2) загальні заграти праці в людино-годинах не повинні бути більшими від наявних ресурсів:

$$30x_1 + 150x_2 \leq 300\,000;$$

3) загальний обсяг механізованих робіт в умовних і сигарах не повинен перевищувати можливих ресурсів факторного парку:

$$4x_1 + 12x_2 \leq 28\,000;$$

4) *площі не можуть бути від'ємними величинами*

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$$

Отже, умови задачі можна виразити у вигляді такої системи нерівностей:

$$x_1 + x_2 \leq 5000;$$
$$30x_1 + 150x_2 \leq 300000;$$
$$4x_1 + 12x_2 \leq 28000:$$
$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$$

Цільова функція:

$$z_{max} = 400x_1 + 1000x_2$$

Задача 34. Фірма має в розпорядженні оборотні кошти 1 млн грн. Відомі витрати у кожному місяці, а також потрібна обов'язкова кількість оборотних коштів на кінець кожного місяця. Передбачається, що для успішного функціонування фірма витрачатиме суму значно меншу, ніж 1 млн грн. Отже, решту коштів можна вкладати у кредити.

Побудувати економіко-математичну модель для визначити оптимальний розподіл оборотних коштів протягом кварталу для досягнення максимального прибутку по відсотках, якщо відомі витрати і потреби в резервах.

1.01 — 30.01: витрати — 80 000 грн;
необхідний запас на 30.01 — 300 000 грн;
1.02 — 28.02: витрати — 30 000 грн;
необхідний запас на 28.02 — 200 000 грн;
1.03 — 31.03: витрати — 50 000 грн;
необхідний запас на 31.03 — 190 000 грн.

Кредит строком на 1 місяць дає 2 % прибутку, строком на 2 місяці — 5 %, і строком на 3 місяці — 8 %.

Розв'язування. Кредити строком на один місяць можливо надавати у кожному місяці протягом усього періоду, тому позначимо через $x1_1$ – суму кредиту, що надано на один місяць з 1.01, аналогічно $x1_2$, $x1_3$ – суми одномісячних кредитів, що надані у другому і третьому місяцях відповідно.

Кредити строком на два місяці протягом I кварталу року можливо надавати лише в першому і другому місяці, тому позначимо через $x2_1$ – суму кредиту, що надано на два місяці в січні; $x2_2$ – сума кредиту, що надана в лютому на два місяці. Нарешті, кредит на три місяці може бути видано лише один раз з 1.01, тоді $x3_1$ – сума кредиту наданого в першому місяці на квартал. Домовимося, що кредити надаються першого числа кожного місяця і погашаються першого числа наступного місяця.

Розглянемо ситуацію на початку першого місяця періоду: початкова сума 1 млн грн витрачатиметься на вкладення коштів у всі види кредитів, також у першому місяці потреби в оборотних коштах для господарської діяльності фірми становитимуть 80 000 грн, на кінець місяця фірма розраховує мати резерв 300 000 грн. Отже, перше обмеження моделі описуватиме використання коштів у січні:

$$1000000 - x1_1 - x2_1 - x3_1 - 80000 \geq 300000,$$

в кінці місяця наявні оборотні кошти
визначаються

$$S1 = 1000000 - (x1_1 + x2_1 + x3_1) - 80000 - 300000$$
$$= 620000 - (x1_1 + x2_1 + x3_1)$$

На початку другого місяця сума знову вкладається в кредити, але лише двох видів і забезпечує витрати діяльності. Разом з тим на початку другого місяця повертаються кошти, що є відсотками за одномісячний кредит, який було надано в першому місяці. Враховуючи необхідність резерву на кінець місяця, маємо

$$S1 - (x1_2 - x2_2) + 1{,}2x1_1 - 300000 \geq 200000,$$

що наприкінці другого місяця становитиме суму

$$S2 = S1 - (x1_2 - x2_2) + 1{,}2x1_1 - 500000.$$

Аналогічно запишемо використання коштів у третьому місяці періоду:

$$S2 - x1_3 + 1{,}2x1_2 + 1{,}5x2_1 - 50000 \geq 190000.$$

Загальна сума коштів отриманих по відсотках за кредити буде

$$\mathrm{P} = 0{,}2(x1_1 + x2_2 + x3_3) + 0{,}5(x2_1 + x2_2) + 0{,}8x3_1.$$

Таким чином, математична модель матиме вигляд

$$\max\mathrm{P} = 0{,}2(\mathrm{x}1_1 + \mathrm{x}2_2 + \mathrm{x}3_3) + 0{,}5(\mathrm{x}2_1 + \mathrm{x}2_2) + 0{,}8\mathrm{x}3_1.$$

$$\begin{cases} 1000000 - x1_1 - x2_1 - x3_1 - 80000 \geq 300000, \\ S1 - x1_2 - x1_2 + 1{,}2x1_1 - 300000 \geq 200000, \\ S2 - x1_3 + 1{,}2x1_2 + 1{,}5x2_1 - 50000 \geq 190000. \end{cases}$$

$$xi_j \geq 0, \left(i = \overline{1,3}\right), (j = \overline{1,3})$$

Задача 35. На ринок доставляється картопля з трьох фермерських господарств за ціною за 1 кг 80, 75 і 65 коп. відповідно. На завантаження 1 т картоплі у фермерських господарствах витрачається по 1, 6, 5 хв. відповідно. Замовлено 12 т картоплі і для своєчасної доставки необхідно, щоб на її завантаження витрачалось не більше як 40 хв.

Визначити, з яких фермерських господарств і в якій кількості треба доставити картоплю, щоб загальна вартість закупівлі була мінімальною, якщо колгоспи можуть виділити для продажу 10, 8 і 6 т картоплі.

Розв'язування. Позначимо x_1 – кількість картоплі, що буде закуплено у першому господарстві, т; x_2, x_3– кількість картоплі, закупленої у другого і третього господарств, т.

Зафіксуємо потрібну кількість поставок картоплі: $x_1+x_2+x_3=12$. Наступне обмеження описує затрати часу на завантаження потрібної кількості продукції $x_1+6x_2+5x_3 \leq 40$, враховуємо загальні обмеження по можливості поставок продукції у кожному господарстві:

$$x_1 \leq 10; \quad x_2 \leq 2; \quad x_3 \leq 6.$$

Вартість закупленої продукції визначається як сума добутків ціни на кількість

$$F = 80x_1 + 75x_2 + 65x_3.$$

Таким чином, математична модель задачі матиме вигляд

$$minF = 80x_1 + 75x_2 + 65x_3.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 40, \\ x_1 \leq 10, \\ x_2 \leq 8, \\ x_3 \leq 6, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = 1,2,3.$$

Задача 36. Деякий раціон складається з n видів продуктів. Відомі вартість кожного за одиницю $c_j(j=\overline{1,\mathrm{n}})$, кількість необхідних організму поживних речовин m і його потреба в кожній *i-й* речовині $c_j(j=\overline{1,n})$. В одиниці j-го продукту міститься $c_{ij}(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n})$ поживної речовини і.

Необхідно знайти оптимальний раціон $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, що враховує вимоги забезпечення організму потрібною кількістю поживних речовин, і забезпечує мінімальну вартість раціону.

Розв'язування. Позначимо x_1 x_2,..., x_n – кількість відповідного j-го виду продукції $(j = \overline{1,n})$. Система обмежень описуватиме забезпечення в раціоні кожної поживної речовини не нижче від вказаного рівня $b_{\mathrm{i}}(i = \overline{1,m})$.

Економіко-математична модель матиме вигляд

$$minF = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n \geq b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

Аналогічно до випадку виробничої задачі математична модель задачі про дієту (або про суміш) також може використовуватися для інших постановок економічних задач, які не мають метою безпосередньо складання раціону. По суті цей тип задач дозволяє знаходити оптимальне поєднання відомого набору компонент в одне ціле, причому таке поєднання має задовольняти певні характеристики.

Задача 37. Стандартом передбачається, що октанове число бензину А-76 має бути не нижчим як 76, а вміст сірки не більш як 0,3 %. Для виготовлення такого бензину на заводі використовується суміш чотирьох компонентів. Дані про ресурси компонент, які змішуються, їх собівартості, октановому числі та вмісту сірки наведено в таблиці.

Характеристики	Компоненти бензину			
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
Октанове число	68	72	80	90
Вміст сірки, %	0,35	0,35	0,30	0,20
Ресурс, т	700	600	500	300
Собівартість, гр. од./т	40	45	60	90

Необхідно визначити, скільки тонн кожного компоненту потрібно використати для того, щоб мати 1000 т бензину А-76 з мінімальною собівартістю.

Розв'язування. Позначимо x_j – кількість j-го компоненту в суміші, т, $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

Перше обмеження забезпечує потрібне значення октанового числа в суміші $68x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 90x_4 \geq 76 \cdot 1000$; вміст сірки у суміші не повинен перевищувати 0,3 %: $0{,}35x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}2x_4 \leq 0{,}3 \cdot 1000$; загальна маса утвореної суміші – 1000 т: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000$, використання кожного компоненту має не перевищувати його наявного обсягу:

$$x_1 < 700, \quad x_2 < 600, \quad x_3 < 500, \quad x_4 < 300.$$

Собівартість суміші $F = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4$.

Таким чином, математична модель задачі має вигляд

$minF = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4$

$$\begin{cases} 68x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 90x_4 \geq 76 \cdot 1000, \\ 0{,}35x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}2x_4 \leq 0{,}3 \cdot 1000, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000, \\ x_1 < 700, \\ x_2 < 600, \\ x_3 < 500, \\ x_4 < 300. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,4}).$$

Задача 38. Учасник експедиції складає рюкзак і йому необхідно розв’язати питання про те, які скласти продукти. У розпорядженні є м’ясо, мука, сухе молоко, цукор. У рюкзаку залишилось для продуктів лише 45 дм^3 об’єму, до того ж необхідно, щоб сумарна маса продуктів не перевищувала 35 кг. Лікар експедиції рекомендував, щоб м’яса (за масою) було більше муки принаймні в два рази, муки не менше від молока, а молока хоча б у вісім разів більше, ніж цукру. Скільки і яких продуктів потрібно покласти в рюкзак для того, щоб сумарна калорійність продуктів була найбільшою? Характеристики продуктів наведено в таблиці.

Характеристики	Продукти			
	м’ясо	мука	молоко	цукор
Об’єм (дм^3/кг)	1	1,5	2	1
Калорійність (ккал/кг)	1500	5000	5000	4000

Розв’язування. Позначимо x_1, x_2, x_3, x_4 — маса (в кг) м’яса, муки, молока і цукру відповідно.

Сумарна маса продуктів має не перевищувати 35 кг:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 35,$$

а об'єм, який вони повинні займати, — не більше від 45 дм^3:

$$x_1 + 1{,}5x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 45 .$$

Крім того, мають виконуватися співвідношення стосовно пропорцій по масі продуктів:

а) м'яса принаймні (в масі) більше в два рази від муки: $x_1 \geq 2x_2$;

б) муки не менше молока: $x_2 \geq x_3$;

в) молока хоча б у вісім раз більше від цукру: $x_3 \geq 8x_4$.

Калорійність всього набору продуктів:

$F = 1500x_1 + 5000x_2 + 5000x_3 + 4000x_4$.

Таким чином, математична модель задачі має вигляд

$max\, F = 1500x_1 + 5000x_2 + 5000x_3 + 4000x_4$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 35, \\ x_1 + 1{,}5x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 45 \\ x_1 \geq 2x_2 \\ x_2 \geq x_3 \\ x_3 \geq 8x_4 \end{cases}$$

$x_4 \geq 0$.

Задача 39 (транспортна задача). Розглядається m пунктів виробництва і n пунктів споживання деякої однорідної продукції. Відома кількість виробництва продукції для кожного i-*го* пункту – a_i $(i = \overline{1,m})$ і потреби кожного j-го $(j = \overline{1,n})$ пункту споживання – b_j $(j = \overline{1,n})$. Також задана матриця розмірності m × n, елементи якої c_{ij} $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ є вартості транспортування одиниці продукції з і-го пункту виробництва до у-го пункту споживання. Необхідно визначити оптимальні обсяги перевезень продукції $X = x_{ij}$, $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$, за яких найкраще врахована необхідність вивезення продукції від виробників і забезпечення вимог споживачів, щоб забезпечити мінімальну сумарну вартість перевезення.

Розв'язування. Позначимо x_{ij} – кількість продукції, що перевозиться від i-го виробника до j-го споживача. Можна вивезти від кожного виробника продукції не більше ніж є у наявності. Тому для кожного i $(i = \overline{1,m})$ має виконуватись умова $x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} \leq a_i$.

Забезпечення кожного споживача потрібною кількістю продукції дає умова $x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{mj} = b_i$, для кожного j $(j = \overline{1,n})$. Загальна сума перевезень є сумою добутків $c_{ij}x_{ij}$, $(i = \overline{1,m}\ , j = \overline{1,n})$. Отже, економіко-математична модель буде

$$minF = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} +$$
$$c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \dots + c_{2n}x_{2n} +$$
$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$
$$c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \dots + c_{mn}x_{mn}$$
$$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} \le a_1,$$
$$x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} \le a_2,$$
$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$
$$x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} \le a_m.$$
$$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} \le b_1,$$
$$x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} \le b_2,$$
$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$
$$x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n,$$
$$x_{ij} \ge 0, (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$$

Як і в двох попередніх випадках, математична модель транспортної задачі може використовуватись і тоді, коли в постановці задачі немає навіть згадки про транспортні витрати, перевезення продукції тощо.

Тренінгові завдання

1. Три заводи випускають чотири види продукції. Знайти: а) матрицю випуску продукції за квартал, якщо задані матриці щомісячних випусків A_1, A_2 і A_3; б) матриці приростів випуску продукції за другий і третій місяці та проаналізувати отримані результати:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix}; \; A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}; \; A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Підприємство виготовляє чотири види продукції, об'єми виготовлення якої задані матрицею A. Ціна реалізації одиниці i-го типу продукції в j-м регіоні задана матрицею B, де число стовпчиків матриці B відповідає кількості регіонів, в яких реалізується продукція.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 & 10 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Знайти C – матрицю сумарного прибутку по регіонам та вказати, який з трьох регіонів найбільш вигідний для реалізації продукції.

3. Швейна фабрика здійснює продаж трьох моделей чоловічих костюмів в чотирьох магазинах. Матриця $B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ задає ціну продажу (у доларах) одиниці костюмів i-го виду в j-м магазині. Визначити: а) сумарний прибуток кожного магазину, якщо продаж костюмів за місяць (за моделями) задано матрицею $A = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 15 \end{bmatrix}$; б) сумарний прибуток кожного магазину (у гривнях), якщо курс долара по відношенню до гривні становить 1 дол. = 8грн.

4. Галузь складається з чотирьох підприємств: матриця коефіцієнтів прямих витрат і матриця-стовпець виготовлення продукції мають вигляд

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,3 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}.$$

Знайти матрицю-стовпець об’ємів кінцевої продукції.

5. Підприємство виготовляє три види продукції, використовуючи для цього два види сировини. Норми витрат сировини i-го виду на виробництво одиниці j-го виду задані матрицею витрат A, виготовлення продукції за квартал – матрицею X, вартість одиниці кожного виду сировини задані матрицею P. Знайти: 1) матрицю S повних витрат сировини кожного виду; 2) повну вартість всієї затраченої сировини.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}, \; P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

6. Підприємство за деякий проміжок часу виготовило два види продукції, використавши для цього три види сировини. Норми витрат сировини i-го виду на виробництво одиниці j-го виду задані матрицею витрат A, виготовлення продукції за даний проміжок часу – матрицею X, вартість одиниці кожного виду сировини задані матрицею P. Знайти матрицю S повних витрат сировини кожного виду та повну вартість всієї затраченої сировини за даний проміжок часу.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix}, \; P = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \end{bmatrix}.$$

7. Магазин побутової техніки може закупити від 1 до 4 телевізорів по ціні 2000 грн. і продати по 2400 грн. кожний. Скласти матрицю прибутку магазину в залежності від кількості закуплених телевізорів (стрічка матриці) та від результату їх продажі (стовпчик матриці).

8. В сервісний центр поступають мобільні телефони, 80% яких потребують незначного ремонту, 15% – середнього ремонту, 5% – складного ремонту. Статистичні дослідження показали, що 20% з тих телефонів, які пройшли незначний ремонт будуть потребувати через рік повторного незначного ремонту, 50% – середнього, а 30% – складного ремонту. З телефонів, які пройшли середній ремонт, 10% потребують через рік незначного ремонту, 60% – середнього, 30% – складного ремонту. З телефонів, які пройшли складний ремонт, через рік 10% потребують незначного ремонту, 40% – середнього, 50% – складного ремонту. Які частки із відремонтованих на початку року телефонів будуть потребувати того чи іншого видів ремонту: через 1 рік; 2 роки; 3 роки.

9. В таблиці наведені дані про денну продуктивність 5 підприємств промислового холдингу, який виробляє 4 види продукції з використанням 3 видів сировини, а також тривалість роботи кожного підприємства за рік та ціна кожного виду сировини.

Вид продукції	Продуктивність підприємств					Витрати видів сировини		
	1	2	3	4	5	1	2	3
1	4	3	5	6	7	2	5	4
2	2	1	3	2	3	3	3	4
3	0	1	0	2	2	1	3	1
4	3	3	5	5	4	4	2	3
	Кількість робочих днів за рік					Ціна видів сировини		
	1	2	3	4	5	1	2	3
	200	150	200	170	120	10	20	30

Знайти:
1) річну продуктивність кожного підприємства по кожному виду продукції;
2) річні потреби кожного підприємства в кожному виді сировини;
3) річний об’єм фінансування кожного підприємства для постачання сировини, необхідної для виготовлення продукції кожного виду у вказаній кількості.

10. Підприємство виготовляє щодобово три види продукції, основні виробничо-економічні показники яких наведені в таблиці.

Вид продукції	Кількість виробів	Витрати сировини	Норми часу виготовлення	Ціна виробу
1	100	2	5	20
2	200	4	10	30
3	150	5	15	25

Використовуючи поняття матриці за даними таблиці скласти нову таблицю відповідно до умов:

а) кількість виробів кожного виду збільшилася на 20%;

б) норми часу виготовлення кожного виробу зменшилися на 10%;

в) ціна на всі види виробів зменшилася на 10%.

11. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

Запаси сировини та норми витрат на одиницю продукції наведені в таблицях:

1.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*110*	*1*	*4*	*2*	*1*
S_2	*80*	*2*	*1*	*3*	*2*
S_3	*94*	*3*	*2*	*2*	*1*

2.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*80*	*2*	*3*	*2*	*2*
S_2	*80*	*1*	*4*	*2*	*3*
S_3	*120*	*3*	*2*	*4*	*2*

3.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*80*	*3*	*2*	*2*	*3*
S_2	*89*	*2*	*1*	*4*	*1*
S_3	*107*	*1*	*3*	*4*	*3*

12. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: 18 шт.; 11 шт.; 15 шт.; 24 шт.; друга –16; 14; 13; 50; третя – 13; 10; 12; 80. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: 7,7 грн., 3,6 грн., 2 грн., 2,1 грн., в B_2 – 3,7; 2,4; 2,9; 1,3; в B_3 – 3; 7; 3,5; 7. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

13.Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: 81 шт.; 80 шт.; 66 шт.; 114 шт.; друга – 95; 45; 93; 50; третя – 222; 90; 32; 89. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: 27 грн., 13 грн., 12,1 грн., 3,1 грн., в B_2 – 3; 7,8; 2,3; 1,3; в B_3 – 7; 7,8; 3,9; 7,6. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

14. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: 8 шт.; 0 шт.; 16 шт.; 14 шт.; друга –5; 5; 33; 50; третя – 3; 0; 2; 80. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: 1,7 грн., 3 грн., 2 грн., 2,1 грн., в B_2 – 3; 2,4; 2,3; 1,3; в B_3 – 3; 7; 3,5; 7. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

15. Підприємство випустило продукцію вищого (400 шт.), першого (750 шт.), другого (200 шт.) і третього (300 шт.) сортів. Ціни в одних і тих же грошових одиницях задані у відповідному порядку: $3;\ 2{,}1;\ 1{,}2;\ 0{,}5$. Визначити вартість усієї продукції.

16. Магазин за день продає 45 шт. деякого товару, по 1 грн. за штуку, 30 шт. – по 2 грн. і 50 шт. – по 0,5 грн. Обчислити денний прибуток від продажу всіх товарів.

17. Приватне підприємство складається з трьох відділень, загальний прибуток яких в минулому році склав 150 тис. грн. На цей рік прогнозується збільшення прибутків першого відділення на 60%, другого – на 30%, що в загальному складе 200 тис. грн. прибутку. Через рік прогнозується збільшення прибутків першого відділення на 70%, другого – на 40% у порівняні з минулим роком, що в загальному складе 300 тис. грн. Яка величина прибутку кожного відділення: а) в минулому році; б) в цьому році?

18. Швейна фабрика протягом трьох днів виготовила костюми, пальта і куртки. Відомі об’єми виготовлення продукції за три дні і витрати (у грн.) на виготовлення продукції:

День	Об’єм виготовлення продукції (одиниць)			Витрати (тис. грн.)
	Костюми	Пальта	Куртки	
1	40	10	20	100
2	30	30	25	120
3	40	20	30	120

Знайти собівартість продукції кожного виду.

19. Університет виділив 250 тис. грн. для закупівлі 30 предметів для обладнання електронної бібліотеки: кількох комп’ютерів по 4 тис. грн., столів по 1 тис. грн. і стільців по 0,4 тис. грн. Пізніше з’ясувалося, що комп’ютери та столи можна придбати дешевше по ціні 3,8 тис. грн. та 0,9 тис. грн. за штуку відповідно. У наслідок цього на ту ж суму вдалося придбати на один стіл більше. Знайти кількість одиниць кожного виду товару, який було закуплено.

20. Підприємство отримало річний прибуток 50000 грн., 5% якого відраховано до благодійного фонду, 10% сплачено у вигляді податку до місцевого бюджету (після відрахувань до благодійного фонду) та 20% до державного бюджету (після відрахувань до місцевого бюджету). Знайти суми виплат до благодійного фонду, місцевого бюджету та державного бюджету.

З’ясувати, чи продуктивні матриці:

21. $\begin{bmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,9 & 0,3 \end{bmatrix}$.

22. $\begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix}$.

23. $\begin{bmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}$.

24. $\begin{bmatrix} 0,3 & 1,1 \\ 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}$.

25. $\begin{bmatrix} 0 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \end{bmatrix}$.

26. $\begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,4 \\ 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \end{bmatrix}$.

З’ясувати, який запас продуктивності мають матриці:

27. $\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 0{,}3 \end{bmatrix}$. 28. $\begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}7 \\ 0{,}7 & 0{,}1 \end{bmatrix}$.

29. Економічна система складається з двох галузей, яка характеризуєся наступними даними (у грошових одиницях):

Галузь	Споживання		Кінцевий продукт
	I	II	
I	150	200	150
II	200	100	100

Обчислити матрицю прямих витрат.

30. Наведено данні про роботу системи двох галузей в минулому місяці і план виробництва кінцевої продукції в наступному місяці Y_1 (у грошових одиницях)

Галузь	Споживання		Кінцевий продукт, Y_0	Кінцевий продукт, Y_1
	I	II		
I	100	200	250	300
II	50	150	200	200

Знайти матриці прямих і повних витрат, а також вектор валового виробництва в наступному місяці, який забезпечить виробництво кінцевої продукції Y_1.

31. Задано матрицю A прямих витрат деякої моделі багатогалузевого балансу. Знайти вектор кінцевої продукції Y, який відповідає вектору валового виробництва X:

$$A = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 1{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 1{,}1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 250 \end{bmatrix}.$$

32. Задано матрицю A прямих витрат деякої моделі багатогалузевого балансу. Знайти вектор валового виробництва X, який відповідає вектору кінцевої продукції Y:

$$A = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 1{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 1{,}1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 150 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

33. Задано матрицю A прямих витрат. Знайти зміну векторів:

а) кінцевого продукту ΔY при заданій зміні вектора валової продукції ΔX;

б) валового виробництва ΔX при заданій зміні вектора кінцевого продукту ΔY:

$$A=\begin{bmatrix}0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}6 & 0{,}2\end{bmatrix};\ \text{а)}\ \Delta X=\begin{bmatrix}100\\ 120\end{bmatrix};\ \text{б)}\ \Delta Y=\begin{bmatrix}92\\ 138\end{bmatrix}.$$

34. Задано матрицю A прямих витрат. Знайти зміну векторів:

а) кінцевого продукту ΔY при заданій зміні вектора валової продукції ΔX;

б) валового виробництва ΔX при заданій зміні вектора кінцевого продукту ΔY:

$$A=\begin{bmatrix}1{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}5 & 1{,}3 & 0{,}4\\ 0{,}2 & 0{,}6 & 1{,}5\end{bmatrix};\ \text{а)}\ \Delta X=\begin{bmatrix}10\\ 20\\ 30\end{bmatrix};\ \text{б)}\ \Delta Y=\begin{bmatrix}5\\ -10\\ 20\end{bmatrix}.$$

35. Баланс двох галузей промисловості за деякий період (у грошових одиницях) наведений в таблиці.

Галузь	Споживання		Кінцевий продукт
	I	II	
I	0,5	0,4	300
II	0,2	0,3	200
III	0,2	0,2	250

Знайти об’єм валового виробництва кожного виду продукції, якщо об’єм кінцевої продукції для першої галузі збільшився на 10%, для другої – збільшився на 20%, а для третьої – зменшився на 5%.

36. Економічна система складається з трьох галузей. Нехай матриця прямих витрат та вектор норм добавленої вартості мають вигляд

$$A=\begin{bmatrix}0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1\end{bmatrix},\ V=\begin{bmatrix}4\\ 4\\ 2\end{bmatrix}.$$

Знайти вектор рівноважних цін P та зміну вектора рівноважних цін ΔP після підвищення норми доданої вартості в другій галузі на 5%.

37. Транспортні витрати на перевезення одиниці вантажу y залізничним і автомобільним транспортом на відстань x знаходять за формулами:

$$y=\frac{1}{2}x+10 \quad \text{і} \quad y=x+5,$$

де x вимірюється десятками кілометрів. Визначити, коли транспортні витрати на перевезення автотранспортом менші від витрат на перевезення залізничним транспортом і коли рентабельнішим буде залізничний транспорт.

38. Знайти точки рівноваги та області прибутків і збитків компанії, що виготовляє щомісяця x виробів вартістю p гривень кожен, а сума загальних щомісячних витрат $y_в$ має таку закономірність:

а) $p=4,\ y_в=2{,}8x+600;$

б) $p=7,\ y_в=1000+5x.$

39. Вартість обладнання авторемонтної майстерні 480000 гривень, а річна амортизація – 25000 гривень. Виразити вартість обладнання залежно від часу (x років) роботи майстерні, якщо амортизаційне відрахування залишається постійною величиною.

40. Витрати при перевезенні вантажу трьома видами транспорту відповідно обчислюють за формулами:

$$y_1=150+50x,\quad y_2=250+25x,\quad y_3=350+25x,$$

де x – відстань у сотнях кілометрів, y_1, y_2, y_3 – вартість перевезення у гривнях. Графічно визначити, на які відстані і яким видом транспорту перевозити вантаж економніше:

а) при використанні всіх видів транспорту;

б) при використанні другого і третього видів транспорту;

в) при використанні першого і третього видів транспорту.

41. Із пункту A в пункти B, C, D, E вантаж можна доставити трьома видами транспорту: водним, залізничним і автомобільним. Витрати при перевезенні вантажу відповідно обчислюють за формулами:

$$y_в=25+25x,\quad y_з=50+25x,\quad y_а=75+\frac{8}{3}x,$$

де x – відстань у сотнях кілометрів, y – вартість перевезення вантажу в гривнях. Обчислити графічно, яким видом транспорту економніше доставити вантаж у пункти A, B, C, D, E, якщо відстані від пункту A до цих пунктів відповідно дорівнюють 200, 300, 500 і 900 км.

42. Повні витрати з перевезення вантажу залізничним і автомобільним транспортом подаються відповідно залежностями:

$$y_1 = a_1 x + b_1 \text{ і } y_2 = a_2 x + b_2,$$

де x – відстань в км, на яку здійснюється перевезення; y – транспортні витрати. Знаючи, що $0 < a_1 < a_2$ і $0 < b_2 < b_1$ встановити, яким видом транспорту і на яку відстань дешевше перевозити вантаж.

43. Початкова врожайність деякої зернової культури на малопридатних для землеробства землях становила 12 ц/га. Завдяки застосуванню інтенсивної технології передбачається щорічне її зростання на 2 ц/га. Записати закон зміни врожайності y як функції часу x. Обчислити її значення для п’ятого року застосування зазначеної технології ($x = 5$).

44. Повні витрати на виготовлення 5 умовних одиниць деякої продукції становлять 5,5 млн. грн., а для виготовлення 10 таких одиниць – 9 млн. грн. Знайти функцію витрат виробництва, вважаючи її лінійною. Визначити витрати на виготовлення 7 умовних одиниць продукції.

45. Монополіст, знаючи з маркетингових досліджень функцію попиту на свій товар $Q = 10 - 0{,}6p$, вирішує скільки йому виробляти товару. Допоможіть монополісту:

а) розрахувати кількість товару при ціні $p_1 = 5$ грош. од., $p_2 = 6$ грош. од.

б) розрахувати ціну товару, якщо він хоче виробити товару у кількості $Q_1 = 5{,}8$ млн. шт., $Q_2 = 7$ млн. шт.

Задачу зобразіть графічно.

46. Попит (Q) та пропозиція (S) на товар залежно від ціни (p) на ринку задаються формулами:

$$Q = 500 - 10p; \quad S = 50 + 5p.$$

Показати графічно лінії попиту та пропозиції і знайти рівноважну ціну, тобто ціну, при якій попит і пропозиція врівноважуються.

47. Земля рухається по еліпсу, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце. Найменша відстань від Землі до Сонця дорівнює $\approx 147{,}5$ мільйона кілометрів, а найбільша – $\approx 152{,}5$ мільйона кілометрів. Знайти більшу піввісь і ексцентриситет орбіти Землі.

48. Верхня дуга залізничного мосту має вигляд параболи. Написати рівняння параболи, якщо відстань між кінцями мосту дорівнює 32 метри, а найбільша висота дуги – 8 метрів.

49. Знайти точки рівноваги та області прибутків і збитків заводу, що виготовляє щомісяця x виробів вартістю 10 гривень кожен, а сума загальних щомісячних витрат $y_в$ має таку закономірність: $y_в = 80 - 4x + 0{,}1x^2$.

50. Витрати палива для судна на підводних крилах зростають пропорційно квадрату швидкості судна. Знайти аналітичну залежність між витратами m і швидкістю V судна, враховуючи, що при $V = 40$ км/год витрачається 20 л палива за годину, а також визначити витрати палива за годину при швидкості 60 км/год.

51. Бригада, яка складається з x робітників-ремонтників і бригадира, виконуючи певне замовлення, щомісяця одержувала загалом 3000 грн. заробітної плати. Подати заробітну плату члена бригади виразом, коли відомо, що вона в усіх однакова і 50 грн. з належної кожному суми становлять різні відрахування.

52. У банк на терміновий внесок під 10% річних вкладена сума 10 тис. грн. Яку суму отримає клієнт через 5 років?

53. У страховій компанії були куплені чотири акції вартістю 100 грн., кожна з яких дає 20% приросту річних. Яку суму отримає клієнт через 3 роки?

54. За п’ять років обсяг продукції повинен зрости на 100%. Яким повинен бути середній темп зростання щорічно?

55. В ощадну касу зроблено внесок на 10 років у сумі 100000 грн. Яку суму виплатить ощадна каса після закінчення цього терміну при процентній ставці 3%?

56. Обладнання вартістю 10 тис. гривень внаслідок експлуатації втрачає кожного року 20% своєї вартості. Знайти:

а) вираз для вартості цього обладнання через t років;

б) кількість років його доцільного використання, якщо при вартості 3000 гривень обладнання використовувати недоцільно.

57. Обчислити кінцеву суму для початкової суми $K_0 = 100000$ грн., вкладеної під складні проценти із $p = 6\%$, що нараховуються неперервно протягом 3 років.

58. Яким повинен бути середній темп випуску синтетичної смоли і пластмас за 5 років, якщо загальний обсяг випуску повинен зрости на 35%?

59. Населення міста зростає щорічно на 3% порівняно з попереднім роком. Через скільки років населення цього міста збільшиться у 1,5 раза?

60. Ділянка лісу містить $1{,}44 \cdot 10^5$ м^3 деревини. Обчислити, на скільки кубометрів збільшиться кількість деревини за 15 років, якщо середній щорічний приріст деревини становить 2,8%.

61. Сума $K_0 = 1000$ гривень вкладена під складні проценти з $p = 6\%$ річних терміном на 3 роки. Обчислити кінцеву суму, якщо проценти нараховуються в кінці кожного місяця.

62. Кожного року батьки вносять P гривень на свій рахунок накопичення із щорічним прибутковим зростанням рахунку на R відсотків. Обчислити суму коштів, накопичених за n років.

а) $P = 600,\ R = 2\%,\ n = 12;$ б) $P = 500,\ R = 2\%,\ n = 12;$

в) $P = 300,\ R = 3\%,\ n = 18;$ г) $P = 200,\ R = 3\%,\ n = 18;$

д) $P = 100;\ R = 5\%,\ n = 24.$

63. Батьки бажають відкрити рахунок на ім’я сина у страховій компанії “ОРАНТА”, яка сплачує R щорічних прибуткових відсотків. Його умова – сплачувати на початку кожного року P гривень протягом n років починаючи з наступного року. Яку суму коштів він повинен внести на рахунок ренти?

а) $P = 500,\ R = 3\%,\ n = 6;$ б) $P = 800,\ R = 3\%,\ n = 8;$

в) $P = 1000,\ \ R = 5\%,\ \ n = 10;$ г) $P = 600,\ \ R = 5\%,\ \ n = 12;$

д) $P = 700,\ \ R = 8\%,\ \ n = 15.$

64. На час навчання студент університету отримав з фонду навчання в борг A гривень, Цей кредит йому надано із R % щорічного зростання і умовою щорічного повернення боргу в кінці кожного року після закінчення університету протягом n років. Скільки коштів повинен повертати студент кожного року після закінчення університету?

а) $A = 8000, R = 8\%, n = 5;$ б) $A = 9000, R = 8\%, n = 8;$

в) $A = 10000, R = 5\%, n = 10;$ г) $A = 11000, R = 5\%; n = 12;$

д) $A = 12000, R = 3\%, n = 15.$

65. Мале підприємство встановило, що витрати на виготовлення x окремих виробів задовольняють таку закономірність:

$$V(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}3x^2 + 40x + 1000\,.$$

Знайти приріст витрат, коли кількість виробів збільшиться з 50 до 100, та середні витрати на виготовлення кожної одиниці виробу, якщо їх кількість зросте з 50 до 60.

66. Загальний щотижневий дохід D у гривнях, одержаний підприємством після продажу виготовлених x одиниць виробів, має таку закономірність:

$$D(x) = 500x + 2x^2\,.$$

Визначити середнє значення доходу на одиницю приросту виготовленої продукції, якщо її кількість x збільшиться з 100 до 120.

67. Фірма платить продавцю за x одиниць проданого товару (2 x + 40) грн., якщо продано товару менше, ніж 60 од., і доплачує 20% комісійних, якщо товару продано 60 од. і більше. Описати залежність між кількістю проданого товару та заробітною платою, отриманою продавцем, і побудувати графік функції.

68. Для функції витрат підприємства (у гривнях) $V(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}3x^2 + 40x + 1000$ знайти маржинальну вартість як функцію x і обчислити її значення, коли вироблено $x_1 = 50,\ \ x_2 = 100$ і $x_3 = 150$ одиниць продукції.

69. Функція витрат підприємства має вигляд $V(x) = 0{,}002x^3 - 0{,}1x^2 + 10x + 2000$ (тисяч гривень). Знайти

маржинальну вартість при $x_1 = 50$, $x_2 = 100$ і $x_3 = 120$.

70. Визначити маржинальний дохід виробництва 300 одиниць виробів, якщо кількість виготовлених виробів можна знайти за формулою $x = 1000 - 100p$, де p – роздрібна вартість одного виробу.

71. Знайти маржинальний дохід підприємства, якщо кількість виготовлених і проданих виробів x та роздрібна вартість кожного виробу p зв'язані рівністю $x = 4000 - 2p$.

72. Підприємство виготовляє x виробів, роздрібна вартість кожного з них $p = 80 - 0{,}1x$, а функція витрат $V(x) = 5000 + 20x$ (у гривнях). Знайти маржинальний прибуток, якщо виготовлено та продано 150 і 400 виробів.

73. Валовий продукт держави змінюється з часом t за формулою $П = 100 + t$ (мільярдів гривень), а кількість населення змінюється за законом $P = 120 + 2t$ (мільйонів). Знайти швидкість зміни частини валового продукту держави, що припадає на кожного громадянина.

74. Підприємство може виготовляти та продавати кожну одиницю продукції з прибутком 10 грн. При витраті x гривень на рекламу кількість проданих товарів становитиме $q = 10000(1 - e^{-0{,}001x}) - x$. Знайти швидкість зміни прибутку відносно зміни витрат на рекламу при $x = 1000$ грн. і $x = 3000$ грн.

75. Валовий продукт деякої держави є функція $ВП = 200 + t$, а кількість населення – $K = 240 + 2t$, які залежать від часу t. Знайти швидкість зміни частини валового продукту держави, що припадає на кожного громадянина.

76. Обсяг випущеної продукції q (грош. од.) бригадою робітників протягом робочого дня заданий функцією $q = -t^3 - 4t^2 + 50t + 300$, де t – час (год.). Обчислити продуктивність праці через 2 години після початку роботи.

77. Обсяг випущеної продукції q заданий функцією $q = -\frac{2}{3}t^3 + \frac{13}{2}t^2 + 50t + 30$, $t \in [0;8]$, де t – робочий час. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни через 1 годину після початку роботи й за годину до її завершення.

78. Об'єм виробництва зимового одягу q заданий функцією $q=\frac{1}{3}t^3-\frac{7}{2}t^2+6t+2100$, де t – календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни на початку року ($t=0$), в середині року ($t=6$), в кінці року ($t=12$).

79. Функція споживання деякої країни має вигляд $V(x)=0{,}3x^{4/3}+0{,}2x+10$, де x – сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти граничну схильність до споживання й граничну схильність до збереження, якщо дохід становить 8 млн. грош. од.

80. Функція збереження деякої країни має вигляд $S(x)=-0{,}25x^{4/5}-0{,}2x+15$, де x – сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти граничну схильність до споживання й граничну схильність до збереження, якщо дохід становить 32 млн. грош. од.

81. Витрати виробництва $K(x)$ залежать від обсягу продукції x: $K(x)=15x-\frac{1}{10}x^2$. Визначити граничні витрати, якщо обсяг виробництва становить 5 і 10 одиниць.

82. Функція ціни залежно від попиту на певний товар можна визначити формулою $p=20-x$, де x – попит, p – ціна. Визначити граничну виручку, якщо попит становить 3 одиниці.

83. Функція прибутку фірми залежно від ціни p на одиницю виготовленої продукції характеризується формулою $f(p)=-20p^2+400p+150$. Визначити граничний прибуток фірми залежно від ціни для значень $p=5$, $p=10$, $p=12$.

84. Знайти еластичність попиту Q відносно ціни p, якщо $q=30-4p$, $p=5$.

85. Крива повних витрат має вигляд $K=\ln(3+5x)$. Визначити еластичність повних витрат для $x=-1$.

86. Функція пропозиції певного товару $S=\frac{10+4p^2}{1+12p}$. Визначити еластичність пропозицій, якщо ціна $p=3$.

87. Мале підприємство може виготовити і продати кожну одиницю виробу з прибутком 10 гривень і витратити x гривень на рекламу. Кількість проданих товарів виражають функцією $f(x)=1000(1-e^{-0,001x})$. Знайти швидкість зміни прибутку відносно зміни витрат на рекламу при $x=1000$ і $x=3000$.

88. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\frac{1}{12}x^2+5x+300$, а $p=38-\frac{1}{10}x$ – залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

89. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\frac{1}{14}x^2+5x+300$, а $p=30-\frac{1}{11}x$ – залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

90. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\frac{1}{11}x^2+12x+124$, а $p=33-\frac{1}{10}x$ – залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

91. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\frac{1}{15}x^2+7x+300$, а $p=22-\frac{1}{10}x$ – залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

92. Відомі функції попиту $Q=Q(p)$ і пропозиції $S=S(p)$, де Q і S – кількість товару; p – ціна товару.

Знайти:

1) рівноважну ціну, тобто ціну, при якій попит і пропозиція врівноважуються;
2) еластичність попиту і пропозиції для рівноважної ціни;
3) зміну доходу при підвищенні ціни на 7% від рівноважної.

$$а)Q(p)=\frac{47p+1}{47p-1}, S(p)=47p+2;$$

$$б)Q(p)=\frac{48p+2}{48p-2}, S(p)=48p+4;$$

$$в)Q(p)=\frac{49p+3}{49p-3}, S(p)=49p+6;$$

$$г)Q(p)=\frac{50p+4}{50p-4}, S(p)=50p+8.$$

93. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V(x)$, а залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x - $p(x)$. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

а) $V(x)=\frac{1}{12}x^2+8x+100$, $p(x)=30-\frac{1}{10}x$;

б) $V(x)=\frac{1}{14}x^2+5x+200$, $p(x)=37-\frac{1}{18}x$;

в) $V(x)=\frac{1}{12}x^2+24x+300$, $p(x)=48-\frac{1}{24}x$.

94. Із квадратного бляшаного листа 60×60 см^2 потрібно зробити прямокутну коробку без кришки, вирізаючи по кутах однакові квадратики і загинаючи полоски, що залишились. Які повинні бути розміри вирізаних квадратиків, щоб вийшла коробка найбільшого об’єму?

95. Переріз тунелю має форму прямокутника з насадженим півкругом. Периметр перерізу 18 м. За якого радіуса півкруга площа перерізу буде найбільшою?

96. Квітник прямокутної форми, який прилягає до будинку, потрібно огородити плитами (є 200 плит довжиною 0,5 м). Якими мають бути розміри квітника, щоб його площа була найбільшою?

97. Знайти такі розміри відкритого басейну з квадратним дном об'ємом 50 м^3, щоб на облицювання його стін і дна пішла найменша кількість матеріалу.

98. Переріз тунелю має форму прямокутника з насадженим півкругом. Периметр перерізу дорівнює 40 м. За яких розмірів його сторін площа перерізу буде найбільшою?

99. Знайти найбільший об'єм циліндричної посудини, в якої повна поверхня дорівнює 30 м^2.

100. Потрібно обгородити парканом прямокутну ділянку землі площею $216\,\text{м}^2$, а далі поділити її на дві рівні частини стіною, загородкою, паралельною одній зі сторін цієї ділянки. Якої довжини слід узяти сторони ділянки, щоб на цю споруду пішла найменша кількість матеріалу?

101. Якими мають бути розміри ящика з кришкою місткістю $V = 1764$ см^3, якщо сторони основи відносяться, як 3 : 4, щоб на його виготовлення пішло найменше матеріалу?

102. Із трьох дощок однакової ширини збивають жолоб. При якому куті нахилу бічних стінок площа поперечного перерізу буде найбіьшою?

103. Треба зробити конічну лійку з твірною, що дорівнює 20 см$^{2.}$ Якою має бути висота лійки, щоб її об'єм був найбільшим ?

104. Знайти розміри відкритого басейну з квадратним дном об'ємом 32м^3, за яких на облицювання його стін і дна пішла б найменша кількість матеріалу.

105. Із прямокутного листа заліза шириною 60 см і довжиною 90 см виготовляють ящик: по кутах вирізають квадрати і загинають краї, що залишились. Знайти розмір квадратів, які вирізають, щоб зробити ящик найбільшої місткості.

106. Бак об'ємом 4 м^2, який має форму паралелепіпеда з квадратною основою і відкритий зверху, потрібно покрити оловом. Якими мають бути розміри бака, щоб на його покриття пішла найменша кількість матеріалу?

107. Залізний стержень довжиною 1 м зігнутий в прямокутник. Які розміри цього прямокутника, якщо його площа найбільша?

108. Сіткою довжиною 200 м потрібно огородити прилягаючу до будинку прямокутну ділянку найбільшої площі. Знайти її розміри.

109. Сіткою довжиною 140 м потрібно огородити прилягаючу до будинку прямокутну ділянку найбільшої площі. Знайти розміри прямокутної ділянки.

110. Потрібно виготовити закритий циліндричний бак, об'єм якого дорівнює 8 $м^3$. Якими мають бути його розміри, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу?

111. Бічні сторони і менша сторона земельної ділянки трапецеїдальної форми становлять 16 м кожна. Знайти таку її більшу основу, щоб площа була найбільшою.

112. Бічні сторони і менша сторона земельної ділянки трапецеїдальної форми дорівнюють 10 м кожна. Знайти її більшу основу так, щоб площа була найбільшою.

113. Переріз тунелю має форму прямокутника з насадженим півкругом. Периметр перерізу 60 м. За яких розмірів його сторін площа перерізу буде найбільшою?

114. Які розміри повинна мати циліндрична водонапірна башта з поверхнею S, щоб її об'єм був найбільшим?

115. Довести, що з усіх прямокутних земельних ділянок, які мають заданий периметр $2p$, найбільшу площу має квадратна.

116. На сторінці книжки друкований текст повинен займати $S\ см^2$. Верхнє і нижнє поля мають бути по $a\ см$, права і ліва – по $b\ см$. При яких розмірах сторінки на текст піде найменше паперу?

117. Із квадратного бляшаного листа, сторона якого a треба зробити відкриту зверху скриньку найбільшої місткості, вирізавши рівні квадрати по кутах і відкидаючи їх, а потім згинаючи бляху так, щоб утворити боки скриньки. Яка повинна бути сторона вирізаного квадрата?

118. Потрібно виготовити бляшану посудину циліндричної форми місткістю 3 л, відкриту зверху. Які повинні бути розміри посудини, щоб на її виготовлення пішла найменша кількість матеріалу?

Взірці розв'язування задач

Застосування функцій багатьох змінних в економічних дослідженнях

Прикладом функцій багатьох змінних серед економічних показників є виробничі функції. *Виробнича функція* – це функція $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, незалежні змінні якої $x_1, x_2, \ldots, x_n$ єобсягами ресурсів, які використовуються у виробництві, а значення функції y виражає обсяг виробленої продукції.

В економічній теорії часто розглядають *виробничу функцію Кобба-Дугласа*, яка має вигляд $y = AK^{\alpha}L^{\beta}$, де A, α, β – невід'ємні константи, причому $\alpha + \beta \le 1$; K – об'єм фондів у вартісному, або натуральному вираженні; L – об'єм трудових ресурсів (число працівників, число людино-днів); Y – випуск продукції у вартісному, або натуральному вигляді; α – еластичність випуску по фондах; β – еластичність випуску по праці.

Величина $l = \dfrac{y}{L}$ називається *середньою продуктивністю праці* (кількість продукції, виробленої одним робітником). Величина $k = \dfrac{y}{K}$ називається *середньою фондовіддачею* (кількість продукції, виробленої одним верстатом). Величина $f = \dfrac{K}{L}$ називається *середньою фондоозброєністю* (вартість фондів, які припадають на одиницю трудових ресурсів).

Задача 1. Нехай виробнича функція визначається функцією Кобба-Дугласа. Щоб збільшити випуск продукції на 5%, треба збільшити фонди на 10% або чисельність робітників на 15%. В 2006 році один робітник за місяць виготовляв продукції на 2000 грн., а всього робітників було 1000. Основні фонди оцінювались в 4 млн. грн. Записати виробничу функцію, величину середньої фондовіддачі і середньої продуктивності праці, еластичність випуску по праці і по фондах.

Розв'язування. Еластичність випуску по праці $\beta = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, а по фондах $\alpha = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Отже, функція Кобба-Дугласа має вигляд: $y = AK^{1/2}L^{1/3}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} < 1$. Підставляючи інші величини, одержимо:

$2000 \cdot 1000 = A \cdot (4 \cdot 10^6)^{1/2}(1000)^{1/3}$, тобто $2000 \cdot 1000 = A \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10$;

$A = \frac{2000 \cdot 1000}{2000 \cdot 10} = 100.$

Отже, шукана виробнича функція $y = 100 \cdot K^{1/2} \cdot L^{1/3}$. Середня фондовіддача дорівнює $k = \frac{y}{K} = \frac{2000 \cdot 1000}{4000000} = \frac{1}{2}$, а середня продуктивність $l = \frac{y}{L} = \frac{2000 \cdot 1000}{1000} = 2000$, $E_K(y) = \alpha = 1/2$, $E_L(y) = \beta = \frac{1}{3}$.

Ще одним прикладом функції багатьох змінних в економічній теорії є *рівняння обміну Фішера*:

$$MV = PY.$$

Тут M – загальна кількість грошей, наявних в обороті; V – швидкість їх обороту (скільки раз кожна гривня бере участь в розрахунках в середньому за рік); P – рівень цін (середнє зважене значення цін готових товарів і послуг, що визначені відносно базового показника, прийнятого за одиницю); Y – національний продукт або дохід (*національний продукт* – це всі готові товари і послуги, що виготовлені в економічній системі у вартісному виразі; *національний дохід* – це всі виплати, одержані домашніми господарствами: заробітна плата, рента, прибуток; національний продукт і національний дохід чисельно рівні).

Задача 2. Економіка країни характеризується наступними показниками:

а) реально-товарна маса дорівнює 600 млрд. грн.;

б) час обороту гривні дорівнює 4 місяці;

в) рівень дефляції 2%.

Визначити обсяг грошової маси.

Розв'язування. Із рівняння обміну Фішера $MV = PY$ знаходимо $M = \frac{PY}{V}$. Використавши дані із умови задачі, одержимо:

$$P = \frac{100\% - 2\%}{100\%} = 0{,}98\,,\ V = \frac{t_{const}}{t_{обороту}} = \frac{12}{4} = 3\,,$$

$$M = \frac{0{,}98 \cdot 6000 \cdot 10^9}{3} = 196 \cdot 10^9 \text{ грн.}$$

Задача 3. Величина товарообміну x (тисяч гривень) і витрати на обіг y (гривень) подані у таблиці

x	60	80	140	160	240	320
y	551	576	628,5	673	788,5	863

Знайти аналітичну залежність між y та x.

Розв'язування. Спочатку побудуємо у прямокутній системі координат задані таблицею точки.

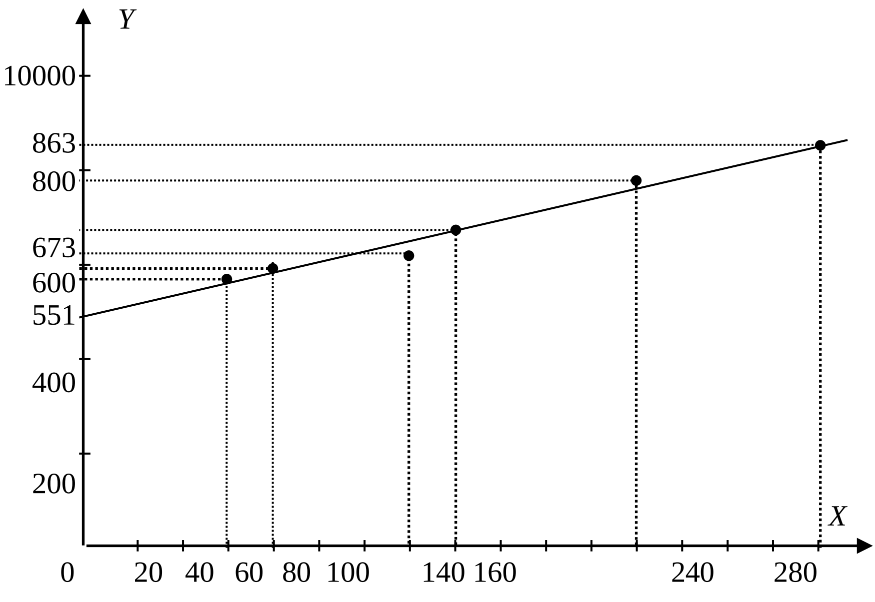


Рисунок дає змогу зробити висновок про існування лінійної залежності між y і x, тобто у вигляді $y = ax + b$. Параметри a, b знаходимо із системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

Будуємо розширену таблицю:

	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
	60	551	33060	3600
	80	576	46080	6400
	140	628,5	87990	19600
	160	673	107680	25600
	240	788,5	184440	57600
	320	863	276160	102400
$\sum$	1000	4080	735410	215200

За таблицею складаємо систему рівнянь при $n = 6$:

$$\begin{cases} 215200a + 1000b = 735410 \\ 1000a + 6b = 4080 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 215{,}2a + b = 735{,}1 \\ 166{,}67a + b = 680 \end{cases}.$$

Розв'язавши цю систему, маємо $a \approx 1{,}13,\ \ b \approx 489{,}71.$ Одержали функціональну залежність вигляду $y = 1{,}13x + 489{,}71.$

Задача 4. Бюро економічного аналізу фабрики "Світоч" оцінює ефективність відділу маркетингу з продажу цукерок. Для такої оцінки вони мають досвід праці у 5 географічних зонах з майже однаковими умовами (потенційні клієнти, ставлення до товарого знака і т. ін.). У цих зонах вони зафіксували протягом однакового періоду обсяги продажів (y, млн. коробок), витрати (x, млн. грн.) фірми, наведені в таблиці. Припустивши, що між y і x існує лінійна залежність $y = ax + b$, знайти її вигляд методом найменших квадратів у матричній формі.

y_i	25	30	35	45	65
x_i	5	6	9	12	18

Розв'язування.

1) Знаходимо добуток матриць

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 9 & 12 & 18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 9 \\ 1 & 12 \\ 1 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 50 \\ 50 & 610 \end{bmatrix}.$$

2) Знаходимо обернену матрицю

$$\left[X^T X\right]^{-1} = \frac{1}{550} \cdot \begin{bmatrix} 610 & -50 \\ -50 & 5 \end{bmatrix}.$$

3) Знаходимо добуток матриці X^T і вектора Y:

$$X^T Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 9 & 12 & 18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 25 \\ 30 \\ 35 \\ 45 \\ 65 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 2330 \end{bmatrix}.$$

4) Знаходимо добуток

$$\frac{1}{550} \cdot \begin{bmatrix} 610 & -50 \\ -50 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 2330 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Одержали функціональну залежість вигляду $y = 3x + 10$.

Задача 5. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V = 320 - 14x - 10y + 0,2x^2 + 0,1y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

Розв'язування. Загальна функція витрат відома: $V = 320 - 14x - 10y + 0,2x^2+0,1y^2$. Щоб знайти кількість одиниць товарів x товару A і y товару B, необхідно дослідити цю функцію на екстремум.

Знайдемо частинні похідні І-го порядку $\begin{cases} V'_x = -14 + 0,4x \\ V'_y = -10 + 0,2y. \end{cases}$

Прирівнюючи їх до нуля, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases}-14+0{,}4x=0\\-10+0{,}2y=0\end{cases}, \quad \Rightarrow \begin{cases}x=35\\y=50.\end{cases}$$

Знайдемо частинні похідні II порядку: $A=V''_{xx}=0{,}4,\ \ B=V''_{xy}=0$, $C=V''_{yy}=0{,}2$.

Обчислимо $D = AC - B^2 = 0,\, 4 \cdot 0{,}2 - 0 = 0{,}08 > 0$ і $A = 0{,}4 > 0$.

Отже, функція витрат при $x = 35$, $y = 50$ досягає мінімуму. Це означає, що для того, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними, необхідно виробити 35 одиниць товару A і 50 одиниць товару B.

Застосування визначених інтегралів

Нехай $V(x)$ – функція загальних видатків на виробництво x одиниць продукції, $V'(x)$ – функція маржинальних видатків. $P'(x)$, $D'(x)$ – функції, відповідно, маржинальних прибутку та доходу. Тоді при зростанні кількості одиниць продукції від a до b, зміна загальних видатків обчислюється за формулою $\int\limits_a^b V'(x)dx = V(x)\Big|_a^b = V(b) - V(a)$.

При зростанні реалізації продукції зміни прибутку і доходу

визначимо за формулами: $\int\limits_a^b P'(x)dx = P(x)\Big|_a^b = P(b) - P(a)$,

$$\int\limits_a^b D'(x)dx = D(x)\Big|_a^b = D(b) - D(a).$$

Задача 6. Маржинальний дохід фірми виражено функцією $D'(x) = 12 - 0{,}04x$. Знайти функцію доходу і визначити відношення між вартістю одиниці продукції та проданою її кількістю.

Розв'язування. Інтегруючи функцію маржинального доходу, знайдемо функцію доходу фірми:

$$D(x) = \int D'(x)dx = \int (12 - 0{,}04x)dx = 12\int dx - 0{,}04\int xdx =$$

$$= 12x - 0{,}04\frac{x^2}{2} + C = 12x - 0{,}02x^2 + C.$$

З умови, що непродаж жодної одиниці продукції дає нульовий дохід, маємо: $0 = 12\cdot 0 - 0{,}02\cdot 0^2 + C,\ C = 0.$

Отже, функція доходу має вигляд: $D(x) = 12x - 0{,}02x^2.$

Оскільки дохід дорівнює добутку вартості кожної одиниці продукції (P) проданої фірмою на кількість (x) одиниць продукції, то $D(x) = P\cdot x = 12x - 0{,}02x^2.$

Звідси $P = 12 - 0{,}02x$.

Застосування визначених інтегралів в динамічних процесах

Економічний зміст визначеного інтеграла полягає у наступному: він чисельно дорівнює обсягу виробленої продукції підприємством з продуктивністю праці $y = f(t)$ за інтервал часу $[0;t]$, тобто

$$q = \int_0^t f(t)dt.$$

Задача 7. Продуктивність праці робітника задано функцією $f(t) = 6t - t^2$. Робочий день працівника становить 6 год. Визначити обсяг виробленої продукції: а) за робочий день; б) за дві останні години роботи.

Розв'язування.

а) $q_1 = \int_0^6 f(t)dt = \int_0^6 (6t - t^2)dt = \left(3t^2 - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^6 = 36$ од. пр.;

б) $q_2 = \int_4^6 f(t)dt = \int_4^6 (6t - t^2)dt = \left(3t^2 - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_4^6 = 9\frac{1}{3}$ од. пр.

В економічній теорії функція Кобба-Дугласа, яка враховує технічний прогрес, має вигляд $y = AK^{\alpha}L^{\beta}e^{\lambda t}$, де λ – інтенсивність розвитку виробництва, пов'язаного з технічним прогресом.

Задача 8. Знайти обсяг продукції, виробленої підприємством за п'ять років, якщо виробнича функція Кобба-Дугласа має вигляд $y = (1 + 0{,}05t)e^{2t}$.

Розв'язування.

$$q=\int_0^4(1+0{,}05t)e^{2t}dt=\begin{vmatrix} u=1+0{,}05t, & du=0{,}05dt \\ dv=e^{2t}dt, & v=\frac{1}{2}e^{2t}\end{vmatrix}=\frac{1+0{,}05t}{2}e^{2t}\Big|_0^4-$$

$$-\frac{1}{40}\int_0^4 e^{2t}dt=0{,}6e^8-0{,}5e^0-\frac{1}{80}e^{2t}\Big|_0^4=0{,}6e^8-0{,}5-\frac{1}{80}(e^8-e^0)=$$

$$=0{,}5875e^8-0{,}4875\ \ (\textit{од.пр.}).$$

В економічних задачах часто використовують теорему про середнє значення для обчислення середніх значень, наприклад, витрат, прибутку, доходу підприємства за інтервал часу $[t_1;t_2]$. Якщо $V(t)$, $P(t)$, $D(t)$ відповідно функції витрат, прибутку та доходу від часу, то їх середні значення за час $t\in[t_1;t_2]$ обчислюються за формулами:

$$V_{сер.}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}V(t)dt,\quad P_{сер.}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}P(t)dt,\quad D_{сер.}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}D(t)dt.$$

Задача 9. Знайти середній прибуток за 8 місяців поточного року, якщо функція прибутку фірми має вигляд $\boldsymbol{P(t)=3t^2-2t-1}$, де t час у місяцях.

Розв'язування. Середній прибуток фірми потрібно знайти за інтервал часу від $t_1=0$ до $t_2=8$.

$$P_{сер.}=\frac{1}{8}\int_0^8(3t^2-2t-1)dt=\frac{1}{8}\left(t^3-t^2-t\right)\Big|_0^8=\frac{1}{8}\left(8^3-8^2-8\right)=55\ \text{ум. грош. од.}$$

Задача про максимізацію прибутку за часом

Метою всякого виробництва є досягнення максимального прибутку. Тобто, досягнення максимальної різниці між доходами і видатками. Позначимо $P(t)$, $D(t)$, $V(t)$ – відповідно функції прибутку, доходу та видатків від часу. Тоді $P(t)=D(t)-V(t)$. Функція досягає свого екстремуму, якщо її похідна рівна 0. Тобто $P'(t)=D'(t)-V'(t)=0$. Тобто $D'(t)=V'(t)$. Визначимо момент t_k в який швидкість зміни доходу та видатків зрівнюються. Загальний прибуток за час t_k можна знайти за формулою

$$P(t_k)=\int_0^{t_k}P'(t)dt=\int_0^{t_k}(D'(t)-V'(t))dt.$$

Задача 10. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами:

$$V'(t)=5+2\sqrt[3]{t^2},\ D'(t)=17-\sqrt[3]{t^2}.$$

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

Розв'язування. Оптимальний час t для прибутку підприємства одержимо з умови $D'(t)=V'(t)$:

$$5+2\sqrt[3]{t^2}=17-\sqrt[3]{t^2},\ 3\sqrt[3]{t^2}=12,\ \sqrt[3]{t^2}=4,\ t=8.$$

Отже, підприємство було прибутковим 8 років. За цей час одержано прибутку:

$$P=\int_0^8[D'(t)-V'(t)]dt=\int_0^8\left(17-\sqrt[3]{t^2}-5-2\sqrt[3]{t^2}\right)dt=$$

$$=\int_0^8\left(12-3t^{2/3}\right)dt=\left(12t-3\cdot\frac{t^{5/3}}{5/3}\right)\Bigg|_0^8=96-\frac{9}{2}\cdot 32=38{,}9\ (\text{млн. грн.}).$$

Задача визначення приросту капіталу за відомими інвестиціями

Якщо капітал $K(t)$ збільшується за одиницю часу t на обсяг чистих інвестицій $I(t)$, то чисті інвестиції – це похідна від капіталу за часом t, тобто $I(t)=K'(t)$. Приріст капіталу за період часу від t_1 до t_2 знаходиться так:

$$\Delta K=K(t_2)-K(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}I(t)dt.$$

Задача 11. За даними чистими інвестиціями $I(t)=30000\sqrt{t}$

знайти приріст капіталу з першого по четвертий рік і визначити, за скільки років приріст капіталу становитиме 20000000 умов. грош. од.

Розв'язування. Приріст капіталу знайдемо за інтервал часу від $t_1 = 1$ до $t_2 = 4$.

$$\Delta K = K(4) - K(1) = \int_1^4 30000\sqrt{t}dt = 20000\sqrt{t^3}\Big|_1^4 = 140000 \text{ умов. грош. од.}$$

За умовою задачі

$$\Delta K = K(t_k) - K(0) = \int_0^{t_k} 30000\sqrt{t}dt = 20000\sqrt{t^3}\Big|_0^{t_k} = 20000000,$$

тобто $\sqrt{t_{t_k}^3} = 1000$, звідки $t_k = 10$. Отже, потрібно 10 років, щоб приріст капіталу досяг 20 млн. умов. грош. од.

Задача про розподіл доходів населення держави

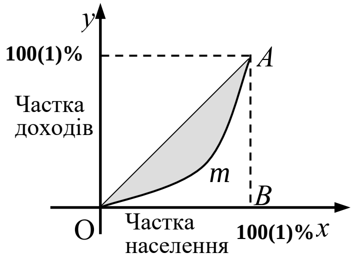
Рівень розвитку держави характеризується тим, як вона забезпечує рівень життя своїх громадян. Одним з таких показників є матеріальний добробут. Легко і досить точно проводити такий порівняльний аналіз маючи певні кількісні характеристики. Доброю характеристикою для цього є коефіцієнт Джіні, який показує нерівність в розподілі доходів населення. Він безпосередньо зв'язаний з кривою Лоренца, яка відображає залежність відсотка доходів населення від відсотка тих, які ці доходи мають.

Задача 12. Нехай $y = 2 - \sqrt{4 - x^2}$, крива Лоренца, визначена за дослідженнями розподілу доходів в якійсь країні, де x – відсоток населення, y – відсоток доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джіні.

Розв'язування. З малюнка видно, що $k = \dfrac{S_{OAm}}{S_{\Delta OAB}}$,

$$S_{OAm} = \int_0^1 (x - 2 + \sqrt{4 - x^2})dx = \int_0^1 xdx - 2\int_0^1 dx + \int_0^1 \sqrt{4 - x^2}dx.$$

Для знаходження $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx$ введемо заміну $x = 2\sin t$, тоді нижня межа $t = 0$, а верхня $t = \frac{\pi}{6}$.



Обчислюємо

$$S_{oAm} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\sqrt{1-\sin^2 t}\,2\cos t dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} - 2 + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}41.$$

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}.$$

Тому $k = \frac{0{,}41}{0{,}5} = 0{,}82$. Великий коефіцієнт k показує нерівномірність розподілу доходів серед населення даної країни.

Задача дисконтування з неперервними відсотками

Ще раз наведемо формулу для знаходження величини внеску K_t при неперервному нарахуванні відсотків: $K_t = K_0 \cdot e^{\frac{p}{100}t} = K_0 \cdot e^{it}$. Розглянемо обернену задачу – визначення початкового вкладу K_0 за умови, що відомий вклад K_t, одержаний через t років за річної відсоткової ставки p. Таку задачу називають *дисконтуванням*.

Нехай платежі є функцією від часу t: $K_0 = f(t)$. Визначимо розмір внеску через T років. Здійснимо розбиття T років на n рівних інтервалів часу $[0;t_1]$, $[t_1;t_2]$, …, $[t_{n-1};T]$. На кожному з них вибираємо довільну точку $\tau_k \in [t_{k-1};t_k]$, $k = \overline{1,n}$. Якщо надходження неперервні, то їх можна вважати сталими на кожному відрізку, а їх величина на інтервалі часу $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ становить $K_0 \approx f(\tau_k)\Delta t_k$. За час $(T - t_k)$ нарощена сума, знайдена за формулою неперервних відсотків, на вклад $f(\tau_k)\Delta t_k$ становитиме $f(\tau_k)\Delta t_k e^{i(T-t_k)}$. Тоді загальний вклад K_t за T років дорівнює $K_t = \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta t_k e^{i(T-t_k)}$. Якщо в отриманій інтегральній сумі $\max\limits_{1\le k\le n} \Delta t_k \to 0$, то отримаємо

$$K_t = \int_0^T f(t)e^{i(T-t)}dt .$$

Початковий вклад обчислюється за формулою $K_0 = K_t e^{-it}$. Якщо K_t – функція від часу t, тобто $K_t = g(t)$, то дисконтний вклад у момент часу t становить $K_0 = g(t)e^{-it}$. Повну дисконтну суму за час T знайдемо за формулою

$$K_d = \int_0^T g(t)e^{-it}dt .$$

Задача 12. Визначити дисконтний дохід за 3 роки за процентної ставки 10%, якщо початкові капіталовкладення становили 20 млн. грн., а очікуване щорічне зростання капіталу – 2 млн грн.

Розв'язування. Капіталовкладення задаються функцією $g(t) = 20 + 2t$, а $i = p/100 = 0{,}1$.

Дисконтна сума капіталовкладень:

$$K_d = \int_0^3 (20+2t)e^{-0{,}1t}dt = \begin{vmatrix} u = 20+2t, & du = dt \\ dv = e^{-0{,}1t}dt, & v = \dfrac{e^{-0{,}1t}}{-0{,}1} \end{vmatrix} =$$

$$= -10e^{-0{,}1t}(20+2t)\Big|_0^3 + 10\int_0^3 e^{-0{,}1t}dt = 200 - 260e^{-0{,}3} - 100e^{-0{,}1t}\Big|_0^3 =$$

$$= 300 - 360e^{-0{,}3} \approx 33 \textit{ млн. грн.}$$

Застосування визначеного інтеграла в задачах реалізації товарів

Розглянемо криву попиту деякого товару у вигляді $p = f(q)$ (рис. 1). Якщо p – ціна одиниці товару, то загальна сума витрат на придбання товару обсягом q становить pq.

На рис. 1 через p_0 позначено рівноважну ціну, а через q_0 – обсяг товару, який реалізується за ціною p_0. Точка рівноваги – це точка A перетину кривих попиту й пропозиції.

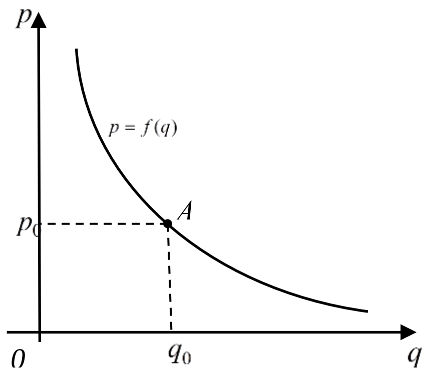


Рис. 1.

Припустимо, що товар обсягом q_0 не відразу весь потрапляє на ринок, а надходить невеликими партіями, рівними Δq. Це поширена тактика реалізації товару. Мета продавця зрозуміла: підтримувати ціну товару, вищу за рівноважну. Після надходження першої партії товару його обсяг на ринку становить $q_1 = \Delta q$. Ціна, що відповідає цьому обсягові, знаходиться з кривої попиту й становить $p_1 = f(q_1)$.

Якщо величина Δq мала, то можна вважати, що вся партія реалізується за ціною p_1, а витрати споживача на цю партію товару становлять $p_1 \Delta q$.

Після надходження на ринок другої партії товару обсягом Δq загальний обсяг його на ринку становить $q_2 = q_1 + \Delta q = 2\Delta q$, а відповідна ціна також визначається з кривої попиту й становить $p_2 = f(q_2)$.

Можна вважати, що друга партія товару обсягом Δq реалізується за ціною p_2, а витрати споживача на цю партію товару становлять $p_2 \Delta q$.

Цей процес триває доти, доки дістанемо $q_n = q_0 = n\Delta q$. Для того, щоб потрапити в точку $q_0 = n\Delta q$, потрібно вибрати $\Delta q = \dfrac{q_0}{n}$.

Товар останньої n-ї партії реалізується за ціною $p_n = f(q_n) = f(q_0) = p_0$, тобто за рівноважною. Витрати споживачів на цю партію становлять $p_n \Delta q = p_0 \Delta q$.

Загальні витрати споживачів на загальний обсяг товару q_0:

$$p_1 \Delta q + p_2 \Delta q + \ldots + p_n \Delta q = p_1(q_1)\Delta q + p_2(q_2)\Delta q + \ldots + p_n(q_n)\Delta q =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} p_k(q_k)\Delta q.$$

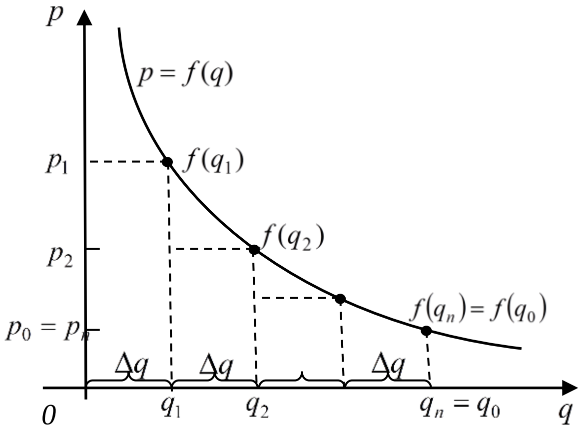


Рис. 2.

Із рис. 2 видно, що загальні витрати споживачів дорівнюють сумі площ прямокутників, яка, своєю чергою, наближено дорівнює визначеному інтегралу

$$\sum_{k=1}^{n} p_k(q_k)\Delta q \approx \int_0^{q_0} f(q)dq . \qquad (1)$$

Зі збільшенням *n* величина Δq відповідно як завгодно мала. Тоді наближена рівність перетвориться на точну. Отже, сумарні витрати споживачів S_B обчислюється за формулою

$$S_B = \int_0^{q_0} f(q)dq .$$

Надлишок споживача S_H *– це різниця між можливими й реальними витратами споживача в умовах ринку:*

$$S_H = \int_0^{q_0} f(q)dq - p_0 q_0 . \qquad (2)$$

Геометричну інтерпретацію цього означення наведено на рис. 3, де $p = f(q)$ – крива попиту; *A* – точка рівноваги.

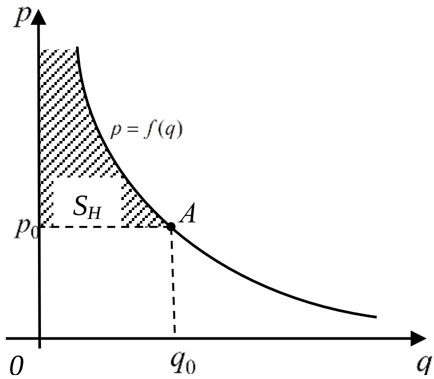


Рис. 3.

Задача 13. Знайдемо надлишок споживача, якщо крива попиту визначається функцією $p = f(q) = 45 - 4q^2$, а рівноважний обсяг товару $q_0 = 3$.

Розв'язування. Підставивши значення $q_0 = 3$ у функцію попиту, дістанемо рівноважну ціну:

$$p_0 = f(q_0) = 45 - 4 \cdot 3^2 = 9 .$$

Використовуючи формулу (2), матимемо:

$$S_H = \int_0^{q_0} f(q)dq - p_0 q_0 = \int_0^3 \left(45 - 4q^2\right)dq - 9\cdot 3 =$$
$$= \left(45q - \frac{4q^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 - 27 = 45\cdot 3 - 36 - 27 = 72 .$$

Розглянемо ще одне поняття ринкової економіки – *додаткову вартість*, або *надлишок виробника*. Для цього візьмемо криву пропозиції деякого товару $p = f(q)$. Графік цієї кривої й точку рівноваги *A* (перетину кривої з кривою попиту) показано на рис. 4.

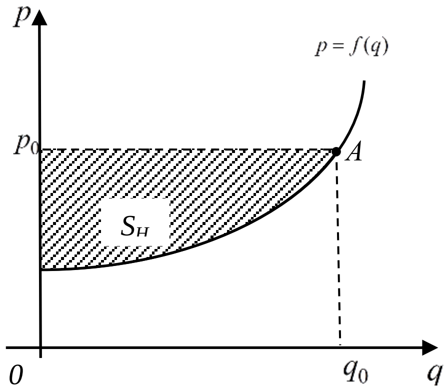


Рис. 4.

Завдяки ринковим відносинам як деякі споживачі мають змогу придбати товар за ціною, нижчою, ніж та, яку вони готові були заплатити, так і виробники іноді можуть продати товар за вигіднішою ціною, ніж та, з якою вони погоджувалися. Припускаючи, що весь товар обсягом q_0 буде реалізовано на ринку за ціною p_0, обчислимо дохід споживачів: $R = p_0 q_0$.

Нехай водночас обсяг товару, менший за q_0, виробники реалізують за ціною, нижчою, ніж p_0. Тоді додаткова вартість виробника обчислюється за формулою:

$$S_{\text{дод. вар.}} = p_0 q_0 - \int_0^{q_0} f(q)dq. \qquad (3)$$

Задача 14. Знайдемо додаткову вартість виробників, якщо крива пропозиції визначається функцією $p = f(q) = 12 + 5q^3$, а рівноважний обсяг товару $q_0 = 4$.

Розв'язування. Підставивши значення $q_0 = 4$ у функцію пропозиції, дістанемо рівноважну ціну:

$$p_0 = f(q_0) = 12 + 5 \cdot 4^3 = 12 + 320 = 332.$$

Використовуючи формулу (3), матимемо:

$$S_{\text{дод. вар.}} = p_0 q_0 - \int_0^{q_0} f(q)dq = 332 \cdot 4 - \int_0^4 \left(12 + 5q^3\right)dq =$$

$$=1328 - \left(12q + \frac{5q^4}{4}\right)\Bigg|_0^4 = 1328 - (12 \cdot 4 + 320) = 1328 - 368 = 960.$$

Задача 15. Знайти надлишок споживачів і виробників у пропозиції встановлення ринкової рівноваги, якщо функції попиту й пропозиції мають вигляд $p = 64 - 2q^2$, $p = 16 + 4q$ відповідно.

Розв'язування. Розв'язавши систему $\begin{cases} p = 64 - 2q^2, \\ p = 16 + 4q; \end{cases}$ знайдемо точку рівноваги: $p_0 = 32$, $q_0 = 4$. Тоді, використовуючи формули (2) і (3), одержимо:

$$S_H = \int_0^{q_0} f(q)dq - p_0 q_0 = \int_0^4 \left(64 - 2q^2\right)dq - 32 \cdot 4 = \left(64q - \frac{2q^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 - 128 =$$

$$= 64 \cdot 4 - \frac{128}{3} - 128 = 128 - \frac{128}{3} = \frac{256}{3} = 85\frac{1}{3};$$

$$S_{\text{дод. вар.}} = p_0 q_0 - \int_0^{q_0} f(q)dq = 32 \cdot 4 - \int_0^4 (16 + 4q)dq = 128 - \left(16q + 2q^2\right)\Bigg|_0^4 =$$

$$= 128 - (16 \cdot 4 + 32) = 128 - 96 = 32.$$

Економічні задачі, що зводяться до диференціальних рівнянь

Завдання 16. Відомо, що еластичність попиту Q визначається за формулою $\eta = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp}$, де x – кількість одиниць деякого товару вартістю p за кожну одиницю. Знайти функцію попиту на цей товар, якщо еластичність попиту постійна і дорівнює –1.

Розв'язування. За умовою задачі: $\frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} = -1$; $\frac{dQ}{Q} = -\frac{dp}{p}$;

$\ln|Q| = -\ln|p| + \ln|C|$; $\ln|Q| = \ln\left|\frac{C}{p}\right|$; $Q = \frac{C}{p}$; $p = \frac{C}{Q}$.

Знайшли залежність між кількістю товару та його вартістю, тобто функцію попиту.

Задача 17. Швидкість знецінювання обладнання внаслідок його зносу пропорційна в кожний даний момент часу його фактичній вартості. Початкова вартість – A_0. Якою буде вартість використання впродовж t років?

Розв'язування. Нехай A_0 – вартість обладнання в момент t. Зміна вартості (знецінювання) виражається різницею $(A_0 - A_t)$. Швидкість знецінювання $\frac{d(A_0 - A_t)}{dt}$ пропорційна фактичній вартості в даний момент A_t. Одержуємо рівняння

$$\frac{d(A_0 - A_t)}{dt} = kA_t$$

з початковою умовою $A_t(0) = A_0$.

Розв'язавши його, одержимо:

$$\frac{-dA_t}{dt} = kA_t \Rightarrow \int \frac{dA_t}{A_t} = -\int kdt \Rightarrow \ln|A_t| = -kt + \ln|C| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{A_t}{C}\right| = -kt \Rightarrow \frac{A_t}{C} = e^{-kt} \Rightarrow A_t = Ce^{-kt}.$$

Для визначення довільної сталої C використаємо початкову умову при t=0:

$$A_0 = Ce^{-k\cdot 0}\ ;\ C = A_0\,.$$

Одержаний частинний розв’язок має вигляд

$$A_t = A_0 e^{-kt}\,.$$

Задача 18. Знайти обсяг реалізованої продукції $y = y(t)$ за час $t = 10$, якщо модель росту в умовах конкурентного ринку має вигляд $y' = y(2 - y)$ і $y(0) = 1$ (t вимірюють у днях).

Розв’язування. Розв’яжемо диференціальне рівняння $y' = y(2 - y)$ методом відокремлення змінних:

$$\frac{dy}{dt} = y(2 - y);\quad \frac{dy}{y(2 - y)} = dt\,.$$

Проінтегруємо обидві частини рівності:

$$\int \frac{dy}{y(2 - y)} = \int dt\,;$$

$$\int\left(\frac{A}{y} + \frac{B}{2 - y}\right)dy = t + C\,;$$

Знайдемо A та B з рівності:

$$A(2 - y) + By = 1\,;$$

$$A = \frac{1}{2}; B = \frac{1}{2}\,;$$

Тоді:

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{2 - y}\right)dy = t + C \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\ln|y| - \ln|2 - y|\right) = t + C \Rightarrow;$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{2 - y}\right| = t + C \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{2 - y}\right| = 2t + 2C \Rightarrow \frac{y}{2 - y} = e^{2t + 2C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y\left(1 + e^{2t + 2C}\right) = 2e^{2t + 2C} \Rightarrow y = \frac{2e^{2(t + C)}}{1 + e^{2(t + C)}}\,.$$

Знайдемо C з рівняння $y(0)=1$; $1 = e^{2C} \Rightarrow 2C = 0; \Rightarrow C = 0$.

Тоді при $t = 10$

$$\frac{y}{2 - y} = e^{20}\ ;\ y = \frac{2e^{20}}{1 + e^{20}} \approx 2\,.$$

Задача 19. Кількість населення $y(t)$ є функцією часу *t*, тобто з часом кількість населення змінюється. Швидкість зміни приросту населення пропорційна кількості. Знайти формулу для визначення кількості населення у будь-який момент часу *t*.

Розв'язування. Швидкість зміни приросту населення пропорційна кількості населення. Це записуємо так $\frac{dy}{dt} = ky(t)$, де k – коефіцієнт пропорційності.

В одержаному диференціальному рівнянні відокремимо змінні

$$\frac{dy}{y} = kdt .$$

Далі будемо мати:

$$\ln|y| = kt + \ln|c| \Rightarrow \ln|y| - \ln|c| = kt \Rightarrow \ln\left(\frac{y}{c}\right) = kt \Rightarrow y = ce^{kt}.$$

Отже, ми отримали формулу для визначення кількості населення.

Задача 20. У 1990 році населення на Землі становило 5 млрд. Знайти чисельність населення Землі у 2010 році, якщо відомо, що населення у 2000 році становило 6 млрд.

Розв'язування. Почнемо відлік із 1990 року, тобто $t_0 = 0$.

В 2000 році населення Землі 6 млрд., $t = 10$ років.

Отримаємо рівняння $6 = 5e^{k10}$. Звідси $k = \frac{1}{10}\ln\frac{6}{5}$.

Враховуючи це запишемо розв'язок $y = 5e^{\frac{1}{10}\ln\frac{6}{5}t}$.

Використовуючи одержану формулу знайдемо кількість населення, яка б мала бути в 2010р., t=20.

$$y = 5e^{\frac{1}{10}\ln\frac{6}{5}20} = 5e^{\ln\left(\frac{6}{5}\right)^2} = 5\left(\frac{6}{5}\right)^2 = 7{,}2 \text{ млрд. осіб.}$$

Згідно статистичних даних населення Землі 7,204 млрд. осіб. Отримане значення є наближене до статистичного.

Задача 21. Економісти встановили, що швидкість зростання інвестованого капіталу у будь-який момент часу *t* пропорційна величині капіталу із коефіцієнтом пропорційності рівним узгодженому відсотку R неперервного зростання капіталу. Знайти закон зростання інвестованого капіталу, враховуючи величину початкової ($t = 0$) інвестиції I_0.

Розв'язування. Побудуємо математичну модель цієї задачі.

Позначимо: $I(t)$ – величина інвестованого капіталу у момент t (шукана функція). Тоді $\frac{dI(t)}{dt}$ – швидкість зміни величини інвестиції, $i = \frac{r}{100}$.

За умовою задачі отримали задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dI(t)}{dt} = iI(t), \\ I(t)\big|_{t=0} = I_0. \end{cases}$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння є:

$$I(t) = e^{it+c} = e^c e^{it}$$

Згідно з початковою умовою при $t = 0$ маємо $I_0 = e^c$.

Отже, розв'язком задачі Коші є функція $I(t) = I_0 e^{it}$.

Це означає, що при умовах задачі інвестиції з часом зростають за експоненціальним законом.

Тренінгові завдання

1. Обсяг витрат на продаж нового продукту x залежить від часу t (у тижнях) та витрат A (у гривнях) підприємства на рекламу і характеризується залежністю:

$$x = 200(5 - e^{-0,002A})(1 - e^{-t}).$$

Знайти $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial x}{\partial A}$ і вказати економічний зміст цих похідних при $t = 1,\ A = 400$.

2. Задана функція попиту на товар A:

$$X_A = 500 + 3P_B - 6P_A^2,$$

де P_A і P_B – вартість одиниці товарів A і B відповідно. Визначити еластичність функції попиту відносно P_A і P_B, коли $P_A = 5,\ P_B = 30$.

3. Нехай виробнича функція визначається функцією Кобба-Дугласа. З метою збільшення випуску продукції на $a\%$, необхідно збільшити фонди на $b\%$, або чисельність працівників на $c\%$. В 2016 році один працівник протягом місяця виготовляв продукції на $M = 3000$ *грн*, а всього робітників L. Основні фонди оцінюються в K *млн.грн.* Записати виробничу функцію y, величину середньої фондовіддачі і середньої продуктивності праці, еластичність випуску по праці $E_L(y)$ і по фондах $E_K(y)$.

а) $a = 23\%, b = 46\%, c = 69\%, L = 125, K = 5$ *млн.грн.*

б) $a = \frac{47}{2}\%, b = 47\%, c = \frac{148}{2}\%, L = 250, K = 9$ *млн.грн.*

в) $a = 24\%, b = 48\%, c = 72\%, L = 375, K = 9$ *млн.грн.*

г) $a = \frac{49}{2}\%, b = 49\%, c = \frac{147}{2}\%, L = 500, K = 9$ *млн.грн.*

д) $a = 25\%, b = 50\%, c = 75\%, L = 625, K = 9$ *млн.грн.*

4. Економіка країни характеризується показниками: а) реально-товарна маса рівна 8000 млрд.грн.; б) час обороту гривні 6 місяців; в) рівень дефляції 3 %. Визначити обсяг грошової маси.

5. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні

витрати *V(x)* (у гривнях) на виробництво x одиниць товару *A* та y одиниць товару *B* відомі. Визначити кількість одиниць товарів *A* і *B*, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

а) $V(x) = 398–12x–3y+0{,}5x^2+0{,}1y^2$; б) $V(x) = 441–14x–4y+0{,}7x+0{,}1y$;
в) $V(x) = 299–2x–11y+0{,}1x^2+0{,}2y^2$; *г)* $V(x) = 33–3x–12y+0{,}1x^2+0{,}5y^2$.

6. Прибуток фірми визначається наступною формулою $PR(x_1, x_2) = p_0 f(x_1, x_2) - p_1 x_1 - p_2 x_2$, де $f(x_1, x_2)$ – виробнича функція фірми, p_0 – ринкова ціна продукції, яку випускає фірма, p_1, p_2 – ринкова ціна 1-го і 2-го ресурсів, x_1, x_2 – кількість 1-го і 2-го ресурсів, які затрачає фірма.

Визначити оптимальну кількість ресурсів, при якій фірма отримає найбільший прибуток, і максимальний прибуток, якщо

$$f(x_1, x_2) = 0{,}5\sqrt{x_1}x_2 - 0{,}5x_2^2 + 3{,}5x_2,\ \ p_0 = 2,\ \ p_1 = 1,\ \ p_2 = 1.$$

7. У таблиці задані величини товарного обігу x (тис. гривень) і витрати обігу y (гривень).

x	60	80	120	160	240	320
y	5510	5760	6235	6750	7685	8635

Обрати вигляд залежності між y та x і визначити її параметри.

8. У таблиці вказано кількість внесених добрив на 1 га (x) та урожай пшениці (y) у центнерах.

x	1	2	3	5	7	9	11	12
y	24	26,5	28	37	40	46	49	50,5

Обрати вигляд залежності між y та x і визначити параметри цієї залежності, використовуючи метод найменших квадратів через систему нормальних рівнянь і у матричному вигляді.

9. У таблиці наведені дані, що характеризують зв'язок між висотою дерева h і його діаметром d на фіксованому рівні:

Діаметр (у см)	8	12	16	20	24	28	32	36
Висота (у м)	10,5	12,0	15,0	16,4	17,0	22,0	23,0	35,0

Припустивши, що залежність лінійна, встановити її аналітичну форму.

10. Методом найменших квадратів знайти лінійну залежність між живою вагою свиней і їх віком за такими даними:

Вік (у тижн.)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Жива вага (у кг)	1,3	2,5	3,9	5,2	5,3	7,5	9,0	10,8	13,1

11. Експлуатаційні витрати на утримання автоматичних телефонних станцій залежно від потужності АТС подані у таблиці:

Потужність АТС (у тис. абонентів)	1	2	3	4	5	6	7	8
Експлуат. витрати на рік (у тис. грн.)	330	340	350	359	364	371	378	383

Вивести емпіричну формулу, що відповідає цій залежності.

12. У таблиці задані витрати пального на 100 км (y) залежно від пробігу автомобіля (x) тис. км.

x	1	5	15	30	50	60	70	100	120	150
y	23,026	27,57	22,275	23,18	22,5	22,6	22,9	25	27,4	32,5

Обрати вигляд залежності між x та y і визначити параметри цієї залежності.

13. Виробництво цементу x_i (у сотнях тонн) і витрати електроенергії y_i (на 1 тонну цементу в рік) за визначений період роботи цементної промисловості склали величини, які зведені у наступній таблиці:

x_i	8	10	12	13,5
y_i	80	72	65	70

Знайти пряму, яка відображає залежність y від величини x, використовуючи метод найменших квадратів через систему нормальних рівнянь і у матричному вигляді.

14. Середній урожай люцерни (за один укіс) в залежності від глибини зрошення характеризується таблицею:

Глибина зрошення (в дюймах)	0	12	18	24	30	36	48	60
Середній урожай (в т/акр)	3,9	5,6	6,8	7,9	9,0	9,3	9,0	8,4

Побудувати квадратичну інтерполяційну формулу для цієї залежності (1 дюйм = 25,4 мм, 1 акр = 4046,86 м^2 = 0,404686 га – неметричні одиниці англомовних країн).

15. Продуктивність праці робітника фабрики меблів „Нова" за певну годину робочого дня характеризується табл.:

Година робочого дня (x)	1	2	3	4	5	6	7
Продуктивність праці (y)	3,9	5,6	6,8	7,9	9,0	9,3	9,0

Знайти залежність між змінними y та x та обчислити продуктивність праці робітника y при x=8.

16. Гранична ціна за продану продукцію виражена функцією $P'(x) = 2x + 50,$ де x – кількість проданої продукції. Знайти загальну функцію ціни за продану продукцію, якщо ціна 10 одиниць продукції дорівнює 2000 гривень.

17. Граничні витрати фірми на виготовлення x одиниць продукції виражені функцією $V'(x) = 100 + 0{,}04x.$ Знайти загальні можливі витрати при виробництві 1000 одиниць продукції.

18. Маржинальний річний дохід фірми заданий рівністю $D'(x) = 80 - 0{,}04x.$ Знайти функцію річного прибутку цієї фірми.

19. Маржинальна функція доходу малого підприємства дорівнює $D'(x) = 6 - 0{,}03x.$ Після реалізації 100 одиниць продукції підприємство одержало дохід 30 тисяч гривень. Визначити функцію доходу цього підприємства. Який дохід одержить підприємство після реалізації 125 одиниць продукції?

20. Маржинальні витрати (у гривнях) взуттєвої фабрики характеризуються функцією $V'(x) = \dfrac{x}{100}\sqrt{x^2 + 360}$, де x – кількість пар виготовленого взуття. Знайти функцію загальних витрат фабрики, якщо витрати 50 гривень на пару взуття фіксовані.

21. Знайти середнє значення витрат $K(x) = 3x^2 + 4x + 1,$ якщо об'єм продукції x змінюється від 0 до 3 одиниць, і вказати об'єм продукції, при якому витрати мають середнє значення.

22. Відомі закони зміни швидкості витрат $V'(t)$ і доходу $D'(t)$ підприємства. За який час підприємство одержить максимальний прибуток? Якою буде величина максимального прибутку?

а) $V'(t) = 2 + 3\sqrt{t},\ D'(t) = 14 - \sqrt{t};$

б) $V'(t) = 2 + 2\sqrt[3]{t},\ D'(t) = 10 - 2\sqrt[3]{t};$

в) $V'(t) = 7 + \sqrt{t},\quad D'(t) = 27 - 3\sqrt{t};$

г) $V'(t) = 7 + 5\sqrt[3]{t^2},\quad D'(t) = 31 - \sqrt[3]{t^2};$

д) $V'(t) = 22 + 2\sqrt[4]{t^3},\quad D'(t) = 27 - 3\sqrt[4]{t^3}$.

Тут t вимірюють у роках, а витрати $V(t)$ і дохід $D(t)$ – у млн. гривень.

23. Денна продуктивність праці (за 7 робочих годин) бригади робочих машинобудівного заводу виражена функцією $y = -0{,}0033t^2 - 0{,}08t + 20{,}96,$ де t – проміжок часу в годинах. Визначити об'єм випуску продукції протягом року (за 240 робочих днів). Обчислити прибуток, якщо заводська оптова ціна одиниці продукції становить 200 гривень, її собівартість – 100 гривень, а кількість бригад – 10.

24. Продуктивність праці протягом дня описується функцією

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + 6t, & 0 < t \le 4, \\ 0, & 4 < t < 5, \\ -t^2 + 13t - 40, & 5 \le t \le 8, \end{cases}$$

де t – час, що відлічується від початку робочого дня. Визначити обсяг продукції, виробленої за весь робочий день.

25. Знайти обсяг випуску продукції фірми за 5 років, якщо виробнича функція Кобба-Дугласа має виляд $y = (2t+1)e^{3t}$.

26. Витрати електроенергії (у кВт) міськими підприємствами і населенням міста з 8 до 18 год. наближено виражені функцією

$y = 10000 - 8t + 15t^2$, де t – проміжок часу в годинах. Визначити вартість електроенергії, спожитої містом, якщо вартість 1кВт/год дорівнює 12 коп.

27. Надходження товару на склад виражене функцією $y_1 = 0{,}006t^2 - 0{,}3t + 75$, а реалізація цих товарів – функцією $y_2 = 0{,}003t^2 - 0{,}4t + 56$, де t – кількість днів. Визначити запас товару в умовних одиницях після закінчення 60 робочих днів, якщо вихідного товару на складі не було.

28. За даними дослідження в розподілі доходів в одній із країн крива Лоренца описана рівнянням $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$. Тут x відсоток населення, а y – відсоток доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джіні.

29. Нехай $y = \frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x$, крива Лоренца визначена дослідженням нерівномірного розподілу прибуткового податку. Тут y – відсоток загального прибуткового податку; x – відсоток всього населення держави, яка сплачує цей податок. Обчислити коефіцієнт нерівномірності розподілу податку (коефіцієнт Джіні).

30. Капітальні інвестиції фірми “БІОС” характеризуються функцією $I(t) = 9000t^{1/2}$. Знайдіть:

1) приріст капіталу за три роки;
2) проміжок часу, за який приріст становитиме 150000 у.о.

31. Під будівництво задано неперервний грошовий потік зі швидкістю $I(t) = -t^2 + 20t + 5$ (млрд. грн./рік) протягом 10 років із річною процентною ставкою $p = 5\%$. Знайти дисконтну вартість цього потоку.

32. Визначити дисконтний дохід за 5 років за процентної ставки 10%, якщо початкові капіталовкладення становили 40 млн грн., а очікуване щорічне зростання капіталу – 2 млн грн.

33. Функція маржинальних витрат має вигляд: $V'(x) = 23{,}5 - 0{,}01x$. Знайти зростання загальних витрат, якщо виробництво зростає з 1000 до 1500 одиниць.

34. Відомо, що попит на деякий товар задається функцією $p = 9 - q^2$, де q – обсяг товару (у шт.), p – ціна одиниці товару, а рівновага на ринку даного товару досягається при $p_0 = 5$. Визначити споживчий надлишок.

35. Відомо, що попит на деякий товар описується функцією $q = \dfrac{64000}{p^3}$, а пропозиція даного товару характеризується функцією $q = 250p$. Знайти величину надлишку споживача при покупці даного товару.

36. Відомо, що крива пропозиції деякого товару має вигляд $p = 3q^3 + 5$, а рівновага на ринку даного товару досягається при обсязі продажів $q_0 = 2$. Визначити додаткову вартість виробників при продажі даного обсягу продукції.

37. Відомо, що крива пропозиції деякого товару має вигляд $p = 4q^3 + 3q^2 + 2q + 6$, а рівновага на ринку даного товару досягається при обсязі продажів $q_0 = 2$. Визначити додаткову вартість виробників при продажі даного обсягу продукції.

38. Знайти надлишок споживачів і виробників у пропозиції встановлення ринкової рівноваги, якщо функції попиту й пропозиції задані відповідно $p = 201 - 2q^2$ та $p = 61 + 6q$.

39. Стосовно попиту кількості одиниць Q певного товару вартістю p за кожну одиницю відомо, що еластичність попиту, яку визначають формулою $E = \dfrac{p}{Q} \cdot \dfrac{dQ}{dp}$, постійна і дорівнює $-\dfrac{1}{2}$. Знайти функцію попиту на цей товар.

40. Еластичність попиту на певний товар постійна і дорівнює -2. Визначити функцію попиту вигляду $p = f(Q)$, якщо $p = \dfrac{1}{2}$, коли $Q = 4$.

41. Еластичність попиту на певні вироби змінюється разом зі

зміною вартості кожного виробу за законом $E=\dfrac{p}{p-10}$. Визначити функцію попиту вигляду $p=f(Q)$, якщо $0<p<10$ і $p=7$, коли $Q=15$.

42. Еластичність попиту товару – $E=\dfrac{Q-200}{Q}$. Визначити функцію попиту вигляду $p=f(Q)$, якщо $0<Q<200$ і $p=5$, коли $Q=190$.

43. Кількість населення певного міста $y(t)$ (t вимірюють у роках) задовольняє диференціальне рівняння $y'=0{,}1y(1-10^{-6}y)$. Через скільки років кількість населення цього міста збільшиться зі 100000 до 500000?

44-52. Знайти обсяг реалізованої продукції $y=y(t)$ за час $t=10$ (t вимірюють у днях), якщо відома модель росту в умовах конкурентного ринку і початкові умови (див. табл. 1).

Таблиця 1

№ завдання	Модель росту в умовах конкурентного ринку, y'	Початкові умови, $y(0)$
44	$ty-2y'=0$	$y(0)=4$
45	$y'-\dfrac{y}{t+1}=yt^2$	$y(0)=6$
46	$y'+t^3=1$	$y(0)=5$
47	$\left(1+e^t\right)yy'=e^t$	$y(0)=1$
48	$\left(t^2-1\right)y'+2ty^2=0$	$y(0)=1$
49	$y'-y\cos t=-\sin 2t$	$y(0)=3$
50	$t\sqrt{1-y^2}+yy'\sqrt{1-t^2}=0$	$y(0)=1$
51	$\left(t^2y-y\right)y'+ty^2+t=0$	$y(0)=1$
52	$y'-\dfrac{2y}{t+1}=(t+1)^3$	$y(0)=\dfrac{1}{2}$

53-65. Прибуток деякої компанії $p(t)$ (t – вимірюється у роках) задовольняє диференціальне рівняння (див. табл. 2). Знайти закон зростання прибутку.

Таблиця 2

№ завдання	Прибуток компанії	№ завдання	Прибуток компанії
36	$p'-2p=2t$	51	$(2t-p)p'=t+2p$
37	$p'=\frac{t(p^2+1)}{p(t^2+1)}$	52	$p'+2pt=3t^3p^3$
38	$p'=\frac{p^2}{t^2}+2\frac{p}{t}+1$	53	$p'=2tp^2$
39	$p'=\frac{p}{t+1}$	54	$p'+2pt=1+2t^2$
40	$p'-t(p-1)=0$	55	$p't+p=3t^2$
41	$p't-2p=2t^4$	56	$p't-p=2tp^2$
42	$p't+p=tp^2$	57	$p'p^2+t^2=0$
43	$p't+p=t+4$	58	$p'=2p+t$
44	$p'+p=e^{-t}$	59	$p'-\frac{p}{t}=t^2p^2$
45	$p'-\frac{2p}{t}=t+2$	60	$p'=\frac{1}{t^2+4}$
46	$p't+p=t^3+3t$	61	$p'=e^{p+t}$
47	$p'+\frac{2p}{t}=t^3$	62	$p'=p\sqrt[4]{pt}$
48	$p'+2pt=-2t^3$	63	$tpp'=1-t^2$
49	$p'-\frac{p}{t}=-tp^2$	64	$2pp'=t$
50	$p'+\frac{p}{t+1}=-\frac{1}{2}(t+1)^3p^3$	65	$p'=\frac{p}{t}+\frac{t}{p}$

ДОДАТКИ

Д1. Таблиця відсотків рахунків накопичення

$$S_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \quad \textit{та ренти} \quad a_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[1-(1+i)^{-i}\right]}{i}$$

i=0,5%= 0,005				*i=1%= 0,01*			
n	$(1+i)^n$	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$	*n*	$(1+i)^n$	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$
1	1,005	0,99502	1,0	1	1,01	0,990099	1,0
2	1,0010025	1,98509	2,005	2	1,0201	1,970395	2,01
3	1,015075	2,97024	3,015025	3	1,030301	2,940985	3,0301
4	1,020151	3,95049	4,0301	4	1,040604	3,901966	4,060401
5	1,025251	4,925866	5,050251	5	1,05101	4,853431	5,101005
6	1,030378	5,896384	6,075502	6	1,06152	5,795476	6,152015
7	1,035529	6,862074	7,105879	7	1,072135	6,728195	7,2133535
8	1,040707	7,822959	8,141409	8	1,082857	7,651678	8,285671
9	1,045911	8,779064	9,182116	9	1,093368	8,566018	9,368527
10	1,05114	9,730412	10,228026	100	1,104622	9,471305	10,462213
11	1,0563396	10,677027	11,279167	11	1,115668	10,367628	11,566835
12	1,061678	11,061893	12,335562	12	1,126825	11,255077	12,682503
13	1,066986	12,556151	13,339724	13	1,138093	12,13374	13,809328
14	1,072321	13,488708	14,464226	14	1,149474	13,003703	14,947421
15	1,077683	14,416625	15,536548	15	1,160969	13,865053	16,096896
16	1,083071	15,339925	16,61423	16	1,172579	14,717874	17,257864
17	1,088487	16,258632	17,697301	17	1,184304	15,562251	18,430443
18	1,093929	17,172768	18,785788	18	1,196147	16,398269	19,614748
19	1,099399	18,082335	19,879717	19	1,208109	17,226008	20,810895
20	1,104896	18,987419	20,979113	20	1,22019	18,045553	22,019004
21	1,11042	19,887979	22,084011	21	1,232392	18,856983	23,239194
22	1,115972	20,784059	23.194431	22	1,244716	19,660379	24,471586
23	1,121552	21,675681	24,310403	23	1,257163	20,455821	25.716302
24	1,12716	22,562866	25,431955	24	1,269735	21,243387	26,973405

Таблиця відсотків рахунків накопичення

$$S_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \text{ та ренти } a_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[1-(1+i)^{-i}\right]}{i}$$

(продовження)

i=2%= 0,02				*i=3%= 0,03*			
n	*(1+i)^n^*	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$	*n*	*(1+i)^n^*	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$
1	1,02	0,980392	1,0	1	1,03	0,970874	1,0
2	1,0404	1,941561	2,02	2	1 ,0609	1,91347	2,03
3	1,061208	2,883883	3,0604	3	1,092727	2,828611	3,0909
4	1,082432	3,807729	4,121608	4	1,125509	3,717098	4,183627
5	1,104081	4,7134	5,20404	5	1,192274	4,579707	5,309136
6	1,126162	5,601431	6,308121	6	1,194052	5,417191	5,46841
7	1,148686	6,471991	7,434283	7	1,229874	6,230283	7,662462
8	1,171659	7,325481	8,582969	8	1,26677	7,019692	8,892236
9	1,195093	8,1622337	9,754628	9	1,304773	7,786109	10,159106
10	1,218994	8,982585	10,949721	10	1,343916	8,530203	11,463879
11	1,243374	9,786848	12,168715	11	1,384234	9,252624	12,807796
12	1,268242	10,575341	13,41209	12	1,425761	9,954004	14,19203
13	1,293607	11,348374	14,680332	13	1,468534	10,634955	15,61779
14	1,319479	12,106249	15,973938	14	1,51259	11,296073	17,086324
15	1,345868	12,849264	17,293417	15	1,557967	11,937935	18,598914
16	1,372786	13,57770	18,639285	16	1,604706	12,561102	20,156881
17	1,400241	14,291872	20,012071	17	1,652848	13,166118	21,761588
18	1,428246	14,992031	21,412312	18	1,702433	13,753513	23,414435
19	1,456811	15,678462	22,840559	19	1,753506	14,323799	25,116868
20	1,485947	16,351433	24,29737	20	1,806111	14,877475-	26,870374
21	1,515666	17,011209	25,783317	21	1,860295	15,415024	28,676486
22	1,54598	17,658048	27,298984	22	1,916103	15,936917	30,53678
23	1,576899	18,292204	28,844963	23	1,973587	16,443608	32,452884
24	1,608437	18,913926	30,421852	24	2,032794	16,935542	34,42647

Таблиця відсотків рахунків накопичення

$$S_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \text{ та ренти } a_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[1-(1+i)^{-i}\right]}{i}$$

(продовження)

i=5%= 0,05				*i=8%= 0,08*			
n	*(1+i)^n*	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$	*n*	*(1+i)^n*	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$
I	1,05	0,95238 1	1,0	1	1,08	0,925926	1,0
2	1,1025	1,85941	2,05	2	1,164	1,783265	2,08
3	1,157625	2,723248	3,1525	3	1,259712	2,577097	3,2464
4	1,215506	3,545951	4,310125	4	1,360489	3,312127	4,506112
5	1,276282	4,329477	5,525631	5	1,469328	3,99271	5,866601
6	1,340096	5,075692	6,801913	6	1,586874	4,62288	7,335929
7	1,4071	5,786373	8,142008	7	1,713824	5,20637	8,922803
8	1,477455	6,463213	9,549109	8	1,85093	5,746639	10,636628
9	1,551328	7,107822	11,026564	9	1,999005	6,246888	12,487558
10	1,628895	7,721735	12,577893	10	2,158925	6,710081	14,486562
11	1,710339	8,306414	14,206787	11	2,331639	7,138964	16,645487
12	1,795856	8,863252	15,917127	12	2,51817	7,536078	18,977126
13	1,885649	9,393573	17,712983	13	2,719624	7,903776	21,495297
14	1,979932	9,898641	19,598632	14	2,937194	8,244237	24,21 492
15	2,078928	10,379658	21,578564	15	3,172169	8,559479	27,152114
16	2,182875	10,83777	23,657492	16	3,425943	8,531369	30,324283
17	2,292018	11,274066	25,840366	17	3,700018	9,121638	33,750226
18	2,406619	11,689587	28,132385	18	3,996019	9,373887	37,450244
19	2.52695	12,085321	30,539004	19	4,315701	9,603599	41,446263
20	2,653298	12,46221	33,065954	20	4,660957	9,818147	45,761964
21	2,785963	12,821153	35,719252	21	5,033834	10,016803	50,422921
22	2,925261	13,163003	38,505214	22	5,43654	10,200744	55,456755
23	3,071524	13,488574	41,430475	23	5,871464	10,371059	60,893296
24	3,2251	13.798642	44,501999	24	6,341181	10,528758	66,764759

ЛІТЕРАТУРА

1. Апанасов П. Т., Апанасов Н. П. Сборник математических задач с практическим содержанием: кн. для учителя. Москва: Просвещение, 1987. 110 с.
2. Барковський В. В., Барковська Н. В. Математика для економістів: Вища математика. Киіїв : Національна академія управління, 1997. 397 с.
3. Белинский В. А., Калихман И. Л., Майстров Л. Е., Митькин А. М. Высшая математика с основами математической статистики. Москва : Высш. шк., 1965. 516 с.
4. Бугір М. К. Математика для економістів: Навч. посібник. Тернопіль: Підручники і посібники, 1998. 192 с.
5. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Вища математика: Навч. посібник: У 2-х ч. Київ: КНЕУ, 2001. Ч.1. 546 с.; Київ: КНЕУ, 2002. Ч.2. 451с.
6. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самостійного вивчення дисципліни / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. Киіїв: КНЕУ, 1999. 396 с.
7. Вища математика. Підручник / Домбровський В. А., Крижанівський І. М., Мацьків Р. С. та ін.; за редакцією Шинкарика М. І. Тернопіль: Вид-во Карп'юка, 2003. 480 с.
8. Вітлінський В.В., Терещенко Т.О., Савіна С.С. Економіко-математичні методи та моделі : навч. посібник. Киіїв, КНЕУ, 2016. 303 с.
9. Глаголев А. А., Солнцева Т. В. Курс высшей математики. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Высш. шк., 1971. 656 с.
10. Грисенко М.В. Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі: Навч. псібник. Київ: Либідь, 2007. 720 с.
11. Гудименко Ф. С., Борисенко Д. М., Волкова В. О. та інші. Збірник задач з вищої математики: Учбовий посібник. Киіїв : Вид-во КДУ, 1967. 352 с.

12. Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие. Изд. 2-е. Москва : Высш. шк., 1974. Ч. I. 416 с.
13. Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие. – Изд. 2-е. – Москва: Высш. шк., 1974.–Ч. II.– 464 с.
14. Доброжицкая И. Г., Доброжицкий М. Б. Краткое руководство к решению задач по высшей математике (для техникумов). Минск: Вышейш. шк., 1972. 200 с.
15. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике: Учеб. пособие. Изд. 4-е. Харьков: Изд-во ХГУ, 1970. Ч. I, II. 576 с.
16. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике: Учеб. пособие. Изд. 3-е, стереотипное. Ч. III. Изд. 2-е, стереотипное. Ч. IV. Харьков: Изд-во ХГУ, 1971. 500 с.
17. Карасев А. И., Аксютина З. М., Савельева Т. И. Курс высшей математики для економических вузов. Ч. I. Основы высшей математики: Учеб. пособие. Москва: Высш. шк., 1982. 272 с.
18. Клюева Л. А., Тальский Д. А. Практикум по математике для заочных техникумов: Учеб. пособие. Москва: Высш. шк., 1970. 446 с.
19. Крыньский Х. Э. Математика для економистов: Пер. с польск. Меникера В. Д. Под ред. Баренгольца М. И. Москва: Статистика, 1970. 584 с.
20. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие. Москва: Наука, 1971. 352 с.
21. Неміш В. М., Процик А. І., Березька К. М. Практикум з вищої математики: Навч. посібник., 3-тє видання. Тернопіль: ТНЕУ в-во «Економічна думка» 2010. 304 с.
22. Петров В. А. Математические задачи из сельскохозяйственной практики: Пособие для учителей. Москва: Просвещение, 1980. 64 с.

23. Комплексні практичні індивідуальні завдання з вищої математики. Навчальний посібник / Алілуйко А.М., Неміш В.М., Шинкарик М.І. Тернопіль: Економічна думка, 2013. 116 с.
24. Сборник задач по курсу высшей математики: Учеб. пособие для втузов. / Кручкович Г. И., Гутарина Н. И., Дюбюк П. Е. и др. / Под ред. Крючковича Г. И. Изд. 3-е, перераб. Москва: Высш. шк., 1973. 576 с.
25. Справочное пособие по математическому анализу. Ч. І. Введение в анализ, производная, интеграл / Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г. Киїів : Вища шк., 1978. 696 с.
26. Типові індивідуальні розрахункові завдання з вищої математики: Навч. посібник / Домбровський І.В., Лесик О.Ф., Мигович Ф.М. та ін.; за редакцією Шинкарика М.І. Тернопіль: Підручники і посібники, 2008. 208с.
27. Фишер С., Дорнбуш Р., Шмалензи Р. Экономика: Пер. с англ. со 2-го изд. Москва: “Дело ЛТД”, 1993. 864 с.