МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАХІДНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра спеціалізованих
комп'ютерних систем

# ОПОРНИЙ КНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

# "МОДЕЛІ ОБ'ЄКТІВ ТА СИСТЕМ КЕРУВАННЯ"

для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр»
спеціальність «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

Тернопіль – ЗУНУ
2022

Опорний конспект лекцій з дисципліни “Моделі об’єктів та систем керування” для студентів освітньо-професійної програми підготовки бакалавра галузі знань 15 Автоматизація та приладобудування спеціальності 151 «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології» / Укл.: Пітух І.Р., Давлетова А. Я. – Тернопіль 2022. – 101с.

Опорний конспект лекцій складається з частин, що рекомендовані програмою на основі галузевого стандарту вищої освіти України з спеціальності «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології»

Укладач: Пітух Ігор Романович, к.т.н, доцент
Давлетова Аліна Ярославівна

Рецензенти:
Франко Ю.П.. к.т.н., доцент, в.о. завідувач кафедри комп’ютерних технлогій Тернопільського національного педагогічного університету
Івасьєв С.В. к.т.н., доцент кафедри кібербезпеки Західноукраїнського національного університету

Розглянуто та схвалено на засіданні кафедри спеціалізованих комп’ютерних систем, протокол №2 від 27.09.2022

Розглянуто та схвалено групою забезпечення спеціальності автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології, протокол №2 від 27.09.2022

ЗМІСТ

**Тема 1.**

# МОДЕЛЮВАННЯ. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ. ВИДИ МОДЕЛЕЙ, ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ. ВИМОГИ ДО МОДЕЛЕЙ

## 1.1 Поняття моделювання

Моделювання – це спосіб дослідження будь-яких явищ, процесів або об'єктів шляхом побудови й аналізу їх моделей. У широкому розумінні моделювання є однією з основних категорій теорії пізнання і мало не єдиним науково обгрунтованим методом наукових досліджень систем і процесів будь-якої природи в багатьох сферах людської діяльності.

На сьогоднішній день моделюванню приділяється значна увага. Невипадково один з найпотужніших у світі суперкомп'ютер NEC Vector SX6 (Earth-Simulator), за даними рейтингу Top500 (www://top500.org), встановлений у центрі моделювання землі в Йокогамі (Японія). Цей комп'ютер призначений для моделювання основних властивостей скла- дових кліматичної системи землі: атмосфери, океану, кріосфери, по- верхні суші і біосфери, а також зовнішніх і внутрішніх факторів у системі, яка визначає глобальний клімат і його зміни.

## 1.2 Поняття системи

Основними поняттями в теорії і практиці моделювання об'єктів, процесів і явищ є поняття «система» і «модель».

У перекладі з грецької «systema» – це ціле, яке складається з частин; об'єднання. Термін «система» існує вже більш ніж два тисячоліття, проте, різні дослідники визначають його по-різному. На сьогодні існує понад 500 визначень терміна «система». Проте, використовуючи будь-яке з них, насамперед потрібно мати на увазі ті завдання, які ставить перед собою дослідник. Системою може бути і один комп'ютер, і автоматична лінія або технологічний процес, в яких комп'ютер є лише одним з компонентів, і все підприємство або декілька різних підприємств, що функціонують як єдина система в одній галузі промисловості. Те, що один дослідник визначає як систему, для іншого може бути лише компонентом складнішої системи.

Для всіх визначень системи спільним є те, що **сисмема** – цілісний комплекс взаємозв'язаних елементів, який має певну структуру і взаємо- діє із зовнішнім середовищем. **Структура системи** – це організована сукупність зв'язків між її елементами. Під таким зв'язком розуміють можливість впливу одного елементу системи на інший. **Середовище** – це сукупність елементів зовнішнього світу, які не входять до складу системи, але впливають на її поведінку або властивості. Система є **відкритою**, якщо існує зовнішнє середовище, яке впливає на систему, і **закритою**, якщо зовнішнє середовище відсутнє або не враховується, у зв'язку з поставленими цілями досліджень.

Одне з перших визначень системи (1950 рік) належить американському біологові Л. фон Берталанфі, згідно з яким система складається з деякої кількості взаємозв'язаних елементів. Оскільки між елементами системи існують певні взаємозв'язки, то повинні бути структурні відношення. Таким чином, система – це щось більше, ніж сукупність елементів. Аналізуючи систему, потрібно враховувати оцінку системного (синергетичного) ефекту.

Властивості системи відмінні від властивостей її елементів, і залежно від властивостей, якими цікавляться дослідники, та ж сама сукупність елементів як може бути системою, так і не бути нею. Багато дослідників визначають систему як **цілеспрямовану** множину взаємозв'язаних елементів будь-якої природи. згідно з цим визначенням система функціонує для досягнення деякої мети. Це визначення цілком правильне для соціологічних і технічних систем, але погано підходить для систем навколишньої природи (наприклад, біологічних), мета функціонування яких не завжди відома.

Визначення поняття системи пов'язані з абстрактною теорією систем, в рамках якої використовуються такі рівні абстрактного опису:

– символічний, або лінгвістичний;
– теоретико-множинний;
– абстрактно-алгебраїчний;
– топологічний;
– логіко-математичний;
– теоретико-інформаційний;
– динамічний;
– евристичний.

Найвищий рівень абстрактного опису систем – **лінгвістичний**; грунтуючись на ньому, можна отримати всі інші рівні. На цьому рівні вводиться поняття предметної області, для опису якої застосовуються моделі алгебри, пов'язані з деякою мовою. Для опису предметної області цією мовою використовуються два рівні формальних мов, за допомогою яких будують логіко-алгебраїчну модель предметної області. На цій моделі підтверджуються дослідницькі прийоми за допомогою нормального апарату, яким можуть бути теорії, побудовані у вигляді дійсних висловлювань з всієї множини висловлювань.

Таким чином, система – це окремий випадок теорії, описаний формальною мовою, яка уточнюється до мови об'єктів. Для визначення деякого поняття використовують певні символи (алфавіт) і встановлюють правила оперування ними. Сукупність символів і правил користування ними утворює абстрактну мову. Поняття, висловлене абстрактною мовою, означає будь-яке речення (формулу), побудоване за граматичними правилами цієї мови. Допускають, що таке речення містить змінні, що підбираються, так звані **конституенти**, які, маючи тільки певні значення, роблять дане висловлювання істинним.

Якщо існує множина висловлювань G , але лише V з них істинні, то вважають, що має місце теорія L щодо множини G. Якщо припустити, що конституенти в цих висловлюваннях є формально визначеними величинами, то такі висловлювання називаються правильними. Тоді, за визначенням М. Месаровича, система – це множина правильних висловлювань. Усі висловлювання поділяються на два типи: **терми**, які вказують на предмети (об'єкти), і **функтори**, які визначають відношення між термами (об'єктами). Використання термів і функторів дає можливість показати, як, базуючись на лінгвістичному рівні, можна утворити інші рівні абстрактного опису системи.

Наприклад, за допомогою термів і функторів можна показати, як з лінгвістичного рівня абстрактного опису системи виникає теоретико-множинний, якщо вважати, що терми – це множина XS , за допомогою якої перераховують елементи або, інакше, підсистеми досліджуваних систем, а функтори встановлюють характер відношень між задіяними в описі множинами.

При подальшому викладенні змісту курсу лекцій користуватимемося **теоретико-множинним** визначенням системи (А. Холл, Р. Фейджин і Ф. Фейджин), згідно з яким **система** – це множина об'єктів, між якими існують певні відношення, а також їх атрибути. Під **об'єктами** розуміють компоненти (елементи) системи. Це, наприклад, підсистеми (тобто може існувати ієрархія підсистем) або окремі об'єкти системи.

**Атрибути** – це властивості об'єктів. **Відношення** задають певний закон, за яким визначається деяке відображення в одній і тій же множині об'єктів. згідно з цим визначенням поняття **множина і елемент** є аксіоматичними.

Таким чином, система Є задається парою елементів:

$$S=(X_S ,R_S ) ,$$

де $X_S$ , $R_S$ - множини відповідно елементів (об'єктів) системи і відношень між ними. Відношення визначають взаємодію між об'єктами.

У загальному випадку n -відношення R в множинах $X_1$, $X_2$ ,…, $X_n$ є деякою підмножиною декартового добутку $X_1 x X_2$ x…x$X_n$ який складений з n –вимірних наборів виду ( $x_1$, $x_2$ ,…, $x_n$ ), де $x_i \epsilon X_i$, i=1,2,…,n.

Якщо відношення R в окремому випадку задається, наприклад, деякою функцією, яка визначає зв'язок між певним елементом $x \epsilon X_i$ певним елементом у підмножини Y, то f: X→Y, тобто вважаємо, що функція f перетворить значення з множини X у значення підмножини Y. Для функції f множина X – це область визначення, а підмножина У - область значень функції. Функцію f можна розглядати як множину впорядкованих пар елементів(x,y), де y=f (x).

Що стосується атрибутів системи, то вони подібні до функцій, визначених на підмножині об'єктів. Відмінність атрибутів від функцій полягає в тому, що два різних атрибути з точки зору поняття функції можуть бути однаковими. Атрибут А задається парою елементів (i ,f), де i – ім'я атрибута, а f – функція, визначена на підмножині об'єктів.

У динамічних об'єктів атрибут також може бути функцією від часу t .

Наприклад, у разі дослідження пропускної спроможності ділянок автомобільних доріг об'єктами системи можуть бути перехрестя, розв'язки, поворот і прямолінійні ділянки доріг (статичні об'єкти) та автомобілі (динамічні об'єкти). Властивості (атрибути) динамічних об'єктів, на відміну від властивостей статичних, змінюються в часі. Наприклад, гальмівний шлях автомобіля змінюється залежно від швидкості руху і погодних умов, а прискорення може бути додатнім (під час розгону) або від'ємним (під час гальмування). Відношення в цій системі задаються згідно з правилами дорожнього руху.

Вивчаючи систему більш глибоко, усвідомлюємо, що вона може складатися з підсистем або бути одним з елементів більшої системи, тобто може існувати ієрархія систем. Наприклад, двигун є підсистемою автомобіля, який, у свою чергу, є підсистемою транспортного потоку магістралі.

На теоретико-множинному рівні абстрактного опису системи можна отримувати досить таки загальні відомості про реальні системи, а для конкретних цілей потрібні інші моделі, які давали б можливість детальніше аналізувати різні властивості реальних систем. Для цього потрібні нижчі рівні абстрактного опису систем, які є окремими випадками опису теоретико-множинного рівня. Так, якщо зв'язки між елементами даних множин встановлюються за допомогою деяких однозначних функцій, які відображають елементи множини в саму початкову множину, то має місце **абстрактно-алгебраїчний** рівень опису систем. У таких випадках вважають, що між елементами множини встановлені нульарні, унарні, бінарні, тернарні й інші відношення.

Якщо ж на даних множинах визначені деякі багатозначні функції, то мають місце **топологічні абстрактні моделі**, записані мовою загальної топології або її гілок, які називаються топологією алгебри, гомологічною топологією і т. п.

Вибір потрібного рівня абстрактного опису при вивченні тієї або іншої реальної системи є завжди найбільш відповідальним і найбільш важким кроком у теоретико-системних побудовах. Цей процес майже не піддається формалізації і багато в чому залежить від досвіду і знань дослідника, його професійної підготовки, цілей дослідження і т. п.

Можна показати, як від систем з топологічним рівнем опису перейти до узагальнених динамічних систем. Щоб дати строге математичне визначення поняттю **динамічна система**, її наділяють властивістю мати «входи» і «виходи», тобто визначають як структурований об'єкт, куди в певні моменти часу можна вводити речовину, енергію, інформацію, а в інші моменти – виводити їх. Динамічні системи можна зобразити і як системи, де процеси відбуваються неперервно, і як системи, в яких всі процеси протікають лише в дискретні моменти часу.

Інші абстрактні рівні опису систем пов'язані з розвитком інформаційних і програмних систем, а також систем штучного інтелекту.

Елементи системи і зв'язки між ними в різних випадках можуть мати різну природу (фізичну, інформаційну, технологічну, біологічну, соціальну), тому аналізом систем займаються представники різних галузей науки і техніки. Науковий напрям під назвою **заглььна теорія систем**, який з'явився в кінці 50-х – на початку 60-х років ХХ століття, пов'язаний з розробкою сукупності філософських, методологічних, наукових і прикладних методів аналізу та синтезу систем довільної природи. Ця теорія є загальною, оскільки має дедуктивний характер, об'єднує інші теорії, а саме: теорії управління, самоорганізації, навчання і тому подібне, і розроблена для вивчення поведінки абстрактних систем. Основне її призначення – пояснити, яким чином з окремих елементів утворюється складна єдність цілого, нова сутність. загальна теорія систем тісно пов'язана з формальною і є певною мірою математичною. Основна процедура теорії систем і системного аналізу – побудова моделі системи, яка відображувала б всі фактори, взаємозв'язки і реальні ситуації. займаються цим фахівці з системного аналізу – системні аналітики.

### 1.3 Поняття моделі

Науковою основою моделювання як методу пізнання і дослідження різних об'єктів і процесів є **теорія схожості**, в якій головним є поняття аналоєїі, тобто схожість об'єктів за деякими ознаками. Подібні об'єкти називаються аналогами. Аналогія між об'єктами може встановлюватися за якісними і (або) кількісними ознаками.

Основним видом кількісної аналогії є **математична схожість**, коли об'єкти описуються за допомогою рівнянь і функцій. Функції і незалежні змінні називаються схожими, якщо вони співпадають з точністю до деяких констант. Окремими видами математичної схожості є **геометрична схожість**, яка встановлює схожість геометричних образів, і часова, така, що визначає схожість функцій часу, для яких константа часу (масштаб) показує, в яких відношеннях перебувають параметри функцій, такі як період, часова затримка і т. п.

Іншим видом кількісної аналогії є **фізична схожість**. Критерії фізичної схожості можна отримати, не маючи математичного опису об'єктів, наприклад, на основі значень фізичних параметрів, які характерризують досліджуваний процес у натурі і на моделі. за типами процесу розрізняють види схожості, для якої розроблені відповідні критерії, – гідравлічні, електричні, аеродинамічні й ін.

Вивчення переходу від властивостей реальних об'єктів до властивостей системи є найважливішим завданням теорії систем. У загальній теорії систем визнається об'єктивність існування систем. згідно з цією теорією, якщо реально існують взаємозв'язки між об'єктами, то існують і системи, які їм відповідають. Ця теорія грунтується на **постулаті функціонально-структурного ізоморфізму** об'єктів і явищ природи, який формулюється таким чином.

Якщо структура однієї системи і зовнішні функції її елементів ізоморфні структурі іншої системи і зовнішнім функціям її елементів, то зовнішні властивості цих систем не розрізняються в області їх ізоморфізму. Дві множини X,Y називаються ізоморфними, якщо між елементами цих множин можна встановити взаємно однозначну відповідність.

У теорії систем цей постулат має не менше значення, ніж закони збереження матерії у фізиці або аксіоми в математиці. Разом з іншими постулатами він є основою для логічного, доказового розгортання теорії і дає можливість пояснити єдність закономірностей природи для об'єктів, які здаються несхожими і незалежними один від одного. Ізоморфізм реальних систем є основою і логічним наслідком вищезазначеного постулату.

У теорії систем існує ще один важливий для моделювання постулат, який визначає, що описом структури і функцій деякої системи може бути інша ізоморфна відносно її система. При цьому ізоморфізм (схожість) двох систем стосується і структур систем і функцій їх елементів. Одна з таких систем є **моделлю** іншої (**оригіналу**) і навпаки. Таких ізоморфних систем може бути безліч. Виникає проблема вибору або побудови системи, яка може бути моделлю досліджуваної системи.

Теорія схожості дає можливість встановити відношення еквівалентності (відповідності, схожості) за деякими ознаками між двома системами, що розглядаються. Будь-яка з цих систем може існувати реально або бути абстрактною. Якщо система існує реально, то її можна вивчати, досліджуючи, яким чином зв'язані вхідні впливи з виходами системи. На основі результатів досліджень будується деяка **абстрактна система**. У ній відношення еквівалентності визначається тільки для тих важливих властивостей і аспектів поведінки, які в початковій та в абстрактній системах повинні бути однаковими. Г. Месарович відзначає, що, базуючись на спостереженнях і дослідженнях однієї системи, можна будувати висновки про властивості й поведінку іншої. Переважно на практиці абстрактна система є **більщ простою**, ніж початкова, якщо не враховувати тих аспектів, які визначають відношення еквівалентності.

Таким чином, можна перейти до визначення терміна «модель». У філософській літературі під терміном «модель» розуміють «деяку реально існуючу систему або ту, що представляється в думках, яка, заміщуючи і відображаючи в пізнавальних процесах іншу систему-оригінал, перебуває з нею у відношенні схожості, завдяки чому вивчення моделі дає можливість отримати нову інформацію про оригінал». У цьому визначенні закладений генетичний зв'язок моделювання з теорією схожості, принципом аналогії. Таким чином, моделлю можна називати систему, яку використовують для дослідження іншої системи.

Термін «модель» походить від латинського слова «modulus», тобто зразок, пристрій, еталон. У широкому значенні – це будь-який аналог (уявний, умовний: зображення, опис, схема, креслення і т. п.) певного об'єкта, процесу, явища («оригіналу» даної моделі), який використовується як його «замінник». Цей термін можна застосовувати також для позначення системи постулатів, даних і доказів, формального опису деякого явища або стану речей. Словник Вебстера визначає модель як «спрощений опис складного явища або процесу».

Підсумовуючи вищесказане, надалі використовуватимемо таке коротке визначення. **Модель** – це реально існуюча або абстрактна система, яка, замінюючи і відображаючи в пізнавальних процесах іншу систему – оригінал, перебуває з нею у відношенні схожості.

У сучасній теорії управління використовуються **моделі двох основних типів**. Для технологічних об'єктів цей поділ відповідає «**феноменологічним**» і «**дедуктивним**» моделям. Під феноменологічними моделями розуміють переважно емпірично відновлені залежності вихідних даних від вхідних, як правило, з невеликою кількістю входів і виходів. Дедуктивне моделювання передбачає з'ясування і опис основних фізичних закономірностей функціонування всіх компонентів досліджуваного процесу і механізмів їх взаємодії. за допомогою де дуктивних моделей описується процес у цілому, а не окремі його режими.

Перший тип моделей – **моделі даних,** які не мають потреби, не використовують і не відображають яких-небудь гіпотез про фізичні про цеси або системи, з яких ці дані отримані. До моделей даних належать всі моделі математичної статистики. Останнім часом ця сфера моделювання ув'язується з експериментально-статистичними методами і системами, що істотно розширює методологічну базу для прийняття рішень під час розв’язання задач аналізу даних і управління.

Другий тип моделей – **системні моделі**, які будуються в основному на базі фізичних законів і гіпотез про те, як система структурована і, можливо, як вона функціонує. Використання системних моделей передбачає можливість працювати в технологіях віртуального моделювання – на різноманітних тренажерах і в системах реального часу (операторські, інженерні, біомедичні інтерфейси, різноманітні системи діагностики і тестування та ін.). Саме системні моделі є ядром моделювання на сучасному етапі.

Таким чином, модель є абстракцією системи і відображає деякі її властивості. Цілі моделювання формулює дослідник. значення цілей моделювання неможливо переоцінити. Тільки завдяки ним можна визначити сукупність властивостей модельованої системи, які повинна мати і модель, тобто від мети моделювання залежить потрібний ступінь деталізації моделі.

### 1.4 Співвідношення між моделлю та системою

Ураховуючи вищеописане, модель – це абстракція; вона відображає лише частину властивостей системи, і мета моделювання – визначення рівня абстрактного опису системи, тобто рівня детальності її подання.

Модель і система перебувають у деяких співвідношеннях, від яких залежить ступінь відповідності між ними. На міру відповідності між системою і моделлю вказують поняття **ізоморфізму** і **гомоморфізму**. Система і модель є ізоморфними, якщо існує взаємно однозначна відповідність між ними, завдяки якій можна перетворити одне подання на інше. Строго доведений ізоморфізм для систем різної природи дає можливість переносити знання з однієї області в іншу. за допомогою теорії ізоморфізму можна не тільки створювати моделі систем і процесів, але й організовувати процес моделювання.

Однак існують і менш тісні зв'язки між системою та моделлю. Це так звані гомоморфні зв'язки, які визначають однозначну відповідність лише в один бік – від моделі до системи. Система і модель є ізоморфними тільки у разі **спрощення** системи, тобто скорочення множини її властивостей (атрибутів) і характеристик поведінки, які впливають на простір станів системи.

**Станом динамічної системи** (моделі) в деякий момент часу t називається множина значень всіх її параметрів (змінних), виміряних одночасно у цей момент. При зміні значення хоча б одного параметра системи в наступний момент часу говорять, що стан системи змінився. Стан системи зручно розглядати як точку в багатовимірному просторі. Множина всіх можливих станів системи називається **простором станів сисмеми.**

Зазвичай модель є більш простою, ніж система. На рис. 1.1 схематично зображена відмінність ізоморфної і гомоморфної залежностей між системою і моделлю для просторових станів системи $Z_s$ і моделі $Z_m$.

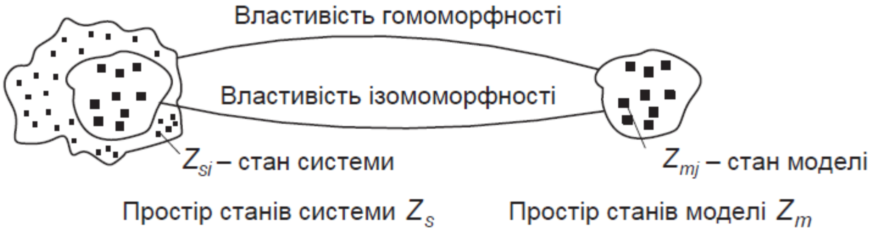



Рис. 1.1. Схематичне зображення співвідношення між системою і моделлю

Множина станів моделі $Z_m$ визначають, враховуючи мету моделювання І вибраний рівень абстрактного опису.

Отже, **аналогія, абстракція і спрощення** – це основні поняття, які використовуються при моделюванні систем. Розглянемо відношення між системою і моделлю, враховуючи, що ці відношення відповідають цілям моделювання й обмеженням досліджуваної системи. При використанні поняття множини можливих станів системи $Z_s$ і моделі $Z_m$ роз різняють такі типи відношень.

1. **Детерміновані відношення**, коли стан системи однозначно визначає стан моделі і навпаки:

$$P(Z_m=Z_{mj}|Z_s=Z_{si})= P(Z_s=Z_{si}|Z_m=Z_{mj})=0\vee 1,$$

де P – ймовірність; $Z_{si}$, $Z_{mj}$ - конкретні стани відповідно системи і моделі для скінченної множини значень i, j.

У цьому випадку розглядається детермінована дискретна модель зі скінченною множиною можливих станів. Прикладом реалізації такої моделі може бути скінченний автомат або мережа Петрі.

2. **Імовірнісні відношення зі скінченною множиною станів**. У цьому випадку стан системи однозначно визначає стан моделі, але стан моделі визначає стан системи лише з деякою ймовірністю. Вказані відношення для конкретних станів $Z_{si}$, $Z_{mj}$ можна записати у такому вигляді:

$$P(Z_m=Z_{mj}|Z_s=Z_{si})= 0\vee 1,$$
$$P(Z_s=Z_{si}|Z_m=Z_{mj})\leq 1,$$

тобто розглядається дискретна стохастична модель зі скінченною множиною можливих станів. Прикладом реалізації подібної моделі може бути імовірнісний автомат.

3. **Імовірнісні відношення з нескінченною множиною станів**, коли стани системи і моделі визначають стани один одного лише з деякою ймовірністю:

$$P(Z_m=Z_{mj}|Z_s=Z_{si})\leq 1,$$
$$P(Z_s=Z_{si}|Z_m=Z_{mj})\leq 1,$$

Це так звані стохастичні моделі, до яких, наприклад, належать марківські моделі (ланцюги Маркова) і моделі систем масового обслуговування.

### 1.5 Види моделей та їх класифікація за різними критеріями

Для того щоб визначити види моделей, перш за все, потрібно вказати ознаки класифікації.

Якщо враховувати, що моделювання – це метод пізнання дійсності, то основною ознакою класифікації можна назвати спосіб подання моделі. за цією ознакою розрізняють **абсмракмні і реалані** моделі (рис. 1.2). Під час моделювання можливі різні абстрактні **конструкції**,проте, основною є віртуальна (**уявна**) модель, що відображає ідеальне уявлення людини про навколишній світ, який фіксується у свідомості через думки і образи. Віртуальна модель може представлятися у вигляді нагляді наглядної **моделі** за допомогою графічних образів і зображень.

Наглядні моделі залежно від способу реалізації можна поділити на дво- або тривимірні графічні, анімаційні і просторові. Графічні й анімаційні моделі широко використовуються для відображення процесів, які відбуваються в модельованій системі. Графічні моделі застосовуються в системах автоматизованого проектування (compriter-aided design, CA). Для відтворення тривимірних моделей за допомогою комп'ютера існує багато графічних пакетів, найбільш поширені з яких: Corel DRAW, зD Studio Max і Maya.

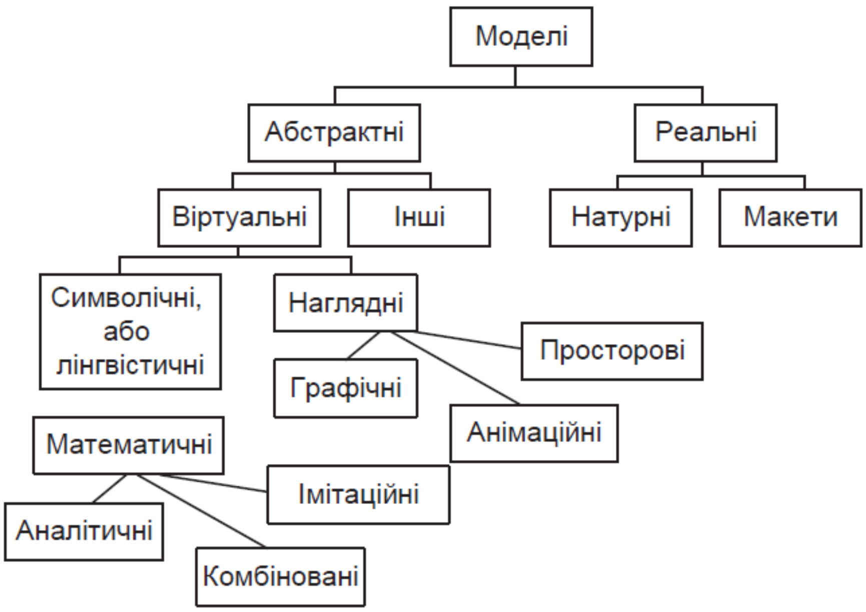



Рис. 1.2. Основні типи моделей

Графічні моделі є базою всіх комп'ютерних ігор, а також застосовуються під час імітаційного моделювання для анімації.

Щоб побудувати модель у формаланому виєляді, створюють символічну, або лінєвісмичну, модель, яка відповідала б високому рівню абстрактного опису, як це було вказано вище. На базі її отримують інші рівні опису.

Основним видом абстрактної моделі є **матемамична модель**. Її вид залежить як від природи реального об'єкта, так і від задач дослідження об'єкта та необхідної достовірності і точності розв'язку цієї задачі. Будь-яка математична модель, як і всяка інша, описує реальний об'єкт лише з деякою мірою наближення до дійсності. за видом математичні моделі для дослідження характеристик процесу функціонування систем можна розділити на **аналітичні, імітаційні і комбіновані.**

Для **аналітичної моделі** характерним є те, що процеси функціонування елементів системи записуються у вигляді деяких функціональних співвідношень (алгебрі, інтегрально-диференціальних, кінцево-різницевих і т. п.) або логічних умов. Аналітична модель може бути досліджена такими методами:

– аналітичним, коли прагнуть отримати в загальному вигляді явні залежності для шуканих характеристик;

– чисельним, коли, не вміючи розв'язувати рівняння в загальному вигляді, прагнуть отримати числові результати при конкретних початкових даних;

– якісним, коли, не маючи розв'язку в явному вигляді, можна знайти деякі властивості розв'язку (наприклад, оцінити сталість розв'язку).

Якнайповніше дослідження процесу функціонування системи можна провести, якщо відомі явні залежності, що пов'язують шукані характеристики з початковими умовами, параметрами і змінними системи Є . Проте такі залежності вдається отримати тільки для порівняно простих систем. При ускладненні систем дослідження їх аналітичним методом наштовхується на значні труднощі, які часто бувають нездоланними. Тому, бажаючи використовувати аналітичний метод, в цьому випадку йдуть на суттєве спрощення початкової моделі, аби мати можливість вивчити хоча б загальні властивості системи. Таке дослідження на спрощеній моделі аналітичним методом допомагає отримати орієнтовні результати для визначення точніших оцінок іншими методами. Чисельний метод дозволяє досліджувати порівняно з аналітичним методом ширший клас систем, але при цьому отримані розв'язки носять приватний характер. Чисельний метод особливо ефективний при використанні комп'ютерів.

В окремих випадках дослідника системи можуть задовольнити і ті висновки, які можна зробити при використанні якісного методу аналізу математичної моделі. Такі якісні методи широко використовуються, наприклад, в теорії автоматичного управління для оцінки ефективності різних варіантів систем управління.

В **імітаційній моделі** відтворюється процес функціонування системи S у часі, причому імітуються елементарні явища, що складають процес, із збереженням їх логічної структури і послідовності протікання в часі, що дозволяє за початковими даними отримати зведення про стани процесу в певні моменти часу, які дають можливість оцінити характеритики системи S.

Основною перевагою використання імітаційних моделей порівняно з аналітичними моделями є можливість розв'язання складніших задач. Імітаційні моделі дозволяють досить просто враховувати такі фактори, як наявність дискретних і безперервних елементів, нелінійні характеристики елементів системи, численні випадкові дії тощо, які часто створюють труднощі при аналітичних дослідженнях. Нині імітаційне моделювання – найбільш ефективний метод дослідження великих систем, а часто і єдиний практично доступний метод отримання інформації про поведінку системи, особливо на етапі її проектування.

Коли результати, отримані при відтворенні на імітаційній моделі процесу функціонування системи S, є реалізаціями випадкових величин і функцій, тоді для знаходження характеристик процесу потрібне його багаторазове відтворення з подальшою статистичною обробкою інформації і доцільно як метод машинної реалізації імітаційної моделі використовувати метод статистичного моделювання. Спочатку був розроблений метод статистичних випробувань, що є чисельним методом, який застосовувався для моделювання випадкових величин і функцій, імовірнісні характеристики яких співпадали з розв'язками аналітичних задач (така процедура отримала назву **метода Монте-Карло**). Потім цей прийом почали застосовувати і для машинної імітації з метою дослідження характеристик процесів функціонування систем, схильних до випадкових дій, тобто з'явився метод **сматистичного моделювання**.

Таким чином, методом статистичного моделювання надалі називатимемо метод машинної реалізації імітаційної моделі, а методом статистичних випробувань (Монте-Карло) називатимемо чисельний метод розв'язання аналітичних задач.

Метод імітаційного моделювання дозволяє розв’язувати задачі аналізу великих систем S, включаючи задачі оцінки: варіантів структури системи, ефективності різних алгоритмів управління системою, впливу зміни різних параметрів системи. Імітаційне моделювання може бути покладене також в основу структурного, алгоритмічного і параметричного синтезу великих систем, коли потрібно створити систему із заданими характеристиками при певних обмеженнях, яка є оптимальною за деякими критеріями оцінки ефективності.

Використання **комбінованих** (аналітико-імітаційних) **моделей** при аналізі і синтезі систем дозволяє об'єднати переваги аналітичних й імітаційних моделей. При побудові комбінованих моделей проводиться попередня декомпозиція процесу функціонування об'єкта на складові підпроцеси, і для тих з них, де це можливо, використовуються аналітичні моделі, а для решти підпроцесів будуються імітаційні моделі. Такий комбінований підхід дозволяє охопити якісно нові класи систем, які не можуть бути досліджені з використанням тільки аналітичного й імітаційного моделювання окремо.

На відміну від абстрактних, **реальні** моделі існують у природі, і з ними можна експериментувати. Реальні моделі – це такі моделі, в яких хоча б один компонент є фізичною копією реального об'єкта. залежно від того, в якому співвідношенні перебувають властивості системи і моделі, реальні моделі можна поділити на натурні і макетні.

**Натурні** (фізичні) моделі – це існуючі системи (або їх частини), на яких ведуться дослідження. Натурні моделі повністю адекватні реальній системі, що дає можливість отримувати високу точність і достовірність результаттів моделювання. Істотні недоліки натурних моделей – це неможливість моделювання критичних й аварійних режимів їх роботи і висока вартість.

**Макетні** моделі – це реально існуючі моделі, що відтворюють модельовану систему в певному масштабі. Іноді такі моделі називаються **масштабними**. Параметри моделі і системи відрізняються між собою. Числове значення цієї відмінності називається масштабом моделювання, або коефіцієнтом схожості. Ці моделі розглядаються в рамках теорії схожості, яка в окремих випадках передбачає геометричну схожість оригінала і моделі для відповідних масштабів параметрів. Прості макетні моделі – це пропорційно зменшені копії існуючих систем, які відтворюють основні властивості системи або об'єкта залежно від мети моделювання. Макетні моделі широко використовуються під час вивчення фізичних та аеродинамічних процесів, гідротехнічних споруд і багатьох інших технічних систем.

Залежно від можливості змінювати в часі свої властивості моделі поділяються на **сматичні і динамічні**. Статичні моделі, на відміну від динамічних, не змінюють своїх властивостей в часі. Динамічні моделі, як правило, є імітаційними.

Залежно від того, яким чином відтворюються в часі стани моделі, розрізняють **дискретні, неперервні і дискретно-неперервні** (комбіневані) моделі.

Відповідно до співвідношень між станами системи і моделі **розрізняють детерміновані і стохастичні** моделі. Останні, на відміну від детермінованих моделей, враховують імовірнісні явища і процеси, що відбуваються в системі.

### 1.6 Поняття складної системи

Теорія відносності, яка вивчає універсальні фізичні закономірності, що відносяться до всього Всесвіту, і квантова механіка, яка вивчає закони мікросвіту, нелегкі для розуміння, і, тим не менше, вони мають справу з системами, які з погляду сучасного природознавства вважаються простими. **Простими** в тому сенсі, що в них входить невелика кількість змінних, і тому взаємовідношення між ними піддається математичній обробці і виведенню універсальних законів. Однак, крім простих, існують **складні системи**, які складаються з великого числа змінних і, отже, великої кількості різних зв'язків між ними. Чим воно більше, тим важче піддається предмет дослідження досягненню кінцевого результату – виведенню закономірностей функціонування даного

об'єкта. Труднощі вивчення даних систем пов'язані і з тією обставиною, що чим складніше система, тим більше у неї так званих **емерджентних** властивостей, тобто властивостей, яких немає у її частин і які є наслідком ефекту цілісності системи. Такі складні системи вивчає, наприклад, метеорологія – наука про кліматичні процеси. Метеорологія вивчає саме складні системи, оскільки процеси утворення погоди набагато менш відомі, ніж гравітаційні процеси, що, на перший погляд, здається парадоксом. Дійсно, чому ми достатньо точно можемо визначити, в якій точці перебуватиме земля або яке-небудь інше небесне тіло через мільйони років, але не можемо точно передбачити погоду на завтра? Тому що кліматичні процеси є набагато складнішими системами, що складаються з величезної кількості змінних і взаємодій між ними.

### 1.7 Вимоги до моделей

У загальному випадку під час побудови моделі потрібно вразовувати такі вимоги:

– **незалежність результатів** розв’язання задач від конкретної фізичної інтерпретації елементів моделі;

– **змістовність**, тобто здатність моделі відображати важливі риси і властивості реального процесу, який вивчається і моделюється;

– **дедуктивність**, тобто можливість конструктивного використання моделі для отримання результату (управління, прогнозування);

– **індуктивність** – вивчення причин і наслідків, від окремого до загального, з метою накопичення необхідних знань.

Оскільки модель створюється для вирішення конкретних завдань, розробник моделі має бути впевнений, що не отримає абсурдних результатів, а всі отримані результати відображатимуть необхідні для дослідника характеристики і властивості модельованої системи. Модель повинна дати можливість знайти відповіді на певні питання, наприклад: «що буде, якщо ...», оскільки вони є найбільш доцільними під час глибокого вивчення проблеми. Не слід забувати, що системні аналітики використовують модель для прийняття рішень і пошуку якнайкращих способів створення модельованої системи або її модернізації. завжди потрібно пам'ятати, що користувачем інформації, отриманої за допомогою моделі, є замовник. Недоцільно розробляти модель, якщо її не можна буде використовувати. Більш того, робота з моделлю повинна бути автоматизована для замовника до такої міри, щоб він міг працювати з нею в межах своєї предметної області. Таким чином, між моделлю і користувачем має бути реалізований розвинений інтерфейс, який зазвичай створюється за допомогою системи меню, налаштованої на використання моделі в певній області.

Ступінь деталізації моделі потрібно вибирати з урахуванням цілей

моделювання, можливості отримання необхідних вхідних даних для моделі і враховуючи наявні ресурси для її створення. Відсутність кваліфікованих фахівців може звести роботи зі створення моделі нанівець. з іншого боку, чим детальніше розроблена модель, тим вона стійкіша до вхідних впливів, які не були передбачені під час проектування, і на більшу кількість питань може дати правильні відповіді.

Система – це цілісний комплекс взаємопов'язаних елементів, який має певну структуру і взаємодіє із зовнішнім середовищем.

Модель – це реально існуюча або уявна система, яка, заміщаючи і відображаючи в пізнавальних процесах іншу систему-оригінал, знаходиться з нею у відношенні подібності.

Моделювання – це спосіб дослідження будь-яких явищ, процесів або об'єктів шляхом побудови та аналізу їх моделей.

## Тема 2.
## ОСНОВНІ ВИДИ МОДЕЛЮВАННЯ. ФОРМАЛЬНІ МЕТОДИ ПОБУДОВИ МОДЕЛЕЙ.

### 2.1 Основні види моделювання.

Едина класифікація видів моделювання неможлива через багатозначність поняття моделі в науці, техніці, суспільстві. Найбільш широко відомими видами моделювання є **математичне** (аналітичне), **імітаційне і статистичне**. На жаль, різні джерела по-різному трактують ці поняття.

Для **аналітичного (математичного) моделювання** характерне те, що процеси функціонування елементів системи записуються у вигляді деяких функціональних співвідношень. При цьому слід зазначити, що під час використання аналітичних моделей багато що залежить від способу подання як моделі, так і результатів моделювання.

Розглянемо простий приклад. Нехай на деякому підприємстві для водопостачання використовується резервуар, об'єм якого W тисяч літрів. Рівень споживання – $V_C$ тисяч літрів на добу, а швидкість заповнення резервуара – $V_З$ тисяч літрів на добу. Необхідно знайти час T, за який буде заповнений резервуар. Схема цієї системи зображена на рис. 2.1, де резервуар позначений прямокутником, а вхідний і вихідний потоки стрілками з «вентилями», які регулюють ці потоки. Хмари позначають необмежені потоки. Такі ідеограми широко використовуються під час побудови моделей неперервних процесів.

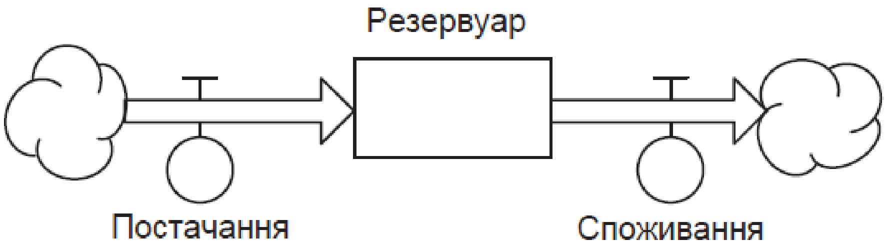


Рис. 2.1. Схема системи водопостачання

Знайдемо час заповнення резервуара:

$$T = \frac{W}{V_З - V_C}. \quad (2.1)$$

Ця математична модель процесу наповнення резервуару вельми ідеалізується, оскільки всі її параметри вважаються незмінними в часі і зовнішні впливи на систему не враховуються. завдяки такій ідеалізації маємо дуже просту модель, яка дає можливість розв’язати задачу аналітично. Проте за допомогою такої моделі можна отримати відповідь лише на одне конкретне питання – за який час буде заповнений резервуар.

Якщо задачу про водопостачання наблизити до реальності, то при побудові моделі необхідно враховувати, що потреби підприємства у водопостачанні постійно змінюються, більш того, можливі перебої в роботі насосів під час подачі води.

Розв'язок (2.1) задачі можна записати як

$$W = (V_З - V_C)T.$$

Позначимо через $W(t)$ об'єм води в резервуарі в деякий момент часу t, тоді

$$W(t) = (V_З - V_C)t, \quad (2.2)$$

тобто пошук T зводиться до розв'язання рівняння $W(t) = W$ або $= (V_З - V_C)t = W$.

За рахунок неявного запису отримана придатна для дослідження й аналізу реальних процесів математична модель (2.2). Час заповнення резервуара об'ємом W залежить від параметрів моделі $V_З$ і $V_C$.

Використання цієї моделі дає можливість вивчити співвідношення між величинами $V_З$ і $V_C$, задаючи різні початкові значення для них, і будуючи графік наповнення резервуара (рис. 2.2).

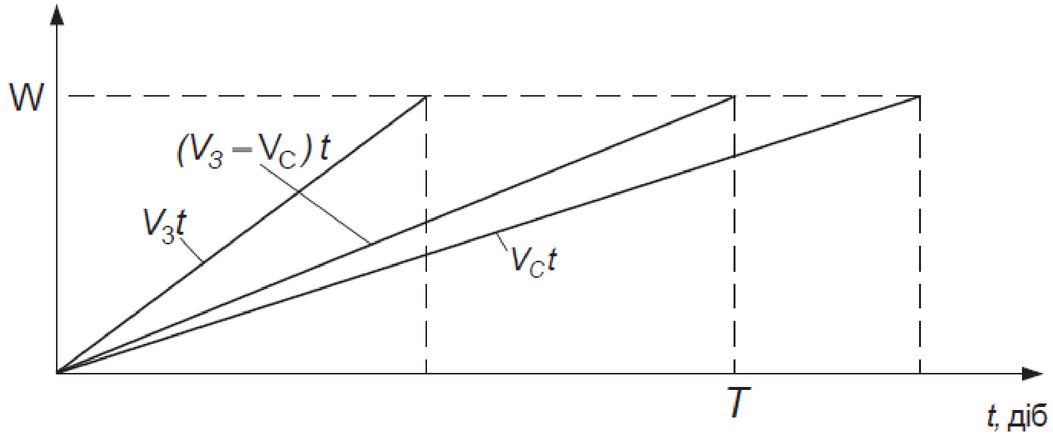



Рис. 2.2. Графік заповнення резервуара

Реалізувати цю модель можна і за допомогою чисельних методів.

Змінюючи у формулі (2.2) значення t від 0 з деяким кроком Δt до такого, при якому виконуватиметься рівність $W(t) = W$, W , отримаємо динамічну характеристику заповнення резервуару. Чим менше крок Δt тим точніше отримаємо результат, але тим довше розв'язуватиметься задача моделювання.

Термін «моделювання» відповідає англійському слову «modeling», тобто побудові моделі і її аналізу. Англійський термін «simulayion» відповідає прийнятому терміну «імітаційне моделювання», але часто вони використовуються разом, коли мова йде про технологічні або системні етапи моделювання, пов'язані з прийняттям рішень за допомогою моделей.

**Імітаційне моделювання** – це метод конструювання моделі системи і проведення експериментів. Проте під таке визначення підпадають майже всі види моделювання. Тому потрібно виділити суттєві особливості імітаційного моделювання.

Перш за все, слід ввести в модель **структуру** системи, тобто загальний опис елементів і зв'язків між ними, потім визначити засоби відтворення в моделі поведінки системи. Переважно поведінку системи описують за допомогою її станів і моментів переходів між ними. Стан системи у момент часу т визначають як множину значень певних параметрів (змінних) системи в один і той же момент часу t . Будь-яку зміну цих значень можна розглядати як перехід до іншого стану. І, нарешті, імітаційна модель повинна відображати властивості середовища, в якому функціонує досліджувана система. зовнішнє середовище задають вхідними впливами на модель.

Вся інформація про імітаційну модель взагалі має логіко-математичний характер і подається у вигляді сукупності алгоритмів, які описують процес функціонування системи. Отже, більшою мірою імітаційною моделлю є її програмна реалізація на комп'ютері, а імітаційне моделювання зводиться до проведення експериментів з моделлю шляхом багаторазового прогону програми з деякою множиною даних – середовищем системи. Під час імітаційного моделювання можуть бути задіяні не лише програмні засоби, але і технічні засоби, люди та реальні системи.

З математичної точки зору імітаційну модель можна розглядати як сукупність рівнянь, які розв'язують з використанням чисельних методів у разі кожної зміни модельного часу. Окремі рівняння можуть бути простими, але їх кількість і частота розв'язання – дуже великими. Розв'язання таких рівнянь під час імітаційного моделювання означає встановлення хронологічної послідовності подій, які виникають у системі і відображають послідовність її станів. Таким чином, імітаційна модель функціонує так само, як система.

Якщо повернутися до процесу наповнення резервуара (рис. 2.1), то за допомогою імітаційної моделі весь процес можна відтворити з використанням рівняння (2.2).

Позначимо через $W_i$ поточний стан резервуара, що відтворюється в певні моменти $t_i$ модельного часу, який змінюється з постійним кроком Δt:

$$W_i = (V_3 - V_C)T, \tag{2.3}$$

де $t_i = t_{i-1} + \Delta t (i = 1,2, \dots), t_0 = 0.$

Модель (2.3) є детермінованою. Процес моделювання закінчується, якщо на деякому кроці виконується умова $W_i \geq W$, тобто розв'язок отримуємо за один прогін імітаційної моделі (2.3). Точність результату при цьому залежатиме від значення $\Delta t$ (рис. 2.3).

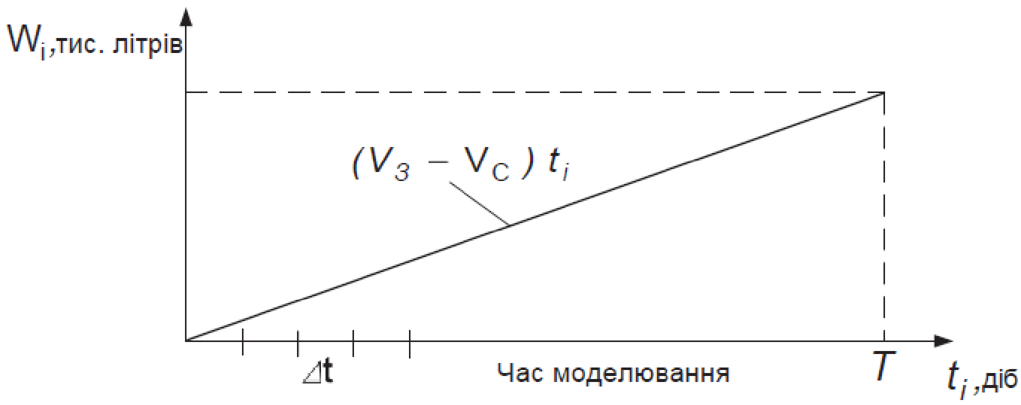


Рис. 2.3. Динамічна характеристика наповнення резервуара

За наявності в моделі випадкових факторів виникає необхідність статистичного оцінювання результатів моделювання, яке виконується за допомогою метода **сматистичного моделювання** (методу Монте Карло). Статистичне моделювання є самостійним видом моделювання, яке включається в імітаційне моделювання лише за необхідності моделювання ймовірнісних систем і процесів.

Побудуємо реальнішу модель системи, яка розглядалася вище. Припустимо, що рівень споживання води на підприємстві має імовірнісний характер і змінюється згідно з рівномірним розподілом ймовірності в межах $V_C \pm \Delta V_C$ . Модель (2.3) тоді перепишемо у вигляді

$W_i = (V_3 - V_{Ci})t,$

де $V_{Ci}$ - рівень споживання води на підприємстві в деякий момент часу $t_i$, при цьому $V_{Ci}$ буде визначатися як

$V_{Ci} = V_C - \Delta V_C + 2\Delta V_C r_i,$

де $r_i$ - випадкове число, рівномірно розподілене в інтервалі [0; 1].

Результати роботи імітаційної стохастичної моделі (2.4) – (2.5) наведені на рис. 2.4. У цьому випадку після кожного прогону моделі отримаємо випадкові значення $T_j$, , де j – номер прогону, j=1,2,3,…

Відзначимо, що для кожного прогону потрібно генерувати свою послідовність випадкових чисел $r_i$. Як видно на рис. 2.4, отримані значення $T_j$ будуть відрізнятися від середнього значення Т, знайденого за допомого детермінованої моделі (2.1). Таким чином, щоб оцінити час Т наповнення резервуара, треба задати точність оцінювання $\varepsilon = \Delta T$і довірчу ймовірність $\alpha$. Зазвичай $\alpha = 0.95$, тобто гарантується, що в 95 випадках із 100 середнє значення часу Т буде знаходитися в межах $T \pm \Delta T$.

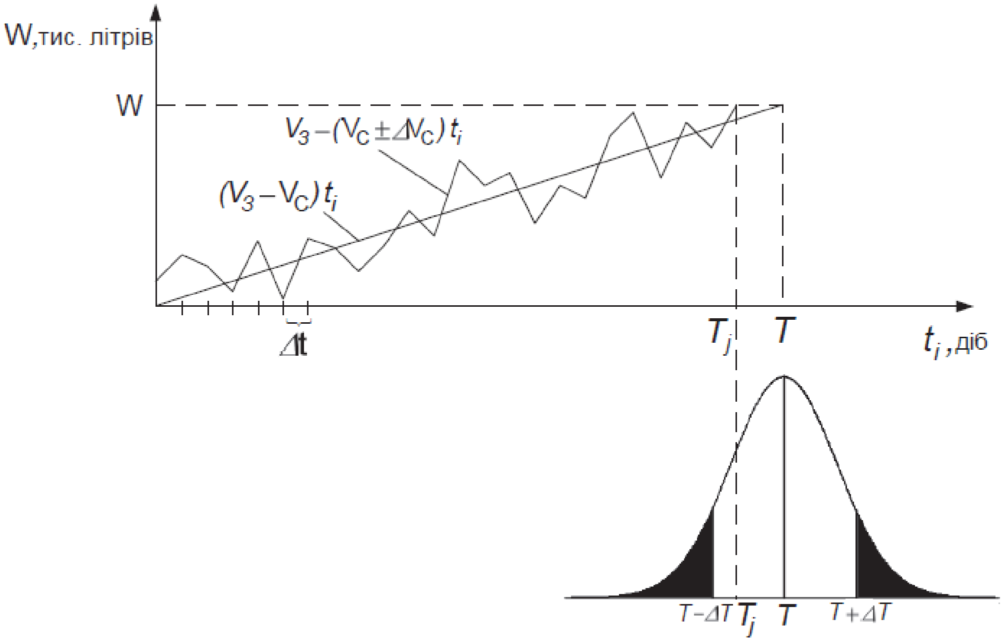



Рис. 2.4. Графік реалізації стохастичної моделі

З вищенаведеного прикладу видно, що статистичне моделювання використовується при імітаційному моделюванні лише за необхідності врахування випадкових факторів.

### 2.2 Декомпозиція систем та простір станів

Як правило, під час побудови моделі система спрощується, тобто проводиться її декомпозиція (розділення на підсистеми). Якщо систему задати множиною відношень n – го порядку R[$x_1$,$x_2$,…,$x_n$], то загальний метод декомпозиції можна описати за допомогою операції добутку відношень. Відношення R є добутком відношень виконується умова

$(YRX) \leftrightarrow [(YR_1X) \cap (YR_2X]),$

де X, Y, Z- деякі множини. завдання дослідника полягає у визначенні відношень $R_1$ і $R_2$. Якщо ці відношення знайдені, то систему можна розглядати як сукупність двох підсистем:

$$R_1[x_1, x_2, \dots, x_j, Z] \; і \; R_2[Z, x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_n].$$

де $x_j \in X, j = 1,2, \dots, n.$

У літературі [12] вказано, що відношення n-го порядку можна розкласти на n-2 тривимірних відношень. З погляду дослідження систем найважливішим є наслідок цієї теореми, пов'язаний з введенням поняття стану системи. Розглянемо систему, яка задається відношенням

$$Y \cdot R \cdot X(t). \tag{2.6}$$

Другий елемент відношення, X(t), є функцією часу, тобто деякою множиною. Припустимо, що множина X(t), скінченна і містить n елементів.

Згідно з наслідком теореми відношення (2.6) має порядок n+1 і не може бути розкладене на відношення нижче третього порядку.

Нехай елементи X(t) впорядковані в часі:

$X(t) = [x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)]$.

Тоді відношення (2.6) має вигляд

$$Y \cdot R \cdot [x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n),].$$

Розглянемо підмножину всіх елементів $x(t)$, з індексом, більшим ніж j:

$X^j(t) = [x(t_{j+1}), x(t_{j+2}), \dots, x(t_n)]$.

Відношення (2.6) буде еквівалентним відношенню

$$Y \cdot R \cdot [X^j(t), X^{jr}(t)],$$

де $X^{jr}(t)$ - складається з членів x(t), які залишились:

$$X^{jr}] = [x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_j)].$$

Якщо представити відношення R у вигляді добутку відношень $R_1$ і $R_2$ то система складатиметься з двох підсистем:

$R_1[X^j(t), Z^j]$ і $R_2[Z^j, X^{jr}(t)]$.

Терм Y залежить тільки від проміжного терма $Z^j$; і не залежить від елементів $x(t_j)$, в яких індекс менше ніж j. Можна стверджувати, що елемент $Z^j$ описує **стан системи**. Якщо система розділена на дві підсистеми відповідно до виразу (2.7), то терм Y залежить тільки від стану системи в момент $\tau = t_j$ і всіх майбутніх елементів x і не залежить від всіх попередніх елементів. Стан системи у момент часу $\tau$ називається початковим станом і позначається через $Z_0(\tau)$. Наведені міркування справедливі і для нескінченних множин.

Таким чином, під час моделювання системи або процесу немає необхідності запам'ятовувати всі стани системи до моменту часу , тобто алгоритм моделювання «забуває», що було раніше. Якщо реалізувати алгоритм за допомогою комп'ютера, то не потрібно зберігати всі відтворення в пам'яті. Винятком є необхідність анімаційного або графічного відтворення станів системи в часі і можливість її «програвання» у прямому і зворотному напрямах.

Якщо потрібно зменшити порядок відношення системи шляхом усунення залежності від будь-яких елементів певної підмножини $X^r$, то нове відношення повинне бути хоча б тривимірним, трьома термами його є входи X , виходи Y і стани Z. Рівняння

$$Z(t > \tau) = Z(Z(\tau); x(\tau, t)) \tag{2.8}$$

називатимемо рівнянням станів системи, а функцію z – перехідною функцією станів системи. Таким чином, вхідні впливи X перетворю- ються на виходи системи Y за допомогою рівняння станів (2.6), і саму систему Є можна представити у вигляді «чорного ящика», зображеного на рис. 2.5, де зовнішні відношення зв'язують елементи системи із зовнішнім середовищем за допомогою входів системи.

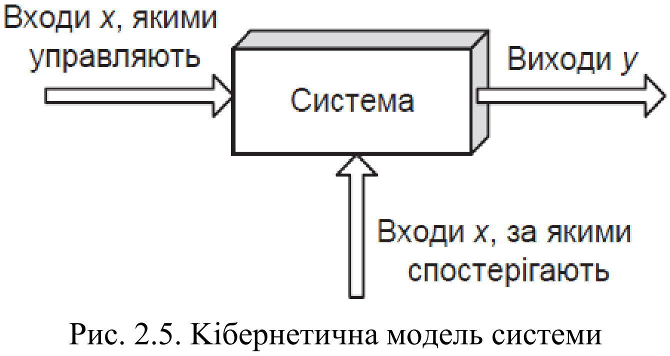



Рис. 2.5. Кібернетична модель системи

При проведенні досліджень над системою можна впливати на її входи і спостерігати за її виходами. Вхідні змінні, які дослідник може змінювати, проводячи експе- римент, називаються управляючими змінними, а ті, які неможливо змінювати, – спостережуваними змінними. Під час моделювання звісно можна змінювати всі вхідні змінні.

Розглядаючи простір станів, або фазовий простір, і зміни станів системи в часі, можна описати її поведінку (функціонування). Поняття стану вже давно є одним з найважливіших в техніці. У теорії систем стан системи визначається як точка фазового простору, який містить всю інформацію про передісторію системи, суттєву для визначення її поведінки в майбутньому. Через стани системи можна пов'язати виходи системи з її входами.

У разі введення множини T як цілком впорядкованої множини додатних дійсних чисел t, які визначають перебіг часу, пара елементів (t,z), де $t \in T, z \in Z$, називають **станом** або **фазою** системи S, а множина $T \times Z$ – просторо-станом або **фазовим простором** системи, де $\times$ – декартовий добуток. Перехідна функція z або її графік у просторі станів визначає поведінку системи або її **траєкторію руху у фазовому просторі** на певному проміжку часу $t \in [\tau, t)$.

Поняття простору станів не повинне викликати труднощів. Можна уявити звичайний простір, в якому не три, а довільна кількість осей координат, а стан – це точка в цьому просторі, який характеризує об'єкт у поточний або довільний момент часу подібно тому, як координати звичайного простору характеризують просторове розташування. Під фазовим простором розуміється простір, в якому визначені не лише статичні координати точки, координати її положення, але і міститься вся інформація, потрібна для визна- чення її поведінки в майбутньому.

Важливість поняття стану полягає в можливості, використовуючи його як деякий параметр, пов'язати з кожним значенням вхідних змінних єдине значення вихідних змінних. Якщо зміна станів системи відбувається неперервно в часі, то динамічна система належить до класу неперервних систем. Якщо ж функція (2.8) визначена на дискретній множині моментів часу t , то розглядають клас дискретних динамічних систем. В окремому випадку дискретні моменти часу можуть задаватися у момент настання деяких подій, які призводять до зміни станів системи.

Отже, щоб відтворити функціонування системи або, іншими словами, її траєкторію у фазовому просторі, потрібно задати рівняння станів системи (2.8). Під час моделювання системи таке рівняння називають також **функцією дії**. Цю функцію можна задати в явному вигляді, наприклад за допомогою диференціального рівняння, або у вигляді алгоритму моделювання, який визначає стан системи в кожен момент часу t, або шляхом задавання таблиці станів, як це робиться, наприклад, для дискретних автоматів.

Таким чином, **процес**, який під час моделювання системи описує її функціонування, визначається послідовністю станів, зв'язок між якими задається функцією дії і початковим станом системи. Тобто, послідовність розташованих у порядку збільшення часу пар $(Z(t), x[\tau, t))$ визначає процес і описує поведінку системи.

У разі побудови моделей динамічних систем ці системи описуються у вигляді множини деяких **реалій** (рис. 2.6), які можна описувати і моделювати за допомогою властивостей, що змінюють стани системи. зміна станів системи спричиняє **події**, яким відповідають певні умови. Виникнення певних умов призводить до дій, які утворюють конкретні **процеси**.


Рис. 2.6. Схема опису динамічних систем

Процес можна також розглядати як послідовність взаємопов'язаних дій за умови визначення початку і закінчення дії.

### 2.3 Формальні методи побудови моделей

Розглядаючи сфери застосування моделей, можна констатувати, що за допомогою моделі можна досягти **двох основних цілей**: **описової**, якщо модель призначена для пояснення і кращого розуміння об'єкта, або **приписуючої**, коли модель дає можливість передбачити або відтворити характеристики об'єкта чи визначити його поведінку. Таким чином, **модель є описовою**, якщо вона призначена зображати поведінку (функціонування) або властивості існуючої чи типової системи (наприклад, масштабна модель або письмовий опис, який дає можливість знайомити потенційних покупців з фізичними і робочими характеристиками комп'ютера). Протилежність – **приписуюча модель**, яка відображає необхідну поведінку або властивості запропонованої системи (наприклад, масштабна модель або письмовий опис, представлений постачальникові комп'ютерів, з фізичними і робочими характеристиками потрібного замовникові комп'ютера).

Приписуюча модель може бути описовою, але не навпаки. Тому існує різний ступінь корисності моделей, які використовуються в технік- них і соціальних науках. Це значною мірою залежить від методів і засобів, застосовуваних під час побудови моделей, а також від кінцевої мети. У соціальних науках моделі призначені для пояснення існуючих систем, а в техніці вони є допоміжними засобами для створення нових або досконаліших моделей. Модель, яка придатна для досягнення цілей розробки системи, повинна також тлумачити її.

При побудові моделей застосовуються фундаментальні закони при- роди, варіаційні принципи, аналогії, ієрархічні ланцюжки. Процес створення моделі включає такі етапи.

1. Словесно-смисловий опис об'єкта або явища – формулювання описової моделі, призначеної для сприяння кращому розумінню об'єкта моделювання.

2 Числове вираження модельованої реальності для виявлення кількісної міри і меж відповідних якостей; з цією метою ведеться мате- матико-статистична обробка емпіричних даних, пропонується кількісне формулювання якісно встановлених фактів і узагальнень.

3. Перехід до вибору або формулювання моделей явищ і процесів (варіаційного принципу, аналогії і т. п.) і його запису у формалізованій формі; це рівень структурних теоретичних схем, таких, як системи масо- вого обслуговування, мережі Петрі, скінченні або імовірнісні автомати, діаграми фонд-потік тощо.

4. Завершення формулювання моделі її «оснащенням» – задавання початкового стану і параметрів об'єкта.

5. Вивчення моделі за допомогою доступних методів (зокрема із застосуванням

різних підходів і обчислювальних методів).

У результаті дослідження моделі досягається поставлена мета. У цьому випадку повинна бути встановлена всіма можливими способами (шляхом порівняння з практикою, порівнянням з іншими підходами) її адекватність, тобто відповідність об'єкта сформульованим умовам.

При побудові моделей зазвичай використовують такі формальні підходи: кібернетичний, системна динаміка, теоретико-множинний.

**2.3.1 Кібернетичний підхід**

Систему можна вивчати й аналізувати, змінюючи вхідні впливи і спостерігаючи за виходами. Це кібернетичний підхід, згідно з яким система розглядається як «чорний ящик». Метод «чорного ящика» широко використовується під час моделювання систем, коли для дослідника важливо отримати інформацію про поведінку системи, а не про її будову.

Дослідник не може зробити однозначний висновок про структуру «чор- ного ящика», спостерігаючи лише за його входами і виходами, оскільки поведінка модельованої системи нічим не відрізняється від поведінки ізоморфних їй систем. Для побудови моделі використовуються методи теорії ідентифікації (розд. 3.1).

**2.3.2 Системна динаміка**

Для формального представлення моделей неперервних систем Дж. Форрестер у 1960 році запропонував підхід, названий системною динамікою, який дає можливість будувати моделі динамічних взаємо- зв'язаних систем за допомогою причинних діаграм циклів і схем виду «фонд-потік». Він же запропонував для чисельного моделювання таких систем мову Динамо. Модель будується як система диференціально- різницевих рівнянь, а мова Динамо дає можливість автоматизувати процес їх написання. Практично всі сучасні засоби неперервного і неперервно-дискретного моделювання базуються на цій мові для побудови моделей. На відміну від математичного розв'язання системи таких рівнянь у замкнутому вигляді використовується чисельне розв'я- зання з дискретним кроком часу, що дає можливість моделювати на деякому проміжку часу динамічні зміни фондів, пов'язаних з точкою часу, і потоків. Фонди і потоки пов'язані між собою через змінні.

**Фонд** можна трактувати як деяку кількість чого-небудь, що вимірю- ється в певних одиницях (наприклад, фізичних, грошових та ін.). Фонди можуть акумулювати одиниці фонду. Краще всього їх представляти як резервуари, ресурси або буфера. Фонди поповнюються через вхідні потоки і спорожняються через вихідні. Як буфер фонд може використо- вуватися для забезпечення балансування швидкості накопичення і витрачання (наприклад, в задачі про водопостачання, яке розглядалася в п. 2.1).

**Потік** – це процес, що протікає неперервно в часі, оцінити який можна в деяких кількісних одиницях за певний проміжок часу. залежно від характеристики використання потоки діляться на: обмежені і необме- жені, одно- і двонаправлені, конвертовані і неконвертовані. Потік, як правило, обмежується фондом. Потоком можна керувати, тобто збільшу- вати або зменшувати його інтенсивність за допомогою деяких виразів алгебри.

Існує багато різних способів пов'язувати в динамічних моделях причини і наслідки, не розглядаючи конкретні методи. В їх основі лежить декілька підходів. Розглянемо три з них, наведених на рис. 2.7.

Перший підхід (**ізольоване уявлення**) полягає в тому, що наслідок виникає з деякої причини і взаємозв'язок між різними причинами від- сутній. Такий підхід, наприклад, використовують економісти під час роз- рахунків. Як правило, для цього застосовують статичні і статистичні моделі.

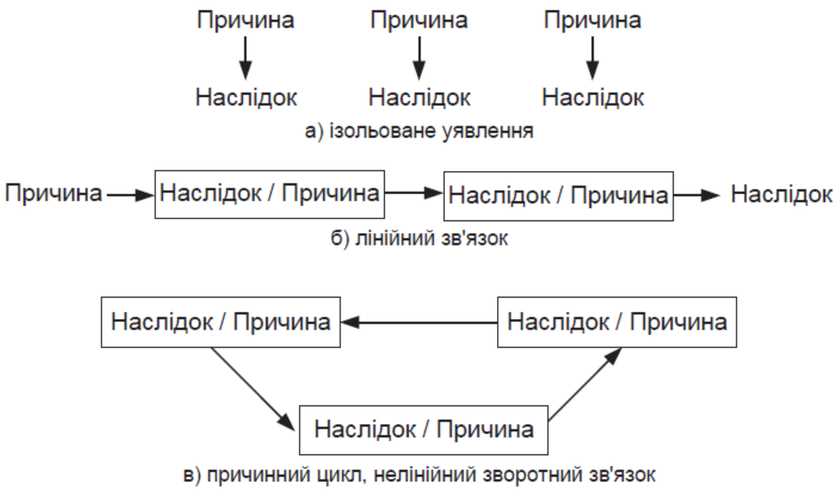



Рис. 2.7. Три підходи до пов'язування причин і наслідків для побудови моделі

Другий підхід (**лінійний зв'язок**) передбачає, що між причинами і наслідками існує лінійний зв'язок у вигляді ланцюжка. Такий підхід підтримують інженери і науковці, які вважають, що всі події у всесвіті залежать одна від одної. Маючи достатню кількість інформації, можна побудувати залежності в часі для всіх подій у майбутньому. Системні мислителі, які застосовують цю парадигму, користуються діаграмами впливу і моделями лінійних рівнянь та вважають, що завжди можна ло- гічно прослідкувати, «що є на вході і що буде на виході».

Згідно з третім підходом (**причинний цикл**) всесвіт розглядається як система з зворотними зв'язками, тобто ланцюжки причин і наслідків циклічно пов'язані між собою. Таке уявлення підтримують кібернетики, прибічники нелінійної динаміки і хаосу. Вони вважають, що всесвіт значною мірою хаотичний, і передбачити майбутнє, враховуючи його минуле, неможливо. Ці системні мислителі використовують циклічні причинні моделі, нелінійні рівняння в кінцевих різницях. Часто поведінка таких моделей далека від реальності й інтуїтивного уявлення і може бути де в чому неочікуваною для дослідника.

На рис. 2.8 зображена проста причинна циклічна модель для деякої популяції, яка має два цикли. Лівий цикл, додатній, свідчить про приріст популяції в разі збільшення народжуваності, яка у свою чергу збільшує народжуваність. Правий цикл, від'ємний, свідчить про зменшення попу- ляції в разі збільшення смертності, яка у свою чергу зменшує смертність. Такі пари причинних циклів можуть використовуватися під час побудови складніших динамічних моделей.

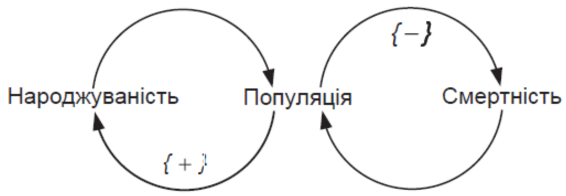



Рис. 2.8. Найпростіша причинна модель циклу популяції

Побудова складних динамічних моделей з використанням причин- них циклів включає такі етапи.

1. Абстрагування від фізичної структури системи.

2. Концентрація на процесах для визначення траєкторій, за якими система починає і закінчує працювати.

3. Використання простих диференціально-різницевих рівнянь для опису процесів

у системі:

– $\frac{dx}{dt} = kx$ – показникова функція, яка визначає швидкість зміни фонда в часі, де x – фонд (для прикладу з водопостачанням – це швидкість наповнення резервуара);

– $\frac{dx}{dt} = ax - bx^2$ – сигмаїдальна, або логістична, крива, або S-крива;

або системи рівнянь:

$$-\frac{dx}{dt} = k_1x - k_2x^2 - k_3y;$$
$$-\frac{dy}{dt} = k_4y - k_5y^5 - k_6x;$$

наприклад, x – кількість травоїдних тварин, y – кількість хижаків.

Такі системи рівнянь відомі як рівняння Ланкастера. Їх можна вико- ристовувати для дослідження складних взаємозв'язків, конкуренції або конфліктів.

за допомогою комп'ютерів подібні рівняння можна представити в чисельному вигляді. Для цього використовують прості рівняння рекурсії:

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$
$$\frac{x(n+1) - x(n)}{dt} = f\big(x(n)\big),$$
$$x(n+1) = dt \cdot f\big(x(n)\big) + x(n).$$

Якщо описати дані рівняння словами, то наступний рівень дорівню- ватиме попередньому плюс невелика зміна впродовж короткого проміжку часу. У такий спосіб можна будувати складні динамічні моделі за допо- могою створення простих блоків у вигляді відношень і рівнів. У сучасних пакетах моделювання цей процес запису рівнянь автоматизований із застосуванням ідеографічних схем (див. рис. 2.7).Причинні діаграми циклів дають можливість вести **якісне** моделювання, а діаграми «фонд-потік» – **кількісне**. Щоб пояснити явище, необхідно знайти «причини» його виникнення. Припустимо, що така причина визначена і наслідок може спостерігатися кожного разу, коли ця причина присутня. Якщо описують ці концепції системного мислення звичайними словами, то використовують слова або фрази «оскільки», «завдяки тому, що», «якщо ..., то» та ін. з погляду математики, якщо розглядають функціональну концепцію з однією незалежною змінною, ця змінна – причина, а залежна змінна – **наслідок**.

У разі кількісного моделювання таких систем, модельовані об'єкти – це об'єкти, параметри яких можна виміряти і між якими існують функціональні залежності. Якщо розглядати систему «хижаки-зайці», то в кількісній моделі знищення хижаками деяких зайців – це не знищення тварин, а зменшення їх кількості. Тобто в системі є суттєва різниця між зайцями як тваринами і їх кількістю. Наприклад, вовк може знищити зайців, але кількість вовків не може знищити щось, а може тільки вплинути на кількість зайців.

Вище приведені моделі динамічних систем широко використо- вуються для побудови спеціальних засобів моделювання – мов і пакетів неперервного та неперервно-дискретного імітаційного моделювання.

### 2.3.3 Теоретико-множинний підхід

Згідно з теоретико-множинним підходом формальна модель дина- мічної системи має такий вигляд:

$$M = T, X, Y, Z, z(t), P,, \tag{2.9}$$

де T – модельний час; X,У - множина значень відповідно вхідних І вихідних змінних; Z – простір станів моделі; z(t)

- функція станів $t \in T,$ Р – множина процесів, яка визначається як множина впорядкованих у часі пар елементів p=(x,z,$\tau$,t), де $t \in T,$ а $\tau$ початковиймомент модельного часу для процесу $p \in P$. Таке визначення задає модель системи у вигляді схеми процесів, в якій множина процесів може існувати паралельно в модельному часі Т.

Вважається, що деяка подія з множини подій С зумовлює зміну стану системи, якщо починається певний процес $p_i \in P$ або закінчується деякий процес $p_j \in P$. У протилежному випадку стан системи не змінюється. Тоді можна задати **подієву** схему моделі:

$$M = T, X, Y, Z, z(t), \text{C}, \tag{2.10}$$

де С – множина подій, яка визначається як множина впорядкованих у часі пар елементів $\text{c} = (j, d[\tau, t)$, де $c \in C$, $d[\tau, t]$ – функція дії дляпроцесу $p_j \in P$; $t \in T$, а - початковий момент модельного часу Т . У цій схемі процес моделювання описується як послідовність подій, які відбуваються в моделі.

Припустимо, що завдяки виконанню деякої умови u з множини U почне виконуватися певна дія $d[\tau, t]$ з множини D для деякого процесу $p_j \in P$. Тоді можна задати модель системи у вигляді схеми дій:

$$M = (T, X, Y, Z, z(t), D) \tag{2.11}$$

У цій схемі процес моделювання описується як перевірка всіх умов у разі кожної зміни модельного часу, щоб знайти умову, яка розпочне певну дію з множини D. Зміна часу t може відбуватися з постійним або змінюваним від події до події кроком.

Схеми моделей (2.9) – (2.11) широко застосовуються під час побудови алгоритмів моделювання і мов дискретного імітаційного моделювання.

Якщо припустити, що виконання деякої множини процесів Р може привести до зміни станів $z \in Z$ і виникнення нових процесів, що послужить причиною появи деякої множини ситуацій L, тобто $z(t): P_z \rightarrow L$, то отримаємо **ситуаційну** або **причинно-наслідкову** схему:

$$M = T, X, Y, Z, z(t), L. \tag{2.12}$$

У ній потрібно описати множину ситуацій і множину правил (алгоритмів), за якими визначають виконуваний процес. Поведінка моделі в таких системах зображується у вигляді ланцюга {ситуація}→{правило}→{процес}.

Якщо модель здатна конструювати нові правила на основі тих, що існують, то вона перетворюється на модель зі штучним інтелектом.

Під час ситуаційного моделювання, як правило, повний опис всіх можливих ситуацій замінюється деякою множиною узагальнених ситуа- цій, кожна з яких з певною мірою ймовірності відтворює один з можливих станів системи. Для кожної ситуації існує набір правил дії. Вибір того або іншого правила може здійснюватися за деяким критерієм або за допомогою таблиць прийняття рішень, а в простіших випадках – згідно з заданою ймовірністю. Моделювання виконується шляхом програвання різних ситуацій за певним сценарієм, яким в окремому випадку може бути алгоритм моделювання. Таким чином, створюють різні ігри, наприклад ділові, військові, економічні, розважальні.

**Гра** – це спрощене відтворення реального процесу, яке переважно використовується для навчання, прийняття рішень, проведення досліджень або розваг.

Визначити систему можна не тільки як сукупність елементів, але і як сукупність відношень, спостерігаючи за їх змінами. Перш за все, це стосується взаємодії між різними динамічними системами, кожна з яких досить складна. Прикладом можуть бути екологічні і соціальні системи. Під час вивчення таких систем дослідник, базуючись на системному аналізі, вивчає й описує впливи однієї системи на іншу.

Імітаційне моделювання – це метод конструювання моделі системи та проведення експериментів над моделлю.

Статистичне моделювання використовується при імітаційному моделюванні якщо є потреба врахування випадкових факторів.

**Тема 3.**

# ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ. АДЕКВАТНІСТЬ, ЧУТЛИВІСТЬ, НЕСУПЕРЕЧЛИВІСТЬ МОДЕЛІ

## 3.1 Постановка задачі ідентифікації моделей

У загальному випадку **задача ідентифікації** формулюється так: на основі результатів спостереження за вхідними і вихідними змінними системи потрібно побудувати оптимальну в деякому розумінні математичну модель.

Основними етапами ідентифікації є такі:

1. Вибір класу і структури моделі і мови її опису.
2. Вибір класу і типів вхідних впливів $X$ .
3. Обгрунтування критеріїв схожості системи і моделі.
4. Вибір методу ідентифікації і розробка відповідних алгоритмів оцінювання параметрів моделі.
5. Перевірка адекватності отриманої в результаті ідентифікації моделі.

Залежно від обсягу апріорної інформації про клас і структуру системи відрізняють задачі ідентифікації в широкому і вузькому розу- мінні.

Задача **ідентифікації в широкому розумінні** виконується в умовах апріорної невизначеності структури моделі системи («чорний ящик»). Клас і структура математичної моделі вибираються на основі результатів теоретичного аналізу з використанням загальних закономірностей про- цесів, які протікають у системі, або на основі загальної інформації про подібні системи. У цьому випадку для побудови математичної моделі можна використовувати непараметричні методи. Вони розроблені для тих ситуацій, що досить часто виникають на практиці, коли дослідник нічого не знає про параметри досліджуваної системи (звідси і назва методів – непарамемричні).

Задача **ідентифікації у вузькому розумінні** полягає в оцінюванні параметрів і станів системи, якщо відома структура моделі («сірий ящик»). задачею ідентифікації є кількісне оцінювання певних параметрів моделі. Для цього використовується параметрична ідентифікація математичної моделі. Прикладами таких моделей можуть бути диферентціальні і різницеві рівняння, моделі типу «вхід – стан – вихід».

На рис. 3.1 зображена загальна схема ідентифікації моделі (оцінювання параметрів моделі). Вхідні впливи $X$ на систему і модель однакові, виходи системи $Y_S$ і моделі $Y_M$ в загальному випадку відрізняються. Для їх порівняння потрібно сформувати критерій схожості і мінімізувати його, тобто налаштувати модель.

Прикладами моделей, створених на основі експериментальних даних, можуть бути моделі авторегресії різних порядків, ковзного середнього і моделі типу «вхід – вихід», побудовані за допомогою методу найменших квадратів.

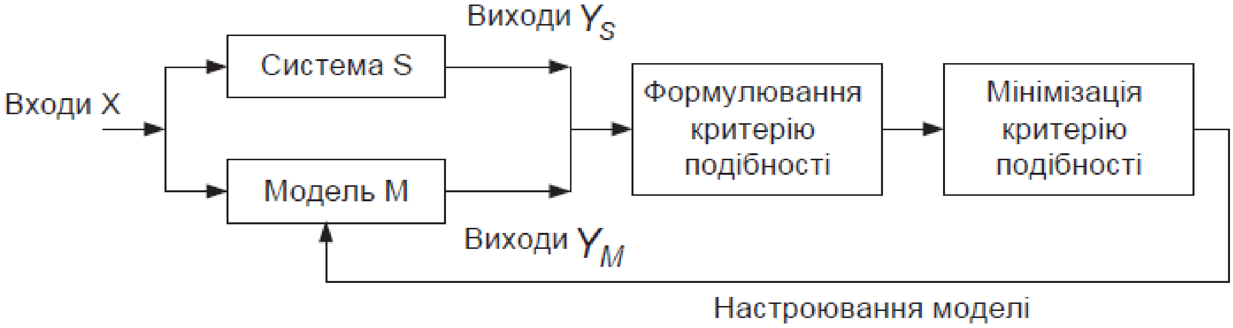



Рис. 3.1. загальна схема ідентифікації моделі

### 3.2 Основні етапи розв'язання задачі ідентифікації та їх взаємозв'язок

Взаємозв’язок основних етапів розв’язання задачі ідентифікації можна проілюструвати такою схемою (рис. 3.2).

**Метод найменших квадратів для ідентифікації параметрів моделі**

Найбільш відомим та досить ефективним методом розв'язання задачі ідентифікації параметрів моделі є **метод найменших квадратів**.

Задача ідентифікації параметрів моделі типу «вхід – вихід» в загальному вигляді формулюється таким чином.

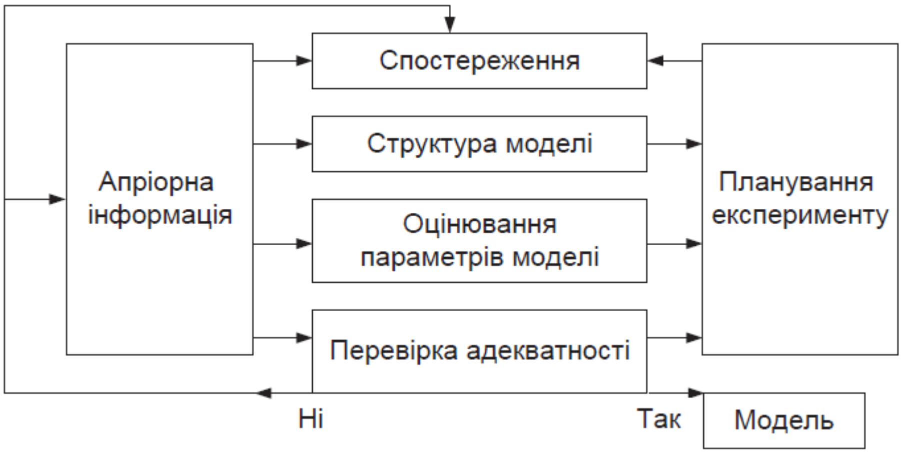



Рис. 3.2. Схема взаємозв'язку основних етапів розв'язання задачі ідентифікації

Нехай деяка система описується вхідними x і вихідними y змінними (тобто відповідає схемі, зображеній на рис. 2.5) і яким-небудь чином обрана структура моделі (тобто вид залежності y від x ):

$$y = G(x;a) + e, \qquad (3.1)$$

де $a \in R^k, a = (a_1, a_2, \dots, a_k)^k$ - деякі параметри моделі; e – помилка моделі (враховуючи й випадкові помилки в даних експерименту).

Необхідно на основі результатів спостереження за вхідними й вихідними змінними системи (даних експерименту) знайти оцінку параметрів моделі, тобто побудувати оптимальну в деякому розумінні математичну модель.

Метод найменших квадратів для розв'язання цієї задачі полягає в наступному. Розглянемо випадок, коли вхідних змінних x може бути декілька ($x \in R^m$), а вихідна змінна *y* одна ($y \in R^1$). Нехай є дані *n* експериментів $(x^i, y_i), i = \overline{1,n}$, при чому значення $y_i$ містять випадкову помилку. Уводиться функція (від параметрів a) виду:

$$\Phi(\mathrm{a}) \equiv \sum_{i=1}^{n} [y_i - G(x^i;a)^2], \qquad (3.2)$$

яку можна розглядати як міру відхилення моделі $G(x;a)$ від даних експерименту $y_1, y_2, \dots, y_n$. Тоді оцінку параметрів *a* моделі $G(x;a)$ можна визначити з умови найменшого відхилення $G(x;a)$ від даних експерименту, тобто оцінка параметрів *a* знаходиться як точка, у якій функція $\Phi(\mathrm{a})$ досягає по $a \in R^k$ мінімального значення (точка мінімуму).

### 3.3 Поняття адекватності, сталості та чутливості моделі, формальні способи їх перевірки

Оцінка якості моделі є завершальним етапом її розробки й переслідує дві цілі:

1. Перевірити відповідність моделі її призначенню (цілям дослід- ження);

2. Оцінити ймовірність і статистичні характеристики результатів, отриманих при проведенні експериментів з моделлю.

При аналітичному моделюванні ймовірність результатів визна- чається двома основними факторами:

1. Конкретним вибором математичного апарату, використовуваного для опису досліджуваної системи;

2. Методичною помилкою, властивою даному математичному методу.

При імітаційному моделюванні на ймовірність результатів впливає цілий ряд додаткових факторів, основними з яких є:

1. Моделювання випадкових факторів, засноване на використанні датчиків випадкових чисел, які можуть вносити «перекручування» у поводження моделі;

2. Наявність нестаціонарного режиму роботи моделі;

3. Використання декількох різнотипних математичних методів у рам- ках однієї моделі;

4. Залежність результатів моделювання від плану експериментів;

5. Необхідність синхронізації роботи окремих компонентів моделі.

Придатність імітаційної моделі для рішення завдань дослідження характеризується тим, у якій мірі вона має так звані **цільові властивості**. Основними з них є: адекватність; сталість; чутливість.

Нижче розглянуті деякі способи проведення оцінки якості моделі за кожним з них.

**Оцінка адекватності моделі**. У загальному випадку під адекватністю розуміють ступінь відповідності моделі тому реальному явищу або об'єкту, для опису якого вона будується.

Разом з тим, створювана модель орієнтована, як правило, на дослідження певної підмножини властивостей цього об'єкта. Тому можна вважати, що адекватність моделі визначається ступенем її відповідності не стільки реальному об'єкту, скільки цілям дослідження. Найбільшою мірою це твердження справедливо щодо моделей проектованих систем (тобто в ситуаціях, коли реальна система взагалі не існує).

Проте в багатьох випадках корисно мати формальне підтвердьження (або обгрунтування) адекватності розробленої моделі. Один з найпоширеніших способів такого обгрунтування – використання методів математичної статистики. Суть цих методів полягає в перевірці висуну- тих гіпотез (у цьому випадку – про адекватність моделі) на основі деяких статистичних критеріїв.

Процедура оцінки адекватності моделі заснована на порівнянні вимірів на реальній системі й результатів експериментів на моделі й може проводитися різними способами. Найпоширеніші з них:

– за середніми значеннями відгуків (виходів) моделі й системи;

– за дисперсіями відхилень відгуків моделі від середнього значення відгуків системи;

– за максимальним значенням відносних відхилень відгуків моделі від відгуків системи.

Названі способи оцінки досить близькі між собою по суті, тому обмежимося розглядом першого з них.

При цьому способі перевіряється гіпотеза про близькість середнього значення спостережуваної змінної моделі $y$ середньому значенню відгуку реальної системи $y^*$.

У результаті $N_0$ експериментів на реальній системі одержують множину значень (вибірку) вихідної змінної $y^*$. Виконавши $N_M$ експериментів на моделі, також одержують множину значень спостережуваної змінної $y$ .

Потім обчислюються оцінки математичного очікування й дисперсії відгуків моделі й системи, після чого висувається гіпотеза про близькість середніх значень $y^*$ й $y$ (у статистичному сенсі). Основою для перевірки гіпотези є $t$ -статистика (розподіл Стьюдента). Її значення, обчислене за результатами випробувань, порівнюється із критичним значенням $t_{кр}$ , узятим з довідкової таблиці. Якщо виконується нерівність $t \leq t_{кр}$ , то гіпотеза приймається.

**Оцінка сталості моделі**. При оцінці адекватності моделі як існуючої, так і проектованої системи реально може бути використана лише обмежена підмножина всіх можливих значень вхідних параметрів (робочого навантаження й зовнішнього середовища). У зв'язку із цим для обҐрунтування вірогідності одержуваних результатів моделювання велике значення має перевірка сталості моделі. У теорії моделювання це поняття трактується в такий спосіб.

Сталість моделі – це її здатність зберігати адекватність при дослідженні ефективності системи на всьому можливому діапазоні робочого навантаження, а також при внесенні змін у конфігурацію системи.

Яким чином може бути оцінена сталість моделі? Універсальної процедури перевірки сталості моделі не існує. Розроблювач змушений вдаватися до методів «для даного випадку», частковим тестам і здоровому глузду. Часто буває корисна апостеріорна перевірка. Вона полягає в порівнянні результатів моделювання й результатів вимірів на системі після внесення в неї змін. Якщо результати моделювання прийнятні, упевненість у стійкості моделі зростає.

У загальному випадку можна стверджувати, що чим ближче структура моделі структурі системи й чим вище ступінь деталізації, тим більша сталість моделі. Сталість результатів моделювання може бути також оцінена методами математичної статистики. Для перевірки гіпотези про сталість результатів може бути використаний критерій Уілкоксона.

Критерій Уілкоксона служить для перевірки того, чи відносяться дві вибірки до однієї й тієї ж генеральної сукупності (тобто чи володіють вони тією самою статистичною ознакою).

При статистичній оцінці стійкості моделі відповідна гіпотеза може бути сформульована в такий спосіб: при зміні вхідного (робочого) наван- таження або структури імітаційної моделі закон розподілу результатів моделювання залишається незмінним.

Перевірку зазначеної гіпотези *H* проводять при таких вихідних даних: є дві вибірки $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$отримані для різних значень робочого навантаження; щодо законів розподілу *X* і *У* ніяких припущень не робиться.

Значення обох вибірок упорядковуються разом за зростанням. Потім аналізується взаємне розташування $x_i$ й $y_j$. У випадку $x_i$ й $y_j< x_i$ говорять, що пари значень $(x_i,y_j)$ утворять інверсію.

Наприклад, нехай для $n=m=3$ після упорядкування вийшла така послідовність значень: $y_1,x_2 ,y_3, x_1,y_2 ,x_3$; тоді маємо інверсії:$(x_1,y_1), (x_2,y_1), ( x_3 ,y_1), (x_1,y^3), ( x^3,y^3), ( x^3,y^2)$.

Підраховують повне число інверсій *U*. Якщо гіпотеза вірна, то *U* не повинне сильно відхилятися від свого математичного очікування *M*:

$$M = \frac{n \cdot m}{2}.$$

Від гіпотези відмовляються, якщо $|U - M| > \Delta U_{кр}$, де $\Delta U_{кр}$ визначають за таблицею для заданого рівня значущості.

**Оцінка чутливості імітаційної моделі.** Очевидно, що сталість є позитивною властивістю моделі. Однак якщо зміна вхідних впливів або параметрів моделі (у деякому заданому діапазоні) не відбивається на значеннях вихідних параметрів, то користь від такої моделі невелика. У зв'язку з цим виникає завдання оцінювання чутливості моделі до зміни параметрів робочого навантаження й внутрішніх параметрів самої системи.

Таку оцінку проводять за кожним параметром (змінною) $x_k$ окремо.

Заснована вона на тому, що зазвичай діапазон можливих змін параметра відомий. Одна з найпростіших і розповсюджених процедур оціню- вання полягає в такому:

1. Обчислюється величина відносного середнього збільшення параметра $x_k$:

$$\Delta x_k = \frac{2(x_{k\,max} - x_{k\,min})}{x_{k\,max} + x_{k\,min}} 100\%.$$

2. Проводиться пара модельних експериментів при значеннях $x_k = x_{k\,max}$ й $x_k = x_{k\,min}$ й

І середніх фіксованих значеннях інших параметрів. Визначаються значення відгуку моделі $y_1 = f(x_{k\,\max})$ і $y_2 = f(x_{k\,min})$.

3. Обчислюється відносне збільшення спостережуваної змінної $y$:

$$\Delta y_k = \frac{2(y_1 - y_2)}{y_1 + y_2} 100\%.$$

У результаті для $k$-го параметра моделі мають пари значень $(\Delta x_k, \Delta y_k)$, що характеризують чутливість моделі за цим параметром.

Аналогічно формуються пари для інших параметрів моделі, які утворять множину $\{\Delta x_k, \Delta y_k\}$.

Дані, отримані при оцінці чутливості моделі, можуть бути використані, зокрема, при плануванні експериментів. А саме, більша увага має приділятися тим параметрам, за якими модель є більш чутливою.

### 3.4 Поняття несуперечливості моделі

**Несуперечливість** – властивість, що полягає в тому, що не кожна формула цієї системи доказова в ній. Формальні системи, що мають цю властивість, називаються несуперечливими, або **формально несуперечливими**. Інакше формальна система називається **суперечливою**, або **несумісною**. Для широкого класу формальних систем, мова яких містить знак заперечення $\neg$ несуперечність еквівалентна властивості: «не існує такої формули $\phi$, що $\phi$ і $\neg\phi$ обидві доказові». Клас формул даної формальної системи називається несуперечливим, якщо не всяка формула цієї системи виводиться з даного класу. Формальна система називається **змістовно несуперечливою**, якщо існує модель, в якій істинні всі теореми цієї системи. Оскільки модель це теж система, то поняття суперечливості і несуперечливості застосовне і до неї.

Суперечливі визначення об'єктів і суперечливі моделі іноді виникають у результаті абсолютизації локальних властивостей реально існуючих об'єктів. Інша можлива причина появи суперечливих моделей – наявність різних неузгоджених джерел інформації, яка служить основою моделювання.

Задача ідентифікації в широкому розумінні виконується в умовах апріорної невизначеності структури моделі системи («чорний ящик»).

Задача ідентифікації у вузькому розумінні полягає в оцінюванні параметрів і станів системи, якщо відома структура моделі («сірий ящик»).

Найбільш відомим та досить ефективним методом розв'язання задачі ідентифікації параметрів моделі є метод найменших квадратів.

**Тема 4.**

# ПРИНЦИПИ ПОБУДОВИ МОДЕЛЕЙ. ТЕХНОЛОГІЯ МОДЕЛЮВАННЯ.

## 4.1 Основні принципи побудови моделей

Розглянемо коротко основні принципи моделювання, які від ображають достатньо багатий досвід, накопичений на даний час в сфері розробки і використання моделей.

**Принцип інформаційної достатності**. При повній відсутності інформації про систему модель побудувати неможливо. за наявності повної інформації про систему її моделювання недоцільне. Існує деякий критичний рівень апріорних відомостей про систему (рівень інформаційної достатності), досягши якого можна побудувати її адекватну модель.

Принцип доцільності. Модель створюється для досягнення деяких цілей, які визначають на первинному етапі формулювання проблеми моделювання.

Так, цілями моделювання можуть бути:

– осмислення дійсності;

– постановка над моделлю експериментів з подальшою інтерпретацією їх результатів стосовно модельованої системи;

– прогнозування майбутньої поведінки системи;

– спілкування з іншими особами, громадськими організаціями, пристроями обробки інформації;

– навчання і тренування фахівців.

Принцип здійсненності. Створювана модель повинна забезпечувати досягнення мети дослідження з урахуванням граничних ресурсів з вірогідністю (ймовірністю), істотно відмінною від нуля, і за скінченний час. зазвичай задають деяке граничне значення *P* (ступінь ризику) вірогідності (ймовірності) досягнення мети моделювання *P(t*, а також сам граничний термін *t* досягнення мети. Модель вважають здійсненною, якщо $P(t)>P$.

**Принцип множинності моделей**. Модель, яка створюється, повинна відображати насамперед ті властивості реальної системи (або явища), які впливають на вибраний показник ефективності. Відповідно під час використання будь-якої конкретної моделі пізнаються лише деякі складові реальності. Для повного її дослідження необхідно мати ряд моделей, які дали б можливість відобразити певний процес з різних боків і з різним ступенем детальності.

**Принцип агрегації**. У більшості випадків складну систему можна представити як таку, що складається з агрегатів (підсистем), для адекватного формального опису яких придатними є деякі стандартні математичні схеми. Принцип агрегації дає можливість досить гнучко перебудовувати модель залежно від завдань (задач) дослідження.

**Принцип параметризації**. У ряді випадків модельована система має у своєму складі деякі відносно ізольовані підсистеми, які характеризуються певними параметрами, зокрема векторними. Такі підсистеми можна замінювати в моделі відповідними числовими величинами, а не описувати процес їх функціонування. У разі потреби залежність значень цих величин від ситуації може задаватися у вигляді таблиць, графіків або аналітичних виразів (формул), наприклад за допомогою регресійного аналізу. Принцип параметризації дає можливість скоротити обсяг і тривалість моделювання, але слід мати на увазі, що параметризація знижує адекватність моделі.

Потреба в моделюванні виникає як на етапі проектування систем для оцінювання правильності прийнятих рішень, так і на етапі експлуатації – для оцінювання наслідків внесення змін у систему. У цьому випадку на різних етапах проектування (технічний або робочий проект) з уточненням вихідних даних і виявленням нових суттєвих факторів ступінь деталізації процесу в системі зростає, що повинне відобразитися в моделі. Таким чином, в моделі можуть одночасно перебувати блоки з різним ступенем деталізації, що моделюють одні і ті ж компоненти проектованої системи. Іншими словами, під час побудови моделі потрібно застосовувати методологію імераційноєо баєаморівневоєо моделювання.

Розробку моделі доцільно починати зі створення простої початкової моделі, яку у процесі уточнення вхідних даних і характеристик системи ускладнюють і корегують, тобто адапмуюма до нових умов. Разом з тим модель повинна залишатися досить наєлядною, тобто її структура повинна відповідати структурі модельованої системи, а рівень деталізації моделі повинен вибиратися з урахуванням цілей моделювання, ресурсних обмежень (наприклад, час, кваліфіковані людські ресурси і засоби, виділені на проектування) та можливості отримання початкових даних.

Таким чином, модель повинна бути багаторівневою, адаптивною, наглядною, цільовою, розвиватися ітераційним способом, ускладнюватися і корегуватися у процесі створення, що можливо тільки за умови побудови її блочним (модульним) способом. Програмування і відладку моделі доцільно вести поетапно, з послідовним збільшенням програмних модулів.

Один із способів підвищення ефективності моделювання полягає в тому, щоб не будувати заново модель для кожної нової системи, а розрізняти окремі класи систем і створювати уніфіковані програмні моделі для класів в цілому. Узагальнені програмні моделі дають можливість моделювати будь-яку систему із заданого класу без додаткових витрат на програмування. Така методологія забезпечує єдиний систем- ний підхід до розробки програмних реалізацій моделей і використовується при об'єктно-орієнтованому програмуванні у вигляді бібліотеки класів моделей.

Розглянутий підхід можна реалізувати також у вигляді спеціалізованої мови або пакета моделювання, який дає можливість створювати узагальнені моделі шляхом введення засобів розмноження підмоделей, реорганізації зв'язків між ними і їх параметричної настройки. Цей спосіб орієнтований на фахівців, добре знайомих з мовою моделювання. Інший спосіб реалізації цього підходу полягає в розробці діалогових, інтелектуальних систем моделювання з використанням банку моделей і бази знань, які користувач може настроювати на конкретну реалізацію. У цьому випадку етап програмування можна цілком виключити під час програмної реалізації імітаційної моделі завдяки використанню ефективних методів взаємодії з базами даних і застосуванню засобів генерації моделей.

### 4.2 Технологія моделювання: основні етапи, їх взаємозв'язок та характеристики

Основою моделювання є методологія системного аналізу. Це дає можливість досліджувати систему, яка проектується або аналізується, за технологією операційного дослідження. Комп'ютерне моделювання (а зазвичай застосовується саме комп'ютерна модель) включає такі взаємопов'язані етапи:

1. Формулювання проблеми і змістовна постановка задачі.
2. Розробка концептуальної моделі.
3. Розробка програмної реалізації моделі, яка включає:

– вибір засобів програмування, за допомогою яких буде реалізована модель;
– розробка структурної схеми моделі і складання опису її функціонування;
– програмна реалізація моделі;
– перевірка адекватності моделі.

4. Організація і планування проведення експериментів, що включає оцінювання точності результатів моделювання.

5. Інтерпретація результатів моделювання і прийняття рішень.

6. Оформлення результатів дослідження.

На першому етапі замовник формулює проблему. Організовуються зустрічі керівника проекту з замовником, аналітиками з моделювання і експертами з проблеми, що вивчається. Визначаються цілі дослідження і спеціальні питання, відповіді на які будуть отримані в результаті дослідження; встановлюються критерії оцінювання роботи, які використовуватимуться для вивчення ефективності різних конфігурацій системи. Розглядаються такі показники, як масштаб моделі, період дослідження і необхідні ресурси; визначаються конфігурації модельо- ваної системи, а також необхідне програмне забезпечення.

На цьому ж етапі ведеться цілеспрямоване дослідження модельованої системи, притягуються експерти з вирішуваної проблеми, які володіють достовірною інформацією. збирається інформація про конфігурацію системи і способи її експлуатації для визначення параметрів моделі і вхідних розподілів ймовірностей.

На другому етапі розробляється концепмуалана модела – абстрактна модель, яка дає можливість виявити причинно-наслідкові зв'язки, властиві досліджуваному об'єкту в межах, визначених цілями дослідження. По суті, це формальний опис об'єкта моделювання, яке відображає концепцію (погляд дослідника на проблему). Вона включає в явному вигляді логіку, алгоритми, припущення й обмеження.

Згідно з цілями моделювання визначаються вихідні показники, які потрібно збирати під час моделювання, ступінь деталізації, необхідні початкові дані для моделювання.

Рівень деталізації моделі залежить від таких факторів: мети проекту; критеріїв оцінювання показників роботи; доступності даних; достовірності результатів; комп'ютерних можливостей; думки експертів з вирішуваної проблеми; обмежень, пов'язаних з часом і фінансуванням. Ведеться структурний аналіз концептуальної моделі, пропонується опис допущень, які обговорюються з замовником, керівником проекту, аналітиками й експертами з вирішуваної проблеми.

Розробляються моделі початкових даних, ведеться їх статистичний аналіз, за результатами якого визначають розподіли ймовірності, регресійні, кореляційні й інші залежності. На цьому етапі для попе- реднього аналізу даних широко застосовують різні статистичні пакети (наприклад, STATISTICA).

Для динамічних систем ведеться післяопераційний аналіз функціонування модельованої системи з детальним описом роботи елементів системи. за результатами такого аналізу можна з'ясувати, чи можна вирішити проблему без застосування засобів моделювання. Детально оброблена концептуальна модель дає можливість замовникові з іншого боку поглянути на роботу системи і, наприклад, визначити її вузькі місця, які сприяють зниженню її пропускної спроможності.

Одна зі складних проблем, з якою має справу аналітик моделювання, полягає у визначенні, адекватності моделі системі. Якщо імітаційна модель «адекватна», її можна використовувати для прийняття рішень щодо системи, яку вона представляє, тобто нібито вони прий- малися на основі результатів проведення експериментів з реальною системою. Модель складної системи може тільки приблизно відповідати оригіналу, незалежно від того, скільки зусиль було витрачено на її розробку, оскільки абсолютно адекватних моделей не існує.

Оскільки модель завжди повинна розроблятися для певного набору цілей, то модель, яка є адекватною для однієї мети, може не бути такою для дослідження іншої мети. Слід зазначити, що адекватна модель не обов'язково є достовірною, і навпаки. Модель може бути достовірною, але, в цьому випадку, не використовуватися для прийняття рішень. Наприклад, достовірна модель може не бути адекватною з політичних або економічних причин.

При програмній реалізації моделі визначаються засоби програмування, тобто мови програмування або пакети. Наприклад, можуть використовуватися мови програмування загального призначення, такі, як C або Pascal, чи спеціалізовані засоби для моделювання (наприклад, Arena, Automod, Extend, GPSS, iThink). Перевага використання мов програмування полягає в тому, що, як відомо, вони мають невисоку закупівельну вартість, і на розробку моделі з їх допомогою витрачається менше часу. Разом з тим використання спеціалізованого програмного забезпечення для моделювання призводить до зменшення тривалості процесу програмування і вартості всього проекту.

Серед спеціалізованих пакетів для моделювання слід зазначити пакет MATLAB з інтерактивним модулем Єimulink. Пакет MATLAB є всесвітньо визнаним універсальним відкритим середовищем, і мовою програмування одночасно, в якому інтегровані засоби обчислень, візуалізації, програмування і моделювання.

здійснюється програмування моделі та її відлагоджування, виконуються тестові прогони моделі на основі контрольних даних, ведеться аналіз чутливості, щоб визначити, які фактори в моделі суттєво впли- вають на робочі характеристики системи і повинні моделюватися точніше.

Після кожного з вищезазначених етапів перевіряється достовірність моделі. Перевірку умовно можна розділити на два етапи: перевірка правильності створення концептуальної моделі, тобто задуму – валідація; перевірка правильності її реалізації – верифікація. Під час перевірки достовірності потрібно відповісти на питання про відповідність моделі модельованій системі, тобто визначити, наскільки ізоморфні система і модель. Як правило, в разі моделювання вимога ізоморфізму об'єкта і моделі надмірна, оскільки в цьому випадку складність моделі повинна відповідати складності об'єкта. Тому будують гомоморфні моделі, в яких виконується вимога однозначної відповідності моделі об'єкту.

На етапі **верифікації** розглядають, чи правильно реалізована концептуальна модель (модельні припущення) в комп'ютерну програму, тобто виконують налагоджування програми моделювання. Це складне завдання, оскільки може існувати багато логічних шляхів.

Етап перевірки правильності реалізації моделі включає перевірку еквівалентності перетворення моделі на кожному з етапів її реалізації і порівняння станів. У цьому випадку модель зазнає таких змін: концепттуальна модель – математична модель – алгоритм моделювання – про- грамна реалізація моделі.

**Валідація** – це процес, що дає можливість встановити, чи є модель (а не комп'ютерна програма) достатньо точним відображенням системи для **конкретних цілей дослідження**.

Розробляється план проведення експериментів з моделлю для досягнення поставлених цілей. Основна мета планування експериментів

– вивчення поведінки модельованої системи при найменших витратах під час експериментів. Зазвичай проводять такі експерименти:

- порівнюють середні значення і дисперсії різних альтернатив;
- визначають важливість врахування впливу змінних і обмежень, які накладаються на ці змінні;
- визначають оптимальні значення з деякої множини можливих значень змінних.

Проведення експериментів планують для пошуку незначущих факторів. У разі оптимізації якого-небудь числового критерію формулюють гіпотези щодо вибору якнайкращих варіантів структур модельо- ваної системи або режимів її функціонування, визначають діапазон значень параметрів (режимів функціонування) моделі, в межах якого знаходиться оптимальне рішення. Визначають кількість реалізацій і час прогону моделі кожної реалізації. Проводять екстремальний експеримент, за результатами якого знаходять оптимальне значення критерію і відповідні значення параметрів. Для оцінювання точності стохастичних моделей будують довірчі інтервали для отримуваних вихідних змінних.

Далі аналізують і оцінюють результати. Представляють результати комп'ютерних експериментів у вигляді графіків, таблиць, роздруківок, а також визначають якісні і кількісні оцінки результатів моделювання. Для візуалізації моделі використовують анімацію. Обговорюють процес створення моделі і її достовірність, щоб підвищити рівень довіри до неї.

За отриманими результатами формулюють висновки з проведених досліджень і визначають рекомендації щодо використання моделі прийняття рішень.

Вищенаведені етапи моделювання взаємозв'язані, а сама процедура створення моделі є ітераційною. Це пояснюється тим, що після виконання кожного етапу перевіряється правильність і достовірність моделі і в разі невідповідності моделі об'єкту здійснюється повернення до попередніх етапів з метою корегування і настройки моделі. залежно від характеру внесених змін повертаються безпосередньо до попереднього етапу або до попередніх етапів. Детальніше технологія моделювання розглядається в наступних розділах.

На останньому етапі моделювання документально оформляють всі результати дослідження і готують програмну документацію для вико- ристання їх під час розробки поточних і майбутніх проектів.

При створенні моделі потрібно: дотримуватися принципів інформаційної достатності, доцільності, здійсненності, множинності моделей, агрегації, параметризації; застосовувати методологію ітераційного багаторівневого моделювання.

Комп'ютерне моделювання розбивається на декілька взаємопов'язаних етапів, а сама процедура створення моделі є ітераційною.

## Тема 5.
## МОДЕЛІ РОЗРАХУНКОВИХ ПРОЦЕСІВ І УПРАВЛІННЯ. ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ, P-, Q-, F-, A-СХЕМИ. МЕРЕЖНІ МОДЕЛІ

### 5.1 Поняття типової математичної схеми моделі

Початковою інформацією при побудові математичних моделей процесів функціонування систем служать дані про призначення і умови роботи досліджуваної (проектованої) системи *S*. Ця інформація визна- чає основну мету моделювання системи *S* і дозволяє сформулювати вимоги до математичної моделі *M* , що розробляється. Причому рівень абстрагування залежить від кола тих питань, на які дослідник системи хоче отримати відповідь за допомогою моделі, і якоюсь мірою визначає вибір математичної схеми.

Введення поняття математична схема дозволяє розглядати математикові не як метод розрахунку, а як метод мислення, як засіб формулювання понять, що є найбільш важливим при переході від словесного опису системи до формального подання процесу її функціонування у вигляді деякої математичної моделі (аналітичної або імітаційної). При користуванні математичною схемою насамперед дослідника системи Є має цікавити питання про адекватність відображення у вигляді конкретних схем реальних процесів у досліджуваній системі, а не можливість отримання відповіді (результату розв'язання) на конкретне питання дослідження. Наприклад, подання процесу функціонування інформаційно-обчислювальної системи колективного користування у вигляді мережі схем масового обслуговування дає можливість добре описати процеси, що відбуваються в системі, але при складних законах вхідних потоків і потоків обслуговування не дає можливості отримання результатів в явному вигляді.

**Матемамичну схему** можна визначити як ланку (концептуальну модель) при переході від змістовного до формального опису процесу функціонування системи з урахуванням дії зовнішнього середовища, тобто має місце ланцюжок «описова модель – математична схема – математична (аналітична або (*і*) імітаційна) модель».

### 5.2 Загальний вид математичної моделі системи

Кожна конкретна система *S* характеризується набором власти- востей, під якими розуміються величини, що відображають поведінку модельованого об'єкта (реальної системи) і враховують умови її функціонування у взаємодії із зовнішнім середовищем (системою) *E* . При побудові математичної моделі системи необхідно вирішити питання про її повноту. Повнота моделі регулюється, в основному, вибором межі «система *S* – середовище *E*». Також має бути вирішене завдання спрощення моделі, яка допомагає виділити основні властивості системи, відкинувши другорядні. Причому віднесення властивостей системи до основних або другорядних суттєво залежить від мети моделювання системи (наприклад, аналіз імовірнісно-часових характеристик процесу функціонування системи, синтез структури системи і т. д.). Модель об'єкта моделювання, тобто системи, можна представити у вигляді множини величин, що описують процес функціонування реальної системи і створюють у загальному випадку такі підмножини:сукупність вхідних дій на систему (якими, як правило, управляють)

$x \in X \in R^{nX}$

сукупність **дій зовнішнього середовища** (за якими спостерігають)

$v \in V \in R^{nV}$

сукупність **внутрішніх (власних) параметрів** системи

$h \in H \in R^{n_H}$

сукупність **вихідних характеристик** системи

$y \in Y \in R^{n_Y}$

Причому в перелічених підмножинах можна виділити керовані і некеровані змінні. У загальному випадку *x, v, h, y* є елементами непересічних підмножин і містять як детерміновані, так і стохастичні складові.

При моделюванні системи *S* вхідні дії, дії зовнішнього середовища *E* і внутрішні параметри системи є **незалежними (екзогенними) змінними**, які у векторній формі мають відповідно вигляд:

$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n_x}(t))^T$;

$v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_{n_v}(t))^T$;

$h(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_{n_h}(t))^T$;

а вихідні характеристики системи є **залежними (ендогенними) змінними** і у векторній формі мають вигляд:

$y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_{n_y}(t))^T$.

Процес функціонування системи S описується в часі оператором $F_S$, який у загальному випадку перетворить незалежні змінні в залежні відповідно до співвідношень виду

$$y(t) = F_S(x, v, h, t). \quad (5.1)$$

Сукупність залежностей вихідних характеристик системи від часу $y_i(t)$ для всіх $i = \overline{1, n_y}$ називається **вихідною траєкторією** *y(t).* Залежність (5.1) називається **законом функціонування системи *S*** і позначається $F_S$. У загальному випадку закон функціонування системи $F_S$ може бути заданий у вигляді: функції, функціонала, логічних умов, в алгоритмічній і табличній формах або у вигляді словесного правила відповідності.

Дуже важливим для опису і дослідження системи *S* є поняття **алгоритму функціонування** $A_S$, під яким розуміється метод отримання вихідних характеристик *y(t)* з урахуванням вхідних дій *x(t),* дій зовнішнього середовища *v(t)* і власних параметрів системи *h(t).*

Очевидно, що один і той же закон функціонування $F_S$ системи *S* може бути реалізований різними способами, тобто за допомогою множини різних алгоритмів функціонування $A_S$.

Співвідношення (5.1) є математичним описом поведінки об'єкта (системи) моделювання в часі т , тобто відображають його динамічні властивості. Тому математичні моделі такого виду прийнято називати **динамічними моделями** (системами).

Для смамичних моделей математична модель (5.1) є від ображенням між двома підмножинами властивостей модельованого об'єкта Y і X, V, H, що у векторній формі може бути записано як

$$y = f(x, v, h). \quad (5.2)$$

Співвідношення (5.1) і (5.2) можуть бути задані різними способами: аналітично (за допомогою формул), графічно, таблично і т.д. Такі співвідношення у ряді випадків можуть бути отримані через властивості системи *S* у конкретні моменти часу, які називаються станами. Стан системи *S* характеризується векторами

$z = z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_{n_z}(t))^T$.

Якщо розглядати процес функціонування системи *S* як послідовну зміну станів $z^1(t), z^2(t), \dots, z^k(t)$ де $z^j(t) \in R^{n_z} \forall j = \overline{1, k}$, то вони можуть бути інтерпретовані як координати точки в $n_Z$ –вимірному фазовому просторі. Причому кожній реалізації процесу відповідатиме деяка фазова траєкторія. Сукупність всіх можливих значень станів$\{z^k\}$ називається просмором сманів об'єкта моделювання *Z*, тобто $z^k \in Z, Z \subset R^{n_Z}$.

Стани системи *S* у момент часу $t^*$, $t_0 < t^* \le T$ ($t_0$– початковий момент часу, *T* – кінцевий момент часу), повністю визначаються початковими умовами $z^0 = z(t_0) \in Z$, вхідними впливами *x(t)*, внутрішніми параметрами *h(t)* і впливами зовнішнього середовища *v(t)*, які мали місце за проміжок часу $t^* - t_0$, за допомогою двох векторних рівнянь:

$$z(t) = \Phi(z^0, x, v, h, t), \qquad (5.3)$$

$$y(t) = F(z, t). \qquad (5.4)$$

Перше рівняння по початковому стану $z^0$ і незалежним змінним *x,v,h* визначає вектор-функцію, а друге по отриманому значенню станів *z(t)* залежні змінні на виході системи *y(t).* Таким чином, ланцюжок рівнянь об'єкта «вхід – стани – вихід» дозволяє визначити характеристики системи

$$y(t) = F[\Phi(z^0, x, v, h, t)]. \qquad (5.5)$$

У загальному випадку час у моделі системи *S* може розглядатися на інтервалі моделювання *(0, T)* (тобтоі $t_0=0$) як неперервний, так і дискретний, тобто квантований на відрізки довжиною $\Delta t$ часових одиниць кожен, коли $T = m\Delta t$, де *m* – кількість інтервалів дискретизації.

Таким чином, **під математичною моделлю об'єкта** (системи) розуміють скінченну підмножину змінних *x(t), v(t), h(t)* разом з математичними зв'язками між ними і характеристиками *y(t).* Якщо математичний опис об'єкта моделювання не містить елементів випадковості або вони не враховуються, тобто якщо можна вважати, що в цьому випадку стохастичні дії зовнішнього середовища *v(t)* І стохастичні внутрішні параметри *h(t)* відсутні, то модель називається детермінованою в тому сенсі, що характеристики однозначно визначаються детермінованими вхідними впливами:

$$y(t) = f(x, t). \qquad (5.6)$$

Очевидно, що детермінована модель є окремим випадком стохастичної моделі. Наведені математичні співвідношеннями є математичними схемами загального виду і дозволяють описати широкий клас систем. Проте у практиці моделювання об'єктів у галузі системотехніки і системного аналізу на початкових етапах дослідження системи раціо- нальніше використовувати **типові математичні схеми**: диференціальні рівняння, скінченні й імовірнісні автомати, системи масового обслуговування і т. д.

Не маючи такого ступеня спільності, як розглянуті моделі, типові математичні схеми мають переваги простоти і наглядності, але при суттєвому звуженні можливостей застосування. Як детерміновані моделі, коли при дослідженні випадкові фактори не враховуються, для представлення систем, що функціонують у неперервному часі, використовуються диференціальні, інтегральні, інтегродиференціальні й інші рівняння, а для представлення систем, що функціонують у дискретному часі, – скінченні автомати і кінцево-різницеві схеми. Як стохастичні моделі (при врахуванні випадкових факторів) для представлення систем з дискретним часом використовуються імовірнісні автомати, а для представлення систем з неперервним часом – системи масового обслуговування і т. д.

Перелічені типові математичні схеми, природно, не можуть претедувати на можливість опису на їх базі всіх процесів, що відбуваються у великих інформаційно-управляючих системах, до яких належать АСУ. Для таких систем у ряді випадків перспективнішим є застосування агрегативних моделей.

Агрегативні моделі (системи) дозволяють описати широке коло об'єктів дослідження з відображенням системного характеру цих об'єктів. Саме при агрегативном описі складний об'єкт (система) розчленовується на скінченне число частин (підсистем), зберігаючи при цьому зв'язки, що забезпечують взаємодію частин.

Таким чином, при побудові математичних моделей процесів функціонування систем можна виділити такі основні підходи: неперервно-детермінований (наприклад, диференціальні рівняння); дискетно-детермінований (скінченні автомати); дискретно-стохастичний (імовірнісні автомати); неперервно-стохастичний (системи масового обслуговування); узагальнений або універсальний (агрегативні системи).

Математичні схеми, що розглядаються в наступних розділах, повинні допомогти оперувати різними підходами у практичній роботі при моделюванні конкретних систем.

### 5.3 Неперервно-детерміновані моделі (D-схеми)

Розглянемо особливості неперервно-детермінованого підходу на прикладі використання як математичних моделей диференціальних рівнянь. **Диференціальними рівняннями** називаються такі рівняння, в яких невідомими будуть функції однієї або декількох змінних, причому в рівняння входять не тільки самі функції, але і їх похідні різних порядків. Якщо невідомі – функції багатьох змінних, то рівняння називаються рівняннями в часминних похідних, інакше при розгляді функцій тільки однієї незалежної змінної рівняння називаються **звичайними диференціальними рівняннями**.

Зазвичай у таких математичних моделях незалежною змінною, від якої залежать невідомі шукані функції, служить час *t*. Тоді математичне співвідношення для детермінованих систем (5.6) в загальному вигляді буде

$$y' = f(y,t), y(t_0) = y_0, \qquad (5.7)$$

де $y' = \frac{dy}{dt}$, $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T$ і $f = (f_1, f_2, \dots, f_{nv})^T$ – $n$ - вимірні вектори;*f(y,t)* - вектор-функція, яка визначена на деякій *(n+1)* -вимірній ($y \in R^n, t \in R^1$) множині і є неперервною.

Оскільки математичні схеми такого виду відображають динаміку системи, що вивчається, тобто її поведінка в часі, то вони називаються **D-схемами** (англ. dynamic).

Найбільш важливе для системотехніки застосування D-схем як математичного апарату в теорії автоматичного управління. Для ілюстрації особливостей побудови і застосування D-схем розглянемо простий приклад формалізації процесу функціонування двох елементарних систем різної фізичної природи: механічної $S_M$ (коливання маятника, рис. 5.1, а) і електричної $S_K$ (коливальний контур рис. 5.1, б).

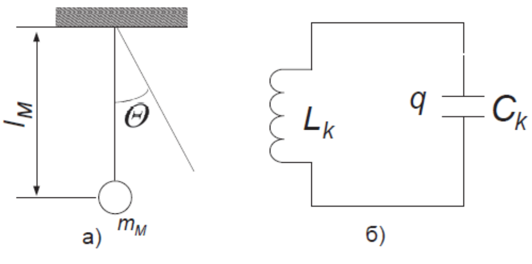



Рис. 5.1. Елементарні схеми

Процес малих коливань маятника описується звичайним диференціальним рівнянням

$$m_M \cdot l_M \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + m_M \cdot g \cdot l_M \cdot \theta(t) = 0.$$

де $m_M$, $l_M$ - маса і довжина підвісу маятника; g – прискорення вільного падіння; $\theta(t)$ – кут відхилення маятника у момент часу t .

З цього рівняння вільного коливання маятника можна знайти оцінки характеристик, що цікавлять дослідника. Наприклад, період коливання маятника:

$$T_M = 2\pi\sqrt{\frac{l_M}{g}}.$$

Аналогічно, процеси в електричному коливальному контурі описуються звичайним диференціальним рівнянням:

$$L_K\frac{d^2q(t)}{dt^2}+\frac{q(t)}{C_K}=0.$$

де $L_K, C_K$ – індуктивність і ємкість конденсатора; $q(t)$ – заряд конденсатора в момент часу t.

З цього рівняння можна отримати різні оцінки характеристик процесу в коливальному контурі. Наприклад, період електричних коливань:

$$T_K = 2\pi\sqrt{L_C C_K}.$$

Очевидно, що вівши позначення $h_0 = m_M l_M^2 = L_K$, $h_1 = 0$, $h_2 = m_M g l_M^2 = \frac{1}{C_K}$, $\theta(t) = q(t) = z(t)$, отримаємо звичайне диференціальне рівняння другого порядку, яке описує поведінку цієї замкнутої системи:

$$h_0\frac{d^2z(t)}{dt^2}+h_1\frac{dz(t)}{dt}+h_2z(t)=0. \quad (5.8)$$

де $h_0$, $h_1$, $h_2$, параметри системи; *z(t)* - стан системи у момент часу t.

Таким чином, поведінка цих двох об'єктів може бути досліджена на основі загальної математичної моделі (5.8). Крім того, необхідно відзначити, що поведінка однієї з систем може бути проаналізована за допомогою іншої. Наприклад, поведінка маятника (системи $S_M$) може бути вивчена за допомогою електричного коливального контура (системи $S_K$).

Якщо система *S* (тобто маятник або контур), що вивчається, взаємодіє з зовнішнім середовищем *E*, то з'являється вхідна дія *x(t)* (зовнішня сила для маятника і джерело енергії для контура) і неперервно-детермінована модель такої системи матиме вигляд:

$$h_0\frac{d^2z(t)}{dt^2}+h_1\frac{dz(t)}{dt}+h_2z(t)=x(t).$$

З точки зору загальної схеми математичної моделі (див. підрозділ 5.2) *x(t)* є вхідним (управляючим) впливом, а стан системи *S* у даному випадку можна розглядати як вихідну характеристику *y(t)*, тобто вважати, що вихідна змінна *y(t)* співпадає зі станом системи *z(t)* в кожен момент часу, тобто *y(t)= z(t)*.

При розв'язанні задач системотехніки важливе значення мають проблеми управління великими системами. Слід звернути увагу на системи автоматичного управління – окремий випадок динамічних систем, описуваних D-схемами і виділених в окремий клас моделей через їх практичну специфіку.

Описуючи процеси автоматичного управління, дотримуються зазвичай представлення реального об'єкта у вигляді двох систем: управляючої і управляємої (об'єкта управління). Структура багатовимірної системи автоматичного управління загального виду представлена на рис. 5.2, де позначені **незалежні** (ендогенні) змінні: $x(t)$*x(t)* - вектор вхідних (задаваних) впливів; $v(t)$ - вектор збуджуючих впливів; $h'(t)$ - вектор сигналів помилки; $h''(t)$ - вектор управляючих впливів; **залежні** (екзогенні) **змінні**: $z(t)$ - вектор станів системи *S*; $y(t)$ - вектор вихідних змінних (зазвичай $y(t) = z(t)$).

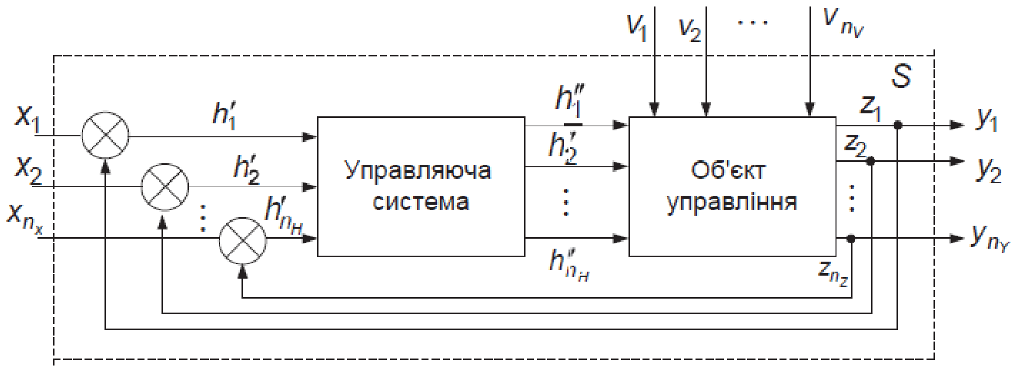



Рис. 5.2. Структура системи автоматичного управління

Сучасна управляюча система – це сукупність програмно-технічних засобів, що забезпечують досягнення об'єктом управління певної мети. Наскільки точно об'єкт управління досягає заданої мети, можна судити для одновимірної системи за координатою стану $y(t)$. Різниця між заданим $y_{\text{зад}}(t)$ і дійсним $y(t)$ законами зміни управляємої величини є помилка управління $h'(t) = y_{\text{зад}}(t) - y(t)$.

Системи, для яких помилки управління $h'(t) = 0$ у всі моменти часу, називаються ідеальними. На практиці реалізація ідеальних систем неможлива. Таким чином, помилка $h'(t)$ - необхідна складова автоматичного управління, заснованого на принципі заперечного зворотного зв'язку, оскільки для приведення у відповідність вихідної змінної $y(t)$ її заданому значенню використовується інформація про відхилення між ними. Завданням системи автоматичного управління є зміна змінної $y(t)$ згідно із заданим законом з певною точністю (з допустимою помилкою). При проектуванні й експлуатації систем автоматичного управління необхідно вибрати такі параметри системи Є , які забезпечили б необхідну точність управління, а також стійкість системи в перехідному процесі.

Якщо система стала, то представляє практичний інтерес поведінка системи в часі, максимальне відхилення регульованої змінної $y(t)$ в перехідному процесі, час перехідного процесу і т. п. Висновки про властивості систем автоматичного управління різних класів можна зробити за видом диференціальних рівнянь, що приблизно описують процеси в системах. Порядок диференціального рівняння і значення його коефіцієнтів цілком визначаються статичними і динамічними параметрами системи *S*.

Таким чином, використання D-схем дозволяє формалізувати процес функціонування неперервно-детермінованих систем *S* й оцінити їх основні характеристики, застосовуючи аналітичний або імітаційний підхід, реалізований у вигляді відповідної мови для моделювання непе- рервних систем, або такий, що використовує аналогові і гібридні засоби обчислювальної техніки.

### 5.4 Дискретно-детерміновані моделі (F-схеми)

Особливості дискретно-детермінованого підходу на етапі формалізації процесу функціонування систем розглянемо на прикладі використання як математичного апарата теорії автоматів. **Теорія автомамів** – це розділ теоретичної кібернетики, в якому вивчаються математичні моделі – автомати. На основі цієї теорії система представляється у вигляді автомата, що переробляє дискретну інформацію і змінює свої внутрішні стани лише в допустимі моменти часу. Поняття автомат варіюється залежно від характеру систем, що конкретно вивчаються, від прийнятого рівня абстракції і доцільного ступеня спільності.

Автомат можна представити як деякий пристрій (чорний ящик), на який подаються вхідні сигнали і знімаються вихідні і який може мати деякі внутрішні стани. **Скінченним автоматом** називається автомат, у якого множина внутрішніх станів і вхідних сигналів (а, отже, і множина вихідних сигналів) є скінченними множинами.

Абстрактно скінченний автомат можна представити як математичну схему (**F-схему**), що характеризується шістьма елементами:

– скінченною множиною X вхідних сигналів (вхідним алфавітом);
– скінченною множиною У вихідних сигналів (вихідним алфавітом);
– скінченною множиною Z внутрішніх станів (внутрішнім алфавітом або алфавітом станів);
– початковим станом $z_0 \in Z$;
– функцією переходів $\varphi(z, x)$;
– функцією виходів $\varphi(z, x)$;

Автомат, що задається F-схемою: $F = \langle Z, X, Y, \varphi, \varphi, z_0 \rangle$, функціонує в дискретному автоматному часі, моментами якого є такти, тобто рівні інтервали часу, що примикають один до одного, кожному з яких відповідають постійні значення вхідного і вихідного сигналів та внутрішні стани. Позначимо стан, а також вхідний і вихідний сигнали, що відповідають *t*-му такту при t=0,1,2,…, через *z(t), x(t), y(t).* При цьому, за умовою, $z(0) = z_0$, а $z(t) \in Z$, , $x(t) \in X$

$y(t) \in Y$.

Абстрактний скінченний автомат має один вхідний $(X \subset R^1)$ й один вихідний канали $(Y \subset R^1)$. У кожен момент t=0,1,2,… дискретного часу F-автомат перебуває в певному стані *z(t)* з множини *Z* станів автомата, причому в початковий момент часу *t=0* він завжди перебуває в початковому стані $z(0)=z_0$. У момент т , будучи в стані *z(t),* автомат здатний сприйняти на вхідному каналі сигнал $x(t) \in X$ і видати на вихідному каналі сигнал $y(t) = \Psi[z(t), x(t)]$, переходячи в стан $z(t+1) = \varphi[z(t), z(t)]$, $z(t) \in Z$, $y(t) \in Y$. Абстрактний скінченний автомат реалізує деяке відображення множини слів вхідного алфавіту *X* на множину слів вихідного алфавіту У . Іншими словами, якщо на вхід скінченного автомата, встановленого в початковий стан $z_0$, подавати в деякій послідовності літери вхідного алфавіту *x(0), x(1), x(2)* ,..., тобто вхідне слово, то на виході автомата будуть послідовно з'являтися літери вихідного алфавіту y(0), y(1), y(2),..., утворюючи вихідне слово.

Таким чином, робота скінченного автомата відбувається за такою схемою: у кожному т -му такті на вхід автомата, що перебуває в стані *z(t)*, подається деякий сигнал *x(t)*, на який він реагує переходом в *(t+1)*-му такті в новий стан *z(t+1)* і видачею деякого вихідного сигналу. Сказане вище можна описати такими рівняннями: для F-автомата першого роду, що називається також автоматом Мілі,

$$z(t+1) = \varphi[z(t), x(t)], \quad t = 0,1,2,..., \tag{5.9}$$

$$y(t) = \Psi[z(t), x(t)], \quad t = 0,1,2,..., \tag{5.10}$$

для F-автомата другого роду

$$z(t+1) = \varphi[z(t), x(t)], \quad t = 0,1,2,..., \tag{5.11}$$

$$y(t) = \Psi[z(t), x(t-1)], \quad t = 0,1,2,..., \tag{5.12}$$

Автомат другого роду, для якого

$$y(t) = \Psi[z(t)], \quad t = 0,1,2,..., \tag{5.13}$$

тобто функція виходів не залежить від вхідної змінної $x(t)$ називається автоматом

Мура.

Таким чином, рівняння (5.9) – (5.13), що повністю задають **F-автомат**, є окремим випадком рівнянь (5.3) і (5.4), коли система *S* детермінована і на її єдиний вхід надходить дискретний сигнал *X*.

За кількістю станів розрізняють скінченні автомати з пам'яттю і без пам'яті. Автомати з пам'яттю мають більше одного стану, а автомати без пам'яті (комбінаційні або логічні схеми) мають лише один стан. При цьому, згідно з (5.10), робота комбінаційної схеми полягає в тому, що вона ставить у відповідність кожному вхідному сигналу *x(t)* певний вихідний сигнал *y(t)*, тобто реалізує логічну функцію виду:

$y(t) = \Psi[x(t)],\ \ t = 0,1,2,\ldots,$

Ця функція називається булевою, якщо алфавіти *X* і *Y*, яким належать значення сигналів *x* і *y*, складаються з двох літер.

За характером відліку дискретного часу скінченні автомати поділяються на **синхронні і асинхронні**. У синхронних F-авмомамах моменти часу, в які автомат «зчитує» вхідні сигнали, визначаються примусово синхронізуючими сигналами. Після чергового синхронізуючого сигналу з урахуванням «зчитаного» і відповідно до рівнянь (5.9) – (5.13) відбувається перехід у новий стан і видача сигналу на виході, після чого автомат може сприймати наступне значення вхідного сигналу. Таким чином, реакція автомата на кожне значення вхідного сигналу закінчується за один такт, тривалість якого визначається інтервалом між сусідніми синхронізуючими сигналами. Асинхронний F-авмомам зчитує вхідний сигнал неперервно і тому, реагуючи на достатньо довгий вхідний сигнал постійної величини x , він може, як випливає з (5.9) – (5.13), кілька разів змінювати стан, видаючи відповідне число вихідних сигналів, поки не перейде у сталий, який вже не може бути змінений даним вхідним.

Щоб задати скінченний F-авмомам, необхідно описати всі елементи множини $F = \langle Z, X, Y, \varphi, \varphi, z_0 \rangle$, тобто вхідний, внутрішній і вихідний алфавіти, а також функції переходів і виходів. Причому серед множини станів необхідно виділити стан $z_0$, в якому автомат перебував у момент часу $t=0$. Існують декілька способів задавання роботи F-автоматів, але найчастіше використовуються табличний, графічний і матричний.

Найпростіший табличний спосіб задавання скінченного автомата заснований на використанні таблиць переходів і виходів, рядки яких відповідають вхідним сигналам автомата, а стовпці – його станам. При цьому зазвичай перший зліва стовпець відповідає початковому стану $z_0$.

На перетині *i*-го рядка і *k*-го стовпця таблиці переходів поміщається відповідне значення відповідне значення $\varphi(z_K, x_i)$ функції переходів, а в таблиці виходів – відповідне значення $\Psi(z_K, x_i)$ функції виходів. Для F-автомата Мура обидві таблиці можна поєднати, отримавши так звану відмічену таблицю переходів, в якій над кожним станом $z_K$ автомата, що позначає стовпець таблиці, стоїть відповідний цьому стану, згідно з (5.10), вихідний сигнал $\Psi(z_i)$.

Опис роботи F- автомата Мілі таблицями переходів і виходів ілюструється табл. 5.1, а опис F- автомата Мура – таблицею переходів (табл. 5.2).

При другому способі задавання скінченного автомата використовується поняття направленого графа. Граф автомата є набором вершин, що відповідають різним станам автомата, і дуг, що з'єднують вершини графа і відповідають тим чи іншим переходам автомата. Якщо вхідний сигнал $x_K$ спричиняє перехід із стану $z_i$ у стан $z_j$, то на графі автомата дуга, що з'єднує вершину $z_i$ з вершиною $z_j$, позначається $x_K$.

Таблиця 5.1 - Таблиця переходів F-автомата Мілі

| $x_i$ | $z_k$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $z_0$ | $z_1$ | … | $z_K$ |
| Переходи | | | | |
| $x_1$ | $\varphi(z_0, x_1)$ | $\varphi(z_1, x_1)$ | … | $\varphi(z_K, x_1)$ |
| $x_2$ | $\varphi(z_0, x_2)$ | $\varphi(z_1, x_2)$ | … | $\varphi(z_K, x_2)$ |
| … | … | … | … | … |
| $x_i$ | $\varphi(z_0, x_i)$ | $\varphi(z_1, x_i)$ | … | $\varphi(z_K, x_i)$ |
| Виходи | | | | |
| $x_1$ | $\psi(z_0, x_1)$ | $\psi(z_1, x_1)$ | … | $\psi(z_K, x_1)$ |
| $x_2$ | $\psi(z_0, x_2)$ | $\psi(z_1, x_2)$ | … | $\psi(z_K, x_2)$ |
| … | … | … | … | … |
| $x_i$ | $\psi(z_0, x_i)$ | $\psi(z_1, x_i)$ | … | $\psi(z_K, x_i)$ |

Таблиця 5.2 - Таблиця переходів F-автомата Мура

| $x_i$ | $\psi(z_k)$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $\psi(z_0)$ | $\psi(z_1)$ | … | $\psi(z_K)$ |
| | $z_0$ | $z_1$ | … | $z_K$ |
| $x_1$ | $\varphi(z_0, x_1)$ | $\varphi(z_1, x_1)$ | … | $\varphi(z_K, x_1)$ |
| $x_2$ | $\varphi(z_0, x_2)$ | $\varphi(z_1, x_2)$ | … | $\varphi(z_K, x_2)$ |
| … | … | … | … | … |
| $x_i$ | $\varphi(z_0, x_i)$ | $\varphi(z_1, x_i)$ | … | $\varphi(z_K, x_i)$ |

Для того щоб задати функцію виходів, дуги графа необхідно позначити відповідними вихідними сигналами. Для автоматів Мілі ця розмітка виконується так: якщо вхідний сигнал $x_K$ діє на стан $z_i$, то, згідно зі сказаним, отримується дуга, що виходить з $z_i$ і позначена $x_K$; цю дугу додатково позначають вихідним сигналом $y = \Psi(z_i, x_K)$.

Для автомата Мура аналогічна розмітка графа така: якщо вхідний сигнал $x_K$, діючи на деякий стан автомата, спричиняє перехід у стан $z_j$, то дугу, направлену в $z_j$ і позначену $x_K$, додатково позначають вихідним сигналом $y = \Psi(z_j, x_K)$.

На рис. 5.3 а, б, наведені задані раніше таблицями F-автомати Мілі *F1* і Мура *F2* відповідно.

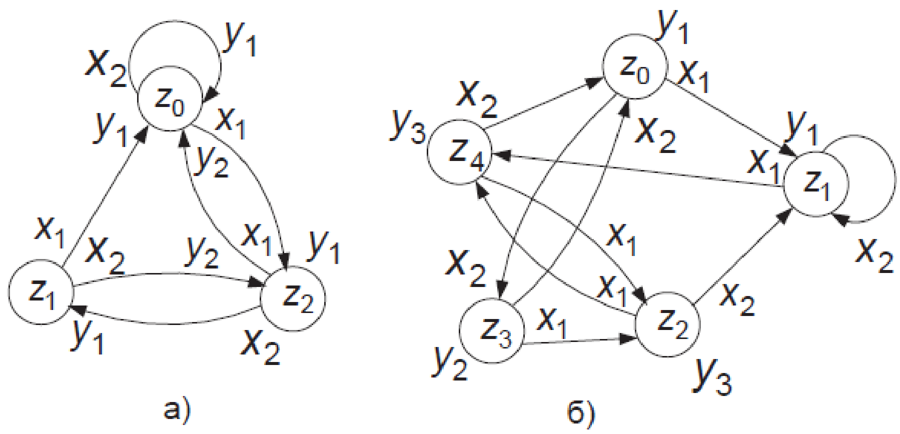



Рис. 5.3. Графи автоматів Мілі (а) і Мура (б)

При розв'язанні задач моделювання систем часто зручнішою формою є матричне задавання скінченного автомата.

Таким чином, поняття F-автомата в дискретно-детермінованому підході до дослідження на моделях властивостей об'єктів є марематичною абстракцією, зручною для опису широкого класу процесів функціонування реальних об'єктів в автоматизованих системах управління. В якості таких об'єктів в першу чергу слід назвати елементи і вузли ЕОМ, пристрої контролю, регулювання й управління, системи часової і просторової комутації в техніці обміну інформацією тощо. Для всіх перерахованих об'єктів характерна наявність дискретних станів і дискретний характер роботи в часі, тобто їх опис за допомогою F-схем є ефективним. Але широта їх застосування не означає універсальності цих математичних схем. Наприклад, цей підхід не придатний для опису процесів прийняття рішень, процесів у динамічних системах з наявністю перехідних процесів і стохастичних елементів.

### 5.5 Дискретно-стохастичні моделі (Р-схеми)

Розглянемо особливості побудови математичних схем при дискетно-стохастичному підході до формалізації процесу функціонування досліджуваної системи Є . Оскільки сутність дискретизації часу при цьому підході залишається аналогічною розглянутим у підрозділі 6.щ скінченним автоматам, то вплив фактора стохастичності прослідкуємо також на різновиді таких автоматів, а саме на імовірнісних (стохастичних) автоматах.

У загальному вигляді **імовірнісний автомат** можна визначити як дискретний потактовий перетворювач інформації з пам'яттю, функціонування якого в кожному такті залежить тільки від стану пам'яті в ньому і може бути описане статистично.

Застосування схем імовірнісних автоматів (Р-схем) має важливе значення для розробки методів проектування дискретних систем, що проявляють статистично закономірну випадкову поведінку, для з'ясування алгоритмічних можливостей таких систем і обгрунтування меж доцільності їх використання, а також для розв’язання задач синтезу за вибраним критерієм дискретних стохастичних систем, що задовольняють заданим обмеженням.

Введемо математичне поняття Р-автомата, використовуючи поняття, введені для F-автомата. Розглянемо множину G , елементами якої є всілякі пари ($x_i$, $z_s$), де $x_i$ і $z_s$ - елементи вхідної підмножини $X$ і підмножини станів $Z$ відповідно. Якщо існують дві такі функції $\varphi$ $i$ $\Psi$, що з їх допомогою здійснюються відображення $G \to Z$ і $G \to Y$ то говорять, що типу
$F = \langle Z, X, Y, \varphi, \varphi \rangle$ визначає автомат детермінованого типу.

Введемо в розгляд більш загальну математичну схему. Нехай $\Phi$ - множина всіляких пар виду ($z_K$, $y_i$) , де $y_i$ - елемент вихідної підміножини Y. Зажадаємо, щоб будь-який елемент множини $G$ індукував на множині $\Phi$ деякий закон розподілу такого вигляду:

| Елементи з F $(x_i, z_s)$ | $(z_1, y_1)$ | $(z_1, y_2)$ | ... | $(z_K, y_{J-1})$ | $(z_K, y_J)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $b_{11}$ | $b_{12}$ | ... | $b_{K(J-1)}$ | $b_{KJ}$ |

де $b_{Kj}$ - ймовірність переходу автомата в стан $z_K$ і появи на виході сигналу $y_i$, якщо він був у стані $z_S$ і на його вхід у цей момент часу надійшов сигнал $x_i$. Кількість таких розподілів, представлених у вигляді таблиць, дорівнює кількості елементів множини $G$. Позначимо множину цих таблиць через $B$. Тоді четвірка елементів$P = \langle Z, X, Y, B \rangle$ називається ймовірнісним автоматом (Р-автоматом).

## 5.6 Неперервно-стохастичні моделі (Q-схеми)

Особливості неперервно-стохастичного підходу розглянемо на прикладі використання в якості типових математичних схем сисмем масовоєо обслуєовування (СМО), які називатимемо Q-схемами. Системи масового обслуговування є класом математичних схем, розроблених у теорії масового обслуговування і різних застосуваннях для формалізації процесів функціонування систем, які за своєю суттю є процесами обслуговування.

Як процес обслуговування можуть бути представлені різні по своїй фізичній природі процеси функціонування економічних, виробничих, технічних й інших систем, наприклад: потоки постачань продукції деякому підприємству, потоки деталей і комплектуючих виробів на скла- дальному конвеєрі цеху, заявки на обробку інформації ЕОМ від віддалених терміналів і т.д. При цьому характерною для роботи таких об'єктів є випадкова поява заявок (вимог) на обслуговування і завершення обслуговування у випадкові моменти часу, тобто стохастичний характер процесу їх функціонування.

Таким чином, функціонування будь-якої СМО полягає в обслуговуванні потоку вимог, які одна за одною або групами надходять до неї в деякі, як правило, випадкові моменти часу. Вимоги, які надійшли до СМО, обробляються протягом певного часу, після чого залишають систему.

Зупинимося на основних поняттях масового обслуговування, необхідних для використання Q-схем як при аналітичному, так і при імітаційному підходах.

У будь-якому елементарному акті обслуговування можна виділити дві основні складові: очікування обслуговування заявкою і саме обслуговування заявки. Це можна зобразити у вигляді деякого $i$-го приладу обслуговування $П_i$ (рис. 5.4), що складається з накопичувача заявок $H_i$, в якому може одночасно перебувати $I_i = L_i^H$ заявок, де $L_i^H$ - місткість $i$-го накопичувача і канала обслуговування заявок (або просто канала) $K_i$ а кожен елемент приладу обслуговування $П_i$ надходять потоки подій, в накопичувач $H_i$ потік заявок $w_i$, на канал $K_i$ потік обслуговувань $u_{ji}$.

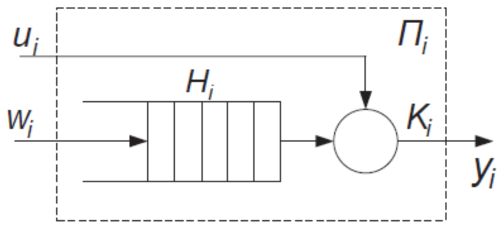



Рис. 5.4. Прилад обслуговування заявок

**Потоком подій** називається послідовність подій, що відбуваються одна за одною в якісь випадкові моменти часу. Розрізняють потоки однорідних і неоднорідних подій. **Потік подій** називається **однорідним**, якщо він характеризується тільки моментами надходження цих подій (збуджуючими моментами) і задається послідовністю $\{t_n\} = \{0 \le t_1 \le t_2 \ldots \le t_n\}$, де $t_n$ – момент надходження $n$-ї події (невід'ємне дійсне число). Однорідний потік подій також може бути заданий у вигляді послідовності проміжків часу між $n$-ю і $(n\text{-}1)$-ю подіями $\{\tau\}$, яка однозначно пов'язана з послідовністю збуджуючих моментів, де $\tau_n = t_n - t_{n-1}$, $n \ge 1$, $t_0 = 0$, тобто $\tau_1 = t_1$.

**Потоком неоднорідних подій** називається послідовність$\{t_n, f_n\}$, де $\{t_n\}$ - збуджуючі моменти; $\{f_n\}$ - набір ознак події. Наприклад, стосовно процесу обслуговування для неоднорідного потоку заявок може бути задана приналежність до того або іншого джерела заявок, наявність пріоритету, можливість обслуговування тим або іншим типом каналу і т.д.

У будь-якій системі обслуговування передбачена наявність **пристроїв для обслуговування** (інші назви: прилади для обслуговування, сервери, канали) і **вимог** (інші назви: заявки, виклики, клієнти), які потребують обслуговування. Правила або алгоритми взаємодії пристроїв і вимог називатимемо **дисциплінами поставлення в чергу** та **обслуговуванням**.

Для кожної СМО задається режим роботи. Слід відзначити, що для вимоги може бути потрібно кілька обслуговувань одним або кількома пристроями. зазвичай термін «пристрій для обслуговування» (англійською — «server») використовується для відносно простих моделей, в яких кожна вимога може обслуговуватись тільки одним пристроєм. Якщо ж вимоги обслуговуються кількома пристроями в певній послідовності, переміщаючись за заданим маршрутом, то має місце «мережа обслуговування» (англійською — «queueing network»). Іншими словами, мережа – це складна СМО.

Зазвичай за допомогою методів теорії масового обслуговування розв'язують задачі з проектування та експлуатації однотипних елементів обслуговування – наприклад, розраховують кількість контрольно-пропускного обладнання, місць для ремонту, бензоколонок, обслуговуючого персоналу, ліній зв'язку, одиниць обладнання обчислювальної техніки тощо.

Окремим типом завдань у теорії масового обслуговування є визначення місць накопичування вимог у системі обслуговування, наприклад визначення місць на стелажах на складі або в багатоповерховому гаражі, кількості пристроїв введення-виведення інформації комп'ютера, кількості місць у палатах шпиталю та ін.

Найчастіше ефективність функціонування будь-якої СМО визначається за такими показниками:

– середня кількість вимог, які система може обслужити за одиницю
– часу;
– середній відсоток вимог, які не були обслужені;
– ймовірність того, що вимогу, яка надійшла до системи, буде
– прийнято для обслуговування;
– середній час очікування вимоги в черзі;
– закон розподілу часу очікування;
– середня кількість вимог у черзі;
– закон розподілу числа вимог у черзі;
– коефіцієнт завантаження пристрою для обслуговування;
– середня кількість пристроїв, зайнятих обслуговуванням.

Щоб визначити ці параметри, потрібно охарактеризувати СМО, тобто описати та задати такі характеристики:

– вхідний потік вимог (вимоги, які надходять до системи для обслуговування);
– дисципліни постановки вимог у чергу та вибору вимог із неї;
– правила, за якими здійснюється обслуговування;
– вихідний потік вимог (вимоги, які залишають систему);
– режими роботи системи.

### 5.7 Узагальнені моделі (А-схеми)

Найбільш відомим загальним підходом до формального опису процесів функціонування систем є підхід, запропонований Н. П. Бусленко. Цей підхід дозволяє описувати поведінку неперервних і дискретних, детермінованих і стохастичних систем, тобто порівняно з розглянутими раніше є узагальненим (універсальним) і базується на понятті **агреєамивної сисмеми** (англ. aggregate system), що є формальною схемою загального вигляду, яку називатимемо **А-схемою**.

Аналіз існуючих засобів моделювання систем і завдань, що вирішуються за допомогою метода моделювання на ЕОМ, неминуче призводить до висновку, що комплексне вирішення проблем, які виникають у процесі створення і машинної реалізації моделі, можливо лише у випадку, якщо моделюючі системи мають у своїй основі єдину нормальну математичну схему, тобто **А-схему**. Така схема повинна одночасно виконувати декілька функцій: бути адекватним математичним описом об'єкта моделювання, тобто системи *S* , служити основою для побудови алгоритмів і програм при комп'ютерній реалізації моделі *M*, дозволяти у спрощеному варіанті (для окремих випадків) проводити аналітичні дослідження.

Наведені вимоги певною мірою суперечливі. Проте у рамках узагальненого підходу на основі А-схем вдається знайти між ними деякий компроміс.

За традицією, що встановилася в математиці взагалі і у прикладній математиці зокрема, при агрегативному підході спочатку дається формальне визначення об'єкта моделювання – агрегативної системи, яка є математичною схемою, що відображає системний характер об'єктів, які вивчаються. При агрегативному описі складний об'єкт (система) розбивається на скінченну кількість частин (підсистем), зберігаючи при цьому зв'язки, що забезпечують їх взаємодію. Якщо деякі з отриманих підсистем виявляються у свою чергу ще досить складними, то процес їх розбиття триває до тих пір, поки не утворяться підсистеми, які в умовах даного завдання моделювання можуть вважатися зручними для математичного опису. Унаслідок такої декомпозиції складна система представляється у вигляді багаторівневої конструкції з взаємозв'язаних елементів, об'єднаних у підсистеми різних рівнів.

Як елемент А-схеми виступає агрегат, а зв'язок між агрегатами (усередині системи *S* і з зовнішнім середовищем *E*) здійснюється за допомогою оператора спряження *R*. Очевидно, що агрегат сам може розглядатися як А-схема, тобто може розбиватися на елементи (агрегати) наступного рівня.

Будь-який агрегат характеризується такими множинами: моментів часу *T*, вхідних *X* і вихідних *Y* сигналів, станів *Z* в кожен момент часу t. Стан агрегата у момент часу $t \in T$ позначається як $z(t) \in Z$, а вхідні І вихідні сигнали, як $x(t) \in X$ і $y(t) \in Y$ відповідно.

Вважатимемо, що перехід агрегата із стану $z(t_1)$ в стан $z(t_1) \neq z(t_2)$ відбувається за малий інтервал часу, тобто має місце стрибок $\delta z$. Переходи агрегата з стану $z(t_1)$ в $z(t_2)$ визначаються власними (внутрішніми) параметрами самого агрегата $h(t) \in H$ І вхідними сигналами $x(t) \in X$.

У початків момент часу $t_0$ стани *z* мають значення, що дорівнюють $z^0$, тобто $z^0 = z(t_0)$, що задаються законом розподілу процесу $z(t)$ в момент часу $t_0$, а саме $L\ z(t_1)$. Припустимо, що процес функціонування агрегата у випадку впливу вхідного сигналу $x_n$ описується випадковим оператором *V*. Тоді в момент $t_n$ надходження в агрегат вхідного сигналу $x_n$ можна визначити стан

$$z(t_n + 0) = V[t_n, z(t_n), x_n].$$

Позначимо напівінтервал часу $t_1 < t \leq t_2$ як $(t_1\ t_2]$, , а напівінтервал $t_1 \leq t < t_2$т1 як$[t_1\ t_2)$. Якщо інтервал часу $t_n, t_{n+1}$ не містить жодного моменту надходження сигналів, то для $t \in (\ t_n, t_{n+1})$, стан агрегата визначається випадковим оператором *U* відповідно до співвідношення:

$$z(t) = U[t, t_n, z(t_n + 0)].$$

Сукупність випадкових операторів $V$ і $U$ розглядається як оператор переходів агрегата в нові стани. При цьому процес функціонування агрегата складається зі стрибків станів в моменти надходження вхідних сигналів х (оператор $V$ ) і змін станів між цими моментами $t_n$ і $t_{n+1}$ (оператор $U$). На оператор $U$ не накладається ніяких обмежень, тому допустимі стрибки станів в моменти часу, які не є моментами надходження вхідних сигналів $x$. У подальшому моменти стрибків $\Delta z$ будемо називати особливими моментами часу $t_\delta$, а стани $z(t_\delta)$ особливими станами А-схеми. Для опису стрибків станів $\Delta z$ в особливі моменти часу $t$ будемо використовувати випадковий оператор $W$, що є частковим випадком оператора $U$, тобто

$$z(t_\delta + 0) = W[t_\delta, z(t_\delta)].$$

У множині станів $Z$ виділяється така підмножина $Z^{(Y)}$, що якщо $z(t_\delta)$ досягає $Z^{(Y)}$, то цей стан є моментом видачі вихідного сигналу, що визначається оператором виходів:

$$y = G[t_\delta, z(t_\delta)]$$

Таким чином, під аґреґатом будемо розуміти будь-який об'єкт, що визначається впорядкованою сукупністю розглянутих множин $T, X, Y, Z, Z^{(Y)}, H$ і випадкових операторів $V, U, W, G$.

Послідовність вхідних сигналів, розташованих у порядку їх надходження в А-схему, називатимемо **вхідним повідомленням** або $x$-повідомленням. Послідовність вихідних сигналів, впорядковану відносно часу видачі, назвемо **вихідним повідомленням** або $y$-повідомленням.

Існує клас великих систем, які, зважаючи на їх складність, не можуть бути формалізовані у вигляді математичних схем одиночних агрегатів, тому їх формалізують деякою конструкцією з окремих агрегатів $A_K$ $k = \overline{1, N_A}$, яку назвемо агрегативною системою або А-схемою. Для опису деякої реальної системи $S$ у вигляді А-схеми необхідно мати опис як окремих агрегатів $A_K$ , так і зв'язків між ними.

Приклад. Розглянемо А-схему, структура якої наведена на рис. 6.5

Функціонування А-схеми пов'язане з переробкою інформації, передача останньої на схемі показана стрілками. Уся інформація, що циркулює в А-схемі, поділяється на зовнішню і внутрішню. зовнішня інформація надходить від зовнішніх об'єктів, що не є елементами схеми, яка розглядається, а внутрішня інформація виробляється агрегатами самої А-схеми. Обмін інформацією між А-схемою і зовнішнім середовищем $E$ відбувається через агрегати $A_K$, які називаються полюсами А-схеми. При цьому розрізняють вхідні полюси А-схеми, що є агрегатами, на які надходять $x$-повідомлення (агрегати $A_1$, $A_2$, $A_3$), і вихідні полюси А-схеми, вихідна інформація яких є у - повідомленнями (агрегати $A_1$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, $A_6$). Агрегати, що не є полюсами, називаються внутрішніми.

Кожний $k$-й агрегат А-схеми $A_K$ має вхідні контакти, на які над ходить сукупність елементарних сигналів $X_i^{(K)}(t)$, $i = \overline{1, I_K}$, що одночасно виникають на вході елемента, і вихідні контакти, з яких знімається сукупність елементарних сигналів $Y_i^{(K)}(t)$ $j = \overline{1, J_K}$. Таким чином, кожен агрегат А-схеми $A_K$ має $I_k$ вхідних і $J_k$ вихідних контактів.

Опис окремого агрегата вже розглянуто, тому для побудови формального поняття А-схеми залишається вибрати достатньо зручні способи математичного опису взаємодії між агрегатами. Для цього введемо ряд припущень про закономірності функціонування А-схем, що добре узгоджуються з досвідом дослідження реальних складних систем:

– взаємодія між А-схемою і зовнішнім середовищем $E$, а також між окремими агрегатами всередині системи Є здійснюється при передачі сигналів, причому взаємні впливи, що мають місце поза механізмом обміну сигналами, не враховуються;

– для опису сигналу достатньо деякого скінченного набору характеристик;

– елементарні сигнали миттєво передаються в А-схемі незалежно один від одного за елементарними каналами;

– до вхідного контакту будь-якого елемента А-схеми підключається не більше одного елементарного каналу, до вихідного контакту – будь- яке скінченне число елементарних каналів за умови, що до входу одного і того ж елемента А-схеми направляється не більше ніж один із згаданих елементарних каналів.

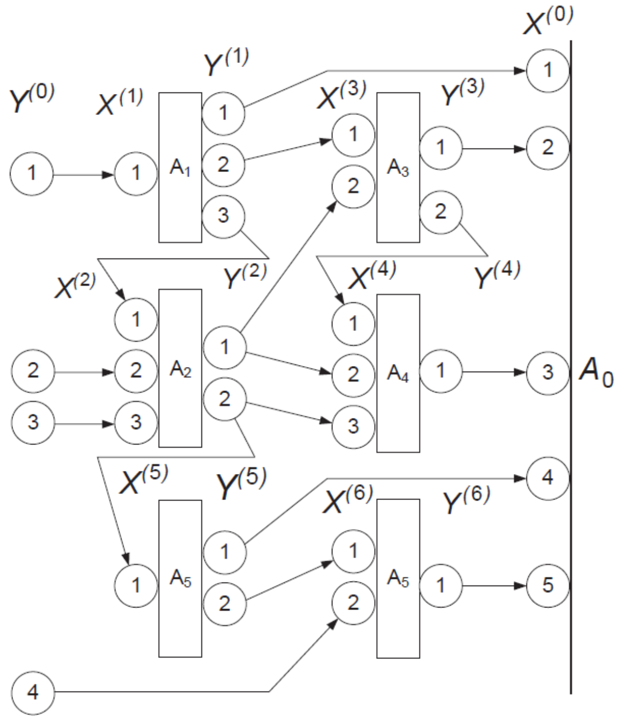



Рис. 5.5. Структура агрегативної системи

Взаємодія А-схеми із зовнішнім середовищем *E* розглядається як обмін сигналами між зовнішнім середовищем Е й елементами А-схеми. Відповідно до цього зовнішнє середовище *E* можна представити у вигляді фіктивного елемента системи $A_0$, вхід якого містить $I_0$ вхідних контактів $X_i^{(0)}(t),\ \ i = \overline{1, I_0}$, а вихід - $J_0$ вихідних контактів $Y_i^{(0)}(t)$ $j = \overline{1, J_0}$. Сигнал, що видається А-схемою в зовнішнє середовище *E*, приймається елементом $A_0$ як вхідний сигнал, що складається з елементарних сигналів $X_i^{(0)}(t),\ i = \overline{1, I_0}$ . Сигнал, що надходить в А-схему із зовнішнього середовища *E*, є вихідним сигналом елемента $A_0$ ісkладається з елементарних сигналів $Y_i^{(0)}(t)\ j = \overline{1, J_0}$.

Таким чином, подальше використання узагальненої типової математичної схеми моделювання, тобто А-схеми, у принципі не відрізняється від розглянутих раніше D-, F-, P- і Q-схем. Для окремого випадку, а саме для кусочно-лінійних агрегатів, результати можуть бути отримані аналітичним методом. У складніших випадках, коли застосування аналітичних методів неефективне або неможливе, удаються до імітаційного методу. Причому, представлення об'єкта моделювання у вигляді А-схеми може бути тим фундаментом, на якому базується побудова імітаційної системи і її зовнішнього та внутрішнього математичного забезпечення. Стандартна форма представлення досліджуваного об'єкта у вигляді А-схеми приводить до уніфікації не тільки алгоритмів імітації, але і до можливості застосовувати стандартні методи обробки й аналізу результатів моделювання системи *S*.

Поняття математичної схеми дозволяє розглядати математику не як метод розрахунку, а як метод мислення.

Математична схема – це ланка при переході від змістовного до формального опису процесу функціонування системи з урахуванням дії зовнішнього середовища.

Під математичною моделлю системи розуміють скінченну підмножину незалежних і залежних змінних разом з математичними зв'язками між ними.

У практиці моделювання об'єктів у галузі системотехніки і системного аналізу на початкових етапах дослідження системи раціонально використовувати типові математичні схеми.

Агрегативні моделі дозволяють описати широке коло об'єктів дослідження з відображенням системного характеру цих об'єктів.

## Тема 6.
## ІМОВІРНІСНЕ МОДЕЛЮВАННЯ.
## МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

При дослідженні систем методом імітаційного моделювання сама випадковість безпосередньо включається у процес моделювання і складає його суттєвий елемент. Кожного разу, коли на хід модельованого процесу впливає випадковий фактор, його вплив імітується за допомогою спеціального організованого розіграшу (жеребу). Таким чином, будується одна реалізація випадкового явища, що є як би результатом одного досліду. У процесі моделювання для отримання точнішої оцінки результату формується велике число реалізації (прогонів моделі).

Формування (розігрування) реалізацій випадкових процесів (подій, величин і функцій) із заданими характеристиками називають **моделюванням випадкових процесів**.

Проте програми вироблення (генератори) випадкових чисел з необхідним законом розподілу можуть виявитися дуже громіздкими. Тому випадкові числа з необхідним законом розподілу отримують не безпосередньо, а шляхом перетворення випадкових чисел, що мають деякий початковий розподіл. До початкового розподілу висувають такі вимоги: простота отримання чисел на ЕОМ; зручність перетворення випадкових чисел у розподіл із заданим законом. Встановлено, що рівномірний закон розподілу достатньою мірою задовольняє цим вимогам. Нижче буде показано, що моделювання випадкових процесів може бути побудоване на використанні датчика випадкових чисел, рівномірно розподілених в інтервалі (0; 1). Оскільки отримані таким чином лічильники випадкових чисел є в принципі наближеними для відповідних законів розподілу, то їх ще називають єенераморами псевдовипадкових чисел.

### 6.1 Моделювання випадкових процесів

Моделювання простих подій. Нехай ймовірність події *А* задана: *P(A)=p*. Виберемо за допомогою датчика випадкових чисел деяке число *r* і вважатимемо, що якщо воно менше або дорівнює *p*, то подія *А* відбулася, якщо більше *p*, то не відбулася, тобто умовою здійснення події є виконання нерівності $r \le p$ (рис. 6.1).


Рис. 7.1. Моделювання простої події

Дійсно, якщо ξ – випадкова величина, рівномірно розподілена в інтервалі (0,1), то

$$P(\xi < \mathrm{p}) = \int_0^p p_\xi(x)dx = p,$$

де $p_\xi(x)$ функція щільності розподілу ймовірностей.

Моделювання повної групи подій. Нехай є повна група *n* подій $A_i$ з ймовірностями $p_i$. Оскільки події утворюють повну групу, то $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Розділимо весь інтервал (0,1) на *n* відрізків, довжини яких складають $p_1, p_2, \dots, p_n$. Виберемо за допомогою датчика випадкових чисел деяке число *r* і вважатимемо, що якщо воно потрапило, наприклад, на ділянку $p_k$, то це означає, що відбулася подія $A_k$, тобто

$$I_{k-1} < r \le I_k$$

де

$$I_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} p_i,\ I_k = \sum_{i=1}^{k} p_i = I_{k-1} + p_k$$

Дійсно

$$P(I_{k-1} < \xi \le \int_{I_{k-1}}^{I_k} p_\xi(x)dx = p_k.$$

Процедура моделювання в цьому випадку полягає в послідовному порівнянні випадкових чисел *r* з величинами $I_k$ (рис. 6.2).

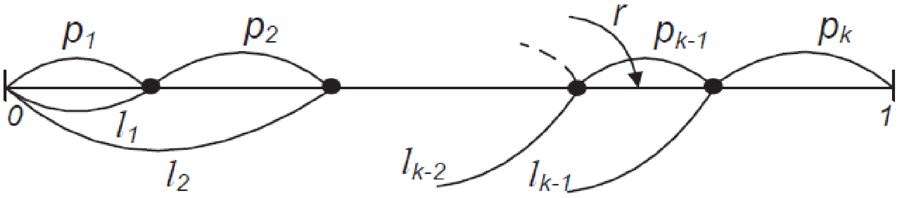



Рис. 6.2. Моделювання повної групи подій

Моделювання складних незалежних подій. Часто буває необхідно здійснити моделювання складних подій, що складаються з двох або декількох простих подій. Нехай, наприклад, є дві незалежні події *A* і *B* з ймовірностями $P(A) = p_A$ і $P(B) = p_B$. У цьому випадку можливі такі результати сумісних випробувань: $AB$, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$, $\overline{A}\ \overline{B}$, і ймовірності їх відповідно дорівнюють $p_A p_B$, $p_A(1-p_B)$, $(1-p_A)p_B$, $(1-p_A)(1-p_B)$. При цьому вони утворюють повну групу подій, оскільки $p_A p_B + p_A(1-p_B) + (1-p_A)p_B + (1-p_A)(1-p_B)=1$.

Тоді можна змоделювати складні події двома способами.

У першому способі вибираємо за допомогою датчика випадкових чисел два числа $r_i$, $r_{i+1}$ (рис. 6.3) і моделюємо складні події за схемою:

$$AB \text{ при } \begin{cases} r_i \le p_A \\ r_{i+1} \le p_B \end{cases} \qquad \overline{A}B \text{ при } \begin{cases} r_i > p_A \\ r_{i+1} \le p_B \end{cases}$$

$$A\overline{B} \text{ при } \begin{cases} r_i \le p_A \\ r_{i+1} > p_B \end{cases} \qquad \overline{AB} \text{ при } \begin{cases} r_i > p_A \\ r_{i+1} > p_B \end{cases}$$

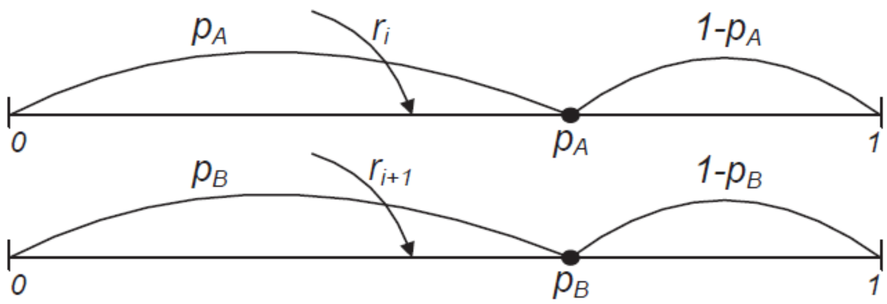



Рис. 6.3. Моделювання складних незалежних подій (вар. 1)

У другому випадку, скористаєм ося схемою моделювання повної групи подій. Для цього досить мати одне число (один жереб) $r_i$, але при цьому число порівнянь зростає (рис.6.4).

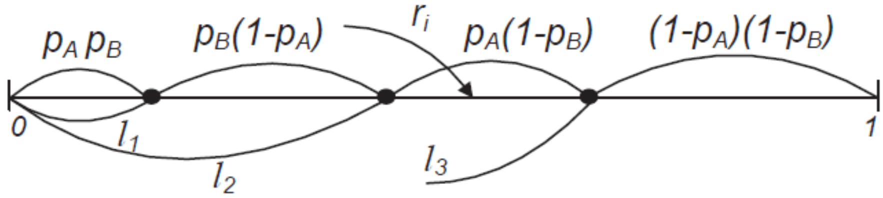



Рис. 6.4. Моделювання складних незалежний подій (вар. 2)

Моделювання складних залежних подій. Розглянемо тепер випадок, коли події *A* і

$B$ є залежними. Тоді можливі такі результатисумісних випробувань: $AB$, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$, $\overline{A}\ \overline{B}$. Нехай ймовірності подій $A$ і $B$ складають $p_A$ , $p_B$.Окрім того, задана умовна ймовірність $p_{B/A}$ події $B$ за умови, що подія $A$ відбулася.

Скористаємося схемою моделювання простих подій. Із сукупності $\{r_i\}$ витягуємо число $r_i$ і перевіряємо умову

$$r_i \leq p_A. \tag{6.1}$$

Якщо нерівність справедлива, то має місце подія $A$. Тепер для випробування, пов'язаного з подією $B$, використовуємо ймовірність $p_{B/A}$ . Із сукупності $\{r_i\}$ беремо чергове число $r_{i+1}$ і перевіряємо умову $r_{i+1} \leq p_{B/A}$ . Якщо ця нерівність справедлива, то має місце результат $A\overline{B}$; якщо ж немає, то результат AB .

Якщо нерівність (6.1) не виконується, то має місце подія $A$. Тому для випробування, пов'язаного з подією $B$, необхідно використовувати умовну ймовірність $p_{B/\overline{A}} = P(B|\overline{A})$.

Відмітимо, що $A$і $\overline{A}$ утворюють повну групу подій, тобто $p_A + p_{\overline{A}} = 1$. Тоді, використовуючи формулу повної ймовірності $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})$, за відомими значеннями $P(A) = p_A$, $P(B) = p_B$ і $P(B|A) = p_{B/A}$ знаходимо

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B) - P(A)P(B|A)}{P(\overline{A})} = \frac{P(B(-P(A)P(B|A)}{1 - P(A)}.$$

Тепер перевіряємо умову $r_{i+1} \leq p_{B/A}$. залежно від виконання або невиконання цієї нерівності за умови, що нерівність (6.1) не має місця, отримуємо результати $\overline{A}B$ або $\overline{A}\ \overline{B}$ Схема моделювання зображена на рис. 6.5.

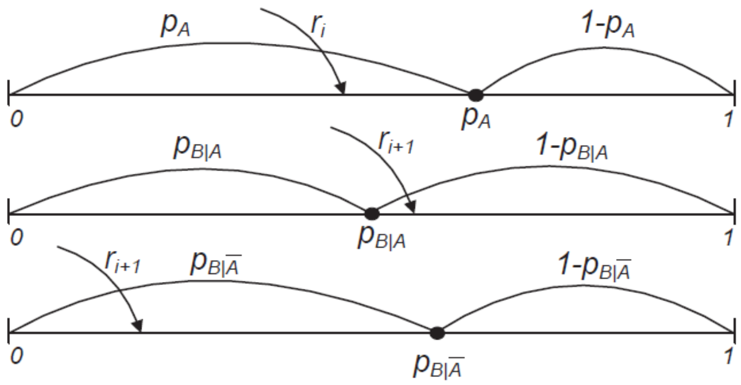



Рис. 6.5. Моделювання складних залежних подій

Таким чином моделюються складні залежні події.

### 6.2 Генератори псевдовипадкових чисел

Розглянемо основні методи моделювання неперервних і дискретних випадкових величин.

**Метод зворотної функції.** Згідно з визначенням функції розподілу $F_\xi(x)$ випадкової величини ξ, вона приймає значення на відрізку[0,1]. Тому для отримання реалізації $x_i$ неперервної випадкової величини ξ можна спочатку згенерувати за допомогою датчика випадкових чисел деяке число $r$, а потім знайти $x_i$, при якому $r_i = F_\xi(x_i)$ або $x_i = F_\xi^{-1}(r_i)$, де $F_\xi^{-1}$ - функція, зворотна відносно функції розподілу (рис. 6.6).

Тому розглянутий метод моделювання неперервної випадкової величини носить назву **методу зворотної функції**.

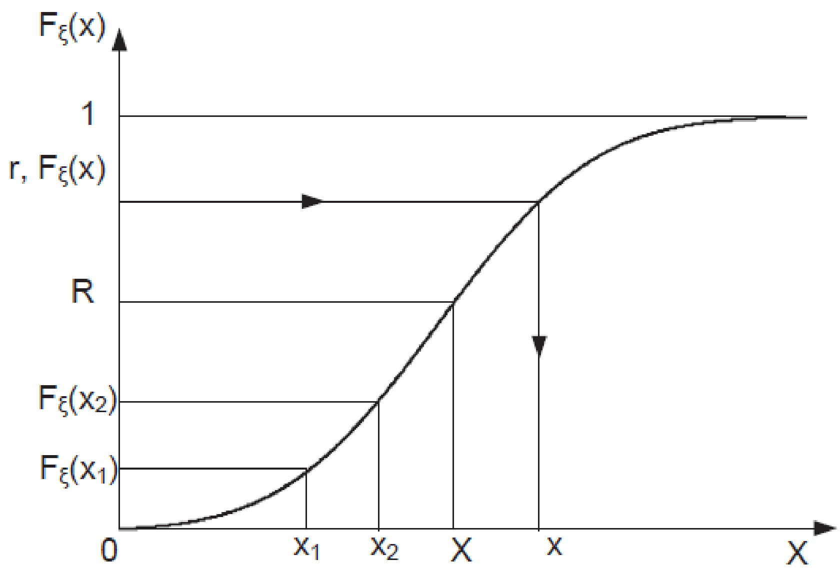



Рис. 7.6. Графік функції розподілу $F_\xi(x_i)$

Розглянемо моделювання випадкових величин, розподілених за різними законами, з використанням методу зворотної функції, граничних теорем теорії ймовірностей і за допомогою кускової апроксимації законів розподілу.

**Моделювання випадкової величини, розподіленої за нормальим законом**. Нормальний розподіл є видом розподілу, що найчастіше зустрічається. з ним доводиться стикатися при аналізі виробничих похибок, контролі технологічних процесів і режимів, при аналізі і прогнозуванні різних явищ. Цей закон є граничним, до якого наближаються інші закони розподілу.

Щільність розподілу нормального закону виражається формулою

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_\xi\sqrt{2\pi}} exp\left(\frac{(x - m_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}\right),$$

де $m_\xi$ - математичне очікування, $\sigma_\xi$ - стандартне середньоквадратичне відхилення.

Пронормуємо випадкову величину ξ, тобто розглянемо випадкову величину $\eta = (\xi - m_\xi)/\sigma_\xi$. М атематичне очікування і середньоквадратичне відхилення випадкової величини відповідно дорівнюють $m_\eta = 0$, $\sigma_\eta = 1$.

Для того щоб розіграти значення $x_i$ випадкової величини ξ , потрібно спочатку розіграти значення $y_i$ випадкової величини і від ньогоперейти до $x_i$ за формулою

$$x_i = \sigma_\xi y_i + m_\xi.$$

У разі розіграшу на ЕОМ застосовують спосіб, заснований на центральній граничній теоремі теорії ймовірностей.

Згідно з цією теоремою, при додаванні достатньо великого числа незалежних випадкових величин, порівнянних за своїми дисперсіями, отримується випадкова величина, розподілена приблизно за нормальним законом, причому цей закон тим ближче до нормального, чим більше випадкових величин додається.

Як показали дослідження, при додаванні 12 випадкових величин з рівномірним розподілом в інтервалі (0,1) отримується випадкова вели чина, яка з точністю, достатньою для більшості практичних задач, може вважатися нормальною.

Таким чином, процедура побудови нормально розподіленої випадкової величини ξ полягає в наступному:

1. Додають 12 випадкових величин $R_i$, рівномірно розподілених в інтервалі (0,1),

тобто складають суму

$$\mu = \sum_{i=1}^{12} R_i.$$

Випадкова величина $\mu$ має такі числові характеристики: математичне очікування

$$M(\mu) = m_\mu = \sum_{i=1}^{12} m_{Ri} = 12 \times \left(\frac{1}{2}\right) = 6$$

дисперсію

$$D(\mu) = \sum_{i=1}^{12} D(Ri) = 12 \times \left(\frac{1}{12}\right) = 1$$

і середньоквадратичне відхилення

$$\sigma_\mu = \sqrt{D(\mu)} = 1.$$

2. Нормують величину $\mu$, тобто переходять до величини $\eta = (\mu - m_\mu)/\sigma$.

3. Від величини $\eta$ переходять до величини ξ за формулою $\xi = \eta\sigma_\xi + m_\xi$.

На ЕОМ описана процедура реалізується алгоритмом:

1. За допомогою датчика випадкових чисел генерують 12 чисел $r_i$.

2. Обчислюють $x_i$ за формулою

$$x_i = \sigma_\xi \left(\sum_{i=1}^{12} r_i - 6\right)_i + m_\xi.$$

**Моделювання випадкової величини, розподіленої за показниковим законом**. З показниковим законом розподілу доводиться часто стикатися при визначенні показників надійності систем, дослідженні систем масового обслуговування й ін.

Щільність розподілу випадкової величини ξ, розподіленої за показниковим законом, виражається формулою:

$$p_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x} \, (x > 0),$$

а функція розподілу – формулою

$$F_\xi(x) = 1 - e^{-\lambda x} \, (x > 0),$$

де λ – параметр показникового закону.

Нехай параметр λ показникового закону заданий і потрібно провести розіграш $x_i$ випадкової величиниξ. Також можна скористатися методом зворотної функції:

1. За допомогою датчика випадкових чисел генерують число $r_i$.

2. Знаходять $x_i$ з умови $r_i = F_\xi(x_i) = 1 - e^{-\lambda x_i}$. Тоді $-\lambda x_i = In(1 - r_i)$, тобто

$$x_i = -\frac{In(1 - r_i)}{\lambda}.$$

Оскільки $r_i \in (0{,}1)$, то можна скористатися і формулою

$$x_i = -\frac{In(r_i)}{\lambda}.$$

**Моделювання випадкової величини, розподіленої за рівномірним законом**. Рівномірний розподіл використовується при вивченні помилок округлення й ін.

Нехай випадкова величина ξ рівномірно розподілена в інтервалі ($a$,$b$). Розглянемо випадкову величину $\eta = (\xi - a)/(b - a)$. Тоді $\eta$ рівномірно розподілена в інтервалі (0,1). При цьому $\xi = a + \eta(b - a)$.

Таким чином, отримання реалізації $x_i$ випадкової величини ξ проводять в два етапи:

1. За допомогою датчика випадкових чисел генерують число $r_i$.

2. Знаходять $x_i$ за формулою

$x_i = a + r_i(b - a)$.

**Моделювання випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона**. Закон Пуассона описує число подій, що відбуваються за однакові проміжки часу, за умови, що ці події відбуваються незалежно одна від одної. Розподілом Пуассона добре описуються число викликів на телефонну станцію за певний час доби, вихід негабаритів після вибуху гірських порід, число самородків при розробці родовищ золота й ін. закон Пуассона називають **законом появи рідкісних подій**.

Якщо випадкова величина ξ, що характеризує число настання деякої події, приймає цілочисельні значення k=0,1,2,… з ймовірностями

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

де k – число подій, λ – параметр розподілу), то вона розподілена за законом Пуассона.

Ймовірність попадання випадкової величини ξ в заданий інтервал, наприклад в інтервал [*m*,*n*], дорівнює

$$P(m \le \xi \le n) = p(m) + p(m+1) + \cdots + p(n) = e^{-\lambda}\sum_{k=m}^{n}\frac{\lambda^k}{K!}$$

Розіграш випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона, можна проводити відповідно до процедури розіграшу дискретної випадкової величини (див. підрозділ 6.1, моделювання повної групи подій). Відзначимо, що для розіграшу випадкової величини ξ потрібно мати датчик випадкових чисел, які мають рівномірний розподіл в інтервалі (0,1), і після розіграшу $r_i$ перевіряти справедливість нерівності

$$I_{k-1} < r_i \le I_k, \quad k = 0,1,2, \ldots$$

де $I_n = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{K!}$, (рис 6.7).

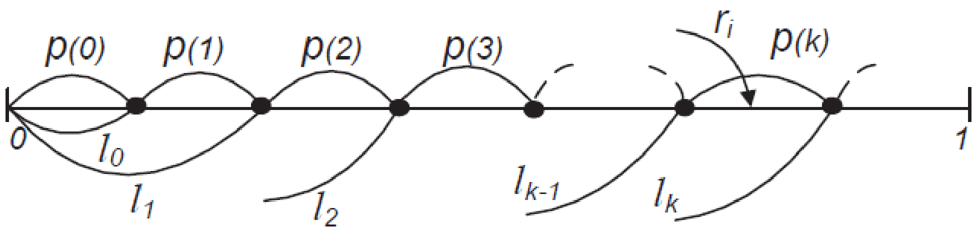



Рис. 6.7. Розіграш випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона

Проте такий підхід виявляється занадто трудомістким. Можна вчинити інакше.

з курсу теорії ймовірностей відомо, що закон Пуассона є граничним для біноміального розподілу, який має вигляд

$$p(k,n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

де $p(k,n)$ – ймовірність настання події *k* разів при *n* випробуваннях, якщо ймовірність настання події в кожному випробуванні дорівнює *p*; $C_n^k$ – число поєднань з n елементів по *k*.

Таким чином,

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ p\to 0\\ a=np}} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Це гранична властивість біноміального розподілу часто знаходить застосування на практиці. Допустимо, що проводиться велика кількість *n* незалежних дослідів, в кожному з яких подія А має дуже малу ймовірність *p*. Тоді для обчислення ймовірності того, що подія *A* відбудеться рівно *k* разів, можна скористатися формулою

$$P(k,n) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

де $\lambda = np$ – параметр закона Пуассона.

На підставі вищевикладеного процедура моделювання випадкової величини ξ, розподіленої за законом Пуассона, полягає у проведенні n випробувань, де ймовірність появи кожної події є малою величиною: $p \le 0.1$ (рідкісна подія):

1. Визначають число випробувань $n = \frac{\lambda}{p}$, де $p \le 0.1$. «Лічильнику числа подій» *k* привласнюється значення 0.

2. З сукупності випадкових чисел $\{r_i\}$з рівномірним розподілом в інтервалі (0,1) вибирають число $r_i$ і перевіряють умову $r_i \le p$. Якщо ця умова виконується, то *k* збільшується на одиницю, якщо не виконується – *k* не змінюється.

3. Після проведення n таких випробувань вміст лічильника числа подій *k* зчитується і використовується як випадкове число із законом розподілу Пуассона.

Схема проведення випробувань зображена на рис. 6.8.

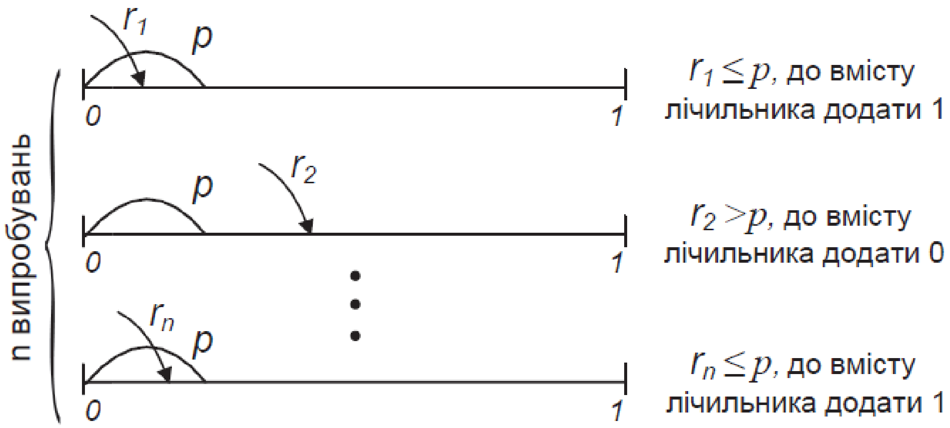



Рис. 6.8. Розіграш випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона

Таким чином моделюється випадкова величина, розподілена за законом Пуассона.

### 6.3. Метод Монте-Карло

Під методом Монте-Карло розуміють чисельний метод розв'язання аналітичних задач.

Сутність методу Монте-Карло полягає в наступному: потрібно знайти значення а деякої величини, що вивчається (розв'язок деякої аналітичної задачі). Для цього вибирають таку випадкову величину ξ , математичне очікування якої дорівнює *a* , тобто $M(\xi) = a$. Практично ж чинять таким чином:

1. Проводять *n* випробувань, у результаті яких отримують *n* можливих значень $x_i$ випадкової величини ξ (вибірку).

2. Обчислюють середнє арифметичне $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$ і приймають його як оцінку (наближеного значення) $a^*$ шуканого значення $a$. Оскільки метод Монте-Карло вимагає проведення великого числа випробувань, його часто називають **методом статистичних випро бувань**. Теорія цього методу вказує як найдоцільніше вибрати випадкову величину ξ, як знайти її можливі значення. Зокрема, розробляються способи зменшення дисперсії використовуваних випадкових величин, внаслідок чого зменшується помилка, що допускається при заміні шуканого математичного очікування а його оцінкою $a^*$.

Ідея методу Монте-Карло пізніше стала застосовуватися і для машинної імітації з метою дослідження характеристик процесів функціонування систем, схильних до випадкових дій, таким чином з'явився **метод статистичного моделювання** (див. підрозділ 2.1).

Датчик випадкових чисел, рівномірно розподілених в інтервалі (0;1), є базовим для побудови генераторів псевдовипадкових чисел з іншими законами розподілу.

Метод Монте-Карло – це чисельний метод розв’язання аналітичних задач, заснований на статистичних випробуваннях.

Метод статистичного моделювання – це метод машинної реалізації імітаційної моделі

## Тема 7.
## МОДЕЛІ ТЕОРІЇ ЧЕРГ.

### 7.1 Мережі Петрі

**Мережі Петрі** – це апарат для моделювання динамічних дискретних систем (переважно асинхронних паралельних процесів). Мережа Петрі визначається як четвірка $\langle P,T,I,O\rangle$, де $P$ і $T$ – скінченні множини позицій і переходів, $I$ і $O$ – множини вхідних і вихідних функцій. Іншими словами, мережею Петрі є дводольний орієнтований граф, в якому **позиціям** відповідають вершини, що зображуються кружечками, а **переходам** – вершини, що зображуються потовщеними рисками; функціям I відповідають дуги, направлені від позицій до переходів, а функціям $O$ – дуги, направлені від переходів до позицій (рис. 7.1).

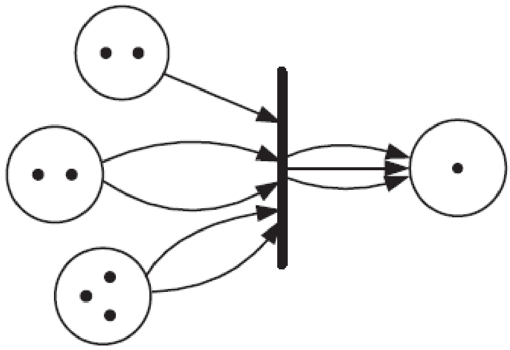


Рис. 7.1. Фрагмент мережі Петрі

Як і в системах масового обслуговування, в мережах Петрі вводяться об'єкти двох типів: динамічні, які зображуються **мітками** (**маркерами**) всередині позицій, і статичні, яким відповідають вершини мережі Петрі.

Розподіл маркерів за позиціями називають **маркуванням**. Маркери можуть переміщатися в мережі. Кожну зміну маркування називають подією, причому кожна подія пов'язана з певним переходом. Вважається, що події відбуваються миттєво і різночасно при виконанні деяких умов.

Кожній умові в мережі Петрі відповідає певна позиція. здійсненню події відповідає **спрацьовування** (збудження або запуск) переходу, при якому маркери з вхідних позицій цього переходу переміщаються у вихідні позиції. Послідовність подій утворює модельований процес.

Правила спрацьовування переходів (див. рис. 7.1) конкретизують таким чином: перехід спрацьовує, якщо для кожної з його вхідних позицій виконується умова $N_i > K_i$, де $N_i$ - число маркерів в *i*-й вхідній позиції, $K_i$ – число дуг, що йдуть від *i*-ї позиції до переходу; при спрацьовуванні переходу число маркерів в *i*-й вхідній позиції зменшується на $K_i$, а в *j*-й вихідній позиції збільшується на $M_j$, де $M_j$ - число дуг, що пов'язують на перехід з *j*-ю позицією.

На рис. 7.1 показаний приклад розподілу маркерів за позиціями перед спрацьовуванням, це маркування записують у вигляді (2,2,3,1). Після спрацьовування переходу маркування приймає вигляд (1,0,1,4). Можна вводити ряд додаткових правил і умов в алгоритми моделювання, отримуючи той або інший різновид мереж Петрі. Так, перш за все, корисно ввести модельний час, щоб моделювати не тільки послідовність подій, але і їх прив'язку до часу. Це здійснюється наданням переходам ваги – тривалості (затримки) спрацьовування, яку можна визначати, використовуючи алгоритм, що задається при цьому. Отриману модель називають **часовою мережею Петрі**.

Якщо затримки є випадковими величинами, то мережу називають **стохастичною**. У стохастичних мережах можливе введення ймовір- ності спрацьовування збуджених переходів. Так, на рис. 7.2 наведено фрагмент мережі Петрі, що ілюструє конфліктну ситуацію, – маркер у позиції $p$ може запустити або перехід $t_1$ або перехід $t_2$. У стохастичній мережі передбачається імовірнісний вибір переходу, що спрацьовує, в таких ситуаціях.

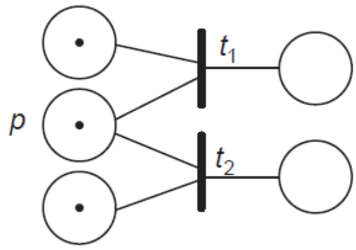



Рис. 8.2. Конфліктна ситуація

Якщо затримки визначаються як функції деяких аргументів, якими можуть бути кількість маркерів в яких-небудь позиціях, стани деяких переходів і тому подібне, то мережу називають **функціональною**.

У багатьох задачах динамічні об'єкти можуть бути декількох типів, і для кожного типу потрібно вводити (чи запроваджувати) свої алгоритми поведінки в мережі. У цьому випадку кожен маркер повинен мати хоча б один параметр, що позначає тип маркера. Такий параметр зазвичай називають кольором; колір можна використовувати як аргумент у функціональних мережах. Мережу Петрі при цьому називають **кольоровою**.

Серед інших різновидів мереж Петрі слід згадати інєібіморні мережі, що характеризуються тим, що в них можливі заборонні (інгібіторні) дуги. Наявність маркера у вхідній позиції, пов'язаній з переходом інгібіторною дугою, означає заборона спрацьовування переходу.

Введені поняття пояснимо на таких простих прикладах.

**Приклад 1.** Необхідно описати з допомогою мережі Петрі функціонування системи з підприємств *A, B* і *C* . Підприємства *A* і *B* поставляють вузли *X*1 І *X*2 відповідно, а на підприємстві *C* відбувається збирання, у кожен складальний вузол входить один вузол *X*1 і два вузли *X*2. На рис. 7.3 підприємствам *A, B* і *C* відповідають переходи $t_1$, $t_2$ і $t_3$.

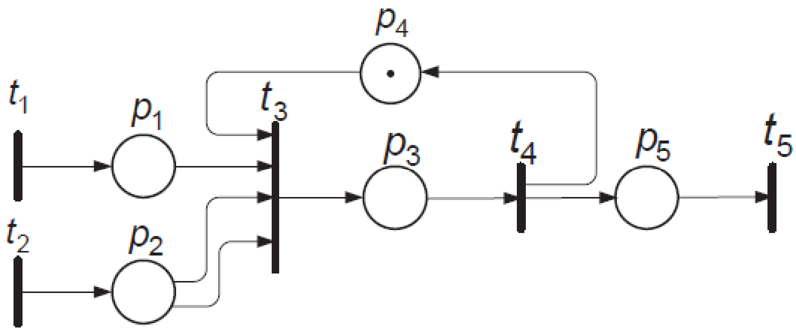



Рис. 7.3. Мережа Петрі для прикладу 1

Спрацювання переходу $t_3$ відбувається тільки в тому випадку, якщо, по-перше, в позиції$p_1$ $p_1$ є мітка, а в позиції $p_2$ – не менше двох міток, що означає надходження від підприємств *A* І *B* відповідних комплектуючих, і, по-друге, є мітка в позиції $p_4$, що означає, що підприємство С закінчило збирання попереднього виробу і готове приступити до збирання наступного. Поки черговий виріб не буде зібраний, мітки в $p_4$ не буде, отже, запити, що надійшли у вхідні позиції $p_1$ і $p_2$, змушені чекати спрацювання переходу $t_4$. Переходам $t_1, t_2$ і $t_3$ поставлені у відповідність процедури обчислення затримок спрацювання. Затримки в перших двох переходах дорівнюють інтервалам часу між появами готових вузлів, затримка в $t_3$ дорівнює часу збирання виробу.

**Приклад 2.** Потрібно описати за допомогою мережі Петрі процеси виникнення і усунення несправностей в деякій технічній системі, що складається з *M* однотипних блоків; в запасі є один справний блок; відомі статистичні дані про інтенсивності виникнення відмов і тривалість таких операцій, як пошук несправностей, заміна і ремонт блоку, який відмовив. На рис. 7.4 представлена відповідна мережа Петрі. Відзначимо, що при числі міток у позиції, що дорівнює *M*, можна в ній не ставити *M* точок, а записати в позиції значення *M*.

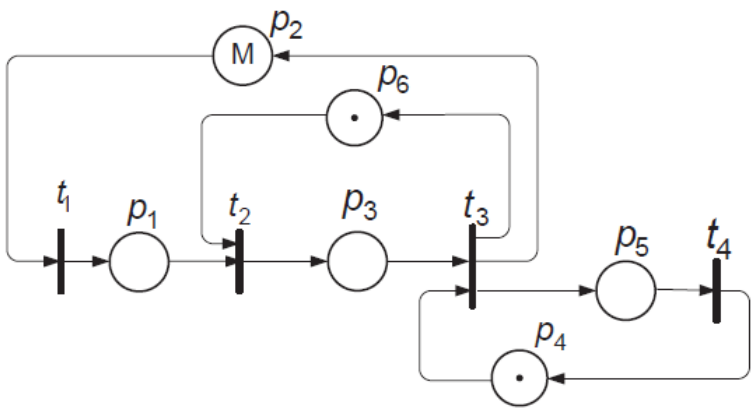



Рис. 7.4. Мережа Петрі для прикладу 2

У нашому прикладі значення *M* в позиції $p_2$ відповідає числу наявних у системі блоків. Переходи відображають такі події: $t_1$ – відмова блоку, $t_2$ - пошук несправного блоку, $t_3$ - його заміна, $t_4$ – закінчення ремонту.

Очевидно, що при непустій позиції $p_2$ перехід $t_1$ спрацьовує, але із затримкою, що дорівнює обчисленому випадковому значенню модельованого відрізку часу між відмовами. Після виходу маркера з $t_1$ він потрапляє через $p_1$ в $t_2$, якщо є мітка в позиції $p_6$, це означає, що обслуговуюча систему бригада фахівців вільна і може приступити до пошуку несправності, що виникла. У переході $t_2$ мітка затримується на час, що дорівнює випадковому значенню тривалості пошуку несправності. Далі маркер $p_3$ і якщо є запасний блок (маркер $p_4$), то запускається перехід $t_3$, з якого маркери вийдуть в $p_2$, $p_5$ і $p_6$ через відрізок часу, необхідний для заміни блока. Після цього в $t_4$ імітується відновлення несправного блока.

Дана модель описує функціонування системи в умовах, коли відмови можуть виникати і в робочому, і в несправному станах системи. Тому не виключені ситуації, при яких більш ніж один маркер опиниться в позиції $p_1$.

### 7.2 Ланцюги Маркова

Марківські випадкові процеси названі за ім'ям видатного російського математика А.А. Маркова (1856 – 1922), який вперше почав вивчення імовірнісного зв'язку випадкових величин і створив теорію, яку можна назвати «динамікою ймовірності». Надалі основи цієї теорії стали початковою базою загальної теорії випадкових процесів, а також таких важливих прикладних наук, як теорія дифузійних процесів, теорія надійності, теорія масового обслуговування (теорія черг) і т. д. Нині теорія марківських процесів і її застосування широко застосовуються в найріз- номанітніших сферах.

Завдяки порівняній простоті і наглядності математичного апарату, високій достовірності і точності отримуваних розв'язків, особливої уваги марківські процеси набули у фахівців, які займаються дослідженням операцій і теорією прийняття оптимальних рішень.

Перш ніж дати опис загальної схеми ланцюгів Маркова, розглянемо простий приклад.

**Приклад 3.** Припустимо, що мова йде про послідовні кидання монети при грі «в орлянку»; монета кидається в умовні моменти часу $t = 0,1,2,\dots$ і на кожному кроці гравець може виграти $\pm 1$ з однаковою ймовірністю ½. Таким чином, в момент $t$ його сумарний виграш є випадковою величиною $\xi(t)$з можливими значеннями $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ За умови, що $\xi(t) = k$, на наступному кроці виграш буде вже дорівнювати $\xi(t+1) = k \pm 1$, приймаючи вказані значення $i = k \pm 1$ з однаковою ймовірністю 1/2 . Умовно можна сказати, що тут з відповідною ймовірністю відбувається перехід зі стану $\xi(t) = k$ у стан $\xi(t+1) = k \pm 1$.

Узагальнюючи цей приклад, можна уявити собі систему із зліченим числом можливих «фазових» станів, яка з плином дискретного часу $t = 0,1,2,\dots$ випадково переходить зі стану у стан. Нехай $\xi(t)$ є її стан у момент $t$ в результаті ланцюжка випадкових переходів:

$$\xi(0) \to \xi(1) \to \xi(2) \to \cdots \to \xi(t) \to \cdots \qquad (7.1)$$

Формально позначимо всі можливі стани через ξ. Припустимо, що при відомому стані $\xi(t) = \xi_k$ на наступному кроці система переходить у стан $\xi(t+1) = \xi_i$ з умовною ймовірністю

$$p_{ki} = P(\xi(t+1) = \xi_i | \xi(t) = \xi_k \qquad (7.2)$$

незалежно від її поведінки у минулому, точніше, незалежно від ланцюжка переходів (7.1) до моменту $t$:

$$P(\xi(t+1) = \xi_i | \xi(0) = \xi_m, \dots, \xi(t) = \xi_k) = P(\xi(t+1) = \xi_i | \xi(t) = \xi_k) \forall t, k, i. \qquad (7.3)$$

Умова (7.3) називається **марківською властивістю**.

Таку імовірнісну схему називають о**днорідним ланцюгом Маркова зі зліченим числом станів**.

Її однорідність полягає в тому, що визначені в (7.2) **перехідні ймовірності** $p_{ki}(\sum_i p_{ki} = 1, \forall k)$, не залежать від часу. При цьому матриця $P = \{p_{ki}\}$ називається **матрицею ймовірності переходу** за один крок і не залежить від номера кроку. Ясно, що $P = \{p_{ki}\}$ квадратна матриця з невід'ємними елементами й одиничними сумами по рядках. Така матриця (скінченна або нескінченна) називається **стохастичною матрицею**. Будь-яка стохастична матриця може служити матрицею перехідних ймовірностей.

Ланцюгом Маркова першого порядку називається одна з форм марківських процесів, для якої кожний конкретний стан залежить тільки від безпосередньо попереднього (описаний вище). Ланцюгом Маркова другого і вищих порядків називається процес, в якому поточний стан залежить від двох і більше попередніх.

Математичні моделі, що використовують ланцюги Маркова, є перехідними між детермінованими і чисто випадковими моделями.

Багато природних процесів можна вважати марківськими. Припустимо, що є серія щотижневих спостережень за рівнем води в річці, яка потрапляє в одну з трьох градацій –

низький, нормальний, високий. за цими даними складена табл. 7.1 частот переходу від одного стану до іншого.

Таблиця 7.1 - Частота переходу від одного стану до іншого

| Від стану | До стану | | | Сума по рядку |
|---|---|---|---|---|
| | низький | нормальний | високий | |
| низький | 12 | 6 | 0 | 18 |
| нормальний | 5 | 80 | 15 | 100 |
| високий | 0 | 1щ | 16 | з0 |

Якщо поділити кожне число на суму по відповідному рядку, отримаємо ймовірність переходу від одного стану до іншого. Це, безумовно, буде не дійсне значення ймовірності, а її статистична оцінка. Ці оцінки наведені в табл. 7.2.

Таблиця 7.2 - Ймовірність переходу від одного стану до іншого

| Від стану | До стану | | | Сума по рядку |
|---|---|---|---|---|
| | низький | нормальний | високий | |
| низький | 0,67 | 0,зз | 0,00 | 1,00 |
| нормальний | 0,05 | 0,80 | 0,15 | 1,00 |
| високий | 0,00 | 0,щ7 | 0,5з | 1,00 |

Тоді матриця ймовірностей переходу має вигляд:

$$P = \begin{pmatrix} 0.67 & 0.33 & 0.00 \\ 0.05 & 0.80 & 0.15 \\ 0.00 & 0.47 & 0.53 \end{pmatrix}$$

Відзначимо, що якщо побудована матриця ймовірності переходу, то тим самим побудована модель випадкового процесу (системи), а значить можна зробити прогноз про майбутній стан системи.

Такий метод прогнозування (побудований на основі ланцюгів Маркова) може бути використаний для прогнозу значення множини показників, які змінюються в часі одночасно, але безпосередньо функціональні зв'язки між ними не встановлені зважаючи на відсутність інформації або крайньої складності цих зв'язків. Прикладом може служити прогноз потреб галузей народного господарства в ресурсах. При реалізації такого прогнозу встановлюється на перспективу сама структура споживання ресурсів різними галузями.

Так, нехай $a = a_i$ - набір *n* прогнозованих показників, *T* – інтервал спостережень за значеннями показників, $A_T = a_{it}$ - матриця розмірності $n \times T$ значень *i*-го показника у момент часу $t(t = \overline{1,T})$. Тоді, якщо відома матриця переходів $P = \{p_{ki}\}$ (розмірності $n \times n$) прогноз обчислюється як

$$A_{T+1} = PA_T;\ A_{T+2} = P^2 A_T; \ldots;\ A_{T+k} = P^k A_T.$$

Мережі Петрі і ланцюги Маркова можуть використовуватися як для моделювання систем масового обслуговування, так й інших систем.

Для розширення сфери застосування мереж Петрі при моделю- ванні систем вводяться різноманітні різновиди цих мереж.

**Тема 8.**

# УЗАГАЛЬНЕНА МОДЕЛЬ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ. СИСТЕМНІ ОБ’ЄКТИ, СИСТЕМНІ ФУНКЦІЇ. ФУНКЦІОНАЛЬНІ ОБ’ЄКТИ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ.

## 8.1 Глобальна модель об’єктів систем керування.

Глобальна модель комп’ютерної системи вперше була запропонована Николайчуком Я.М. у вигляді взаємодії пятьох типів системних об’єктів (рис.1.1) [53].

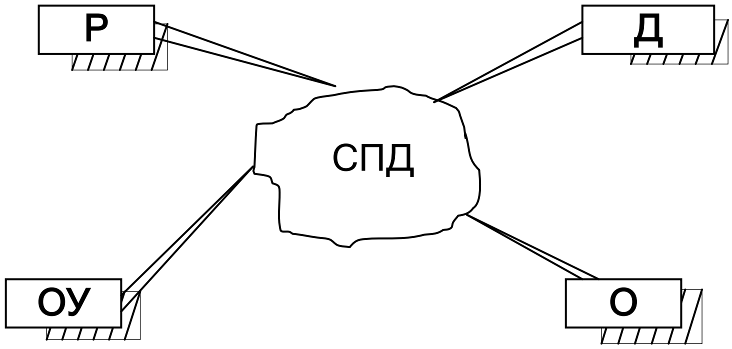



Рис.8.1 - Глобальна модель комп’ютерної системи:

На рис.8.1 позначено:

Р – процесор,

Д – дані,

СПД – система передавання даних,

ОУ – об’єкт управління,

О – оператор.

Кожен з наведених системних об’єктів може виконувати в середовищі КС чотири системні функції:

– формування даних ;
– передавання даних;
– цифрова обробка даних;
– приймання та зберігання даних.

Тобто, кожен з системних об’єктів (СО) може бути одним з функціональних об’єктів наступного типу:

– джерело інформації (ДІ);
– середовище передавання інформації (СПІ);
– середовище цифрової обробки інформації (СОІ);
– приймач інформації (ПІ).

Отже, системні об’єкти КС характеризуються дуальними (поліфункціональними) властивостями, що в значній мірі ускладнює методологію проектування та теоретичні основи оптимізації параметрів КС.

## 8.2 Глобальна модель об’єктів систем керування.

Виходячи з класифікації п’яти системних об’єктів КС, можна побудувати таблицю пар їхньої взаємодії через інтерфейсні засоби комунікацій (табл.8.1).

Очевидно, що для вивчення названих інтерфейсних взаємодій СО та використання їх при проектуванні КС необхідно описати взаємодію 25–ти їхніх пар. В той же час, враховуючи, що теорія, методологія та техніка реалізації КС на основі стандартних технічних засобів, міжнародних протоколів та інтерфейсів достатньо повно подана у відповідних виданнях та інструкціях, при проектуванні низових рівнів проблемно–орієнтованих та спеціалізованих КС особливу увагу слід надавати вивченню системних характеристик об’єктів управління та їх взаємодії з іншими об’єктами КС.

Таблиця 8.1.

| | Р | Д | СПД | ОУ | О |
|---|---|---|---|---|---|
| Р | Р→Р | Р→Д | Р→СПД | Р→ОУ | Р→О |
| Д | Д→Р | Д→Д | Д→СПД | Д→ОУ | Д→О |
| СПД | СПД→Р | СПД→Д | СПД→СПД | СПД→ОУ | СПД→О |
| ОУ | ОУ→Р | ОУ→Д | ОУ→СПД | ОУ→ОУ | ОУ→О |
| О | О→Р | О→Д | О→СПД | О→ОУ | О→О |

Дані взаємодії ОУ та СПД з іншими СО відображені в табл.8.1 відповідним фоном. Широка різноманітність реальних ОУ (наприклад, космічні апарати, літаки, підводні та наземні човни, атомні станції, енергетичні та нафтопромислові системи, транспортні засоби, інформаційні системи, телекомунікації та інше) вимагає відповідної проблемної орієнтації та адаптації КС до характеристик ОУ при проектуванні та іналізі діючих КС.

Ця адаптація потребує по - новому осмислити формалізацію опису характеристик системних об’єктів.

## Тема 9.
## ХАРАКТЕРИСТИКИ МОДЕЛЕЙ ОБ'ЄКТІВ ТА СИСТЕМ КЕРУВАННЯ.

### 9.1 Формалізація опису характеристик системних об'єктів КС

У загальному випадку ресурсні характеристики СО проектованої КС можуть бути достатньо повно описані функціоналом, який заданий коефіцієнтом $Eco$ та четвіркою параметрів

$$Eco = F(T,V,M,S), \qquad (9.1)$$

де $T$ –час використання ресурсу, $V$ –швидкість виконання системних операцій (формування, передавання, цифрова обробка та зберігання даних), $M$ –об'єм використовуваного ресурсу пам'яті, $S$ –системні функції.

При цьому границі зміни параметрів задаються системою нерівностей

$$\begin{aligned} 0 \le T &\le T_0; \\ 0 \le V &\le V_0; \\ 0 \le M &\le M_0; \\ 0 \le S &\le S_0, \end{aligned} \qquad (9.2)$$

де $T_0$ – час формування, передавання, цифрової обробки та зберігання даних, використання технічного засобу та інше, $V_0$–пропускна здатність каналу зв'язку, максимальна швидкість читання/запису, максимальна частота обміну даними та інше, $M_0$– максимальний об'єм пам'яті, що використовується (ОЗП, ПЗП, магнітних, оптичних, та твердих копій носіїв), $S_0$– максимальний ресурс системних функцій (операційні системи, пакети прикладних програм тощо).

Якщо задати нормовані границі зміни кожного параметра (9.1) в діапазоні від 0 до 1, то реалізація коефіцієнта $Eco$ отримає вигляд:

$Eco = F(0.3{,}0.4{,}0.7{,}0.2)$.

Даний коефіцієнт доцільно привести до безрозмірної форми на основі функції адитивності $E_{co} = \dfrac{T+V+M+S}{4}$, що забезпечує діапазон зміни $Eco$ в межах $0 \le E_{co} \le 1$ та відповідає гіпотезі про статистичну незалежність ресурсних параметрів СО (9.1). При цьому економічна собівартість руху даних може бути обчислена на основі рівняння:

$$P_{co} = E_{co} \cdot P_0 - V_0, \qquad (9.3)$$

або

$$P_{co} = \frac{T+V+M+S}{4} \cdot P_0 - V_0, \qquad (9.4)$$

де $P_0, V_0$ – відповідно прибутки та затрати на реалізацію функцій СО.

На рисунку 9.1 показані характеристики собівартості руху даних на рівні формалізованого опису системного об'єкту.

Аналогічні формули можуть бути застосовані для інших системних об'єктів, в яких формальні параметри $S$ будуть відрізнятися наступними системними функціями:

$P$ – процесор (апаратне, системне та прикладне програмне забезпечення );

$Д$ – дані (зберігання даних в архівах, способи кодування даних, захист від помилок, захист від несанкціонованого доступу, семантичні властивості даних і.т.д. ) ;

*СПД* – мережеве програмне забезпечення, оптимізація маршрутів передавання даних, використання спецканалів, інформаційна технологія моделювання руху даних ;

*ОУ* – характеристики стаціонарності, нестаціонарності, квазістаціонарності, інформаційні технології кодування станів та контролю їхнього відхилення від норми, статистичні, кореляційні та ентропійні моделі, функції керування та побудови моделей руху даних;

*О* – система знань та професійних навиків і.т.д.

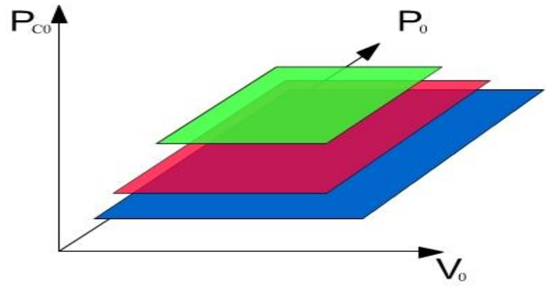



Рис.9.1. Характеристики собівартості руху даних системного об’єкту.

Функціонал характеристик системних об’єктів в багатьох випадках доцільно розширити до п’яти параметрів шляхом диференціації параметру швидкості виконання системних операцій, тобто $V_R$–швидкість запису (вхідний інформаційний потік), $V_W$–швидкість зчитування (вихідний інформаційний потік), звідки характеристики системного об’єкта будуть описуватися параметрами:

$$Eco = F(T, V_R, V_W, M, S). \qquad (9.5)$$

Характеристика (9.5) дозволяє врахувати асиметричність характеристик швидкодії вхідних та вихідних пристроїв системних об’єктів.

Розроблені аналітичні моделі характеристик системних об’єктів комп’ютерної мережі є базою для теоретичної формалізації руху даних. На основі вказаних моделей проводиться аналіз ефективності та розробка проектів комп’ютерних мереж з проблемною орієнтацією для конкретних технологічних процесів та підприємств.

*Системні характеристики процессора.*

Процесори (Р) містять в своєму складі інтелектуальні оснащені однокристальними спецпроцесорами сенсори, сигнальні процесори, мікро– та міні–контролери, контролери низових мереж, комутаційні процесори, сервери та комп’ютерні кластери. Системні характеристики Р достатньо повно описуються функціоналом (9.1)

$$Ep = F(T, V, M, S),$$

де $T$ – час використання ресурсу, $V$ – швидкість виконання системних операцій $V_R / V_W$, $M$ – об’єм використовуваного ресурсу пам’яті, $S$ – системні функції операційної системи та прикладного програмного забезпечення.

Параметр часу використання ресурсу $T$ оцінюється у відсоткових значеннях його безперервної роботи протягом доби. Використання ресурсу даної характеристики залежить від типу та призначення процесорів. Наприклад, мікропроцесори, технологічні мікроконтролери та промислові процесори призначені для цілодобової роботи, тобто $T = 1.0$. Для процесорів ЕОМ режим роботи може складати 6, 8 або 16 годин в добу, що відповідає використанню ресурсу відповідно $T_i = 0.25, 0.3, 0.6$.

Характеристика використання об’єму ресурсів пам’яті процесора $M$ також залежить від конкретної інформаційної технології її застосування. Наприклад, мікроконтролери масового застосування на основі 8 та 16 розрядних мікропроцесорів, які оперують з обмеженою пам'яттю, використовують її ресурси практично на 100 відсотків, тобто $M_i = 1.0$. В процесорах універсального призначення, якими оснащено ПЕОМ, використання ресурсів пам'яті залежить від характеру задач, які вирішує оператор та динамічності їх реалізації в часі, тобто дану оцінку треба розраховувати на основі математичного сподівання :

$$\overline{M}_i = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} M_i\ , \tag{9.6}$$

де $M_i$ – поточні або миттєві коефіцієнти використання ресурсів пам'яті процесора. Аналогічно може бути обчислена характеристика використання ресурсів функціональних характеристик процесора ( $S_i$ ).

Приклад вхідних та вихідних інформаційних сигналів процесорів поданий в табл.9.1.

Таблиця 9.1 - Формувачі сигналів процесора

| Формувачі вхідних та вихідних інформаційних сигналів процесора | Характеристики інформаційних потоків |
|---|---|
| Паралельний порт | 1 Гбіт/с |
| Послідовний порт | 100 Мбіт/с |
| Маніпулятор мишка | 8 біт/с |
| Клавіатура | 8–12 біт/с |
| Модем | 10–100 Мбіт/с |
| Мікрофон | 2000 * 8=біт/с 2,4–3,6 кГц |
| Технологічний сканер | 100 Мбіт/с |

Аналіз табл.9.1 показує, що швидкість створення повідомлень процесорів може змінюватися в широких межах. Діапазон швидкості обміну даними процесорів може змінюватися в межах 1–109 біт/с.

### 9.2. Системні характеристики даних.

Сучасна систематизація даних охоплює три їх основні класи:

– фізичні дані;
– логічні дані;
– віртуальні дані.

Ресурсні характеристики СО „Дані" – представлені часом зберігання, швидкістю запису, швидкістю зчитування, об'ємом та захистом даних від помилок

$$E_d = F\left(T, M, V_R, V_W, S\right),$$

де – $T$ – час зберігання, $M$ – об'єм, $V_R$ – швидкість запису, $V_W$ – швидкість зчитування, $S$ – захист від помилок та несанкціонованого доступу.

Фізичні дані – це дані, які представлені в адресному просторі фізичних носіїв (жорстких магнітних дисків, гнучких магнітних дисків, оптичних та лазерних дисків), а також на твердих носіях (документи, таблиці, графіки).

Поняття логічних даних використовується в теорії та практиці опису логічних моделей баз даних, а також в програмних продуктах як формальні параметри.

Віртуальні дані – це такий тип даних, які відсутні в фізичному вигляді в КС і можуть формуватися в процесі рішення задач, розрахунків, а також бути в динамічному стані при передаванні в КМ.

Способи кодування даних визначаються теоретико–числовими базисами (ТЧБ), які застосовуються для їх представлення. Найбільш широко вживаними ТЧБ в сучасних КС є наступні базиси: унітарний, Хаара, Крейга, Грея, Радемахера, Крестенсона, Уолша та Галуа, кодові матриці яких подані на рис.9.2.

$$\mathrm{M}_{\mathrm{Uni}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

а)

$$M_{har} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

б)

$$M_{Gr} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

в)

$$M_{Rad} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

г)

$$M_{LibCr} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

д)

$$M_{Cres} = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 4 & \dots & 4 \\ 2 & 0 & \dots & 5 \\ 0 & 1 & \dots & 6 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

е)

$$M_{Gal} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

є)

Рис. 9.2 - Кодові матриці дискретних базисів: а) – унітарного; б) –Хаара; в) – Грея; г) – Радемахера; д) –Крейга; е) –Крестенсона; є)–Галуа.

Кожен з названих базисів характеризується визначеним об’ємом кодової матриці для представлення даних. При цьому найбільш надлишковим базисом є унітарний, в якого кодова матриця $V = N^2$ , а число активних кодових елементів $n = N^2 / 2$, де $N$ – діапазон кодування даних. Аналогічну надлишковість забезпечує базис Хаара, в два рази меншу надлишковість забезпечує базис Крейга, тобто $V = N^2 / 4$, а $n = N^2 / 8$. Максимально широке застосування для кодування даних в сучасних КС отримали базиси Радемахера та Крестенсона, в яких $V = N \log_2 N$. Дані базиси відповідно породжують двійкову систему числення та систему числення залишкових класів.

Базис Уолша максимально широко використовується в сучасних телекомунікаційних КС. Даний базис породжує систему ортогональних шумоподібних сигналів, які використовуються в сотових системах мобільного зв’язку.

Найменшу надлишковість кодування даних забезпечує базис Галуа, кодова матриця якого $V = N$, а $n = N / 2$ .

Згідно викладеного, характеристики ТЧБ кодування даних, як системного об’єкта, подані в табл.9.2.

Таблиця 9.2 - Характеристики потоків даних

| Формувачі вхідних та вихідних інформаційних сигналів даних | Характеристики інформаційних потоків даних |
|---|---|
| Унітарний базис | $V = N^2$; $n = N^2 / 2$ |
| Базис Хаара | $V = N^2$, $n = N$ |
| Базис Крейга | $V = N^2 / 4$, $n = N^2 / 8$ |
| Базис Радемахера | $V = N \cdot \log_2 N$, $n = \frac{N}{2} \log_2 N$ |
| Базис Крестенсона | $V = N \cdot \log_2 N$ |
| Базис Уолша | $V = N^2, n = N^2 / 2$ |
| Базис Галуа | $V = N$, $n = N / 2$ |

## 9.3. Характеристики моделей об’єктів управління.

Об’єкт управління адекватно може бути описаний характеристичними параметрами – часом, ентропією, моделлю об’єкта та системними функціями:

$$E_{OY} = F(T, M, I, S),$$

де $T$ – час,

$M$ – модель об’єкта,

$I$ – ентропія,

$S$ – системні функції.

Найважливішими системними характеристиками ОУ є модель об’єкта, ентропія та системні функції.

Найважливіші моделі ОУ представлені в табл.10.3.

Таблиця 10.3 - Типи моделей

| № | Типи моделей ОУ | Аналітичний вираз |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | Сигнальні аналогові | $M = X(t)$ |
| 2 | Сигнальні дискретизовані і квантовані | $M = X_i$, $i \in \overline{1,n}$, $0 \le x_i \le A$,<br>де $X_i$ –дискретизоване квантоване значення ОУ, $n$ –об’єм вибірки, $A$ –діапазон квантування |
| 3 | Дискретні диференціальні | $M = \Delta X_i = X_{i+1} - X_i$,<br>де $\Delta X_i$ –перші прирости станів ОУ. |
| 4 | Дискретні інтегральні | $M = \sum_{i=1}^{k} X_i$,<br>де $k$ –число сумувань дискретних станів ОУ. |
| 5 | Статистичні: | |
| 5.1 | вибіркове математичне сподівання | $M_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ |

| | | |
|---|---|---|
| 5.2 | ковзне математичне сподівання | $M_j = \frac{1}{m}\sum_{i=1+j}^{m+j} X_{i+j}$, $j = 0,1,2,...$<br>де $j = 0,1,2,...$ –дискретний зсув; |
| 5.3 | вагове математичне сподівання | $M_v = \sum_{i=1+j}^{m+j} V_{i-j} \cdot X_{i+j}$,<br>де $V_i$ –вагова функція; |
| 5.4 | дисперсія | $D_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_x)^2$ |
| 5.5 | середньоквадратичне відхилення | $\sigma_x = \sqrt{D_x}$ |
| 6 | Автокореляційні моделі | |
| 6.1 | знакова | $B_{xx}(j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} sign\, \overset{o}{x}_i \cdot sign\, \overset{o}{x}_{i+j}$<br>$sign\, \overset{o}{x}_i = \begin{cases} +1, \overset{o}{x}_i \geq 0 \\ -1, \overset{o}{x}_i < 0 \end{cases}$; |
| 6.2 | релейна | $H_{xx}(j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overset{o}{x}_i \cdot sign\, \overset{o}{x}_{i+j}$ |
| 6.3 | коваріаційна | $K_{xx}(j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot x_{i+j}$ |
| 6.4 | кореляційна | $R_{xx}(j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overset{o}{x}_i \cdot \overset{o}{x}_{i+j}$ |
| 6.5 | нормована кореляційна | $\rho_{xx}(j) = \frac{R_{xx}(j)}{D_{xx}}$ |
| 6.6 | структурна | $C_{xx}(j) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i+j})^2$ |
| 6.7 | модульна | $G_{xx}(j) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n}\lvert x_i - x_{i+j}\rvert$ |
| 6.8 | нормована модульна | $g_{xx}(j) = \frac{C_{xx}(j)}{M_x} - M_x$ |
| 6.9 | еквівалентна | $F_{xx}(j) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \check{Z}_{ij}$;<br>$\check{Z}_{ij} = \begin{cases} x_i, & x_i < x_{i+j} \\ x_j, & x_i \geq x_{i+j} \end{cases}$. |

| | | |
|---|---|---|
| 7 | Взаємокореляційні моделі між двома параметрами ОУ | |
| 7.1 | взаємознакова | $B_{xy}(j)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} sign\,\overset{o}{x}_i \cdot sign\,\overset{o}{y}_{i+j}$ |
| 7.2 | взаєморелейна | $H_{xy}(j)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overset{o}{x}_i \cdot sign\,\overset{o}{y}_{i+j}$ |
| 7.3 | взаємоковаріаційна | $K_{xy}(j)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overset{o}{x}_i \cdot \overset{o}{y}_{i+j}$ |
| 7.4 | взаємокореляційна | $R_{xy}(j)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overset{o}{x}_i \cdot \overset{o}{y}_{i+j}$ |
| 7.5 | нормована взаємокореляційна | $P_{xy}(j)=\frac{R_{xy}(j)}{\sqrt{D_x+D_y}}$, якщо $j=0$, то $Pxy(0)$ – нормований коефіцієнт взаємокореляції $P_{xy}(0)=\frac{R_{xy}(0)}{\sqrt{D_x+D_y}}$. |
| 8 | Взаємокореляційна матрична модель ОУ | $\begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1j} & \cdots & \rho_{1m} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2j} & \cdots & \rho_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{i1} & \rho_{i2} & \cdots & \rho_{ij} & \cdots & \rho_{im} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{ni} & \rho_{n2} & \cdots & \rho_{nj} & \cdots & \rho_{nm} \end{vmatrix}$, де $\rho_{ij}=\frac{R_{ij}(0)}{\sqrt{D_i+D_j}}$ – нормований коефіцієнт взаємокореляції між параметрами ОУ, $R_{ij}$ – взаємокореляційна модель між $i$ та $j$ параметром. |

## Тема 10

## СПЕКТРАЛЬНІ МОДЕЛІ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ. КЛАСТЕРНІ МОДЕЛІ КВАЗІСТАЦІОНАРНИХ ОБ'ЄКТІВ ТА СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

### 10.1. Спектральні моделі ОУ.

Спектральні моделі моделі ОУ будуються на основі ортогональних функцій різних базисів:

– Фур'є, синусоїдальні функції;
– Хаара, фазоімпульсні функції;
– Крейга, широтно–імпульсні функції;
– Крестенсона, пилоподібні трикутні функції;
– Радемахера, меандрові прямокутні функції;
– Уолша, в якому використовуються шумоподібні дискретні функції;
– Галуа, в якому використовуються зсуви однієї з шумоподібних функцій Уолша.

Спектральні характеристики $S_{(W)}$ можуть бути представлені в класі ортогональних функцій різних теоретико–числових базисів Фурє, Радемахера, Хаара, Крейга, Крестенсона, Уолша та Галуа у вигляді мультиплікативної інтегральної оцінки на основі коефіцієнта взаємокореляції

$$S_{(W)} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Z_{xx}(j)\cdot W_j \ ,$$

де $Z_{xx}(j)$– одна з автокореляційних моделей , $W_j$ – гармоніка ортогональної функції відповідного теоретико - числового базису. Слід зауважити, що на практиці для реальних ОУ кореляційні моделі характеризуються нестаціонарною дисперсією, тобто $D_j \to 0, (j = 0,1,2...n)$. Тому для ліквідації ефекту появи “від'ємних частот ”, коли $S_{(W)} < 0$, що протирічить фізичним станам ОУ, в рівняння вводять вагову функцію

$$W_j = e^{-\alpha j},$$

де $\alpha$ –коефіцієнт затухання ковзної дисперсії автокореляційної моделі. В результаті отримаємо загальну формулу для розрахунку спектральних характеристик ОУ у будь–якому теоретико–числовому базисі:

$$S_{(W)} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Z_{xx}(j)\cdot W_j \cdot e^{-\alpha j} \ .$$

Для забезпечення необхідної точності обчислення спектральної характеристики станів ОУ $S_{(W)}$ величина $m$ вибирається з умови забезпечення інтервалу кореляції згідно обмеження

$$m = j, \rho_{xx}(j+1) \le 0.01 .$$

### 10.2. Інформаційна технологія побудови кластерних моделей систем керування.

Інформаційна технологія побудови кластерних моделей квазістаціонарних ОУ базується на теорії побудови продукційних моделей подання знань.

При цьому на коефіцієнти матриці $\left|P_{ij}\right|$

$$\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1j} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2j} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{i1} & P_{i2} & \dots & P_{ij} & \dots & P_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{m1} & P_{m2} & \dots & P_{mj} & \dots & P_{mn} \end{vmatrix},$$

де $P_{ij}$ - ймовірність переходу об'єкту з і-го стану в j-й, накладається додаткова логіко–статистична умова апертури $\alpha$

$$K_{ij} = P_{ij} \cdot k_{ij},$$

$$k_{ij} = \begin{cases} 1, & P_{ij} \ge \alpha \\ 0, & P_{ij} < \alpha \end{cases} \quad 0 \le \alpha \le 1,$$

де $\alpha$ – коефіцієнт інформаційної значимості елемента $P_{ij}$. Коефіцієнт кластеризації $K_{ij}$ приводить до кластеризації матриці $P_{ij}$, в якій значення елементів $P_{ij} \ge \alpha$ залишаються без змін, а елементи $P_{ij} < \alpha$ дорівнюють нулю.

Наприклад, маємо наступну матрицю $P_{ij}$ для $n = 4$; $\alpha = 0{,}7$:

$$\begin{vmatrix} 0.8' & 0.4 & 0.2 & 0.75' \\ 0.1 & 0.9' & 0.6 & 0.4 \\ 1.0' & 0.3 & 0.7' & 0.1 \\ 0.8' & 0.2 & 0.9' & 0.5 \end{vmatrix},$$

де позначені інформативні елементи, для яких виконується умова $P_{ij} \ge 0.7$, що відповідає кластеризованій бінарній матриці, аналогічній матриці інциденції

$$\begin{array}{c|cccc|} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ S_1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ S_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ S_3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ S_4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}.$$

Кластеризована матриця $P_{ij}$ є основою для побудови трьох типів кластерних моделей:

– таблична кластерна модель;
– ієрархічна графова однорівнева кластерна модель;
– повнозв'язна графова кластерна модель.

Таблична кластерна модель (рис.1.4) відповідає регламентним переходам об'єкта ОУ з одного стану в інший. При відхиленні статистики переходів ОУ від нормативних в кластерній матриці з'являється фіксація ненормативних $P_{ij}$ переходів, що демонструється індикацією зникнення регламентних переходів або появою нерегламентних. Недоліком даної кластерної моделі є її неієрархічність, яка відображена в графовій однорівневій кластерній моделі (рис.10.1).

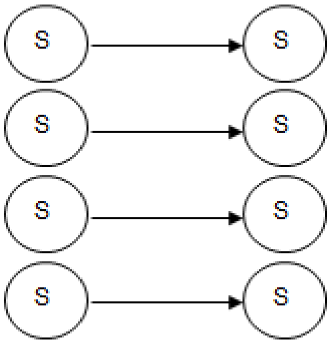



Рис.10.1. Таблична кластерна модель.

Приведені модифікації ієрархічних графових однорівневих кластерних моделей також характеризуються обмеженими демонстраційними та функціональними можливостями, оскільки не охоплюють повну взаємодію елементів кластеризованої матриці інциденцій (рис.10.2).

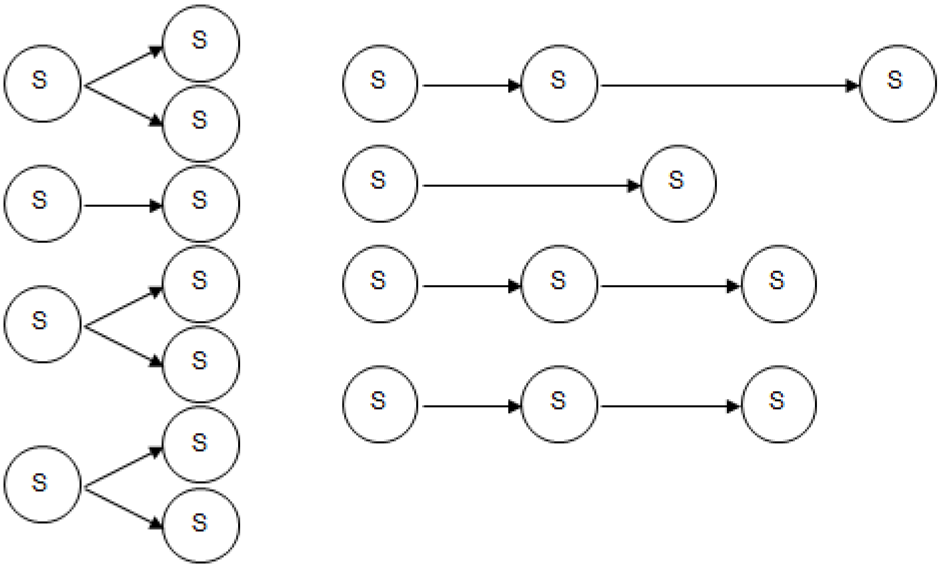


Рис. 10.2. Ієрархічна графова однорівнева кластерна модель

Повнозв'язна графова кластерна модель дозволяє найбільш компактно та досконало подати кластеризовані інформаційно значимі ймовірнісні переходи ОУ з одних станів в інші (рис.10.3).

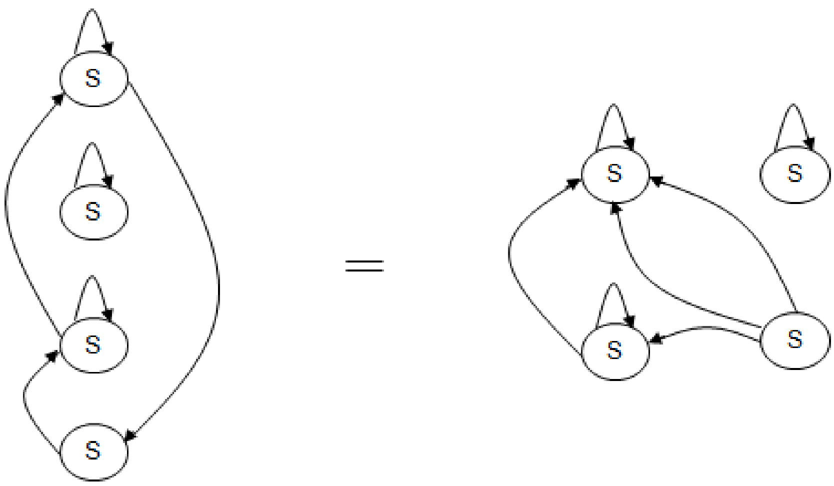


Рис.10.3. Повнозв'язна кластерна модель ОУ.

Викладена методологія дозволяє провести детальний автоматизований аналіз технологічних, інформаційних та перехідних станів ОУ, що в свою чергу спрощує діагностику аварійних та нормативних станів об'єктів. Позитивною характеристикою таких моделей є можливість зміни глибини кластеризації матриці імовірності $P_{ij}$ шляхом зміни величини коефіцієнта $\alpha$, а також введення більш складних видів апертур кластеризації матриць, наприклад $\alpha_1 \le P_{ij} \le \alpha_2$.

## Тема 11.
## ЛОГІКО-СТАТИСТИЧНІ ІНФОРМАЦІЙНІ МОДЕЛІ.

### 11.1 Контроль відхилення по амплітуді.

ЛСІМ є важливим інструментом контролю відхилень від норми станів об'єкта управління КС. Теоретичні основи побудови ЛСІМ охоплюють процедури контролю відхилень станів ОУ по амплітуді, динаміці, авто– та взаємокореляційних характеристик технологічних процесів, а також фазових та спектральних відхилень.

Одна з найпростіших ЛСІМ–1 традиційно використовується в системах контролю та автоматики для регулювання та стабілізації технологічних процесів. Приклад побудови такої моделі, яка реагує на відхилення стану об'єкту керування від норм по амплітуді, приведена на рис.11.1.

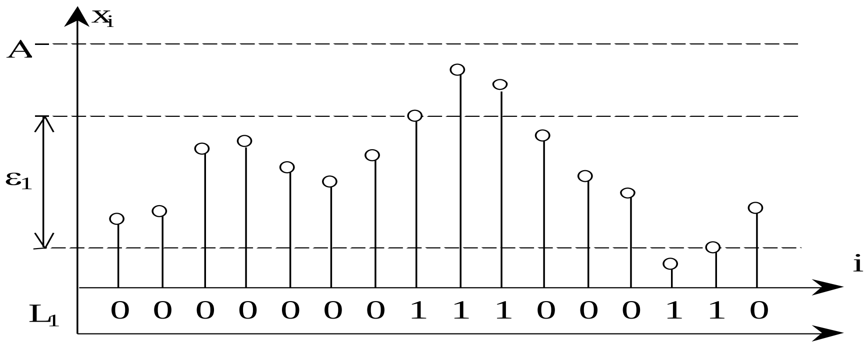



Рис.11.1. Вихідний сигнал ЛСІМ–1.

Значення ЛСІМ–1 задається булевою змінною $L_1$, яка описується рівнянням:

$$L_1 = \begin{cases} 0, & X_i \in \varepsilon_1 \\ 1, & X_i \notin \varepsilon_1 \end{cases}$$

де $\varepsilon_1$ – апертура станів ОУ ($x_i$), яка має відповідний зміст: $X_i \in \varepsilon_1$, відповідає знаходженню $X_i$ в границях апертури $\varepsilon_1$, а $X_i \notin \varepsilon_1$ – міститься на границях або поза границями апертури.

Проте, ЛСІМ–1 на основі контролю відхилення по амплітуді не реагують на відхилення по динаміці станів ОУ.

### 11.2 Контроль за зміною динаміки.

Чутливими до зміни динаміки контрольованого процесу є ЛСІМ–2. На рис.11.2 показано реакцію ЛСІМ–1 та ЛСІМ–2 на одну і ту ж послідовність станів ОУ.

На рис 11.2 показані умови контролю динаміки станів ОУ на основі ковзної структурної кореляційної моделі ($L_2$), яка описується виразом

$$L_2 = \begin{cases} 0\,, & C_{xx}(j) < \varepsilon_2\,, \\ 1\,, & C_{xx}(j) \ge \varepsilon_2\,. \end{cases}$$

де $C_{xx}(j+k) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i+k}^{n+k} (x_{i+k} - x_{i+k+j})^2\,, \quad k = 0, 1, 2 \ldots n\,; \quad i = 1, 2 \ldots n\,.$

При цьому, умовою знаходження процесу $X_i$ в границях апертури $\varepsilon_2$ є досягнення значення $C_{xx}(j)$ асимптотичного рівня дисперсії $D_x$ на інтервалі $j_0$. Для побудови даної моделі ЛСІМ аналогічно можуть бути використані інші автокореляційні моделі.

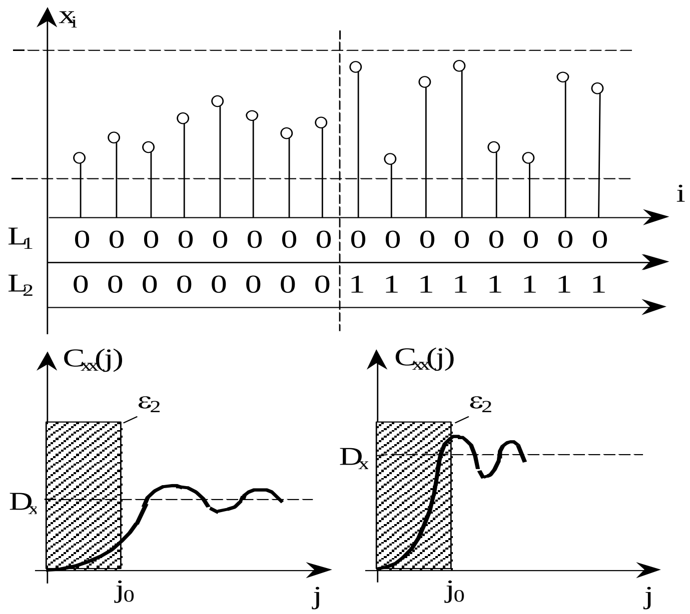



Рис. 11.2. Порівняльна характеристика ЛСІМ–2 на основі контролю структурної автокореляційної моделі станів ОУ з результатами реакції ЛСІМ–1.

**11.3 Контроль відхилення по фазі.**

Вищенаведені моделі ЛСІМ–1 та ЛСІМ–2 також мають недолік. Вони є нечутливими до фазових змін параметрів ОУ. В таких випадках використовують ЛСІМ–3, що дає змогу зафіксувати фазові зміни станів ОУ в границях апертури $\varepsilon_1$. На рис.11.3 показано, у порівнянні, реакцію ЛСІМ–1, ЛСІМ–2 та ЛСІМ–3 на задану послідовність станів ОУ.

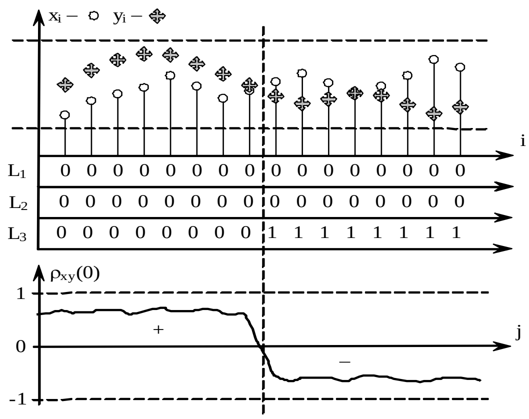



Рис.11.3. Порівняльна характеристика ЛСІМ–3 на основі нормованого коефіцієнта взаємокореляції процесів $x_i$ та $y_i$ станів ОУ з результатами реакції ЛСІМ–1 та ЛСІМ–2.

При цьому ЛСІМ–3 описується рівнянням:

$$L_3 = \begin{cases} 0\,, & \rho_{xy} > 0 \\ 1\,, & \rho_{xy} \le 0, \end{cases}$$

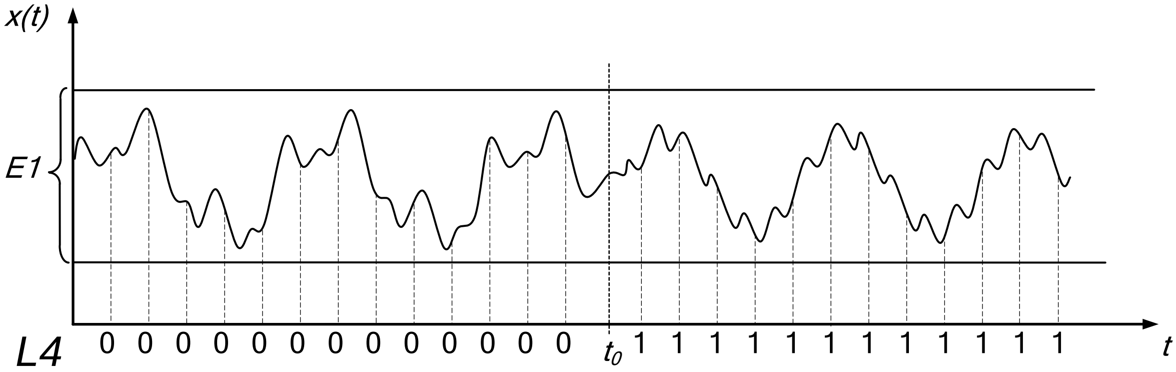
де $\rho_{xy}(0)$ – нормований коефіцієнт взаємокореляції між процесами $x_i$ та $y_i$, що описують стани ОУ в реальному часі, які обчислюються згідно наступного виразу:

$$\rho_{xy}(0) = \frac{\sum\limits_{i+k}^{n+k} \overset{o}{x}_{i+k} \cdot \overset{o}{y}_{i+k}}{\sqrt{\sum\limits_{i+k}^{n+k} (\overset{o}{x}_{i+k} - M_x)^2 \cdot \sum\limits_{i+k}^{n+k} (\overset{o}{y}_{i+k} - M_y)^2}},$$

де $M_x$, $M_y$ – відповідно вибіркові або ковзні математичні сподівання процесів $x_i$ та $y_i$.

### 11.4 Контроль відхилення по спектру.

Модель ЛСІМ-4 успішно застосовується при складних та зашумлених процесах, коли на основі описаних моделей неможливо розрізнити відхилення контрольованої величини від норми. В таких випадках необхідно проводити спектральний аналіз сигналу. При його розбитті на частотні гармоніки можна досить чітко визначити появу небажаних складових (наприклад, шкідливих високочастотних гармонік). В таких випадках використовують ЛСІМ–4, яка основана на спектральному аналізі характеристик ОУ [5] (Рис.11.4).




$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ $\qquad\qquad\qquad$ $\omega_1, \omega_3$

$$L4 = \{d_1, d_2, \ldots, d_m\}, \qquad d_i = \begin{cases} 0, & при \;\; S_{(w)} \subset A_i, \\ 1, & при \;\; S_{(w)} \not\subset A_i. \end{cases}$$

Рис. 11.4. Формування логічних значень четвертої ЛСІМ при зміні спектрального складу інформаційних станів ОУ.

Аналогічно, в ЛСІМ–4 можуть бути реалізовані перетворенням сигналів в базисах Крейга, Крестенсона та Галуа.

Для складних ОУ, які описуються m-параметрами, формується матриця коефіцієнтів взаємокореляції, яка має наступний вигляд:

$$\rho_{ij} = \begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1i} & \cdots & \rho_{1m} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2i} & \cdots & \rho_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{j1} & \rho_{j2} & \cdots & \rho_{ji} & \cdots & \rho_{jm} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & \rho_{ni} & \cdots & \rho_{nm} \end{vmatrix}.$$

Для цієї кореляційної матриці характерні наступні властивості:

$\rho_{ii} = 1, \quad \rho_{ij} = \rho_{ji}, \quad -1 \le \rho_{ij} \le +1.$

Отже, у відповідності до цих умов інформативну частину матриці розділяє діагональ .

Запишемо в ряд інформативні значення цієї матриці:

$\rho_{12}, \;\rho_{13}, \ldots, \;\rho_{1m}, \;\rho_{23}, \;\rho_{24}, \ldots, \;\rho_{2m}, \ldots\ldots, \;\rho_{n-1,m}$

$1 \qquad 2 \;\; \ldots \;\; m+1 \;\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;\; k$

Кількість значень утвореного центрованого та нормованого вектора (рис.11.5) визначається як $k = (m-1) + (m-2) + \ldots + 1$.

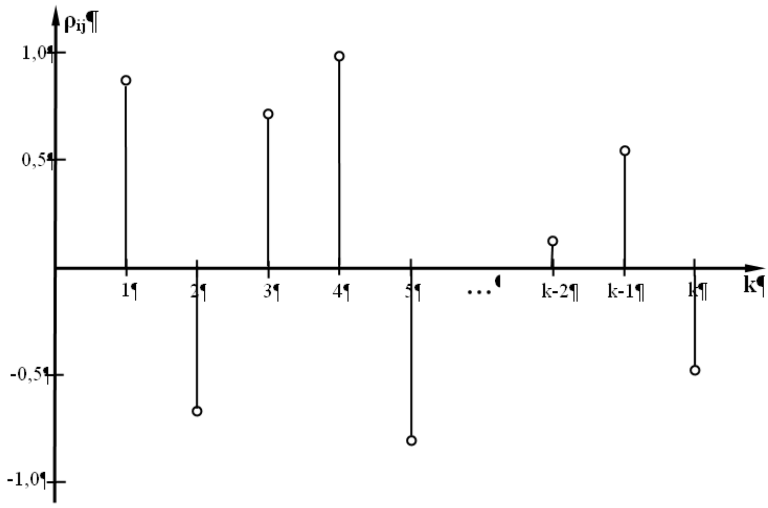



Рис.11.5. Взаємокореляційний вектор матриці станів ОУ.

З приведеного нормованого взаємокореляційного вектора $\rho_k^*$ отримуємо глобальну дисперсію станів ОУ $D_{\rho_k^*}$ (рис.11.6):

$$D_{\rho_k^*} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} (\rho_k^*)^2 \cdot$$

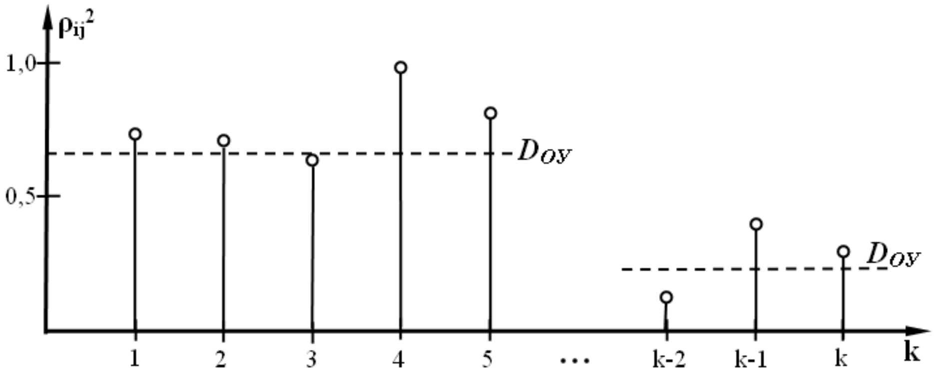



Рис.11.6. Оцінка глобальної дисперсії станів ОУ.

Звідси, можна в загальному представити інформаційну технологію та математичні основи побудови ЛСІМ–5.

### 11.5 Оцінка глобальної дисперсії станів об’єкта керування

Принцип роботи ЛСІМ–5 базується на аналізі зміни глобальної дисперсії станів ОУ (рис.11.7).

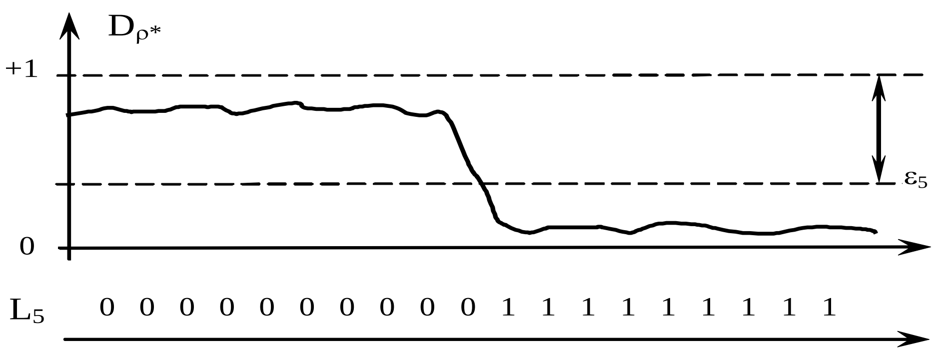



Рис.11.7. ЛСІМ–5 на основі глобальної дисперсії станів ОУ.

Аналітично ЛСІМ–5 описується виразом:

$$L_5 = \begin{cases} 0\,,\ D_{\rho_k^*} > \varepsilon_5\,, \\ 1\,,\ D_{\rho_k^*} \le \varepsilon_5\,. \end{cases}$$

де $\varepsilon_5$ – апертура для глобальної дисперсії.

## Тема 12.

# МЕТОДИ ТА АЛГОРИТМИ МОДЕЛЮВАННЯ ОРГАНІЗАЦІЇ РУХУ ДАНИХ В РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ.

### 12.1 Методи та алгоритми моделювання організації руху структуризованих даних в РКС.

Проведені в даному розділі дослідження світового досвіду реалізації засобів формування СД, методів аналого-цифрового перетворення потоків технологічних даних, методів оптимізації кодування техніко-економічних даних та методів організації руху даних в РКС показують, що подальше вдосконалення та оптимізація характеристик апаратно-програмних засобів низових рівнів РКС може бути успішно реалізоване на основі комплексу наступних рішень:

– забезпечення високого рівня паралелізму реєстрації технологічних даних в БАЦП, які на рівні АЦК реалізують функції зниження надлишковості кодування даних та їх захисту від помилок;

– широке використання математичних основ новітніх ТЧБ: Крестенсона, Галуа, Уолша та ін. для представлення даних у вигляді фреймів СД, максимально адаптованих до низових рівнів РКС та роботи в умовах інтенсивних промислових завад;

– вдосконалення методів кодового представлення ТЕД;

– розширення сукупності та вдосконалення методів побудови моделей руху даних, а також ідентифікованих моделей собівартості руху даних.

– При цьому актуальним є вирішення наступних задач:

– проаналізувати методи формування СД та організації руху потоків даних у РКС;

– на основі класифікації типів даних, які формуються, обробляються та використовуються в РКС, визначити перспективні методи їх структуризації у вигляді фреймів;

– розробити критерії оптимізації процесів формування алфавітно-цифрових, технолого-економічних та структуризованих даних;

– виконати дослідження засобів формування даних на основі критеріїв оптимізації;

– розробити метод синтезованого формування алфавітно-цифрових та структуризованих даних;

– розробити метод побудови багаторівневої моделі руху даних розподілених комп’ютеризованих систем реального часу на основі подальшого вдосконалення принципів формалізації атрибутів граф-алгоритмічних моделей руху даних та ідентифікованих епюр руху даних;

– вдосконалити алгоритм реалізації стратегії проектування РКС на основі законів доцільності та ідентифікованих циклів руху даних;

– розробити атрибути та програмні засоби побудови граф-алгоритмічних моделей РКС;

– розробити мобільні апаратно-програмні засоби синтезованого вводу СД для низових рівнів РКС.

Побудова моделей складних комп’ютеризованих систем є актуальною задачею, яка направлена на вдосконалення теорії, методології та практики їх проектування та діагностики штатності функціонування в реальному масштабі часу. В методологічному плані вирішення такої задачі потребує врахування проблемної орієнтованості, цілісності та складності, невизначеності, адаптивності, а також універсальності комп’ютеризованої системи. При цьому відповідно визначається ступінь цілеспрямованості та мета функціонування системи, можливості опису системи однією моделлю, оцінка ентропії, що відображає необхідну кількість керуючої інформації, можливості пристосування системи до впливу зовнішніх факторів, а також опис системи математичними моделями, що мають однакову структуру незалежно від класу об’єктів – джерел інформації.

### 12.2 Оптимізація характеристик комп’ютерних систем керування

Важливою задачею проектування комп’ютерних систем є оптимізація її характеристик на основі критеріїв якості, що описується вихідними параметрами системи: $D=\{D_1,...,D_n\}$, до яких належать адекватність та достовірність реєстрації станів об’єктів системи, ймовірність помилок при формуванні даних, їх передаванні по каналах зв’язку, цифровій обробці та зберіганні даних. Ефективність роботи КС при цьому оцінюється середнім часом безвідмовної роботи, ступінню використання ресурсів у вузлах руху даних та собівартістю руху даних.

Як показано сукупність:

$$D=\{D_1,...,D_n\} \tag{12.1}$$

поділяють на підгрупи:

– умови – обмеження функцій системи $Y=\{Y_1,...,Y_p\}$;

– обмеження на структуру і параметри $O_s=\{O_{s1},...,O_{sq}\}$;

– показники якості $K=<k_1,\ldots,k_m>$ з обмеженнями $O_k=\{O_{k1},...,O_{kr}\}$, де обмеження $O_k$ можуть бути типу рівності, нерівності або функціонального зв’язку.

Приведеній сукупності обмежень задовольняє допустима система, яка задовольняє параметри функціоналу $D=\{Y,O_s,K,O_k\}$.

При цьому найкращі значення вектора k показників якості забезпечує оптимальна система $S_{ОПТ}$, яка задовольняє сукупності обмежень та умов $\{Y,O_s,K,O_k\}$.

На інженерному рівні синтез оптимальної комп’ютеризованої системи та її компонентів містить рішення наступних задач:

– синтез оптимальної архітектури;

– вибір оптимальних системних характеристик та оптимізація ресурсних параметрів;

– обґрунтування оптимального варіанту побудови;

Важливим показником викладеної методології синтезу комп’ютеризованої системи є виконання обмежень показників якості $K_1,...,K_i,...,K_m$, що задовольняють умови: $K_i \geq 0$ $(i=1,2,...,m)$, $\sum_{i=1}^{m} K_i=\min$, $\sum_{i=1}^{m} K_i=0$, де остання умова відповідає ідеальній системі. При використанні відомого критерію глобальної оптимальності КС:

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i \cdot K_i \to \min .$$

Коефіцієнти $\alpha_i$ визначають значимості числових векторних оцінок якості системи. При формалізації та побудові моделей руху даних з врахуванням собівартісних характеристик реалізації процесів формування, цифрової обробки та архівації даних в складних багаторівневих РКС доцільно використати критерій глобальної оптимальності КС у вигляді:

$$G_{КС} = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} \int \Delta ЕРД}{N} \Rightarrow \max , \qquad (12.2)$$

де $n$ – число часових інтервалів ковзної вибірки, $N$ – загальне число часових інтервалів, max – критерій максимуму позитивних собівартісних показників руху даних.

Задоволення умов критерію глобальної ефективності РКС (12.2) досягається шляхом зменшення собівартісних витрат на реалізацію процесів формування та обробки даних, а також врахування та підвищення ступеня використання ресурсів в активних вузлах КС та розширення сукупності похідних моделей. При цьому оптимізація характеристик РКС може виконуватися як на стадії реалізації проектуваних системи, так і на стадії діагностування діючих систем.

В загальному випадку відомі методи та моделі організації руху СД в РКС описуються алгоритмом послідовного виконання системних функцій у вигляді:

$$F_{РКС} = F_1\left[G(V,B)\right] \Rightarrow F_2\left\lfloor C_{ij} \right\rfloor \Rightarrow F_3\left\lfloor A_{ij} \right\rfloor_{V,B} \Rightarrow F_4\left[D,K\right], \qquad (12.3)$$

де $F_1, F_2, F_3, F_4$ - відповідно формалізований опис процесів організації руху даних у вигляді подання топології РКС, процесів оброблення даних та їх використання для оптимізації параметрів РКС; $\left[G(V,B)\right]$ - орієнтований граф топологічної моделі; $V = (v_1, v_2, ..., v_n)$ - множина вершин елементів архітектур; $B$ - множина ребер, яка представляє рівні описування об’єкта $B(V) = (b_1, b_2, ..., b_m)$; $\left\lfloor C_{ij} \right\rfloor$ - матриця суміжності, яка описує структурні відношення між елементами системи; $C_{ij}$ - елемент кількості ребер спрямованих від вершин $V_i$ до $V_j$; $\left\lfloor A_{ij} \right\rfloor_{V,B}$ - булева матриця інциденцій; $D = \{D_1, ..., D_l\}$ - сукупність показників критеріїв якості, які поділяються на підгрупи умов, що обмежують функції системи $Y = \{Y_1, ..., Y_p\}$, умов, що обмежують структуру та параметри проектованої системи $O_s = \{O_{s1}, ..., O_{sq}\}$, вектори показників якості, які враховуються в процесі синтезу системи $K = < k_1, ..., k_m >$.

Результатом функціоналу $F_4$ є визначення параметрів допустимої системи $D = \{Y, O_s, K, O_k\}$, що задовільняє сукупності обмежень $O_s$ та умов $Y$. причому $\sum_{i=1}^{m} K_i = \min$ відповідає умові оптимальної системи.

Суть одного з існуючих методів організації руху даних у послідовному виконанні функцій полягає у наступному виконанні алгоритмів: де $\odot$ $\bigcirc$ $\otimes$ - відповідно атрибути джерела, пункту оброблення та пункту затвердження даних; $E_p, E_d, E_{ОУ}, E_{СПД}, E_O$ - відповідно характеристики системних об’єктів РКС (процесорів, даних, об’єктів управління, систем передавання даних, операторів); $T$ - часовий параметр, $V$ -швидкість перетворення даних, $M$ - об’єм використовуваної пам’яті, $S$ - системні ресурси; $X(t)$ -текучі значення технологічних параметрів ОУ, $M_x$ -математичне сподівання, $D_x$ -дисперсія, $\sigma_x$ - середньоквадратичне відхилення, $R_{xx}$ - автокореляційна функція, $R_{xy}$ -взаємокореляційна функція, $M_{ij}$ - матриця нормованих коефіцієнтів взаємокореляції, $S(w)$ - спектральні моделі, $K_{ij}$ -матриця імовірностей переходу в різні стани, $ЛСІМ$ - логіко-статистична інформаційна модель, $I_x$ - ентропійна модель; $K_{ed}$ - коефіцієнт ефективності руху даних, $P-V$ - собівартість виконання операції в активному вузлі матричної моделі; $M_1$ - матрична модель руху даних, $ТМРД(S_0, S_i, C_o, C_i, G)$ - тривимірна матрична модель руху даних ($S_0$ – максимальне число записів, $S_i$ – реальне число записів, $C_0$ – швидкість створення та передавання даних, $C_i$ – проектна швидкість створення та передавання даних, $G$ – завантаженість), $ДММРД(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, d_0, d_i)$ - двовимірна матрична модель руху даних ($\alpha_0$ - ресурси зчитування даних; $\alpha_1$ -ступінь використання ресурсів зчитування даних; $\alpha_2$ -ступінь використання ресурсів записів; $d_0, d_i$ - відповідно ресурси та ступінь використання швидкості передавання даних в каналі зв'язку); $M_n$ - похідні моделі; $ЕРД$ -сигнальна ЕРД, $\Delta ЕРД(t_j)$ - диференціальна, $\int \Delta ЕРД(T)dT$ -інтегральна, $\sum_{i=1}^{n}\int \Delta ЕРД(T)dT$ -сумарна інтегральна; $G_{KC}$ -глобальна характеристика ефективності комп'ютерної системи.

$$F_1[\ \odot, \bigcirc, \otimes\ ] \Rightarrow F_2\left[\left\{\begin{array}{c} E_p = F(T, V, M, S) \\ E_d = F(T, M, V_R, V_W, S) \\ E_{ОУ} = F(T, M, I, S) \\ E_{СПД} = F(V_R, V_W, P_i, S) \\ E_O = F(T, V_R, V_W, S, M) \\ X_{ОУ} = F(X(t), M_x, D_x, \sigma_x, R_{xx}, R_{xy}, M_{ij}, S(w), K_{ij}, ЛСІМ, I_x) \end{array}\right.\right] \Rightarrow \qquad (12.4)$$

$$\Rightarrow F_3[K_{ed}, P-V] \Rightarrow F_4[M_1, ТМРД, ДММРД, ..., M_n] \Rightarrow F_5\left[\left\{\begin{array}{c} ЕРД \\ \Delta ЕРД(t_j) \\ \int \Delta ЕРД(T)dT \\ \sum_{i=1}^{n}\int \Delta ЕРД(T)dT \end{array}\right.\right] \Rightarrow F_6[G_{KC}] \qquad (12.5)$$

Аналіз існуючого методу організації руху даних в РКС на основі однорівневої матричної моделі руху даних показує, що вона характеризується наступними функціональними обмеженнями:

– атрибути джерела, пункту оброблення та пункту затвердження даних $F_1[\ \odot\ \bigcirc\ \otimes,]$ відповідають структурі однорівневої ММРД, що обмежує функціональні можливості такої моделі при проектуванні та діагностуванні характеристик багаторівневих РКС, які формалізовані в роботі [78] і адекватно відображаються багаторівневими ММРД, що відповідають трирівневій магістральній архітектурі автоматизованої системи;

– у функціоналі відомого методу $F_2[\bullet]$

$$X_{ОУ} = F(X(t), M_x, D_x, \sigma_x, R_{xx}, R_{xy}, M_{ij}, S(w), K_{ij}, ЛСІМ, I_x) \qquad (12.6)$$

не враховані процедури сумісного формування технологічних даних X(t) та техніко-економічних даних у вигляді СД, які формуються в реальному часі та враховують характеристики квазістаціонарних;

– характеристичний функціонал об'єкта ХОУ не представлений у вигляді фреймів СД, які забезпечують компактне завадозахищене кодування інформації про ОУ, а також захист даних від помилок та несанкціонованого доступу;

– у функціоналі $F_4[\bullet]$ згідно відомих методів реалізації його моделей

$$F_4\left[M_1, ТМРД, ДММРД, \ldots, M_n\right] \qquad (12.7)$$

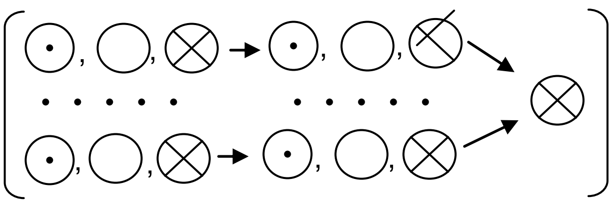
– використовується трьохвимірна МРД (ТМРД), яка виявилася неефективною у практичному застосуванні;

– у функціоналі F4 для моделювання руху даних в РКС застосована двовимірна модифікована МРД, яка також має функціональні обмеження і її атрибути не можуть бути реалізовані при проектуванні, діагностиці та моделюванні багаторівневих РКС;

– у сукупності похідних моделей руху даних Mn функціонала F4 відсутня граф-алгоритмічна модель (ГАМ), яка відображає типи носіїв інформації, каналів зв'язку комп'ютерної мережі, містить розшифровку алгоритмів формування та побудови моделей джерел інформації, а також аналітики цифрової обробки даних у відповідних активних вузлах комп'ютерної системи;

– функціонал існуючого методу $F_4$ не враховує диференціацію форм та собівартісних характеристик руху даних в активних вузлах багаторівневих диференційованих МРД та відповідної диференціації епюр руху даних.

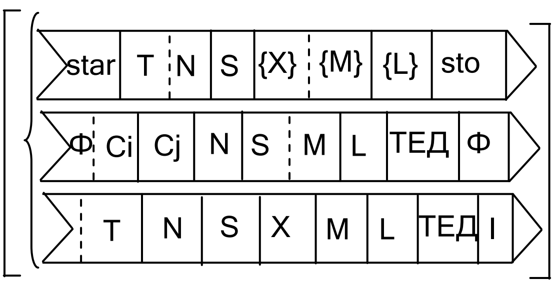
Метод формування та організації руху структуризованих даних багаторівневих РКС полягає у послідовному виконанні функцій наступних алгоритмів:

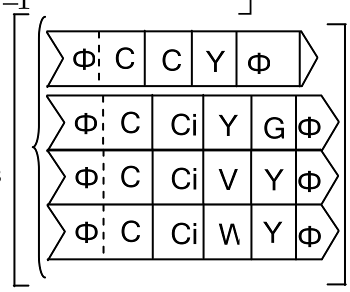
$F_1$  $\Rightarrow$ (12.8)

$$\Rightarrow F_2 \left[ \begin{cases} E_p = F(T, V, M, S) \\ E_d = F(T, M, V_R, V_W, S) \\ E_{ÎÓ} = F(T, M, I, S) \\ E_{ÑÏÄ} = F(V_R, V_W, P_i, S) \\ E_{î} = F(T, V_R, V_W, S, M) \\ X_{ÎÓ} = F(S_i : X(t) + ÒÅÄ, M_x, D_x, \sigma_x, R_{xx}, R_{xy}, M_{ij}, S(w), K_{ij}, ËÑ²Ì, I_x, ÑÄ) \end{cases} \right] \Rightarrow (12.9)$$

$$\Rightarrow F_3\left[K_{ed}, Д(P - V)\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_4\left[БРМ_1, ДД, БРДММРД, \ldots, Д(M_n + ГАМ)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_5\left[\left\{ ДЦРД, ДЕРД, \Delta ЕРД(t_j), \int \Delta ЕРД(T)dT, \sum_{i=1}^{n} \int \Delta ЕРД(T)dT \right.\right] \Rightarrow F_6\left[G_{KC}\right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow F_7$ 

$\Rightarrow F_8$ 

,

де новизна запропонованих наукових рішень по вдосконаленню методів формування та організації руху потоків даних в багаторівневих РКС полягає у розширенні та вдосконаленні функцій організації руху даних на основі:

– багаторівневої матричної моделі руху даних (12.8);

– розширення функцій формування СД шляхом сумісного кодування технологічних даних (x(t)) та ТЕД (12.9) при заданих квазістаціонарних станах ОУ ($S_i$ :), а також реалізація апаратно-програмних засобів синтезованого вводу алфавітно-цифрових даних;

– формування мінімально надлишкових та захищених від помилок фреймів структуризованих даних (СД), які формуються, передаються, обробляються, зберігаються та передаються;

– диференціація собівартісних характеристик руху даних в активних вузлах МРД $Д(P-V)=\sum_{i=1}^{m}P_i-\sum_{j=1}^{n}V_j$, де m – число диференційованих компонентів прибутків, n – число диференційованих компонентів витрат в активному вузлі МРД;

– розширення класу МРД до рівня багаторівневих МРД (БМРД);

– врахування диференціації форм документів (ДД) та даних ММ по відповідних активних вузлах МРД, що відповідають відповідним об'єктам МРД;

– розширення сукупності похідних моделей руху даних шляхом включення в їх склад важливого класу граф-алгоритмічних моделей (ГАМ);

– диференціації циклів руху даних з врахуванням диференціації собівартісних характеристик руху даних в активних вузлах БРДММРД (ДЦРД) та відповідна диференціація епюр руху даних (ДЕРД).

Теоретичне обґрунтування реалізації функціоналів, їх моделювання та аналіз, а також оцінка ефективності запропонованих методів формування та організації руху ідентифіковано-структуризованих даних в РКС є предметом дослідження даної дисертації.

## Тема 13.

# ПОНЯТТЯ ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ. МОДЕЛІ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ.

### 13.1 Поняття імітаційного моделювання та імітаційної моделі

Різноманітні економіко-математичні методи і моделі – потужний, теоретично і практично розроблений апарат економіко-математичного аналізу. Проте цей арсенал прийомів і математичних методів не дозволяє охопити всі задачі планування й управління, які представляють практичний інтерес і розв'язання яких може бути засноване на аналізі кількісних показників. Мова в даному випадку йде про характер задач, аналіз яких за допомогою згаданих методів або їх складніших модифі- кацій дійсно виявляється ефективним. Багато дуже важливих практичних задач, у тому числі й оптимізаційних, не можуть бути розв'язані з використанням економіко-математичних методів, або ж отримані з їх допомогою розв'язки виявляються недостатньо ефективними.

Серед основних об'єктивних причин цього явища можна відзначити обмежені роздільні здатності різних економіко-математичних моделей за такими основними аспектами, як рівень деталізації модельованих систем і процесів, а також забезпеченість ефективними обчислювальними методами аналітичного розв'язання. Як правило, математичні моделі, що використовуються для дослідження економічних систем, володіють досить високим рівнем абстракції, що й обумовлює їх універсальність.

З розвитком автоматизованих систем управління, розширенням сфер застосування засобів обчислювальної техніки значно різноманітніше стає коло економічних і управлінських завдань, які необхідно вирішувати. Практика вимагає постановки і вирішення все більш склад- них (комплексних) завдань. У цих умовах побудова адекватних моделей завдань і розробка методів їх рішення стають все більш насущними проблемами. Особливо це стосується таких завдань, в яких необхідно одночасно враховувати фактори невизначеності, динамічну взаємну обумовленість поточних рішень, наступних подій, комплексну взаємозалежність між досліджуваними факторами. Як правило, такі практичні завдання мають велику розмірність, мають велику кількість внутрішніх взаємозв'язків, тому їх не вдається звести до відомих моделей типу математичного програмування або застосувати для їх вирішення інші традиційні методи математичного моделювання. Для вирішення таких завдань розробляється, а останніми роками отримав особливо широкий розвиток метод імітаційного моделювання на ЕОМ. Щоб з'ясувати, що ж є методом імітаційного моделювання, розглянемо деякі принципові особливості цього економіко-математичного аналізу.

За одним із визначень, **імітація – це чисельний метод проведення на ЕОМ експериментів з математичними моделями, що описують поведінку складних систем протягом тривалих періодів часу**. Таке уявлення про метод імітації в економіко-математичному аналізі засноване на використанні властивості наслідування, тобто відтворення процесів, що протікають у досліджуваній складній системі, штучними засобами за допомогою математичних моделей, що реалізовуються на ЕОМ.

Математичні моделі, які використовуються в імітації, можуть суттєво відрізнятися від традиційних.

Позначимо ці відмінності детальніше. При цьому виходитимемо з того, що дослідження реальної системи за допомогою математичних методів є реалізацією низки послідовних етапів і пов'язується, як правило, з досягненням певної мети досліджень: вивчення діючої реальної системи, аналізу гіпотетичної системи або проектування досконалішої системи.

Можна виділити декілька основних етапів моделювання:

1. Постановка задачі дослідження, вивчення модельованої системи, збирання емпіричної інформації, виділення основних проблем моделювання.

2. Формування математичної моделі, вибір структури і принципів опису моделі та її підмоделей, допустимих спрощень, вимірюваних пара- метрів і критеріїв оцінки якості моделі.

3. Розробка програмного забезпечення розв'язання моделі або імітаційного алгоритму, генерація чи складання машинних програм.

4. Оцінка адекватності математичної моделі і перевірка достовірності та придатності моделюючого алгоритму за ступенем погодженості і допустимості результатів контрольних експериментів з вхідними даними.

5. Планування багатоваріантних експериментів, вибір функціональних характеристик системи, що вивчається, для дослідження, визначення методів обробки результатів експериментів.

6. Робота з моделлю, проведення розрахунків і експериментів.

7. Аналіз результатів, формулювання висновків за даними моделю- вання і практичне використання результатів.

Поряд з аналітичними і чисельними методами розв'язування, орієнтованими на традиційні математичні моделі, для використання імітаційних моделей застосовується спосіб моделювання процесів на ЕОМ. Такий підхід передбачає використання в дослідженні специфіч- ного різновиду математичних моделей – імітаційних моделей. Важливою особливістю імітаційного моделювання процесів на ЕОМ є те, що математичну модель, яка є вираженими в тій або іншій формі взаємо- зв'язками між параметрами і змінними досліджуваної системи, не обов'язково спеціально перетворювати до заздалегідь визначеного вигляду.

Для імітаційного моделювання характерне відтворення явищ, що описуються моделлю, із збереженням їх логічної структури, послідов- ності чергування в часі, а інколи і фізичного змісту. Таке відтворення явищ виконується за допомогою спеціальних моделюючих установок (апаратурне моделювання) або засобів обчислювальної техніки. В останньому випадку забезпечується високий ступінь подібності між мат матичними (кількісними) характеристиками реальних процесів і їх модельними відображеннями в ЕОМ. Причому, на противагу аналітичному і чисельному методам зміст операцій, що виконуються при роботі з імітаційною моделлю, майже не залежить від того, які величини вибрані як шукані.

Методи імітаційного моделювання мають деякі принципові відмінності і в частині способів використання математичних моделей, які зближують імітаційне моделювання з методами фізичного моделювання і натурних експериментів на реальних системах. Основну відмінність можна представити наочніше, якщо взяти до уваги призначення математичних моделей, що реалізовуються способами аналітичного і чисельного дослідження процесів, й імітаційних моделей.

Аналітичні моделі призначені, головним чином, для отримання рішення, що визначає в готовому вигляді значення шуканих змінних на основі закладеної в моделі інформації про досліджувану систему.

На відміну від них імітаційні моделі призначені для отримання інформації про модельовану систему і вироблення в подальшому відповідних оцінок, застосовних для формування рішень. Вироблення рі- шень у цьому випадку проводиться, як правило, поза імітаційною мо- деллю.

Імітаційні моделі будуються передусім для того, щоб на підставі інформації про досліджувану систему і процеси, що протікають в ній, узагальнити та деталізувати наявні дані до такого ступеня, при якому вони могли б стати придатними для вироблення рішень у рамках деяких завдань дослідження системи. Причому, як правило, методи вирішення цих завдань безпосередньо в імітаційну модель не включаються.

Найважливішою особливістю методу імітаційного моделювання є те, що імітаційні моделі можуть застосовуватися для опису і дослідження досить складних процесів практично на межі можливої формалізації. Вони використовуються і тоді, коли частина процесів досліджуваної системи взагалі не формалізується. Останнє характерне для таких процесів, які реалізуються в досліджуваній системі за участю людини, що ухвалює рішення.

Застосування методів імітації для дослідження системи, форму- вання імітаційної моделі Грунтуються на використанні максимального обсягу доступної інформації про систему як таку, яка може бути представлена в деякому формальному вигляді за допомогою математичних співвідношень і залежностей, так і таку, яка може бути виражена у вигляді функції розподілу ймовірності випадкової величини й інших прийомів. У цьому випадку в аналіз залучається і та частина даних про систему, яка не може бути отримана через те, що у розпорядженні дослідника може не виявитися відомостей про поведінку системи у всіх принципово можливих режимах її функціонування або в допустимих межах зміни параметрів процесів, що вивчаються.

Для моделювання досліджуваного процесу на ЕОМ необхідно, щоб математична модель цього процесу була представлена у формі спе- ціального моделюючого алгоритму. Відповідно до цього алгоритму в ЕОМ буде вироблена інформація, що описує елементарні явища досліджуваного процесу з урахуванням їх зв'язків і взаємних впливів. Природно, що явища досліджуваного процесу і явища, які відбуваються в ЕОМ, що реалізовує алгоритм моделювання, за своїм фізичним змістом суттєво відрізняються. Але вони мають бути близькі з погляду складу і характеру інформації, що описує поведінку реальної системи, та інформації, оброблюваної ЕОМ у процесі імітації.

Реалізація імітаційного алгоритму в ЕОМ є модельним відтворенням кількісних характеристик елементарних явищ, характерних для досліджуваного реального процесу. У даному випадку немає не обхідності не тільки перетворювати початкову математичну модель досліджуваної системи у форму, що допускає аналітичне або чисельне розв'язання, але і підбирати для її вирішення деякий дуже далекий за своєю структурою від самої моделі аналітичний або чисельний метод.

**Розробка програмного забезпечення вирішення моделі або імітаційного алгоритму.**

Побудова імітаційного алгоритму в корені відрізняється від програмування методів аналітичного і чисельного вирішення математичних моделей на ЕОМ. Процедури алгоритмізації в цьому випадку найбільше визначаються змістом математичної моделі, а не Грунтуються на чіткому виділенні сукупності шуканих величин.

Якщо для вирішення звичайних математичних моделей можуть бути використані різні пакети прикладних програм, що реалізовують на ЕОМ ті або інші алгоритми аналітичного і чисельного вирішення завдань, то програмування імітаційних моделей виявляється значно складнішим. Це обумовлюється особливостями, властивими методу імітаційного моделювання. Перш за все, основною діяльністю дослідника при роботі з імітаційною моделлю є спостереження, реєстрація і вимірювання контрольованих параметрів процесів, що вивчаються. Тому в моделюючий алгоритм повинні бути включені не тільки процедури, які відтворюють кількісні характеристики досліджуваних реальних процесів і їх взаємозв'язки, але і спеціальні програми, що дозволяють накопичувати дані вимірювань у процесі імітації.

Крім того, моделюючий алгоритм повинен дозволяти у процесі

експерименту імітувати дію на процес випадкових і неконтрольованих параметрів. Усе це забезпечує відносну незалежність імітаційної моделі від прийнятого розділення даних, що фігурують у ній, на початкові умови, параметри системи і шукані величини. Така незалежність є принциповою особливістю методу імітаційного моделювання, оскільки при дослідженні процесів звичайними аналітичними або чисельними методами зміна сукупності шуканих величин, як правило, вимагає інших форм представлення математичної моделі або ж використання різних алгоритмів для вирішення загалом однієї й тієї ж задачі.

Суттєво і те, що імітаційне моделювання виявляється зручним апаратом для дослідження випадкових процесів – це одне з основних засто- сувань даного методу.

Для реалізації на ЕОМ імітаційний алгоритм повинен бути представлений у вигляді набору машинних програм, що реалізовують про- цедури імітації, збирання даних за спостереженнями і вимірами, введення та виведення початкових даних і результатів експериментів тощо. Програмування імітаційних алгоритмів здійснюється з використанням універсальних мов програмування або ж за допомогою спеціалізованих проблемно-орієнтованих мов імітаційного моделювання.

### 13.2 Основні поняття теорії масового обслуговування

Теорія масового обслуговування (ТМО) – галузь прикладної мате- матики, що використовує методи теорії випадкових процесів. Поняття «система масового обслуговування» пов'язане з явищем очікування. Стимулом до розвитку теорії масового обслуговування послужили спро- би передбачити потреби, які випадково змінюються, за результатами спостережень і на основі цього організувати обслуговування, що харак- теризується прийнятним часом очікування. Теорія масового обслуговування дозволяє розкрити природу черг, що забезпечує можливість кра- щого управління процесом.

Теорія масового обслуговування, як і взагалі моделювання, безпо- середньо не пов'язана з оптимізацією. Вона скоріш намагається роз- робити, вивчити і порівняти різні ситуації, що характеризуються сворен- ням черги, і, таким чином, побічно досягти наближеної оптимізації.

Першою у теорії масового обслуговування була робота Іохансеса «Час очікування і число викликів» (1907 р.). Однак вона пройшла непомі- ченою. Початок цьому науковому напряму поклала робота А. К. Ерланга «Теорія ймовірності і телефонні переговори» (1909 р.) та інші його роботи, в яких він вивчав проблеми теорії скупчення. Практичну спрямованість в 20 – з0-х роках мали роботи й інших авторів, наприклад, Мошина, Фрайя. Узагальнення методів і розробка загальної теорії масо- вого обслуговування були початі дещо пізніше. Істотний внесок до її створення і розвитку зробили радянські вчені Хинчин А. Я., Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Бусленко Н. П., Вентцель Е. С., Севостья- нов Б. А. та інші, а також закордонні вчені К. Пальм, Д. Кендалл, Ф. Поллачек, Сааті Т. Л. та ін.

У теорії масового обслуговування розглядаються задачі планування й управління, пов'язані з визначенням ефективності виконання низки робіт (послуг) над певними об'єктами (обслуговуваними одини- цями). Модель конкретної системи масового обслуговування має практичне значення і допускає можливість розв'язання в тому випадку, якщо обслуговувані одиниці (об'єкти, заявки) надходять в обслуговуючу систему в масовому порядку, через випадкові проміжки часу, час виконання робіт (обслуговування об'єктів) також носить ви- падковий характер. Так, у магазині касир обслуговує велику кількість покупців, їх надходження в магазин, а також час обслуговування наперед неможливо точно визначити.

Типовими виробничими задачами, вирішуваними методами теорії масового обслуговування, є задачі організації телефонного і телеграфного зв'язку, обслуговування в торгівлі, ремонт і наладка обладнання, відвантаження готової продукції на багатьох підприємствах та ін. Теорія масового обслуговування може застосовуватися при розробці оптималь- ної структури управління народним господарством і окремими його ланками, а також в економіці, де об'єктом виступає потреба в продукції певного виду, а обслуговуючою системою є заводи, що випускають цю продукцію. Теорію масового обслуговування успішно можна використати і при розробці інформаційних систем, проектуванні компьтерних мереж тощо.

Як правило, системи масового обслуговування є дуже складними. Методами теорії масового обслуговування проводиться аналіз окремих систем, потім на його основі вирішується проблема оптимізації пара- метрів системи.

Теорія масового обслуговування вивчає процеси, в яких, з одного боку, постійно виникають запити на виконання яких-небудь послуг, а, з іншого, відбувається задоволення цих запитів, тобто виконання послуг. Та частина процесу, в якій виникають запити, є обслуговуваною систе- мою, а та частина, яка приймає запити і задовольняє їх, називається обслуговуючою системою. Сукупність обслуговуваної і обслуговуючої систем називається системою масового обслуговування (СМО).

Основними поняттями теорії масового обслуговування є:

**вимога** – кожен окремий запит на виконання якої-небудь роботи або послуг;

**джерело вимог** – частина обслуговуваної системи, яка у будь-який момент часу може надіслати лише одну вимогу;

**обслуговування** – задоволення запиту, що надійшов в обслуго- вуючу систему, на виконання послуг;

**обслуговуючий апарат** – частина обслуговуючої системи, яка здатна в будь-який заданий момент часу задовольняти лише одну вимогу (обслуговуюча система – це сукупність однорідних обслуговуючих апаратів, причому під однорідністю розуміється здатність задовольняти однакові вимоги);

**потік вимог** – послідовність появи вимог у часі;

**час обслуговування** – час, протягом якого задовольняється запит, тобто період від початку обслуговування (а не від моменту надходження вимоги в систему) і до його завершення.

### 13.3 Системи масового обслуговування, їх класифікація та основні характеристики

Із системами масового обслуговування (СМО) ми зустрічаємось повсякчас. Кожному з нас доводилось чекати обслуговування в черзі (у магазині, на автозаправці, в бібліотеці, кав’ярні тощо). Аналогічні ситуації виникають, коли треба скористатися телефонним зв’язком або виконати свою програму на комп’ютері. Будь-яке виробництво теж можна представити як послідовність систем обслуговування. До типових систем обслуговування належать також ремонтні і медичні служби, транспортні системи, аеропорти, вокзали тощо.

Особливого значення набули такі системи у процесах інформатики. Це передусім комп’ютерні системи, мережі передавання інформації, операційні системи, бази і банки даних. Системи обслуговування віді- грають значну роль у повсякденному житті. Досвід моделювання різних типів дискретних систем свідчить про те, що приблизно 80 % цих моделей Грунтуються на СМО.

Сисмему масового обслуговування загалом можна представити як сукупність послідовно пов’язаних між собою вхідних потоків вимог на обслуговування (потоків замовлень), черг, каналів обслуговування і потоків обслужених замовлень. Будь-який пристрій, який безпосередньо обслуговує замовлення, називають каналом обслуговування.

Системи масового обслуговування можна класифікувати, базуючись на наявності тієї чи іншої ознаки.

**За характером надходження замовлень у систему**: системи з регулярним і випадковим потоками замовлень. Якщо кількість замов- лень, які надходять у систему за одиницю часу (інтенсивність потоку), стала або є заданою функцією часу, то маємо систему з регулярним потоком замовлень, в іншому разі – з випадковим. Випадковий потік замовлень може бути стаціонарним або нестаціонарним. Якщо пара- метри потоку замовлень не залежать від розташування інтервалу часу, який розглядають, на осі часу, то маємо стаціонарний потік замовлень, в противному разі – нестаціонарний. Наприклад, якщо кількість покупців, які приходять до магазину, не залежить від часу доби, то потік замовлень (покупців) – стаціонарний.

**За кількістю замовлень, які надходять за одиницю часу**: системи з ординарним і неординарним потоками замовлень. Якщо ймовірність надходження двох або більше замовлень в один момент часу дорівнює нулю або настільки мала, що нею можна знехтувати, то маємо систему з ординарним потоком замовлень. Наприклад, потік літаків, які прибувають на злітну смугу аеродрому, можна вважати орди- нарним, оскільки ймовірність надходження двох і більше літаків до каналу обслуговування (злітної смуги) в один і той самий момент часу дуже мала.

**За зв'язком між замовленнями**: системи без післядії від замовлень, які надійшли, і з післядією. Якщо ймовірність надходження замовлень у систему в деякий момент часу не залежить від того, скільки вимог уже надійшло до системи, тобто не залежить від передісторії процесу, який вивчають, то маємо задачу без післядії, у противному разі – з післядією. Прикладом задачі з післядією може слугувати потік студентів на складання заліку викладачу.

**За характером поведінки замовлень у системі**: системи з відмовами, з обмеженим очікуванням і з очікуванням без обмеження:

– якщо нове замовлення, яке прибуло на обслуговування, застає усі канали обслуговування уже зайнятими і покидає систему, то маємо систему з відмовами. замовлення може покинути систему і тоді, коли черга досягла певних розмірів. Якщо ракета супротивника з’являється в час, коли всі протиракетні пристрої обслуговують інші ракети, то вона без проблем залишає зону обслуговування;

– якщо нове замовлення, яке прибуло на обслуговування, застає усі канали обслуговування зайнятими і стає у чергу, але перебуває у ній обмежений час і, не дочекавшись обслуговування, покидає систему, то маємо систему з обмеженим очікуванням. Прикладом такого «нетерпля- чого» замовлення може бути самоскид із цементним розчином. Якщо час очікування великий, то щоб запобігти затвердненню розчину, він може бути розвантажений в іншому місці;

– якщо нове замовлення, яке прибуло на обслуговування, заставши усі канали обслуговування зайнятими, змушене очікувати своєї черги до того часу, поки не буде обслужене, то маємо систему з очікуванням без обмеження. Приклад: літак, який перебуває на аеродромі до того часу, поки не звільниться злітна смуга.

**За способом вибору замовлень на обслуговування**: з пріоритетом, за часом надходження, випадково, останнього обслуго- вують першим. Іноді в такому випадку кажуть про дисципліну обслуговування:

– якщо система масового обслуговування охоплює кілька категорій замовлень і з певних міркувань необхідно дотримуватись різного підходу до їхнього відбору, то маємо систему з пріоритетом. зокрема, під час надходження виробів на будмайданчик, перш за все монтують ті, які необхідні у цей момент;

– якщо канал, який звільнився, обслуговує замовлення, яке раніше за інших надійшло до системи, то маємо систему з обслуговуванням замовлень за часом надходження. Це найпоширеніший клас систем. Наприклад, покупця, який підійшов до продавця першим, обслуговують раніше за інших. Цей спосіб вибору замовлень на обслуговування застосовують там, де внаслідок технічних, технологічних або організаційних умов замовлення не можуть випереджати одне одного; якщо замовлення з черги надходять до каналу обслуговування у випадковому порядку, то маємо систему з випадковим вибором замовлень на обслуговування. Приклад: вибір слюсарем-сантехніком одного з декількох замовлень на усунення несправностей, які надійшли від мешканців. Вибір тут, зазвичай, визначають місцезнаходженням самого слюсаря: він надасть перевагу замовленню мешканця, який перебуває від нього найближче, якщо інші чинники не визначають вибору;

– останнього обслуговують першим. Цей спосіб вибору вимог на обслуговування використовують у тих випадках, коли зручніше й економніше брати на обслуговування замовлення, яке найпізніше надійшло до системи. зокрема, якщо будівельні вироби складені один на одному, то зручніше спочатку брати виріб, який надійшов останнім.

**За характером обслуговування замовлень**: на системи з детермінованим і випадковим часом обслуговування. Якщо інтервал часу між моментами надходження замовлення до каналу обслуговування і моментом виходу замовлення з цього каналу є сталим, то йдеться про систему з детермінованим часом обслуговування, в іншому разі – з випадковим.

**За кількістю каналів обслуговування**: на одноканальні і багатоканальні системи. Наприклад, для зведення будинку можна використати один будівельний кран (один канал обслуговування) або декелька (багато каналів) для обслуговування виробів, які прибувають на будів- ництво.

**За кількістю етапів обслуговування**: на однофазні і багатофазні системи. Якщо канали обслуговування розташовані послідовно, і вони неоднорідні, оскільки виконують різні операції обслуговування, то йдеться про багатофазну систему масового обслуговування. Прикладом такої системи може бути обслуговування автомобілів на станції технік- ного обслуговування (миття, діагностування тощо).

**За однорідністю замовлень, які надходять на обслуговування**: на системи з однорідними і неоднорідними потоками замовлень. Наприклад, якщо для розвантаження прибувають фургони одна- кової вантажомісткості, то такі замовлення називають однорідними, якщо різної – то неоднорідними.

**За обмеженістю потоку замовлень**: на замкнені і розімкнені системи. Якщо потік замовлень обмежений і замовлення, які покинули систему, через деякий час до неї повертаються, то маємо замкнену систему, у противному разі – розімкнену. Прикладом замкненої ситеми може слугувати бригада робітників, які налагоджують станки у ткацькому цеху.

З метою скорочення запису для позначення будь-якої однофазної СМО використовують систему кодування A/B/C/D/E, де на місці латинської літери ставлять відповідні характеристики системи:

A – закон розподілу інтервалів між надходженнями замовлень. Найчастіше використовують такі закони розподілу: показниковий (M), ерлангівський (E), гіперекспоненціальний (H), Гамма-розподіл (Г), детермінований (D). Для позначення довільного характеру розподілу вико- ристовують символ G;

B – закон розподілу часу обслуговування в каналах СМО. Тут використовують такі самі позначення, як і для розподілу інтервалів між над- ходженнями замовлень;

C – кількість каналів обслуговування. Тут використовують такі позначення: для одноканальних систем записують 1, для багатоканальних l (кількість каналів);

D – кількість місць у черзі. Якщо кількість місць у черзі необмежена, то це позначення можна не використовувати. Для скінченної кількості місць у черзі в загальному випадку приймають позначення r або n (кількість місць);

E – дисципліна обслуговування. Найчастіше використовують такі варіанти системи обслуговування: FIFO (першим прийшов – першим вийшов), LIFO (останнім прийшов – першим вийшов), RANDOM (випад- ковий порядок обслуговування). за дисципліни FIFO це позначення можна не використовувати.

Приклади позначень:

M/M/1 – СМО з одним каналом обслуговування, нескінченною чергою, показниковими законами розподілу інтервалів часу між надходь- женнями замовлень і часу обслуговування та дисципліною обслуго- вування FIFO;

E/H/l/r/LIFO – СМО з кількома каналами обслуговування, скінчен- ною чергою, ерлангівським законом розподілу інтервалів часу між надходженнями замовлень, гіперекспоненціальним розподілом часу обслу- говування та дисципліною обслуговування LIFO;

G/G/l – СМО з кількома каналами обслуговування, нескінченною чергою, довільними закономи розподілу інтервалів часу між надходь- женнями замовлень і часу обслуговування та дисципліною обслуго- вування FIFO.

Вивчення або задання потоку замовлень, механізму (кількості каналів, тривалості обслуговування тощо) та дисципліни обслуговування дає підстави для побудови моделі системи.

Суть досліджень реальних процесів за допомогою теорії масового обслуговування – кількісний опис потоку вимог, що надходять у систему, і часу обслуговування, визначення через їх характеристики показників якості функціонування системи як при існуючому варіанті її організації, так і при інших можливих варіантах й отримання висновків про поліпшення роботи системи масового обслуговування шляхом зміни її організації. Проте для аналітичного вирішення завдання недостатньо мати лише кількісний опис потоку вимог і часу обслуговування. Для правильного вибору виведених в аналітичній теорії ма- сового обслуговування розрахункових формул, за якими визначаються показники якості функціонування системи, необхідно знати також тип системи обслуговування.

Показники якості функціонування систем масового обслуговування залежать не тільки від величини параметрів потоку вимог і часу обслуговування, але і від різних ознак,

– форми системи і її внутрішньої організації, порядку обслуговування й інших, – залежно від яких всі задачі масового обслуговування діляться на декілька типів. Для кожного з них є свій набір показників якості функціонування системи і свої формули їх розрахунку залежно від величини параметрів потоку вимог і часу обслуговування.

На практиці найчастіше зустрічаються системи, в яких потік вимог близький до простого, а час обслуговування є показниковим. Для таких систем характерним є очікування, скінченне число обслуговуючих апаратів, обмежений потік вимог і неврегульоване обслуговування.

У теорії масового обслуговування розглядаються також системи з урахуванням можливості виходу з ладу обслуговуючих пристроїв. При розрахунку цих систем застосовуються методи теорій надійності і заміни обладнання. На основі теорії ймовірності і математичної статистики теорія надійності дозволяє встановити закономірності виникнення поломок обладнання, розробити методи контролю надійності виробів, оптимізувати їх надійність з економічної точки зору.

Завданням теорії масового обслуговування є відшукання залежностей величини, що характеризує якість функціонування обслуговуючої системи або її ефективність, від способів організації системи в цілому. Під ефективністю обслуговуючої системи розуміється характеристика рівня виконання цією системою її функцій. Показники ефективності визначаються трьома групами факторів: характеристиками якості і надійності системи обслуговування, економічними показниками й особи- востями функціонування системи.

Під якістю функціонування системи масового обслуговування розуміють не власне якість виконання тієї або іншої роботи, запит на яку надійшов, а ступінь задоволення потреби в обслуговуванні. При цьому поняття «якість» функціонування системи масового обслуговування у кожному окремому випадку матиме свій конкретний зміст і буде виражатися різними кількісними показниками, наприклад, величина черги на обслуговування; середній час обслуговування, очікування обслуговування або перебування вимоги в обслуговуючій системі; час простою обслуговуючих апаратів; упевненість, що всі вимоги, які надійшли в систему, будуть обслужені і т. д.

Кількісні показники якості функціонування систем масового обслуговування залежать від виду системи, а також від величин, що характеризують основні її параметри. Тому **метою теорії масового обслуговування є розробка математичних методів для відшукання основних показників процесів масового обслуговування, що характеризують якість функціонування системи масового обслуговування при різних варіантах її організації**.

При вирішенні завдань масового обслуговування виявляються функціональні залежності між показниками якості функціонування системи масового обслуговування і характеристиками потоку вимог, часу обслуговування, способу організації обслуговування. завдання вважається вирішеним, якщо вдається вибрати для даного типу системи масового обслуговування кількісні показники якості її функціонування і виразити їх через параметри, що характеризують вхідний потік вимог та час їх обслуговування.

Таким чином, предметом дослідження теорії масового обслуговування є кількісна сторона процесів масового обслуговування.

Показниками якості й ефективності функціонування системи, що найчастіше зустрічаються, є:

– ймовірність того, що обслуговуванням зайнято n пристроїв;
– ймовірність втрати об'єкта, що дорівнює ймовірності того, що всі пристрої

зайняті обслуговуванням;

– середня кількість зайнятих і вільних пристроїв;

– коефіцієнти простою і завантаження пристроїв;

– середній час перебування об'єкта в черзі і системі;

– середня величина черги;

– ймовірність того, що час перебування об'єкта в черзі триватиме не більше певної величини;

– ймовірність того, що кількість елементів у черзі більше деякого числа м ;

– кількість необслужених (втрачених) об'єктів;

– витрати і втрати при функціонуванні системи.

Оцінка ефективності дозволяє оптимізувати системи масового обслуговування, тобто оптимально організувати систему обслуговуючих пристроїв (їх кількість і склад) або потік об'єктів, що надходить. Для цього при оцінці ефективності застосовуються вартісні показники:

– вартість обслуговування об'єкта;

– вартість втрат, пов'язаних з очікуванням обслуговування в одиницю

– часу;

– вартість збитків, пов'язаних з втратою об'єктів;

– вартість експлуатації обслуговуючих пристроїв в одиницю часу; вартість одиниці часу простою пристрою та ін.