ISSN 1810-3022

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ ІМ. Я.С. ПІДСТРИГАЧА

ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ

Науковий збірник

Випуск 18

2020

Адреса редакції: Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України
вул. Наукова, 3-б
79060, Львів

Тел.: (032) 258-96-23
E-mail: ppmm@iapmm.lviv.ua

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ ім. Я.С. ПІДСТРИГАЧА

ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ

НАУКОВИЙ ЗБІРНИК

ЗАСНОВАНО В 2003 р.

Випуск 18 Львів 2020

ЗМІСТ

https://doi.org/10.15407/apmm2020.18.139-143

УДК 539.3

В. С. Пакош[1] ✉, В. М. Харченко[1,2], М. М. Хом'як[1,3], О. Ф. Лесик[4]

ВПЛИВ ПОДАТЛИВОСТІ ДО ТРАНСВЕРСАЛЬНОГО СТИСНЕННЯ НА ДЕФОРМАТИВНІСТЬ ШАРНІРНО ЗАКРІПЛЕНОЇ ПЛАСТИНИ-СМУГИ

На основі запропонованих раніше співвідношень варіанта уточненої теорії тонких пластин отримано аналітичні вирази для характеристик деформованого стану рівномірно навантаженої по верхній лицевій поверхні шарнірно закріпленої вздовж нижніх ребер видовжених торців пластини-смуги. Проаналізовано вплив податливості до трансверсального стиснення матеріалу пластини-смуги на її деформативність.

Ключові слова: *пластина-смуга, ребро, шарнірне закріплення, трансверсальне стиснення, деформативність.*

Вступ. Навантажені по верхній лицевій площині та видовжені в одному з напрямків прямокутні пластини або пластини-смуги − досить поширені елементи будівельних конструкцій та технічних засобів різноманітного цільового призначення [1, 8]. Внаслідок дії навантаження точки нижньої лицевої поверхні, як і всієї пластини, зазнають вертикальних зміщень, або ж прогинів. Максимальний прогин прийнято називати деформативністю пластини [5, 6], яка відіграє вирішальну роль у пластинчастих конструкціях шаруватого типу, складники яких не контактують. Зокрема, це має важливе значення для приладів точної механіки. Тому достовірне її визначення сьогодні є актуальною проблемою.

Дослідження за традиційними підходами, які засновані на класичних моделях деформування пластин, досить повно описані в працях [5−7, 10, 11]. З появою нових, зокрема композитних матеріалів, які окрім анізотропії пружних характеристик, мають також свою специфіку деформування, назріла потреба в побудові узагальнених та уточнених теорій. На сьогодні існує чимало різноманітних варіантів некласичних теорій пластин [3, 5, 10, 11]. Однак через певні математичні труднощі відсутні аналітичні оцінки врахування податливості до трансверсального стиснення за комплексної дії різних навантажень. У працях [2, 8] проаналізовано вплив податливості до зсуву та стиснення на деформативність композитної пластини-смуги внаслідок рівномірного нагріву, а в [9] − на власні частоти шаруватих пластин-смуг.

1. Формулювання задачі. Розглянемо трансверсальну ортотропну тонку пластину завтовшки $2h$, яка віднесена до декартової системи координат x_i, $i = 1,2,3$ з початком у її центрі. Вважаємо, що розмір пластини уздовж осі x_2 суттєво більший, ніж довжина перерізу $x_2 = 0$ серединної площини $x_3 = 0$. Якщо умови закріплення кінців пластини $x_1 = \pm l$ не залежать від координати x_2, то внаслідок незначного впливу закріплення країв $x_2 = \pm b$ функції, через які визначають характеристики напружено-деформованого стану в перерізі $x_2 = 0$, залежать лише від координат x_1, x_3. Пластина навантажена по верхній лицьовій площині розподіленим нормальним зусиллям P (див. рисунок).

Математична модель, яка описує напружено-деформований стан такої пластини за уточненою теорією, що враховує податливість матеріалу до трансверсальних зсуву та стиснення [4, 8], охоплює:

− рівняння рівноваги:

✉ v.pakosh@ukr.net

$$N' = 0\,, \quad M' - Q_0 = 0\,, \quad Q_0' = P\,, \quad Q_1' - 6\sigma_3^0 = 3P\,; \tag{1}$$

– співвідношення пружності:

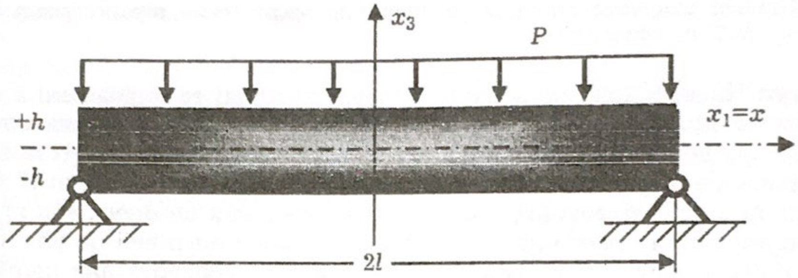
$$N = \overline{B}(e_1^0 + \beta e_3^0)\,, \quad M = \overline{D}\overline{e}_1^1\,,$$

$$Q_0 = \Lambda \cdot 2e_{13}^0\,, \quad Q_1 = \frac{3}{4}\Lambda \cdot 2e_{13}^1\,,$$

$$\sigma_3^0 = \frac{5}{6}E_0(e_3^0 + \lambda e_1^0)\,; \tag{2}$$

– деформаційні співвідношення:

$$e_1^0 = u'\,, \quad \overline{e}_1^1 = \gamma'\,, \quad 2e_{13}^0 = \gamma + w'\,, \quad 2e_{13}^1 = w_1'\,, \quad e_3^0 = w_1' / h\,. \tag{3}$$



У рівностях (1)–(3) вжиті загальноприйняті позначення [4] для розтягувального N, перерізального Q_0 та стискального Q_1 зусиль і згинного моменту M, компонент тензора напружень σ_{ij}, переміщення u точок серединної площини в тангенціальному напрямку x_1, кута повороту γ відносно осі x_3 нормального до серединної площини елемента перед деформуванням, переміщення w точок серединної та w_1 точок лицевої площин вздовж нормальної координати x_3, поздовжньої e_1^0 та згинної $\overline{e}_1^1$ деформацій, трансверсальних деформацій зсуву e_{13}^0 і стиснення e_{13}^1 та e_3^0, а також для введених раніше [4] узагальнених жорсткісних характеристик: $\overline{B} = 2Eh(1+\alpha)/(1-\nu^2)$ – жорсткості на розтяг, $\overline{D} = h^2\overline{B}/3$ – згинної, $\Lambda = 2k'hG'$ – зсувної, $\alpha = (1+\nu)(\nu')^2(E/E')/\delta^2$. Тут $k' = 14/15$, E та ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона в серединній та еквідистантній їй площинах, G' – трансверсальний модуль зсуву.

Крайові умови при $x_1 = x - l$ за шарнірного закріплення пластини на нижніх ребрах видовжених торців пластини-смуги запишемо у вигляді

$$N(\pm l) = 0\,, \quad u(\pm l) - h\,\gamma(\pm l) = 0\,, \quad M(\pm l) = 0\,, \quad w(\pm l) - w_1(\pm l) = 0\,. \tag{4}$$

Рівняння (1) разом зі співвідношеннями (2) та (3) і крайовими умовами (4) описують напружено-деформований стан пластини-смуги і явно враховують податливість матеріалу до трансверсальних зсуву та стиснення.

2. Відшукання розв'язку задачі. Оскільки крайові умови (4) мішаного типу, то необхідно отримати систему розв'язувальних рівнянь в узагальнених переміщеннях. Для цього спочатку проінтегруємо перше рівняння з (1):

$$N = C_1\,.$$

З першої умови в (4) маємо $C_1 = 0$. З урахуванням цієї рівності та після підставляння (3) в (2), а результат – в решту рівнянь (1) отримуємо:

$$u' + \beta w_1 / h = 0\,, \tag{5}$$

$$w_1'' - \frac{k^2}{h}(w_1 / h + \lambda u') = 4P / \Lambda , \tag{6}$$

$$\gamma'' - æ_1^2(\gamma + w') = 0 , \tag{7}$$

$$\gamma' + w'' = P / \Lambda , \tag{8}$$

де $æ_1^2 = \Lambda / \bar{D}$, $k^2 = \dfrac{20}{3}\dfrac{hE_0}{\Lambda}$.

Система рівнянь (5)–(8) складається з двох незалежних підсистем (5), (6) та (7), (8) для пар узагальнених переміщень u, w_1 та w, γ , відповідно. Однак ці пари взаємозв'язані крайовими умовами (4), хоча загальні розв'язки для них можна записати окремо. Для пари узагальнених переміщень w, γ з (7), (8) з урахуванням того, що $P = \text{const}$, третьої рівності в (4) та умови $w'(0) = 0$ маємо:

$$w = \frac{Px^2}{2\Lambda}\frac{P}{4\bar{D}}\left(\frac{x^4}{6} - l^2x^2\right) + C_8 , \tag{9}$$

$$\gamma = -\frac{P}{2\bar{D}}\left(\frac{x^3}{3} - l^2x^2\right). \tag{10}$$

Відповідно для пари u, w_1 з (5), (6) та умови, що $u(0) = 0$ і $w_1(x) = w_1(-x)$, отримаємо:

$$u = \frac{\beta}{\mu}C_3 sh(\mu x / h) + \frac{\beta h}{\mu^2}\frac{4P}{\Lambda}x , \tag{11}$$

$$w_1 = C_3 ch(\mu x / h) - \frac{h^2}{\mu^2}\frac{4P}{\Lambda} , \ \mu^2 = (1 - \lambda\beta)k^2. \tag{12}$$

Для визначення сталих інтегрування C_3 , C_8 в (11), (12) і (9) з другої та четвертої рівностей у (4) з урахуванням (9) і (10) дістанемо:

$$\begin{cases} -C_3\dfrac{\beta}{\mu}C_3 sh(\mu l / h) + \dfrac{\beta h}{\mu^2}\dfrac{4Pl}{\Lambda} + h\dfrac{Pl^3}{3\bar{D}} = 0; \\ \dfrac{Pl^2}{2\Lambda} + \dfrac{5}{24}\dfrac{Pl^4}{\bar{D}} + C_8 - C_3 ch(\mu l / h) + \dfrac{h^2}{\mu^2}\dfrac{4P}{\Lambda} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

З першого рівняння (13) визначаємо сталу

$$C_3 = \frac{\mu}{\beta}\frac{h}{sh(\mu l / h)}\frac{Pl^3}{3\bar{D}}\left(1 + 12\frac{\beta}{\mu^2}\frac{\varepsilon^2}{\bar{æ}_1^2}\right), \tag{14}$$

де $\varepsilon = h / l$ – параметр тонкостінності пластини-смуги, а $\bar{æ}_1^2 = h^2æ_1^2$.

Після підставляння (14) у друге рівняння системи (13) та з урахуванням того, що тут $ch(\mu l / h) / sh(\mu l / h) \cong 1$, маємо:

$$C_8 = -\frac{5}{24\bar{D}}\left[1 + \frac{12}{5}\frac{\varepsilon^2}{\bar{æ}_1^2} + \frac{96}{5}\frac{\varepsilon^4}{\mu^2\bar{æ}_1^2} - \frac{8}{5}\frac{\mu\varepsilon}{\beta}\left(1 + \frac{12}{5}\frac{\beta}{\mu^2\bar{æ}_1^2}\varepsilon^2\right)\right]. \tag{15}$$

3. Результати та їх аналіз. Після підставляння (15) в (9) шляхом граничного переходу $E / E' \to 0$ отримаємо вираз для прогину серединної поверхні за теорією, заснованою на гіпотезі С. П. Тимошенка:

$$w_T = -\frac{Px^2}{2\Lambda} - \frac{P}{4D}\left(\frac{x^4}{3} - l^2x^2\right) - \frac{5Pl^4}{24D}\left(1 + \frac{12}{5}\varepsilon^2 / \bar{æ}^2\right), \tag{16}$$

де $\bar{æ}_1^2 = \bar{æ}^2 / (1+\alpha)$; $\bar{æ}^2 = h^2\Lambda / D$.

Граничним переходом $E / G' \to 0$ із (16) отримуємо вираз для прогину серединної поверхні пластини-смуги за класичною теорією Кірхгофа–Лява:

$$w_K = -\frac{Px^2}{2\Lambda} - \frac{P}{4D}\left(\frac{x^4}{3} - l^2x^2\right) - \frac{5Pl^4}{24D}. \quad (17)$$

Максимальних абсолютних значень вирази (9), (16) та (17) набувають у точці $x = 0$:

$$w_{\max} = -\frac{5Pl^4}{24\bar{D}}\left[1 + \frac{12}{5}\frac{\varepsilon^2}{\bar{æ}_1^2} + \frac{6}{5}\frac{(4\varepsilon^2)^2}{\mu^2\bar{æ}_1^2} - \frac{8}{5}\frac{\mu\varepsilon}{\beta}\left(1 + 12\frac{\beta}{\mu^2}\frac{\varepsilon^2}{\bar{æ}_1^2}\right)\right], \quad (18)$$

$$w_{T,\max} = -\frac{5Pl^4}{24D}\left(1 + \frac{12}{5}\varepsilon^2 / \bar{æ}^2\right), \quad (19)$$

$$w_{K,\max} = -\frac{5Pl^4}{24D}. \quad (20)$$

Спочатку дослідимо вплив податливості до трансверсального зсуву на деформативність пластини-смуги. З формул (19) і (20) маємо вираз для коефіцієнта k_1, що враховує вплив податливості до трансверсального зсуву на деформативність пластини-смуги за зсувною теорією С. П. Тимошенка:

$$k_1 = \frac{w_{T,\max} - w_{K,\max}}{w_{K,\max}} \cdot 100\% = \frac{12}{5}(\varepsilon^2 / æ^2) \cdot 100\%. \quad (21)$$

Для ізотропного матеріалу пластини-смуги

$$k_1 = \frac{48}{25}\frac{\varepsilon^2}{1-\nu} \cdot 100\%$$

і за характерного значення коефіцієнта Пуассона для полімерів $\nu = 0.25$ та при $\varepsilon = 0.1$ він не перевищує 3%. Однак уже при $E / G' > 50$, що притаманно армованим композитам на полімерній основі, цей коефіцієнт перевищує 5% і тоді необхідно враховувати податливість до трансверсального зсуву у проектних розрахунках деформативності.

Для коефіцієнта k_2, що враховує вплив податливості до трансверсального зсуву на деформативність пластини-смуги, з (18) та (19) маємо:

$$k_2 = \frac{u_3^- - w_{T,\max}}{w_{T,\max}} \cdot 100\% = \frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{1}{1 + 12\varepsilon^2 / 5\bar{æ}^2} \cdot 100\%,$$

де $u_3^- = w(0) - w_1(0)$ – переміщення нижньої точки нормалі до серединної площини пластини-смуги при $x = 0$.

Для розглянутої вище ізотропії матеріалу коефіцієнт $k_2 = -10.9\%$, тобто деформативність внаслідок стискання нормальних до серединної площини елементів зменшується.

Висновки. З урахуванням податливості до трансверсального зсуву збільшується деформативність розглянутої пластини-смуги, що необхідно брати до уваги під час проектних розрахунків, якщо $E / G' \geq 50$. І, навпаки, з врахуванням податливості до трансверсального стиснення, деформативність зменшується. Оскільки, $\lim\limits_{E/G' \to \infty}[1 / (1 + 12\varepsilon^2 / \bar{æ}^2)] = 0$, то падіння деформативності не перевищуватиме 12% за параметра тонкостінності $\varepsilon = 0.1$.

1. *Андреева Л. Е.* Упругие элементы приборов. – Москва: Машиностроение, 1981. – 392 с.
2. *Марчук М. В., Пакош В. С., Харченко В. М.* Термопружний стан рівномірно нагрітої шарнірно закріпленої на торцях нижньої лицевої площини композитної пластини-смуги // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2015. – Вип. 13. – С. 182–186.
3. *Механика* композитов: в 12-ти т. Т. 8: Статика элементов конструкций / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко, И. Г. Емельянов и др. – Киев: А.С.К., 1999. – 384 с.
4. *Осадчук В. А., Марчук М. В.* Математична модель динамічного деформування податливих до зсуву та стиску композитних пластин // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 43–50.
5. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1973. – 248 с.
6. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки / Пер. с англ. – Москва: Наука, 1966. – 636 с.
7. *Bhavikatti S. S.* Theory of plates and shells. 3rd edition. – New Delhi: New Age International Publishers, 2016. – 312 p.
8. *Marchuk M. V., Pakosh V. S.* The influence of the pliability to shear and compression on the deformability of uniformly heated composite plate-strip // Science and Education a New Dimension, Natural and Technical Sciences. – 2015. – III (8), Issue 73. – P. 79–81.
9. *Marchuk M. V., Pakosh V. S., Kharchenko V. M.* Natural frequencies of layered composite plates-strips with components compliant to transverse shear and compression // J. Math. Sci. – 2014. – **203**, No. 2. – P. 185–192, https://doi.org/10.1007/s10958-014-2099-1.
10. *Reddy J. N.* Theory and analysis of elastic plates and shells. – Boca Raton: CRC Press, 2006. – 568 p.
11. *Ansel C. Ugural.* Plates and shells:theory and analysis. – Boca Raton: CRC Press, 2017. – 618 p.

THE INFLUENCE OF PLIABILITY TO TRANSVERSAL COMPRESSION ON THE DEFORMABILITY OF A HINGED PLATE-STRIP

On the basis of the previously proposed relations of the variant of the refined theory of thin plates, the analytical expressions are obtained for the characteristics of the strained state of the plate-strip that is uniformly loaded on the upper front surface and hinged along the lower edges of its elongated ends. The influence of pliability to transverse compression of the strip-plate material on its deformability is analyzed.

Key words: plate-strip, rib, hinged support, transverse compression, deformability

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів;
[2] Держ. підпр. «Констр. бюро «Південне»
ім. М. К. Янгеля», Дніпро;
[3] Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів;
[4] Тернопільський нац. економ. ун-т
МОН України, Тернопіль

Одержано
25.11.20