

Міністерство освіти і науки України  
Західноукраїнський національний університет

*А.М. Алілуйко, Н.В. Дзюбановська*

**ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ  
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ**

Тернопіль  
ЗУНУ  
2023

Рецензенти: *Боднар Дмитро Ількович*, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри економічної кібернетики та інформатики Західноукраїнського національного університету  
*Мартинюк Сергій Володимирович*, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформатики та методики її викладання Тернопільського національного педагогічного університету ім. В. Гнатюка.

*Розглянуто і рекомендовано до друку на засіданні кафедри прикладної математики (протокол № 5 від 12.01.2023 р.)*

**Алілуйко А.М.**

А 50 Тестові завдання з вищої математики / Алілуйко А.М., Дзюбановська Н.В. – Тернопіль: ЗУНУ, 2023. – 74 с.

Методична розробка призначена для тестового контролю знань студенті першого бакалаврського рівня із дисципліни «Вища математика».

## Вступ

Дисципліна «Вища математика» спрямована на формування у студентів теоретичних знань та вироблення практичних навичок застосування математичного апарату, який допомагає аналізувати, моделювати і вирішувати прикладні завдання. Одним із етапів підготовки студентів є здійснення контролю засвоєння навчального матеріалу, наприклад, за допомогою тестових завдань.

Запропонована методична розробка містить 700 тестових завдань з наступних розділів «Вищої математики»: лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз, функції багатьох змінних, інтегральне числення, диференціальні рівняння, числові та функціональні ряди. Тести подані у вигляді варіантів по 10 завдань.

Методичну розробку можна використовувати в навчальному процесі для організації контролю знань студентів. Вона може бути використаною студентами для самоконтролю при підготовці до практичних та лекційних занять.

# Лінійна та векторна алгебра

## Варіант 1

1. При якій умові система рівнянь має єдиний розв'язок  $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$ .

а)  $a_{11} = a_{21} = a_{12} = a_{22}$ ; б)  $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$ ; в)  $a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12}$ ; г) має безліч розв'язків.

2. Умова перпендикулярності двох векторів

а)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ ; б)  $\vec{a} + \vec{b} = 0$ ; в)  $\vec{a} - \vec{b} = 0$ ; г)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

3. Знайти алгебраїчне доповнення до елемента  $a_{13}$  матриці  $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 9 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 6 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

а) 80; б) -68; в) 0; г) -80.

4. Знайти матрицю  $D = C^2 - 2B + A^T$ , якщо  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  і  $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ .

а)  $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & -15 \end{bmatrix}$ ; б)  $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -15 & 8 \end{bmatrix}$ ; в)  $\begin{bmatrix} -15 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ; г)  $\begin{bmatrix} 5 & -15 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ .

5. Розв'язати систему рівнянь і порахувати суму значень  $x_1, x_2, x_3$ , що є розв'язком системи:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -10, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 16. \end{cases}$$

а) 3; б) -1; в) 2; г) 1.

6. Обчислити косинус кута між векторами  $\vec{a}(2;2;1)$  і  $\vec{b}(0;4;0)$

а) 1/3; б) 2/3; в) -1/3; г) 1/2.

7. Обчислити довжину вектора  $\overline{M_1M_2}$  якщо  $M_1(1;3;-2)$  а  $M_2(4;-1;-2)$

а)  $\sqrt{29}$ ; б) 5; в)  $3\sqrt{2}$ ; г)  $5\sqrt{3}$ .

8. Розкласти вектор  $\vec{b}(3;-14)$  по базису  $\vec{a}_1(2;-3), \vec{a}_2(5;2)$

а)  $\vec{b} = 4\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ ;

б)  $\vec{b} = -\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ ;

в)  $\vec{b} = 4\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ ;

г) вектори  $\vec{a}_1$  і  $\vec{a}_2$  не утворюють базис.

9. Обчислити  $BA^{-1}$ , якщо  $B = \begin{bmatrix} 2 & 10 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ .

а)  $[-45 \ 91 \ -16]$ ; б)  $[91 \ -45 \ 16]$ ; в)  $[16 \ -45 \ -91]$ ; г)  $[45 \ -91 \ 16]$ .

10. Розв'язати матричне рівняння  $A \cdot X \cdot B = C$ , якщо  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$  і  $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ .

а)  $\begin{bmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ ; б)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{7}{10} \\ \frac{1}{30} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$ ; в)  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \\ \frac{7}{10} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ ; г)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{7}{10} \\ -\frac{1}{30} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$ .

## Варіант 2

1. Обчислити алгебраїчне доповнення до елемента  $a_{33}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

а)  $a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}$ ; б)  $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33}$ ; в)  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ; г)  $a_{11}a_{22}a_{12}a_{21}$ .

2. Сума двох векторів  $\vec{a}(x_1, y_1)$   $\vec{b}(x_2, y_2)$  називається вектор  $\vec{c}$  координатами

а)  $((x_1 + x_2)y_1, (x_1 + x_2)y_2)$ ; б)  $(x_1x_2, y_1y_2)$ ; в)  $(x_1y_1, x_2y_2)$ ; г)  $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

3. Знайти мінор до елемента  $a_{24}$  матриці  $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \\ 7 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ .

а) -4; б) 14; в) -11; г) 7.

4. Знайти матрицю  $D = A^2 + B^T - 2C$ , якщо  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  і  $C = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ .

а)  $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$ ; б)  $\begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ ; в)  $\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$ ; г)  $\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$ .

5. Розв'язати систему рівнянь і вказати найбільше зі значень  $x_1, x_2, x_3$ , що є розв'язком

$$\text{системи} \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -6, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 15, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

а) 3; б) система не сумісна; в) 1; г) 0.

6. Обчислити косинус кута між векторами  $\vec{a}(2; -2; 1)$  і  $\vec{b}(0; 4; 0)$ .

а) 1/3; б) -2/3; в) -1/3; г) 1/2.

7. Обчислити довжину вектора  $\overline{M_1M_2}$  якщо  $M_1(0; 4; 4)$ ,  $M_2(3; 1; -2)$

а)  $\sqrt{22}$ ; б) 24; в)  $3\sqrt{6}$ ; г)  $6\sqrt{3}$ .

8. Розкласти вектор  $\vec{b}(5; 1)$  по базису  $\vec{a}_1(3; 1)$ ,  $\vec{a}_2(2; 0)$ .

а)  $\vec{b} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ ; б)  $\vec{b} = 2\vec{a}_1 - 0.5\vec{a}_2$ ; в)  $\vec{b} = 3\vec{a}_1 - 4\vec{a}_2$ ; г) вектори  $\vec{a}_1$  і  $\vec{a}_2$  не утворюють базис.

9. Обчислити визначник оберненої матриці до

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

а) -1/9; б) 1/9; в) -9; г) обернена не існує.

10. Розв'язати матричне рівняння  $A \cdot X \cdot B = C$ , якщо  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  і  $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$ .

а)  $\begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{13}{15} & -\frac{1}{15} \end{bmatrix}$ ; б)  $\begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{13}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{13}{15} \end{bmatrix}$ ; в)  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{13}{15} & -\frac{1}{15} \end{bmatrix}$ ; г)  $\begin{bmatrix} \frac{13}{15} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{13}{15} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$ .

### Варіант 3

1. Ранг матриці дорівнює

- а) Значенню мінора найбільшого порядку ;
- б) Порядку мінора найбільшого порядку;
- в) Порядку найбільшого мінора відмінного від нуля;
- г) Порядку найбільшого додатного мінора .

2. Скалярний добуток двох векторів  $\vec{a}_1(x_1, y_1, z_1)$  і  $\vec{a}_2(x_2, y_2, z_2)$  рівний

- а)  $(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)(z_1 + z_2)$  ;
- б)  $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$  ;
- в)  $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$  ;
- г)  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$  .

3. Знайти алгебраїчне доповнення до елемента  $a_{21}$  матриці  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ -3 & 7 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ .

- а) -22;      б) 22 ;      в) -28;      г) 28.

4. Знайти матрицю  $D = A^T + B^2 - 2C$ , якщо  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$  і  $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ .

- а)  $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 13 & -8 \end{bmatrix}$ ;      б)  $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 13 \end{bmatrix}$ ;      в)  $\begin{bmatrix} 2 & 13 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$ ;      г)  $\begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$ .

5. Розв'язати систему рівнянь і обчислити суму значень  $x_1, x_2, x_3$ , що є розв'язком системи

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -17, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -22. \end{cases}$$

- а) -1;      б) 4;      в) 1;      г) -4.

6. Обчислити косинус кута між векторами  $\vec{a}(-1;2;-2)$  і  $\vec{b}(0;0;3)$ .

- а) -1;      б) 1;      в) 2/3;      г) -2/3.

7. Обчислити довжину вектора  $\overline{M_1M_2}$  якщо  $M_1(4;1;3)$ ,  $M_2(2;1;5)$ .

- а)  $2\sqrt{2}$ ;      б) 8;      в) 4;      г)  $4\sqrt{2}$ .

8. Розкласти вектор  $\vec{b}(-3;8)$  по базису  $\vec{a}_1(1;-3)$ ,  $\vec{a}_2(2;1)$ .

- а)  $\vec{b} = 3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2$ ;      б)  $\vec{b} = -3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2$ ;
- в)  $\vec{b} = 3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2$ ;      г) вектори  $\vec{a}_1$  і  $\vec{a}_2$  не утворюють базис.

9. Обчислити  $BA^{-1}$  якщо  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ .

- а)  $[19/9 \ 1 \ -1/3]$ ;      б)  $[1/3 \ 1 \ 19/9]$ ;      в)  $[-1/3 \ 1 \ -19/9]$ ;      г)  $[-19/9 \ 1 \ 1/3]$ .

10. Розв'язати матричне рівняння  $A \cdot X \cdot B = C$ , якщо  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  і

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

- а)  $\begin{bmatrix} -\frac{7}{5} & 0 \\ -\frac{3}{20} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ ;      б)  $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{7}{5} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{20} \end{bmatrix}$ ;      в)  $\begin{bmatrix} -\frac{7}{5} & -\frac{3}{20} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$ ;      г)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{20} \\ -\frac{7}{15} & 0 \end{bmatrix}$ .

## Варіант 4

1. Які матриці з  $A, B, C$  можна множити

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}, C = [c_{11} \ c_{12} \ c_{13} \ c_{14}]?$$

а)  $BC$  ;      б)  $CB$  ;      в)  $AB$  ;      г)  $BA$ .

2. Скалярним добутком векторів  $\vec{a}$  та  $\vec{b}$  які утворюють кут  $\alpha$  між собою, називається:

а)  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$  ;      б)  $\sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2} \cdot \sin \alpha$  ;      в)  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$  ;      г)  $(|\vec{a}| + |\vec{b}|) \cdot \cos \alpha$  .

3. Знайти алгебраїчне доповнення до елемента  $a_{34}$  матриці  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ -6 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & -5 \\ 4 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ .

а) 12;      б) -12;      в) 22;      г) -22.

4. Знайти матрицю  $D = 3A + B^2 - C^T$ , якщо  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  і  $C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$ .

а)  $\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 24 \end{bmatrix}$ ;      б)  $\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -4 & 24 \end{bmatrix}$ ;      в)  $\begin{bmatrix} 24 & -4 \\ -8 & 9 \end{bmatrix}$ ;      г)  $\begin{bmatrix} 24 & -8 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}$ .

5. Розв'язати систему рівнянь і вказати рівні зі значень  $x_1, x_2, x_3$ , що є розв'язком системи

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 + 3x_3 = -14, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -6, \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -16. \end{cases}$$

а)  $x_2 = x_3$ ;      б)  $x_1 = x_2$ ;      в)  $x_1 = x_3$ ;      г)  $x_1 = x_2 = x_3$ .

6. Обчислити косинус кута між векторами  $\vec{a}(1;2;-2)$  і  $\vec{b}(3;0;0)$ .

а)  $\frac{1}{2}$ ;      б)  $-\frac{1}{2}$ ;      в)  $\frac{1}{3}$ ;      г)  $-\frac{1}{3}$ .

7. Обчислити довжину вектора  $\overline{M_1M_2}$  якщо  $M_1(1;2;5)$  а  $M_2(4;1;3)$ .

а) 14 ;      б)  $\sqrt{14}$  ;      в) 64;      г) 8.

8. Розкласти вектор  $\vec{b}(10;7)$  по базису  $\vec{a}_1(-2;0)$   $\vec{a}_2(3;1)$ .

а)  $\vec{b} = 5\vec{a}_1 + 8\vec{a}_2$ ;      б)  $\vec{b} = -5\vec{a}_1 + 8\vec{a}_2$ ;  
в)  $\vec{b} = 5\vec{a}_1 - 8\vec{a}_2$ ;      г) вектори  $\vec{a}_1$  і  $\vec{a}_2$  не утворюють базис.

9. Обчислити визначник оберненої матриці до  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ .

а) 1/8;      б) -1/8;      в) 1/4;      г) -1/4.

10. Розв'язати матричне рівняння  $A \cdot X \cdot B = C$ , якщо  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  і  $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ .

а)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ;      б)  $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ;      в)  $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ ;      г)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ .

## Варіант 5

1. Якщо у визначнику порядку  $n$  до одного рядка додати інший помножений на  $m$  то визначник

- а) збільшиться в  $(m+1)$  разів;      б) не зміниться;  
в) збільшиться в  $(m+1)n$  разів;      г) збільшиться в  $mn$  разів.

2. Вектори  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  називаються лінійно-незалежними, коли існують такі  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , що з рівняння  $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = 0$  випливає

- а) хоч одне з  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  дорівнює 0;      б)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  ;  
в)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ;      г)  $\lambda_1 \neq 0; \lambda_2 \neq 0; \lambda_3 \neq 0$ .

3. Знайти алгебраїчне доповнення до елемента  $a_{14}$  матриці  $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 11 & -3 \\ 1 & 7 & 0 & 4 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ .

- а) -74; б) -51;      в) 51;      г) 74.

4. Знайти матрицю  $D = A^T + 4B - C^2$ , якщо  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  і  $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ .

- а)  $\begin{bmatrix} -9 & 22 \\ 13 & 27 \end{bmatrix}$ ;      б)  $\begin{bmatrix} -9 & 13 \\ 27 & 22 \end{bmatrix}$ ;      в)  $\begin{bmatrix} 13 & 27 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}$ ;      г)  $\begin{bmatrix} 13 & 22 \\ -9 & 27 \end{bmatrix}$ .

5. Розв'язати систему рівнянь і обчислити суму значень  $x_1, x_2, x_3$ , що є розв'язком системи

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 5. \end{cases}$$

- а) 4;      б) 2;      в) 1;      г) 0.

6. Обчислити косинус кута між векторами  $\vec{a}(2;2;-1)$  і  $\vec{b}(0;0;-4)$ .

- а)  $-\frac{1}{3}$ ;      б)  $\frac{4}{7}$ ;      в)  $\frac{1}{3}$ ;      г)  $\frac{1}{72}$ .

7. Обчислити довжину вектора  $\overline{M_1 M_2}$  якщо  $M_1(3;1;3)$  а  $M_2(-2;0;1)$ .

- а) 6;      б)  $\sqrt{6}$ ;      в) 30;      г)  $\sqrt{30}$ .

8. Розкласти вектор  $\vec{b}(3;-5)$  по базису  $\vec{a}_1(2;-1)$   $\vec{a}_2(3;2)$ .

- а)  $\vec{b} = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ ;      б)  $\vec{b} = 3\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ ;      в)  $\vec{b} = \vec{a}_1 - 3\vec{a}_2$ ;      г) вектори  $\vec{a}_1$  і  $\vec{a}_2$  не утворюють базис.

9. Обчислити ранг матриці  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & -1 & 2 \\ 7 & 7 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ .

- а) 1;      б) 2;      в) 3;      г) 4.

10. Розв'язати матричне рівняння  $A \cdot X \cdot B = C$ , якщо  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  і  $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ .

- а)  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{40} & \frac{5}{8} \\ \frac{21}{40} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$ ;      б)  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{40} & -\frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{21}{40} \end{bmatrix}$ ;      в)  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ -\frac{1}{40} & \frac{21}{40} \end{bmatrix}$ ;      г)  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{21}{40} \\ \frac{5}{8} & -\frac{1}{40} \end{bmatrix}$ .



## Варіант 6

1. Якщо ранг основної матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь дорівнює рангу розширеної матриці, то це означає:

- а) система рівнянь має єдиний розв'язок;                      б) має безліч розв'язків;  
в) система сумісна;    г) система не сумісна.

2. Вектори  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  називаються лінійно-незалежні, якщо з умови  $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = 0$  випливає

- а)  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ ,                      б)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ,  
в)  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$ ,                      г) хоч одне з значень  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  не дорівнює нулю.

3. Знайти алгебраїчне доповнення до елемента  $a_{32}$  матриці  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 4 & 3 & 8 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \\ 5 & 7 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ .

- а) 42;                      б) -28;                      в) 28;                      г) -42.

4. Знайти матрицю  $D = A^2 + B^T - C$ , якщо  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$  і  $C = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

- а)  $\begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ ;                      б)  $\begin{bmatrix} 13 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ;                      в)  $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 13 & 4 \end{bmatrix}$ ;                      г)  $\begin{bmatrix} 13 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ .

5. Розв'язати систему рівнянь і обчислити добуток значень  $x_1, x_2, x_3$ , що є розв'язком

$$\text{системи } \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -13, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = 18. \end{cases}$$

- а) 3;                      б) 6;                      в) 4;                      г) 9.

6. Обчислити косинус кута між векторами  $\vec{a}(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$  і  $\vec{b}(6\vec{j} - 3\vec{k})$ .

- а) 1/2;                      б) 1/3;                      в) -1/3;                      г) 0.

7. Обчислити довжину вектора  $\overline{M_1 M_2}$  якщо  $M_1(-2; 3; 1)$ ,  $M_2(0; 1; 5)$ .

- а) 24;                      б)  $8\sqrt{3}$ ;                      в) 12;                      г)  $4\sqrt{6}$ .

8. Задано трикутник ABC, A(1;3), B(-2;5), C(-4;1). Обчислити  $\cos B$ .

- а)  $\frac{1}{\sqrt{320}}$ ;                      б)  $\frac{1}{\sqrt{65}}$ ;                      в)  $\frac{1}{65}$ ;                      г)  $\frac{-5}{\sqrt{65}}$ .

9. Обчислити  $BA^{-1}$ , якщо  $B = [7 \quad -7 \quad -7]$ ,  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ .

- а)  $[-3,15 \quad -2,1 \quad -1,75]$ ;                      б)  $[-3,15 \quad -1,75 \quad -2,1]$ ;  
в)  $[-2,1 \quad -3,15 \quad -1,75]$ ;                      г)  $[-2,1 \quad -1,75 \quad -3,15]$ .

10. Розв'язати матричне рівняння  $A \cdot X \cdot B = C$ , якщо  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

- а)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ -\frac{1}{40} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$ ;                      б)  $\begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{40} \end{bmatrix}$ ;                      в)  $\begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{40} \end{bmatrix}$ ;                      г)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} & -\frac{1}{40} \end{bmatrix}$ .

## Варіант 7

1. Знайти розв'язок для матричного рівняння  $AX = B$ .

а)  $X = AB^{-1}$ ;    б)  $X = BA^{-1}$ ;    в)  $X = A^{-1}B$ ;    г)  $X = -AB$ .

2. Якщо система векторів  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$  утворює базис, то це означає, що :

а) кожен з векторів  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$  можна виразити через решта  $(n-1)$  векторів;

б) будь-який вектор можна розкласти по векторах  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ ;

в) вектори  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$  - лінійно-залежні;

г) всі вектори  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$  взаємо-перпендикулярні

3. Знайти алгебраїчне доповнення до елемента  $a_{44}$  матриці  $A = \begin{bmatrix} 5 & 9 & -3 & -2 \\ -6 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$ .

а) 38;    б) -2;    в) 2;    г) -38.

4. Знайти матрицю  $D = A^T + 5B - C^2$ , якщо  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  і  $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

а)  $\begin{bmatrix} 17 & 31 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$ ;    б)  $\begin{bmatrix} 17 & 8 \\ 31 & -6 \end{bmatrix}$ ;    в)  $\begin{bmatrix} 31 & 8 \\ 17 & -6 \end{bmatrix}$ ;    г)  $\begin{bmatrix} 31 & 17 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$ .

5. Розв'язати систему рівнянь і вказати суму коренів  $x_1, x_2, x_3$ , що є розв'язком системи

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = -10, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 6. \end{cases}$$

а) 6;    б) 4;    в) 2;    г) 0.

6. Обчислити косинус кута між векторами  $\vec{a}(0;3;0)$  і  $\vec{b}(4;4;-2)$ .

а)  $1/27$ ;    б)  $4/\sqrt{3}$ ;    в)  $2/3$ ;    г)  $-2/3$ .

7. Обчислити довжину вектора  $\overline{M_1M_2}$  якщо  $M_1(1;-4;5)$  а  $M_2(0;-2;7)$ .

а) 9;    б) 1;    в)  $\sqrt{10}$ ;    г) 3.

8. Знайти косинус кута  $\angle C$  трикутника  $\Delta ABC$  в якого  $A(4;2)$ ,  $B(1;5)$  і  $C(0;0)$ .

а)  $-7/\sqrt{130}$ ;    б)  $7/\sqrt{130}$ ;    в)  $7/130$ ;    г) 0.

9. Обчислити  $AB^{-1}$ , якщо  $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ .

а)  $\begin{bmatrix} 10 & -6 & -1 \end{bmatrix}$ ;    б)  $\begin{bmatrix} 10 & -1 & -6 \end{bmatrix}$ ;    в)  $\begin{bmatrix} -6 & 10 & -1 \end{bmatrix}$ ;    г)  $\begin{bmatrix} -6 & -1 & 10 \end{bmatrix}$ .

10. Розв'язати матричне рівняння  $A \cdot X \cdot B = C$ , якщо  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$  і

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

а)  $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ;    б)  $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ;    в)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ;    г)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ .

## Варіант 8

1. Якщо для системи лінійних рівнянь ранг основної матриці рівний рангу розширеної матриці, то це означає

- а) система має єдиний розв'язок;                      б) система має безліч розв'язків;  
в) система сумісна;    г) система несумісна

2. Нехай вектори  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  задовольняють рівняння  $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 = \vec{0}$ , де  $\lambda_1, \lambda_2$  – дійсні числа. Для яких значень  $\lambda_1, \lambda_2$  можна стверджувати, що вектори  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  рівні?

- а)  $\lambda_1 = \lambda_2$ ;                      б)  $\lambda_1 = -\lambda_2$ ;                      в)  $\lambda_1 + \lambda_2 = -1$ ;                      г)  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ .

3. Знайти алгебраїчне доповнення до елемента  $a_{12}$  матриці  $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -8 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ .

- а) 33;                      б) -33;                      в) -73;                      г) 73.

4. Знайти матрицю  $D = A^2 + 3B - 2C^T$ , якщо  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  і  $C = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ .

- а)  $\begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$ ;                      б)  $\begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$ ;                      в)  $\begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ ;                      г)  $\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}$ .

5. Розв'язати систему рівнянь і обчислити  $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$  де  $x_1, x_2, x_3$  розв'язок системи

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -7. \end{cases}$$

- а) -7;                      б) 3;                      в) -4;                      г) 13.

6. Обчислити косинус кута між векторами  $\vec{a} = 5\vec{i}$  і  $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ .

- а) -1;                      б) 3/4;                      в) -2/3;                      г) 2/3.

7. Обчислити довжину вектора  $\overline{M_1 M_2}$  якщо  $M_1(3;1;-1)$  а  $M_2(4;2;5)$ .

- а) 14;                      б)  $\sqrt{38}$ ;                      в) 33;                      г) 38.

8. Розкласти вектор  $\vec{b}(10;8)$  по базису  $\vec{a}_1(3;-6)$   $\vec{a}_2(1;2)$ .

- а)  $\vec{b} = -\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2$ ;                      б)  $\vec{b} = \vec{a}_1 + 7\vec{a}_2$ ;  
в)  $\vec{b} = 3\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ ;                      г) вектори  $\vec{a}_1$  і  $\vec{a}_2$  не утворюють базис.

9. Обчислити ранг матриці  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 4 & -6 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ .

- а) 0;                      б) 2;                      в) 4;                      г) 3.

10. Розв'язати матричне рівняння  $A \cdot X \cdot B = C$ , якщо  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  і  $C = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ .

- а)  $\begin{bmatrix} 2 & 16 \\ -2 & -18 \end{bmatrix}$ ;                      б)  $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -18 & 16 \end{bmatrix}$ ;                      в)  $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 16 & -18 \end{bmatrix}$ ;                      г)  $\begin{bmatrix} 2 & -18 \\ -2 & 16 \end{bmatrix}$ .

### Варіант 9

1. Якщо відомо, що  $AB=BA=E$ , то це означає, що ...

- а)  $A+B$ ;      б)  $A=B=E$ ;      в)  $A=B^{-1}$ ;      г)  $|A|=|B|$ .

2. Якщо вектори  $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$  і  $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$  перпендикулярні, то це означає, що

- а)  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ ;      б)  $\vec{b} = \lambda \vec{a}, \lambda \neq 0$ ;  
в)  $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$ ;      г)  $x_1x_2 = y_1y_2 = z_1z_2 = 1$ .

3. Знайти алгебраїчне доповнення до елемента  $a_{42}$  матриці  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 8 & 5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ .

- а) 14;      б) -14;      в) -21;      г) 21.

4. Знайти матрицю  $D = A^T - 2B^2 + C$ , якщо  $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$  і  $C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ .

- а)  $\begin{bmatrix} 16 & 1 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$ ;      б)  $\begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$ ;      в)  $\begin{bmatrix} 8 & 16 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$ ;      г)  $\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 16 & 8 \end{bmatrix}$ .

5. Розв'язати систему рівнянь і обчислити  $x_1 - x_2 - x_3$ , де  $x_1, x_2, x_3$  розв'язок системи

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = -4, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

- а) 2;      б) -2;      в) 3;      г) -4.

6. Обчислити косинус кута між векторами  $\vec{a}(6;0;0)$  і  $\vec{b}(1;-2;2)$ .

- а)  $-1/3$ ;      б)  $2/3$ ;      в)  $-2/3$ ;      г)  $1/3$ .

7. Обчислити довжину вектора  $\overline{M_1M_2}$  якщо  $M_1(-2;5;1)$  а  $M_2(1;2;-2)$ .

- а) 27;      б) 9;      в)  $3\sqrt{3}$ ;      г) 5.

8. Обчислити  $\cos B$  трикутника  $ABC$ , якщо  $A(2;-5)$ ,  $B(4;-8)$ ,  $C(3;-7)$ .

- а)  $\frac{5}{26}$ ;      б)  $\frac{1}{26}$ ;      в);  $\frac{1}{\sqrt{26}}$       г)  $\frac{5}{\sqrt{26}}$ .

9. Обчислити визначник оберненої матриці  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ .

- а)  $\frac{1}{20}$ ;      б)  $-\frac{1}{20}$ ;      в) 20;      г) -20.

10. Розв'язати матричне рівняння  $A \cdot X \cdot B = C$ , якщо  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$  і

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

- а)  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{5}{24} \end{bmatrix}$ ;      б)  $\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{9}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{5}{24} \end{bmatrix}$ ;      в)  $\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{5}{24} \end{bmatrix}$ ;      г)  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{24} \end{bmatrix}$ .

## Варіант 10

1. Якщо кожен елемент квадратної матриці порядку  $n$  домножити на число  $m$ , то її визначник:

- а) збільшиться в  $m$  разів;                      б) збільшиться в  $m^n$  разів;  
в) збільшиться в  $m \cdot n$  разів;                      г) не зміниться.

2. Швидкість корабля 8 м/с. Обчислити абсолютну швидкість пасажера, що рухається по палубі зі швидкістю 6 м/с відносно корабля в напрямку перпендикулярному до його руху.

- а) 14 м/с;                      б) 2 м/с;                      в) 10 м/с;                      г) 8 м/с.

3. Знайти мінор до елемента  $a_{33}$  матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 9 & 1 \\ 5 & 0 & -7 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & -2 \\ 7 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

- а) -18;                      б) 58;                      в) -58;                      г) 18.

4. Знайти матрицю  $D = A^2 - B^T + 4C$ , якщо  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$  і  $C = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ .

- а)  $\begin{bmatrix} 18 & -11 \\ 28 & 15 \end{bmatrix}$ ;                      б)  $\begin{bmatrix} 18 & 15 \\ -11 & 28 \end{bmatrix}$ ;                      в)  $\begin{bmatrix} 28 & -11 \\ 18 & 15 \end{bmatrix}$ ;                      г)  $\begin{bmatrix} 28 & 15 \\ -11 & 18 \end{bmatrix}$ .

5. Розв'язати систему рівнянь і обчислити  $x_1 + x_2 - x_3$ , де  $x_1, x_2, x_3$  розв'язок системи

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 16, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -3, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

- а) 2;                      б) -4;                      в) -2;                      г) система несумісна.

6. Обчислити косинус кута між векторами  $\vec{a} = 5\vec{k}$  і  $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ , де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – взаємоперпендикулярні одиничні вектори.

- а) 1;                      б) 2/3;                      в) -2/3;                      г) 5/9.

7. Обчислити довжину вектора  $\overline{M_1M_2}$  якщо  $M_1(2;-1;0)$  а  $M_2(3;2;-1)$ .

- а) 11;                      б)  $\sqrt{11}$ ;                      в) 6;                      г) 26.

8. Розкласти вектор  $\vec{b}(6;4)$  по базису  $\vec{a}_1(2;1)$   $\vec{a}_2(-4;-2)$

- а)  $\vec{b} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$ ;                      б)  $\vec{b} = 5\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ ;  
в)  $\vec{b} = -\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ ;                      г) вектори  $\vec{a}_1$  і  $\vec{a}_2$  не утворюють базис.

9. Обчислити  $BA^{-1}$ , де  $B = \begin{bmatrix} 5 & -10 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ .

- а)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ ;                      б)  $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ ;                      в)  $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ;                      г)  $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

10. Розв'язати матричне рівняння  $A \cdot X \cdot B = C$ , якщо  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  і  $C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ .

- а)  $\begin{bmatrix} \frac{4}{35} & \frac{39}{70} \\ \frac{27}{35} & -\frac{1}{35} \end{bmatrix}$ ;                      б)  $\begin{bmatrix} \frac{4}{35} & -\frac{1}{35} \\ \frac{39}{70} & \frac{27}{35} \end{bmatrix}$ ;                      в)  $\begin{bmatrix} \frac{39}{70} & -\frac{1}{35} \\ \frac{27}{35} & \frac{4}{35} \end{bmatrix}$ ;                      г)  $\begin{bmatrix} \frac{39}{70} & \frac{4}{35} \\ -\frac{1}{35} & \frac{27}{35} \end{bmatrix}$ .

## Аналітична геометрія

### Варіант 1

1. Яке рівняння називають рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом?

а)  $y = \frac{k}{x} + b$ ; б)  $y = kx + b$ ; в)  $y = k(x - x_0)$ ; г)  $1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ .

2. За якою формулою обчислюють ексцентриситет гіперболи, якщо  $a$  і  $b$  її дійсна та уявна піввісь, а  $c$  – півфокусна віддаль?

а)  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ; б)  $\varepsilon = \frac{c}{b}$ ; в)  $\varepsilon = \frac{a}{c}$ ; г)  $\varepsilon = \frac{b}{c}$ .

3. Задані три послідовні вершини  $A$ ,  $B$  та  $C$  паралелограма  $ABCD$ . Знайти площу паралелограма, якщо  $A(-2; 1)$ ,  $B(2; 2)$ ,  $C(3; -2)$ .

а) 22; б) 26; в) 32; г) 36.

4. Знайти рівняння висоти трикутника з вершинами  $A(-2; -2)$ ,  $B(0; 4)$ ,  $C(5; -1)$ , опущену з вершини  $A$ .

а)  $y = x + 2$ ; б)  $y = 2x - 1$ ; в)  $y = -x$ ; г)  $y = x$ .

5. Знайти рівняння медіани трикутника з вершинами  $A(-2; -2)$ ,  $B(0; 4)$ ,  $C(4; 0)$ , опущену з вершини  $C$ .

а)  $2x + 5y - 3 = 0$ ; б)  $2x - y + 4 = 0$ ; в)  $x + 5y - 4 = 0$ ; г)  $x + y - 2 = 0$ .

6. Знайти рівняння еліпса, що проходить через дві точки  $M_1(4; 0)$  і  $M_2(2; 3)$ .

а)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ; б)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ; в)  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ ; г)  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ .

7. Знайти рівняння директриси параболи  $y^2 = 8x$ .

а)  $x = 4$ ; б)  $y = 2$ ; в)  $x = -2$ ; г)  $y = -2$ .

8. Задані координати вершин чотирикутника  $ABCD$ . Знайти відстань від точки  $M$  до сторони  $AD$ , якщо  $M$  – середина відрізка  $BC$  і вершинами чотирикутника є точки  $A(-3; 6)$ ,  $B(6; 4)$ ,  $C(6; -2)$ ,  $D(-1; -3)$ .

а)  $\frac{71\sqrt{85}}{85}$ ; б)  $\frac{81\sqrt{95}}{95}$ ; в)  $\frac{85\sqrt{71}}{71}$ ; г)  $\frac{95\sqrt{101}}{101}$ .

9. Знайти кут між двома площинами  $x - 2y + 2z - 8 = 0$  і  $x + z - 6 = 0$ .

а)  $30^\circ$ ; б)  $45^\circ$ ; в)  $60^\circ$ ; г)  $135^\circ$ .

10. Знайти рівняння площини, яка проходить через пряму  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$  і точку

$M(3; 4; 0)$ .

а)  $x - 2y + z + 5 = 0$ ; б)  $x + 2y - 3z + 4 = 0$ ;  
в)  $2x + 2y - z + 5 = 0$ ; г)  $x + 3y + z - 2 = 0$ .

## Варіант 2

1. Колом називається множина точок площини:
- а) рівновіддалених від деякої точки і деякої прямої?
  - б) сума віддалей яких від двох даних точок є сталою величиною?
  - в) абсолютна величина різниці віддалей яких від двох даних точок є сталою величиною?
  - г) рівновіддалених від даної точки.
2. За якою формулою обчислюється кут між прямою та площиною в просторі, заданими відповідно канонічним і загальним рівнянням?
- а)  $\cos \varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$ ; б)  $\sin \varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$ ;
- в)  $\cos \varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$ ; г)  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$ .
3. Задані три послідовні вершини  $A$ ,  $B$  та  $C$  паралелограма  $ABCD$ . Знайти площу паралелограма, якщо  $A(-6; 1)$ ,  $B(-5; 5)$ ,  $C(1; 3)$ .
- а) 22;                      б) 26;                      в) 32;                      г) 36.
4. Знайти рівняння висоти трикутника з вершинами  $A(-1; 1)$ ,  $B(0; 4)$ ,  $C(4; 0)$ , опущену з вершини  $A$ .
- а)  $y = 2x - 4$ ;              б)  $y = -x$ ;              в)  $y = 4x + 1$ ;              г)  $y = x$ .
5. Знайти рівняння медіани трикутника з вершинами  $A(-1; 1)$ ,  $B(0; 4)$ ,  $C(4; 0)$ , опущену з вершини  $A$ .
- а)  $x - 3y + 4 = 0$ ;              б)  $x + 2y - 4 = 0$ ;              в)  $2x - 3y + 1 = 0$ ;              г)  $4x + y + 2 = 0$ .
6. Знайти рівняння еліпса, що проходить через точку  $M(0; 5)$  і має велику піввісь  $a=8$ .
- а)  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$ ;              б)  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{10} = 1$ ;              в)  $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{25} = 1$ ;              г)  $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1$ .
7. Визначити ексцентриситет гіперболи  $9x^2 - 16y^2 = 144$ .
- а)  $\varepsilon = \frac{4}{3}$ ;                      б)  $\varepsilon = \frac{5}{4}$ ;                      в)  $\varepsilon = \frac{5}{3}$ ;                      г)  $\varepsilon = \frac{3}{5}$ .
8. Задані координати вершин чотирикутника  $ABCD$ . Знайти відстань від точки  $M$  до сторони  $AD$ , якщо  $M$  – середина відрізка  $BC$  і вершинами чотирикутника є точки  $A(4; 5)$ ,  $B(13; 3)$ ,  $C(13; -3)$ ,  $D(6; -4)$ .
- а)  $\frac{71\sqrt{85}}{85}$ ;                      б)  $\frac{81\sqrt{95}}{95}$ ;                      в)  $\frac{85\sqrt{71}}{71}$ ;                      г)  $\frac{95\sqrt{101}}{101}$ .
9. Знайти рівняння прямої, що проходить через дві точки  $A(-1; 2; 3)$  і  $B(2; 6; -2)$ .
- а)  $\frac{x+2}{3} = \frac{y+6}{4} = \frac{z-2}{1}$ ;                      б)  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-5}$ ;
- в)  $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-3}{1}$ ;                      г)  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-6}{8} = \frac{z+3}{1}$ .
10. Знайти кут між двома площинами  $x - 2y + 2z - 5 = 0$  і  $2x + 2y + z - 3 = 0$ .
- а)  $30^\circ$ ;                      б)  $45^\circ$ ;                      в)  $60^\circ$ ;                      г)  $90^\circ$ .

### Варіант 3

1. Еліпсом називається множина точок площини:

а) рівновіддалених від деякої точки і деякої прямої?

б) сума віддалей яких від двох даних точок є сталою величиною?

в) абсолютна величина різниці віддалей яких від двох даних точок є сталою величиною?

г) рівновіддалених від даної точки.

2. За якою формулою обчислюється кут між двома прямими в просторі, заданими канонічними рівняннями?

а)  $\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} + \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$ ; б)  $\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$ ;

в)  $\sin \varphi = \frac{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}$ ; г)  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} + \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$ .

3. Задані три послідовні вершини  $A$ ,  $B$  та  $C$  паралелограма  $ABCD$ . Знайти площу паралелограма, якщо  $A(-1; -2)$ ,  $B(3; 1)$ ,  $C(5; -3)$ .

а) 22;

б) 26;

в) 32;

г) 36.

4. Знайти рівняння медіани трикутника з вершинами  $A(-2; 0)$ ,  $B(0; 6)$ ,  $C(5; 1)$ , опущену з вершини  $A$ .

а)  $3x - y + 6 = 0$ ;

б)  $x + 3y - 8 = 0$ ;

в)  $2x + y - 6 = 0$ ;

г)  $x - 3y + 2 = 0$ .

5. Знайти довжину висоти трикутника з вершинами  $A(2; -5)$ ,  $B(3; 8)$ ,  $C(-3; 0)$ , опущену з вершини  $A$ .

а) 5;

б) 8;

в) 6;

г) 7.

6. Знайти рівняння параболи, що проходить через точку  $A(1; 2)$ , симетричної відносно осі  $Oy$ , і вершина якої знаходиться на початку координат.

а)  $y^2 = 4x$ ;

б)  $x^2 = \frac{1}{2}y$ ;

в)  $x^2 = 2y$ ;

г)  $y^2 = \frac{1}{2}x$ .

7. Знайти рівняння асимптот гіперболи  $x^2 - 4y = 16$ .

а)  $y = \pm \frac{1}{4}x$ ;

б)  $y = \pm 4x$ ;

в)  $y = \pm \frac{1}{2}x$ ;

г)  $y = \pm 2x$ .

8. Задані координати вершин чотирикутника  $ABCD$ . Знайти відстань від точки  $M$  до сторони  $AD$ , якщо  $M$  – середина відрізка  $BC$  і вершинами чотирикутника є точки  $A(10; -5)$ ,  $B(-4; -4)$ ,  $C(-4; 4)$ ,  $D(5; 9)$ .

а)  $\frac{79\sqrt{221}}{221}$ ;

б)  $\frac{89\sqrt{221}}{221}$ ;

в)  $\frac{221\sqrt{79}}{79}$ ;

г)  $\frac{221\sqrt{89}}{89}$ .

9. Знайти кут між прямою  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+1}{-1}$  і площиною  $2x + 2y - z - 3 = 0$ .

а)  $30^\circ$ ;

б)  $45^\circ$ ;

в)  $60^\circ$ ;

г)  $\arcsin 3/5$ .

10. Знайти рівняння площини, що проходить через дві точки  $M_1(-1; -2; 0)$  і  $M_2(1; 1; 2)$  і перпендикулярна до площини  $x + 2y - 2z - 4 = 0$ .

а)  $2x + 3y - z + 1 = 0$ ;

б)  $x - 2y - 2z + 2 = 0$ ;

в)  $3x - y + z - 3 = 0$ ;

г)  $2x - 2y + z - 2 = 0$ .



## Варіант 4

1. Кут між двома прямими на площині, заданими рівняннями з кутовими коефіцієнтами  $k_1$  і  $k_2$ , обчислюється за формулою:

$$\text{а) } \cos \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 - k_1 k_2}; \quad \text{б) } \cos \varphi = \frac{k_2 + k_1}{1 + k_1 k_2}; \quad \text{в) } \operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 + k_1}{1 - k_1 k_2}; \quad \text{г) } \operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

2. За якою формулою обчислюється ексцентриситет еліпса, якщо його півосі  $a$  і  $b$ , а  $c$  пів фокусна віддаль?

$$\text{а) } \varepsilon = \frac{a}{b}; \quad \text{б) } \varepsilon = \frac{a}{c}; \quad \text{в) } \varepsilon = \frac{c}{a}; \quad \text{г) } \varepsilon = \frac{c}{b}.$$

3. Задані три послідовні вершини  $A$ ,  $B$  та  $C$  паралелограма  $ABCD$ . Знайти площу паралелограма, якщо  $A(-2; 3)$ ,  $B(3; 2)$ ,  $C(0; -2)$ .

$$\text{а) } 23; \quad \text{б) } 26; \quad \text{в) } 33; \quad \text{г) } 36.$$

4. Знайти рівняння медіани трикутника з вершинами  $A(-2; 2)$ ,  $B(0; 7)$ ,  $C(4; 5)$ , проведеної з вершини  $A$ .

$$\text{а) } y = 2x + 3; \quad \text{б) } y = x + 2; \quad \text{в) } y = -x + 5; \quad \text{г) } y = x + 4.$$

5. Знайти довжину висоти трикутника з вершинами  $A(-1; 1)$ ,  $B(3; 4)$ ,  $C(3; -1)$ , опущеної з вершини  $C$ .

$$\text{а) } 5; \quad \text{б) } 3; \quad \text{в) } 4; \quad \text{г) } 4,5.$$

6. Записати нормальне рівняння кола  $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 26 = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{а) } (x+2)^2 + (y-3)^2 &= 16; & \text{б) } (x-2)^2 + (y-3)^2 &= 25; \\ \text{в) } (x-1)^2 + (y-3)^2 &= 25; & \text{г) } (x-1)^2 + (y+3)^2 &= 16. \end{aligned}$$

7. Знайти асимптоти гіперболи  $9x^2 - y^2 = 36$ .

$$\text{а) } y = \pm \frac{1}{9}x; \quad \text{б) } y = \pm 3x; \quad \text{в) } y = \pm 2x; \quad \text{г) } y = \pm 9x.$$

8. Задані координати вершин чотирикутника  $ABCD$ . Знайти відстань від точки  $M$  до сторони  $AD$ , якщо  $M$  – середина відрізка  $BC$  і вершинами чотирикутника є точки  $A(11; -6)$ ,  $B(-3; -5)$ ,  $C(-3; 3)$ ,  $D(6; 8)$ .

$$\text{а) } \frac{179\sqrt{221}}{221}; \quad \text{б) } \frac{171\sqrt{221}}{221}; \quad \text{в) } \frac{221\sqrt{179}}{179}; \quad \text{г) } \frac{221\sqrt{171}}{171}.$$

9. Знайти точку перетину прямої  $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$  з площиною  $x + 2y + 3z - 29 = 0$ .

$$\text{а) } (4; 5; 2); \quad \text{б) } (6; 4; 5); \quad \text{в) } (1; 6; -2); \quad \text{г) } (5; 2; 6).$$

10. Знайти рівняння площини, що проходить через точку  $(1; 2; -3)$  паралельно площині  $x - 2y + 3z - 2 = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{а) } x - 2y + 3z - 10 &= 0; & \text{б) } x + 2y - 3z + 4 &= 0; \\ \text{в) } x - 2y + 3z + 12 &= 0; & \text{г) } 3x - 2y + z - 2 &= 0. \end{aligned}$$

## Варіант 5

1. Канонічне рівняння параболи має вигляд ...

а)  $y^2 = 2px$ ;      б)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;      в)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;      г)  $y = \frac{k}{x}$ .

2. Яке з рівнянь є рівнянням в'язки прямих?

а)  $y = kx + b$ ;      б)  $y = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} - \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ ;      в)  $y = k(x-x_0)$ ;      г)  $y^2 = 2px$ .

3. Задані три послідовні вершини  $A$ ,  $B$  та  $C$  паралелограма  $ABCD$ . Знайти площу паралелограма, якщо  $A(1; 4)$ ,  $B(-2; -1)$ ,  $C(4; -2)$ .

а) 23;      б) 26;      в) 33;      г) 36.

4. Знайти рівняння висоти трикутника з вершинами  $A(-2;0)$ ,  $B(0;6)$ ,  $C(5;1)$ , опущену з вершини  $A$ .

а)  $x + y + 2 = 0$ ;      б)  $x - 2y + 4 = 0$ ;      в)  $x - y + 2 = 0$ ;      г)  $2x - y - 4 = 0$ .

5. Знайти кут  $A$  трикутника з вершинами  $A(4;2)$ ,  $B(-1;-3)$ ,  $C(-2;2)$ .

а)  $30^\circ$ ;      б)  $45^\circ$ ;      в)  $\arctg 2$ ;      г)  $\arctg 1,5$ .

6. Знайти рівняння гіперболи, що проходить через дві точки  $M_1(4;0)$ ,  $M_2(5;3)$ .

а)  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ ;      б)  $x^2 - y^2 = 16$ ;      в)  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ;      г)  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ .

7. Знайти ексцентриситет еліпса  $5x^2 + 9y^2 = 45$ .

а)  $\varepsilon = \frac{5}{9}$ ;      б)  $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ;      в)  $\varepsilon = \frac{2}{3}$ ;      г)  $\varepsilon = \frac{3}{2}$ .

8. Задані координати вершин чотирикутника  $ABCD$ . Знайти відстань від точки  $M$  до сторони  $AD$ , якщо  $M$  – середина відрізка  $BC$  і вершинами чотирикутника є точки  $A(-5; 4)$ ,  $B(4; 2)$ ,  $C(4; -4)$ ,  $D(-3; -5)$ .

а)  $\frac{71\sqrt{85}}{85}$ ;      б)  $\frac{81\sqrt{95}}{95}$ ;      в)  $\frac{85\sqrt{71}}{71}$ ;      г)  $\frac{95\sqrt{101}}{101}$ .

9. Знайти точку перетину прямої  $x = 3t + 1$ ,  $y = -t - 1$ ,  $z = 5t + 2$  з площиною  $x + y - 2z - 4 = 0$ .

а)  $(2;1;0)$ ;      б)  $(-2;4;3)$ ;      в)  $(1;0;4)$ ;      г)  $(-2;0;3)$ .

10. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку  $A(4;3;0)$  і паралельної вектору  $\vec{l}(-1;1;1)$ .

а)  $\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{0}$ ;      б)  $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$ ;  
в)  $\frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{1}$ ;      г)  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{1}$ .

## Варіант 6

1. Канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

а)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;      б)  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ ;      в)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;      г)  $y^2 = 2px$ .

2. Яка умова перпендикулярності двох площин заданих загальними рівняннями?

а)  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ ;      б)  $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ ;  
в)  $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 + D_1D_2 = 0$ ;      г)  $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 1$ .

3. Задані три послідовні вершини  $A$ ,  $B$  та  $C$  паралелограма  $ABCD$ . Знайти площу паралелограма, якщо  $A(-2; -2)$ ,  $B(1; 2)$ ,  $C(4; 1)$ .

а) 15;      б) 25;      в) 35;      г) 30.

4. Знайти кут  $A$  трикутника з вершинами  $A(2;1)$ ,  $B(-2;5)$ ,  $C(5;4)$ .

а)  $90^\circ$ ;      б)  $60^\circ$ ;      в)  $45^\circ$ ;      г)  $30^\circ$ .

5. Знайти рівняння висоти трикутника з вершинами  $A(1;4)$ ,  $B(6;4)$ ,  $C(-3;0)$ , опущену з вершини  $B$ .

а)  $x + 2y - 6 = 0$ ;      б)  $x - y + 4 = 0$ ;      в)  $2x - y - 3 = 0$ ;      г)  $x + y - 10 = 0$ .

6. Знайти рівняння еліпса, яке проходить через дві точки  $M_1(2;0)$ ,  $M_2(0;1)$ .

а)  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{1} = 1$ ;      б)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ ;      в)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ ;      г)  $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

7. Знайти фокус параболи  $x^2 = 4y$ .

а)  $F(0;4)$ ;      б)  $F(1;0)$ ;      в)  $F(0;2)$ ;      г)  $F(0;1)$ .

8. Задані координати вершин чотирикутника  $ABCD$ . Знайти відстань від точки  $M$  до сторони  $AD$ , якщо  $M$  – середина відрізка  $BC$  і вершинами чотирикутника є точки  $A(9; -6)$ ,  $B(-5; -5)$ ,  $C(-5; 3)$ ,  $D(4; 8)$ .

а)  $\frac{179\sqrt{221}}{221}$ ;      б)  $\frac{171\sqrt{221}}{221}$ ;      в)  $\frac{221\sqrt{179}}{179}$ ;      г)  $\frac{221\sqrt{171}}{171}$ .

9. Знайти рівняння прямої, що проходить через дві точки  $A(3;-1;4)$  і  $B(1;1;2)$ .

а)  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{2}$ ;      б)  $\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-4}{6}$ ;  
в)  $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{6}$ ;      г)  $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-2}$ .

10. Знайти кут між площинами:  $x + z - 6 = 0$ ,  $x - y + 4 = 0$ .

а)  $30^\circ$ ;      б)  $60^\circ$ ;      в)  $45^\circ$ ;      г)  $90^\circ$ .

## Варіант 7

1. Нормальне рівняння кола має вигляд:

а)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;    б)  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ ;    в)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;    г)  $x^2 = 2py$ .

2. Кут між двома площинами, заданими загальними рівняннями знаходиться за формулою:

а)  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$ ;    б)  $\sin \varphi = \frac{\sqrt{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$ ;  
 в)  $\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2} \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$ ;    г)  $\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$ ;

3. Задані три послідовні вершини  $A$ ,  $B$  та  $C$  паралелограма  $ABCD$ . Знайти площу паралелограма, якщо  $A(-1; -2)$ ,  $B(3; 4)$ ,  $C(5; -1)$ .

а) 22;    б) 26;    в) 32;    г) 36.

4. Знайти рівняння медіани трикутника з вершинами  $A(-1; -1)$ ,  $B(0; 4)$ ,  $C(4; 0)$ , опущену з вершини  $A$ .

а)  $y = x$ ;    б)  $y = 2x + 1$ ;    в)  $y = x + 4$ ;    г)  $y = -x$ .

5. Знайти кут  $C$  трикутника з вершинами  $A(-1; -3)$ ,  $B(0; 3)$ ,  $C(5; 3)$ .

а)  $30^\circ$ ;    б)  $45^\circ$ ;    в)  $60^\circ$ ;    г)  $\operatorname{arctg} 2$ .

6. Знайти рівняння гіперболи, що проходить через точку  $M(10; 4)$  і має уявну піввісь 3.

а)  $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{9} = 1$ ;    б)  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ ;    в)  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$ ;    г)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ .

7. Знайти ексцентриситет еліпса  $9x^2 + 25y^2 = 225$ .

а)  $\frac{3}{5}$ ;    б)  $\frac{4}{5}$ ;    в)  $\frac{3}{4}$ ;    г)  $\frac{5}{4}$ .

8. Задані координати вершин чотирикутника  $ABCD$ . Знайти відстань від точки  $M$  до сторони  $AD$ , якщо  $M$  – середина відрізка  $BC$  і вершинами чотирикутника є точки  $A(7; -6)$ ,  $B(-7; -5)$ ,  $C(-7; 3)$ ,  $D(2; 8)$ .

а)  $\frac{179\sqrt{221}}{221}$ ;    б)  $\frac{171\sqrt{221}}{221}$ ;    в)  $\frac{221\sqrt{179}}{179}$ ;    г)  $\frac{221\sqrt{171}}{171}$ .

9. Знайти площину, що проходить через точку  $M(1; -1; -2)$  паралельно до площини  $x + 2y - z + 5 = 0$ .

а)  $x + 2y - z - 5 = 0$ ;    б)  $x + 3y - z + 4 = 0$ ;    в)  $x + 2y - z + 3 = 0$ ;    г)  $-x + 2y + z + 5 = 0$ .

10. Знайти точку перетину прямої  $\frac{x}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{2}$  з площиною  $x - 2y + 3z - 1 = 0$ ,  $x - y + 4 = 0$ .

а) (2; 5; 1);    б) (4; 6; 3);    в) (-2; 3; -3);    г) (0; 4; -1).

## Варіант 8

1. Канонічне рівняння еліпса має вигляд:

а)  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ ;      б)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;      в)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;      г)  $x^2 = 2py$ .

2. Яка з умов є умовою перпендикулярності прямих, заданих рівняннями з кутовими коефіцієнтами на площині?

а)  $k_1 k_2 = 1$ ;      б)  $k_1 = k_2$ ;      в)  $k_1 k_2 = -1$ ;      г)  $k_2 = \frac{1}{k_1}$ .

3. Задані три послідовні вершини  $A$ ,  $B$  та  $C$  паралелограма  $ABCD$ . Знайти площу паралелограма, якщо  $A(-3; -3)$ ,  $B(-2; 2)$ ,  $C(4; -1)$ .

а) 22;      б) 44;      в) 66;      г) 99.

4. Знайти кут  $A$  трикутника з вершинами  $A(1;5)$ ,  $B(6;5)$ ,  $C(4;2)$ .

а)  $30^\circ$ ;      б)  $45^\circ$ ;      в)  $60^\circ$ ;      г)  $90^\circ$ .

5. Знайти рівняння медіани трикутника з вершинами  $A(3;4)$ ,  $B(0;1)$ ,  $C(7;0)$ , проведеної з вершини  $B$ .

а)  $x - 5y + 5 = 0$ ;      б)  $x + 5y - 5 = 0$ ;      в)  $5x - 2y + 4 = 0$ ;      г)  $2x - 5y + 3 = 0$ .

6. Парабола, вершина якої у початку координат проходить через точку  $A(1;-2)$  і симетрична відносно осі  $Ox$ . Знайти її рівняння.

а)  $y = -2x^2$ ;      б)  $y = 4x^2$ ;      в)  $y^2 = 4x$ ;      г)  $y^2 = 2x$ .

7. Знайти ексцентриситет гіперболи  $9x^2 - 16y^2 = 576$ .

а)  $\frac{4}{5}$ ;      б)  $\frac{3}{5}$ ;      в)  $\frac{4}{3}$ ;      г)  $\frac{5}{4}$ .

8. Задані координати вершин чотирикутника  $ABCD$ . Знайти відстань від точки  $M$  до сторони  $AD$ , якщо  $M$  – середина відрізка  $BC$  і вершинами чотирикутника є точки  $A(-1; 5)$ ,  $B(8; 3)$ ,  $C(8; -3)$ ,  $D(1; -4)$ .

а)  $\frac{71\sqrt{85}}{85}$ ;      б)  $\frac{81\sqrt{95}}{95}$ ;      в)  $\frac{85\sqrt{71}}{71}$ ;      г)  $\frac{95\sqrt{101}}{101}$ .

9. Знайти рівняння площини, що проходить через точку  $M(2;2;-2)$  паралельно до площини  $x - 2y - 3z = 0$ .

а)  $3x + 2y - z + 2 = 0$       б)  $x - 2y - 3z + 3 = 0$   
в)  $x - 2y - 3z - 4 = 0$       г)  $x + 2y + 3z = 0$

10. Знайти рівняння прямої, що проходить через дві точки  $A(-1;2;3)$  і  $B(2;5;-3)$ .

а)  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{0}$ ;      б)  $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{7} = \frac{z+3}{-6}$ ;  
в)  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{-6}$ ;      г)  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-6}$ .

## Варіант 9

- Параболою називається множина точок площини, ...
  - рівновіддалених від деякої точки і деякої прямої;
  - сума віддалей яких від двох даних точок є величина стала;
  - абсолютна величина різниці віддалей яких від двох даних точок є величина стала;
  - рівновіддалених від даної точки.
- Назвати умову паралельності двох прямих, заданих на площині рівняннями з кутовими коефіцієнтами  $k_1$  і  $k_2$ .
  - $k_1 = -k_2$ ;
  - $k_1 = k_2$ ;
  - $k_1 k_2 = 1$ ;
  - $k_1 k_2 = -1$ .
- Задані три послідовні вершини  $A$ ,  $B$  та  $C$  паралелограма  $ABCD$ . Знайти площу паралелограма, якщо  $A(-1; -1)$ ,  $B(-2; 3)$ ,  $C(2; 4)$ .
  - 22;
  - 27;
  - 12;
  - 17.
- Знайти рівняння медіани трикутника з вершинами  $A(2;5)$ ,  $B(6;5)$ ,  $C(3;0)$ , проведеної з вершини  $C$ .
  - $3x + y - 10 = 0$ ;
  - $y = 5(x - 3)$ ;
  - $2x + 5y - 15 = 0$ ;
  - $y = 5x$ .
- Знайти кут  $A$  трикутника з вершинами  $A(3;4)$ ,  $B(0;1)$ ,  $C(7;0)$ .
  - $90^\circ$ ;
  - $60^\circ$ ;
  - $45^\circ$ ;
  - $\arctg 5$ .
- Знайти нормальне рівняння кола  $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 29 = 0$ .
  - $(x + 4)^2 + (y - 8)^2 = 25$ ;
  - $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$ ;
  - $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$ ;
  - $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$ .
- Визначити рівняння асимптот гіперболи  $4x^2 - 9y^2 = 36$ .
  - $y = \pm \frac{2}{3}x$ ;
  - $y = \pm \frac{3}{2}x$ ;
  - $y = \pm \frac{4}{9}x$ ;
  - $y = \pm \frac{9}{4}x$ .
- Задані координати вершин чотирикутника  $ABCD$ . Знайти відстань від точки  $M$  до сторони  $AD$ , якщо  $M$  – середина відрізка  $BC$  і вершинами чотирикутника є точки  $A(3; -5)$ ,  $B(-11; -4)$ ,  $C(-11; 4)$ ,  $D(-2; 9)$ .
  - $\frac{179\sqrt{221}}{221}$ ;
  - $\frac{171\sqrt{221}}{221}$ ;
  - $\frac{221\sqrt{179}}{179}$ ;
  - $\frac{221\sqrt{171}}{171}$ .
- Знайти кут між двома прямими  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{0}$ ,  $\frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-2}$ .
  - $30^\circ$ ;
  - $45^\circ$ ;
  - $60^\circ$ ;
  - $120^\circ$ .
- Знайти рівняння площини, що проходить через точку  $M(1; -1; -2)$  паралельно до площини  $x - 2y - 3z = 0$ .
  - $3x + 2y - z + 2 = 0$ ;
  - $x - 2y - 3z + 3 = 0$ ;
  - $x - 2y - 3z - 9 = 0$ ;
  - $x + 2y + 3z = 0$ .

## Варіант 10

1. Гіперболою називається множина точок площини, ...
- рівновіддалених від деякої точки і деякої прямої;
  - сума віддалей яких від двох даних точок є величина стала;
  - абсолютна величина різниці віддалей яких від двох даних точок є величина стала;
  - рівновіддалених від даної точки.
2. Які з рівнянь називають канонічними рівняннями прямої в просторі?
- $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ ;
  - $$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$
  - $$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$
;
  - $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ .
3. Задані три послідовні вершини  $A$ ,  $B$  та  $C$  паралелограма  $ABCD$ . Знайти площу паралелограма, якщо  $A(1; 1)$ ,  $B(-1; 4)$ ,  $C(2; 7)$ .
- 25;
  - 27;
  - 15;
  - 17.
4. Знайти рівняння медіани трикутника з вершинами  $A(2;1)$ ,  $B(-2;5)$ ,  $C(5;4)$ , проведеної з вершини  $C$ .
- $5x + y - 10 = 0$ ;
  - $3x - 2y + 25 = 0$ ;
  - $x + 5y - 25 = 0$ ;
  - $x - 5y + 10 = 0$ .
5. Знайти кут  $A$  трикутника з вершинами  $A(1;4)$ ,  $B(6;4)$ ,  $C(-3;0)$ .
- $90^\circ$ ;
  - $60^\circ$ ;
  - $45^\circ$ ;
  - $135^\circ$ .
6. Знайти нормальне рівняння кола  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 30 = 0$ .
- $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 25$ ;
  - $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 16$ ;
  - $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ ;
  - $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$ .
7. Знайти ексцентриситет еліпса  $3x^2 + 4y^2 = 48$ .
- 2;
  - $\frac{1}{2}$ ;
  - $\frac{1}{3}$ ;
  - $\frac{3}{4}$ .
8. Задані координати вершин чотирикутника  $ABCD$ . Знайти відстань від точки  $M$  до сторони  $AD$ , якщо  $M$  – середина відрізка  $BC$  і вершинами чотирикутника є точки  $A(-7; 4)$ ,  $B(4; 8)$ ,  $C(12; 3)$ ,  $D(-4; -6)$ .
- $\frac{309\sqrt{109}}{218}$ ;
  - $\frac{109\sqrt{218}}{309}$ ;
  - $\frac{218\sqrt{309}}{109}$ ;
  - $\frac{109\sqrt{309}}{218}$ .
9. Знайти кут між двома площинами  $x + y - 5 = 0$  і  $2x + y - 2z + 3 = 0$ .
- $30^\circ$ ;
  - $45^\circ$ ;
  - $60^\circ$ ;
  - $135^\circ$ .
10. Знайти точку перетину прямої  $x = 2t - 1$ ,  $y = t + 2$ ,  $z = 1 - t$  з площиною  $3x - 2y + z = 3$ ,  $x - y + 4 = 0$ .
- $(5; 2; -2)$ ;
  - $(2; 5; 5)$ ;
  - $(5; 5; -2)$ ;
  - $(3; -1; 2)$ .

# Математичний аналіз

## Варіант 1

1. Вказати другу визначну границю:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^x$ ;      в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ ;      г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^x$ .

2. Еластичність функції  $y = f(x)$  це...

а)  $y \frac{dy}{dx}$ ;      б)  $y \frac{dy}{dx}$ ;      в)  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{dy}{dx}$ ;      г)  $\frac{x}{y} \frac{dy}{dx}$ .

3. Знайти границю  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1}$ .

а) 1;      б) -2;      в) 2;      г) 2,5.

4. Знайти похідну функції  $y = x^3 \cos 3x$ .

а)  $-3x^2 \sin 3x$ ;      б)  $3x^2 \cos 3x - x^3 \sin 3x$ ;      в)  $3x^2 - 3 \sin 3x$ ;      г)  $3x^2 (\cos 3x - x \sin 3x)$ .

5. Вказати проміжки спадання функції  $y = \frac{x^3}{3} - 4x$ .

а)  $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ ;      б)  $(-\infty, 4)$ ;      в)  $(-2, -2)$ ;      г)  $(2, \infty)$ .

6. Знайти похідну функції, заданої параметрично  $x = \arcsin t$ ;  $y = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 7t}}$ .

а)  $\frac{(2t-7)\sqrt{1-t^2}}{4 \arcsin t \sqrt{t^2+7t}}$ ;      б)  $\frac{(2t+7)\sqrt{1+t^2}}{4 \arcsin t \sqrt{t^2+7t}}$ ;      в)  $\frac{(2t+7)\sqrt{1-t^2}}{4 \arcsin t \sqrt{t^2+7t}}$ ;      г)  $\frac{(2t+7)\sqrt{1+t^2}}{\arcsin t \sqrt{t^2+7t}}$ .

7. Знайти похідну другого порядку функції  $y = \cos^3\left(\frac{1}{x}\right)$ .

а)  $\frac{3}{x^3} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \left( \sin\left(\frac{2}{x}\right) - \frac{1}{x} \left( 2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) - \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) \right) \right)$ ;

б)  $-\frac{3}{x^3} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \left( \sin\left(\frac{2}{x}\right) - \frac{1}{x} \left( 2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) - \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) \right) \right)$ ;

в)  $\frac{3}{x^3} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \left( \sin\left(\frac{2}{x}\right) - \frac{1}{x} \left( 2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) + \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) \right) \right)$ ;

г)  $-\frac{3}{x^3} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \left( \sin\left(\frac{2}{x}\right) + \frac{1}{x} \left( 2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) - \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) \right) \right)$ .

8. Написати рівняння дотичної до графіка функції  $y = xe^{-x}$ , у точці з абсцисою  $x_0 = 0$ .

а)  $y = x$ ;      б)  $y = -x$ ;      в)  $y = x - 1$ ;      г)  $y = -x + 1$ .

9. Знайти проміжки опуклості графіка функції  $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

а)  $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ;      б)  $(-1; 1)$ ;      в)  $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ ;      г)  $(-2; 2)$ .

10. Знайти асимптоти графіка функції  $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ .

а)  $y = x$ ;      б)  $y = \pm 1$ ;      в)  $y = x + 1$ ;      г)  $y = 2x$ .



## Варіант 2

1. Похідною функції  $y = f(x)$  в точці  $x$  називається ...
- а)  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ;                      б)  $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ ;                      в)  $\lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ;                      г)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .
2. Якщо функція  $f(x)$  в точці  $x_0$  має екстремум, то похідна в цій точці ...
- а)  $f'(x_0) > 0$ ;    б)  $f'(x_0) = 0$ ;    в)  $f'(x_0)$  - не існує;    г)  $f'(x_0) = 0$  або не існує.
3. Знайти границю  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3n + 2}{n^2 + 2n + 5}$ .
- а) 3;                      б) 4;                      в) 2;                      г)  $\infty$ .
4. Знайти похідну функції  $y = \frac{\cos^2 5x}{x^3}$ .
- а)  $-\frac{10 \sin 5x}{3x^2}$ ; б)  $-\frac{5x \sin 10x + 3 \cos^2 5x}{x^4}$ ; в)  $\frac{10x \sin 5x - 3 \cos^2 5x}{x^4}$ ; г)  $\frac{2x \cos 5x - 3 \cos^2 5x}{x^4}$ .
5. Знайти найбільше значення функції  $y = x - \ln(1+x)$  на відрізку  $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ .
- а) 0;                      б)  $\frac{1}{2} - \ln 2$ ;                      в)  $1 - \ln 2$ ;                      г)  $\frac{1}{2}$ .
6. Знайти похідну функції, заданої параметрично  $x = \frac{2}{t + tg 3t}$ ;  $y = 2^{\sqrt{2t+3}}$ .
- а)  $-\frac{(2 \cos^2 3t + 3)\sqrt{2t+3}}{2^{\sqrt{2t+3}} \cos^2 3t (t + tg 3t)^2}$ ;                      б)  $\frac{(2 \cos^2 3t + 3)\sqrt{2t+3}}{2^{\sqrt{2t+3}} \cos^2 3t (t + tg 3t)^2}$ ;  
в)  $\frac{(2 \cos^2 3t + 3) - \sqrt{2t+3}}{2^{\sqrt{2t+3}} \cos^2 3t (t + tg 3t)^2}$ ;                      г)  $-\frac{(2 \cos^2 3t + 3) + \sqrt{2t+3}}{2^{\sqrt{2t+3}} \cos^2 3t (t + tg 3t)^2}$ .
7. Знайти диференціал функції  $y = \frac{1}{x - ctg 8x}$ .
- а)  $\left(-\frac{\sin^2 8x + 8}{\sin^2 8x (x - ctg 8x)^2}\right) dx$ ;                      б)  $\left(\frac{\sin^2 8x + 8}{\sin^2 8x (x - ctg 8x)^2}\right) dx$ ;  
в)  $\left(\frac{\sin^2 8x - 8}{\sin^2 8x (x - ctg 8x)^2}\right) dx$ ;                      г)  $\left(-\frac{\sin^2 8x - 8}{\sin^2 8x (x - ctg 8x)^2}\right) dx$ .
8. Написати рівняння дотичної до графіка функції  $y = \sqrt{4x - 3 - x^2}$ , у точці з абсцисою  $x_0 = \frac{3}{2}$ .
- а)  $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{2\sqrt{3}}$ ;    б)  $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{2\sqrt{3}}$ ; в)  $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}$ ;                      г)  $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{2\sqrt{3}}$ .
9. Знайти проміжки вгнутості функції  $y = \frac{6}{x} - \frac{1}{x^3}$ .
- а)  $(-\infty; -2) \cup (0; 2)$ ;    б)  $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$ ;    в)  $(-1; 0) \cup (0; 1)$ ;    г)  $(-1; 0) \cup (1; \infty)$ .
10. Знайти асимптоти графіка функції  $y = x + \frac{4}{x+2}$ .
- а)  $y = -2$ ;                      б)  $x = -2, y = x$ ;                      в)  $x = 2, y = -x$ ;                      г)  $y = 4x$ .

### Варіант 3

1. Яка похідна функції  $y = \operatorname{tg} x$  ?

- а)  $\operatorname{ctg} x$ ;      б)  $y = \frac{1}{\sin^2 x}$ ;      в)  $y = \frac{1}{\cos^2 x}$ ;      г)  $y = -\frac{1}{\sin^2 x}$ .

2. Вказати достатні умови екстремуму функції  $y = f(x)$ .

- а)  $y' = 0, y'' = 0$ ; б)  $y' = 0, y'' \neq 0$ ;      в)  $y' > a, y''$  – не існує; г)  $y' = 0, y''$  – не існує.

3. Знайти похідну функції  $y = \ln^3(x+1)$

- а)  $\frac{3}{x+1}$ ;      б)  $3\ln^2(x+1)$ ;      в)  $\frac{3\ln(x+1)}{x+1}$ ;      г)  $\frac{3\ln^2(x+1)}{x+1}$ .

4. Знайти границю функції  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$ .

- а)  $3\sqrt{2}$ ;      б)  $6\sqrt{2}$ ;      в) 3;      г) 0.

5. Знайти проміжки зростання функції  $y = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$ .

- а)  $(-\infty; -2) \cup (3; \infty)$       б)  $(-2; 0) \cup (3; \infty)$       в)  $(-\infty - 3) \cup (0; 3)$ ;      г)  $(-2; 3)$ .

6. Знайти похідну функції, заданої параметрично  $x = \frac{3}{t + \sqrt{t}}$ ;  $y = 3^{\sqrt{2t+1}}$ .

- а)  $\frac{\ln 3 \cdot 3^{\sqrt{2t+1}-1} (t + \sqrt{t})^2 2\sqrt{t}}{\sqrt{2t+1}(2\sqrt{t}+1)}$ ;      б)  $-\frac{\ln 3 \cdot 3^{\sqrt{2t+1}-1} (t + \sqrt{t})^2 2\sqrt{t}}{\sqrt{2t+1}(2\sqrt{t}+1)}$ ;  
в)  $\frac{\ln 3 \cdot 3^{\sqrt{2t+1}-1} + (t + \sqrt{t})^2 2\sqrt{t}}{\sqrt{2t+1}(2\sqrt{t}+1)}$ ;      г)  $-\frac{\ln 3 \cdot 3^{\sqrt{2t+1}-1} - (t + \sqrt{t})^2 2\sqrt{t}}{\sqrt{2t+1}(2\sqrt{t}+1)}$ .

7. Знайти похідну другого порядку функції  $y = \cos(\sin 5x)$ ;

- а)  $25 \cos(\sin 5x) \cos^2 5x + 25 \sin(\sin 5x) \sin 5x$ ;  
б)  $25 \cos(\sin 5x) \cos^2 5x - 25 \sin(\sin 5x) \sin 5x$ ;  
в)  $-25 \cos(\sin 5x) \cos^2 5x + 25 \sin(\sin 5x) \sin 5x$ ;  
г)  $-25 \cos(\sin 5x) \cos^2 5x - 25 \sin(\sin 5x) \sin 5x$ .

8. Написати рівняння дотичної до графіка функції  $y = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$ , у точці з абсцисою  $x_0 = 1$ .

- а)  $y = \frac{1}{2e} \cdot x + \frac{3}{2e}$ ;      б)  $y = -\frac{1}{2e} \cdot x + \frac{3}{2e}$ ;  
в)  $y = -\frac{1}{2e} \cdot x - \frac{3}{2e}$ ;      г)  $y = \frac{1}{2e} \cdot x - \frac{3}{2e}$ .

9. Знайти точки перегину графіка функції  $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$ .

- а) 1;      б) 0;      в) 0 і 1;      г)  $\frac{4}{3}$ .

10. Знайти диференціал функції  $y = x \cos^2 2x$ .

- а)  $dy = 2 \sin 2x dx$ ;      б)  $(\cos^2 2x + 2x \cos 2x) dx$ ;  
в)  $(\cos^2 2x - 2x \sin 4x) dx$ ;      г)  $(\cos^2 2x + 2x \sin 2x) dx$ .

### Варіант 4

1. Похідна від добутку двох диференційованих функцій  $u$  і  $v$  обчислюється за формулою
- а)  $u'v'$ ;                      б)  $u'v + uv'$                       в)  $u'v - uv'$                       г)  $\frac{u'v + uv'}{v^2}$ .
2. Якщо диференційована функція  $f(x)$  зростає на проміжку  $(a, b)$ , то в цьому проміжку ...
- а)  $f'(x) \geq 0$                       б)  $f'(x) \leq 0$                       в)  $f'(x) > 0$ ;                      г)  $f'(x) < 0$ .
3. Знайти границю функції  $\lim_{n \rightarrow 0} \left( \frac{n+2}{n} \right)^{n+2}$ .
- а) 1;                      б)  $e$ ;                      в)  $e^2$ ;                      г)  $e^{-4}$ .
4. Знайти похідну функції  $y = \frac{x^4}{\operatorname{tg} 2x}$ .
- а)  $2x^3 x \cos^2 2x$                       б)  $\frac{2x^3(\sin 4x - x)}{\sin^2 2x}$ ;                      в)  $\frac{4x^3 \operatorname{tg} 2x - x^4 \operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{tg}^2 2x}$ ;                      г)  $4x^3 \operatorname{tg} 2x \cos^2 2x - x^4$ .
5. Знайти кут нахилу дотичної до кривої  $y = x^2 - x + 3$  з додатнім напрямом осі  $Ox$  в точці  $x = 0$ .
- а)  $135^\circ$ ;                      б)  $30^\circ$ ;                      в)  $45^\circ$ ;                      г)  $120^\circ$ .
6. Знайти похідну функції, заданої неявно  $\sqrt[7]{x+y} = \sin(xy)$ .
- а)  $\frac{y \cos(xy) 7 \sqrt[7]{(x+y)^6} + 1}{1 - 7 \sqrt[7]{(x+y)^6} x \cos(xy)}$ ;                      б)  $\frac{y \cos(xy) 7 \sqrt[7]{(x+y)^6} + 1}{1 + 7 \sqrt[7]{(x+y)^6} x \cos(xy)}$ ;
- в)  $\frac{y \cos(xy) 7 \sqrt[7]{(x+y)^6} - 1}{1 - 7 \sqrt[7]{(x+y)^6} x \cos(xy)}$ ;                      г)  $\frac{y \cos(xy) 7 \sqrt[7]{(x+y)^6} - 1}{1 + 7 \sqrt[7]{(x+y)^6} x \cos(xy)}$ .
7. Знайти похідну другого порядку функції  $y = \sin(\cos 7x)$ ;
- а)  $49 \cos 7x \cdot \cos(\cos 7x) - 49 \sin^2 7x \cdot \sin(\cos 7x)$ ;
- б)  $49 \cos 7x \cdot \cos(\cos 7x) + 49 \sin^2 7x \cdot \sin(\cos 7x)$ ;
- в)  $-49 \cos 7x \cdot \cos(\cos 7x) + 49 \sin^2 7x \cdot \sin(\cos 7x)$ ;
- г)  $-49 \cos 7x \cdot \cos(\cos 7x) - 49 \sin^2 7x \cdot \sin(\cos 7x)$ .
8. Знайти диференціал функції  $y = \frac{1}{2x - \operatorname{tg} 7x}$ .
- а)  $\frac{-2 + \frac{7}{\cos^2 7x}}{(2x - \operatorname{tg} 7x)^2} dx$ ;                      б)  $\frac{2 + \frac{7}{\cos^2 7x}}{(2x - \operatorname{tg} 7x)^2} dx$ ;                      в)  $\frac{-2 - \frac{7}{\cos^2 7x}}{(2x - \operatorname{tg} 7x)^2} dx$ ;                      г)  $\frac{2 - \frac{7}{\cos^2 7x}}{(2x - \operatorname{tg} 7x)^2} dx$ .
9. Знайти проміжки вгнутості графіка функції  $y = x e^{-\frac{x^2}{2}}$ .
- а)  $(-2; 0) \cup (2; \infty)$ ; б)  $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (0; \sqrt{3})$ ; в)  $(-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (0; 1)$ ; г)  $(-\sqrt{3}; 0) \cup (\sqrt{3}; \infty)$ .
10. Знайти асимптоти графіка функції  $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$ .
- а)  $x = 1$ ;                      б)  $y = x - 1, x = 1$ ;                      в)  $y = x$ ;                      г)  $y = x, x = 1$ .

## Варіант 5

1. Похідна від частки двох диференційованих функцій  $u$  і  $v$ , коли дільник  $v \neq 0$  обчислюється за формулою ...

а)  $\frac{u'}{v'}$ ;      б)  $\frac{u'v + v'u}{v^2}$ ;      в)  $\frac{u'v - v'u}{v^2}$ ;      г)  $\frac{u'v - v'u}{v}$ .

2. Якщо диференційована функція  $f(x)$  на проміжку  $(a, b)$ , то в цьому проміжку ...

а)  $f'(x) \geq 0$ ;      б)  $f'(x) \leq 0$ ;      в)  $f'(x) > 0$ ;      г)  $f'(x) < 0$ .

3. Знайти границю функції  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$

а) 0;      б) 2;      в) 4;      г) 8.

4. Знайти похідну функції  $y = x^3 e^{3x}$ .

а)  $9x^2 e^{3x}$ ;      б)  $9x^2 e^{3x-1}$ ;      в)  $3x^2(x+1)e^{3x}$ ;      г)  $3x^2 e^{3x} + 3e^{3x-1}$ .

5. Знайти похідну функції, заданої неявно  $x \cdot x^y = y \cdot y^x$ .

а)  $\frac{x^y + yx^y - y^{x+1} \ln y}{y^x + xy^x - x^{y+1} \ln x}$ ;      б)  $\frac{x^y - yx^y - y^{x+1} \ln y}{y^x - xy^x - x^{y+1} \ln x}$ ;  
в)  $\frac{x^y + yx^y + y^{x+1} \ln y}{y^x + xy^x + x^{y+1} \ln x}$ ;      г)  $\frac{x^y - yx^y + y^{x+1} \ln y}{y^x - xy^x + x^{y+1} \ln x}$ .

6. Знайти похідну другого порядку функції  $y = x^3 \cdot \operatorname{tg} 7x$ .

а)  $-6x \cdot \operatorname{tg} 7x + \frac{7(3x^2 \cos 7x + 2 \sin 7x)}{\cos^3 7x}$ ;  
б)  $-6x \cdot \operatorname{tg} 7x - \frac{7(3x^2 \cos 7x + 2 \sin 7x)}{\cos^3 7x}$ ;  
в)  $6x \cdot \operatorname{tg} 7x + \frac{7(3x^2 \cos 7x + 2 \sin 7x)}{\cos^3 7x}$ ;  
г)  $6x \cdot \operatorname{tg} 7x - \frac{7(3x^2 \cos 7x + 2 \sin 7x)}{\cos^3 7x}$ .

7. Знайти диференціал функції  $y = x^3 \sqrt{1-x^2}$ .

а)  $\frac{x^2(3-4x^2)dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ;      б)  $\frac{x^2(3+4x^2)dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ;      в)  $-\frac{x^2(3-4x^2)dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ;      г)  $-\frac{x^2(3+4x^2)dx}{\sqrt{1-x^2}}$ .

8. Написати рівняння нормалі до графіка функції  $y = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$ , у точці з абсцисою  $x_0 = 1$ .

а)  $y = 2ex + \frac{2e^2 - 1}{e}$ ;      б)  $y = -2ex - \frac{2e^2 - 1}{e}$ ;  
в)  $y = -2ex + \frac{2e^2 - 1}{e}$ ;      г)  $y = 2ex - \frac{2e^2 - 1}{e}$ .

9. Знайти проміжки опуклості графіка функції  $y = 2x^2 + \ln x$

а)  $(0; 2)$ ;      б)  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ ;      в)  $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ ;      г)  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ .

10. Знайти асимптоти графіка функції  $y = \frac{x^2}{2(1-x)}$ .

а)  $x = 1$ ,  $y = -\frac{1}{2}x$ ;      б)  $x = 2$ ,  $y = \frac{1}{2}x$ ;      в)  $x = 1$ ,  $y = -\frac{1}{2}(x+1)$ ;      г)  $x = 1$ ,  $y = -\frac{1}{2}(x-1)$ .

## Варіант 6

1. Похідна від функції  $y = \arcsin x$  дорівнює ...

a)  $\frac{1}{1-x^2}$ ;      б)  $\frac{1}{1+x^2}$ ;      в)  $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ;      г)  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

2. Еластичність добутку функцій  $u$  і  $v$  в точці  $x$  дорівнює...

a)  $E_x(u) \cdot E_x(v)$ ;      б)  $E_x(u) - E_x(v)$ ;      в)  $E_x(u) + E_x(v)$ ;      г)  $\frac{E_x(u)}{E_x(v)}$ .

3. Знайти границю функції  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 10x + 16}{x^2 - 4}$ .

a) 0;      б) -1,5;      в) 2;      г) -4.

4. Знайти похідну функції  $y = \ln \sin 3x$

a)  $\frac{3}{\sin 3x}$       б)  $3 \operatorname{ctg} 3x$ ;      в)  $3 \operatorname{tg} x$ ;      г)  $\frac{3}{\cos 3x}$ .

5. Знайти найбільше і найменше значення функції  $y = \frac{3-x^2}{x+2}$  на проміжку  $[-1,5; 2]$ .

a) (1,5; -0,25);      б) (2; 1,5);      в) (2; -0,25);      г) (3; -1).

6. Знайти похідну функції, заданої неявно  $\sqrt[6]{x^4 + y^5} = e^{xy}$ .

a)  $\frac{6(\sqrt[6]{x^4 + y^5})^5 e^{xy} y + 4x^3}{5y^4 - 6e^{xy} x (\sqrt[6]{x^4 + y^5})^5}$ ;      б)  $\frac{6(\sqrt[6]{x^4 + y^5})^5 e^{xy} y - 4x^3}{5y^4 + 6e^{xy} x (\sqrt[6]{x^4 + y^5})^5}$ ;  
в)  $\frac{6(\sqrt[6]{x^4 + y^5})^5 e^{xy} y - 4x^3}{5y^4 - 6e^{xy} x (\sqrt[6]{x^4 + y^5})^5}$ ;      г)  $\frac{6(\sqrt[6]{x^4 + y^5})^5 e^{xy} y + 4x^3}{5y^4 + 6e^{xy} x (\sqrt[6]{x^4 + y^5})^5}$ .

7. Знайти похідну другого порядку функції  $y = x^3 \arcsin 9x$ .

a)  $6x \arcsin 9x + \frac{27x^2}{\sqrt{1-81x^2}} + \frac{27x^2(1-81x^2) + 729x^4}{(1-81x^2)^{\frac{3}{2}}}$ ;  
б)  $6x \arcsin 9x + \frac{27x^2}{\sqrt{1-81x^2}} - \frac{27x^2(1-81x^2) + 729x^4}{(1-81x^2)^{\frac{3}{2}}}$ ;  
в)  $6x \arcsin 9x - \frac{27x^2}{\sqrt{1-81x^2}} + \frac{27x^2(1-81x^2) + 729x^4}{(1-81x^2)^{\frac{3}{2}}}$ ;  
г)  $6x \arcsin 9x - \frac{27x^2}{\sqrt{1-81x^2}} - \frac{27x^2(1-81x^2) + 729x^4}{(1-81x^2)^{\frac{3}{2}}}$ .

8. Написати рівняння нормалі до графіка функції  $y = xe^{-x}$ , у точці з абсцисою  $x_0 = 0$ .

a)  $y = x$ ;      б)  $y = -x$ ;      в)  $y = x - 1$ ;      г)  $y = -x + 1$ .

9. Знайти проміжки зростання функції  $y = x^3 + \frac{x^4}{4}$ .

a)  $(-\infty; -3) \cup (0; \infty)$ ;      б)  $(-\infty; -3)$ ;      в)  $(-3; 0)$ ;      г)  $(-3; 0) \cup (0; \infty)$ .

10. Знайти асимптоти функції  $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$ .

a)  $x = \pm 1$ ;      б)  $y = x + 1$ ;      в)  $y = x$ ;      г)  $y = x, x = 1$ .

## Варіант 7

1. Похідна від функції  $y = \arcsin x$  дорівнює ...

а)  $\frac{1}{1-x^2}$ ; б)  $\frac{1}{1+x^2}$ ; в)  $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ; г)  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

2. Еластичність добутку функцій  $u$  і  $v$  в точці  $x$  дорівнює...

а)  $\frac{E_x(u)}{E_x(v)}$ ; б)  $E_x(u) \cdot E_x(v)$ ; в)  $E_x(u) - E_x(v)$ ; г)  $E_x(u) + E_x(v)$ .

3. Знайти границю функції  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^{2x}}$ .

а)  $\frac{3}{2}$ ; б) 3; в) 0; г)  $\infty$ .

4. Знайти похідну функції  $y = \ln \sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x$ .

а)  $\operatorname{ctgx} - \cos x \sin x$ ; б)  $\operatorname{ctgx} \cdot \cos^2 x$ ; в)  $\frac{1}{\sin x} - \sin x \cos x$ ; г)  $\operatorname{tgx} + \cos x$ ;

5. Знайти найменше значення функції  $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$  на відрізку  $[-1; 5]$ .

а) -10; б) -6; в) 1; г) 3.

6. Знайти диференціал функції  $y = \operatorname{arccctg}(4x^2 + 8x)$ .

а)  $\left( \frac{8x+8}{1+(4x^2+8x)^2} \right) dx$ ; б)  $\left( \frac{8x+8}{1-(4x^2+8x)^2} \right) dx$ ; в)  $\left( -\frac{8x+8}{1-(4x^2+8x)^2} \right) dx$ ; г)  $\left( -\frac{8x+8}{1+(4x^2+8x)^2} \right) dx$ .

7. Знайти похідну другого порядку функції  $y = x^2 \sqrt{3x^3 + 5x}$ .

а)  $\frac{15x^3+15x}{\sqrt{3x^3+5x}} + \frac{135x^6+330x^4+75x^2}{4(3x^3+5x)\sqrt{3x^3+5x}}$ ; б)  $-\frac{15x^3+15x}{\sqrt{3x^3+5x}} - \frac{135x^6+330x^4+75x^2}{4(3x^3+5x)\sqrt{3x^3+5x}}$ ;  
в)  $-\frac{15x^3+15x}{\sqrt{3x^3+5x}} + \frac{135x^6+330x^4+75x^2}{4(3x^3+5x)\sqrt{3x^3+5x}}$ ; г)  $\frac{15x^3+15x}{\sqrt{3x^3+5x}} - \frac{135x^6+330x^4+75x^2}{4(3x^3+5x)\sqrt{3x^3+5x}}$ .

8. Написати рівняння нормалі до графіка функції  $y = \sqrt{4x-3-x^2}$ , у точці з абсцисою  $x_0 = \frac{3}{2}$ .

а)  $y = -\sqrt{3x} - \frac{13}{2\sqrt{3}}$ ; б)  $y = -\sqrt{3x} + \frac{13}{2\sqrt{3}}$ ; в)  $y = \sqrt{3x} + \frac{13}{2\sqrt{3}}$ ; г)  $y = \sqrt{3x} - \frac{13}{2\sqrt{3}}$ .

9. Знайти проміжки спадання функції  $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ .

а)  $(-\infty; 0) \cup (2; \infty)$ ; б)  $(-2; 0)$ ; в)  $(0; 1)$ ; г)  $(3; \infty)$ .

10. Знайти асимптоти графіка функції  $y = \frac{x}{x^2 - 2x + 1}$ .

а)  $x = 0$ ; б)  $y = 0$ ; в)  $x = 1$ ; г)  $x = 1, y = 0$ .

### Варіант 8

1. Диференціал добутку функцій  $u$  і  $v$   $d(uv)$  дорівнює ...

а)  $du + dv$ ;                      б)  $du \cdot dv$ ;                      в)  $\frac{vdu}{udv}$ ;                      г)  $udv + vdu$ .

2. Похідна від функції  $y = \operatorname{arctg} x$  дорівнює ...

а)  $-\operatorname{tg} x$ ;                      б)  $\frac{1}{1-x^2}$ ;                      в)  $-\frac{1}{1+x^2}$ ;                      г)  $-\frac{1}{\sin^2 x}$ .

3. Знайти границю функції  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 4x + 3}{1 - 4x^3}$ .

а)  $-\frac{3}{4}$ ;                      б)  $\infty$ ;                      в) 1;                      г)  $-\frac{1}{2}$ .

4. Знайти похідну функції  $y = x \operatorname{arctg} 2x$ .

а)  $\frac{2}{1+x^2}$ ;                      б)  $\operatorname{arctg} x + \frac{2x}{1+4x^2}$ ;                      в)  $\frac{2}{1+4x^2}$ ;                      г)  $\frac{2x}{1-4x^2}$ .

5. Знайти проміжки зростання функції  $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2$ .

а)  $(-\infty; -2) \cup (2; \infty)$ ;                      б)  $(-2; 0) \cup (2; \infty)$ ;                      в)  $(-2; 0) \cup (0; 2)$ ;                      г)  $(4; \infty)$ .

6. Знайти диференціал функції  $y = x^2 \operatorname{tg} x^3$ .

а)  $\left( 2x \operatorname{tg} x^3 + \frac{3x^4}{\cos^2 x^3} \right) dx$ ;                      б)  $\left( 2x \operatorname{tg} x^3 - \frac{3x^4}{\cos^2 x^3} \right) dx$ ;  
в)  $\left( -2x \operatorname{tg} x^3 + \frac{3x^4}{\cos^2 x^3} \right) dx$ ;                      г)  $\left( -2x \operatorname{tg} x^3 - \frac{3x^4}{\cos^2 x^3} \right) dx$ .

7. Знайти найбільше значення функції  $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$  на відрізку  $[0; 1]$ .

а)  $-10$ ;                      б)  $-6$ ;                      в) 1;                      г) 3.

8. Знайти найбільший об'єм конуса з твірною  $L$ .

а)  $\frac{2}{\sqrt{3}} \pi L^3$ ;                      б)  $\frac{2}{3\sqrt{3}} \pi L^3$ ;                      в)  $\frac{2}{9\sqrt{3}} \pi L^3$ ;                      г)  $\frac{2}{27\sqrt{3}} \pi L^3$ .

9. Знайти точки перегину графіка функції  $y = e^{-x^2}$ .

а)  $x = \pm 2$ ;                      б)  $x = \pm 1$ ;                      в)  $x = \pm \sqrt{2}$ ;                      г)  $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

10. Знайти асимптоти графіка функції  $y = \frac{x^2 - x - 1}{x}$ .

а)  $x = 0$ ;                      б)  $y = x; x = 0$                       в)  $y = x + 1$ ;                      г)  $y = x - 1, x = 0$ .

## Варіант 9

1. Похідна складної функції  $y = f(u)$ , де  $u = \varphi(x)$ , якщо  $f(u)$  і  $\varphi(x)$  – диференційовані функції, дорівнює...

а)  $y'_x = f'_u \cdot u'_x$ ;      б)  $y'_x = \frac{f'_x}{u'_x}$ ;      в)  $f'_u + u'_x$ ;      г)  $f'_u - u'_x$ .

2. Якщо функція  $y = f(x)$  опукла на проміжку  $(a, b)$ , то на цьому проміжку...

а)  $f'(x) > 0$ ;      б)  $f'(x) < 0$ ;      в)  $f''(x) > 0$ ;      г)  $f''(x) < 0$ .

3. Знайти границю функції  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x}$ .

а) 0;      б)  $\infty$ ;      в)  $\frac{1}{3}$ ;      г) 3.

4. Знайти похідну функції  $y = x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ .

а)  $x^{\frac{1}{\sqrt{x}+2}} \cdot \left( \frac{\ln x}{2} - \frac{1}{x} \right)$ ;      б)  $x^{\frac{1}{\sqrt{x}-2}} \cdot \left( \frac{\ln x}{2} + \frac{1}{x} \right)$ ;      в)  $x^{\frac{1}{\sqrt{x}+2}} \cdot \left( \frac{\ln x}{2} + \frac{1}{x} \right)$ ;      г)  $x^{\frac{1}{\sqrt{x}-2}} \cdot \left( \frac{\ln x}{2} - \frac{1}{x} \right)$

5. Знайти похідну другого порядку функції  $y = x^3 e^x$ .

а)  $6xe^x$ ;      б)  $(x^3 + 6x^2 + 6x)e^x$ ;      в)  $(3x^2 + 6x)e^x$ ;      г)  $(x^3 + 3x^2)e^x$ .

6. Знайти проміжки зростання функції  $y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$ .

а)  $(-\infty; 1) \cup (5; \infty)$ ;      б)  $(-\infty; 1) \cup (3; 5)$ ;      в)  $(1; 3) \cup (3; 5)$ ;      г)  $(1; 3) \cup (5; \infty)$ .

7. Знайти найменше значення функції  $y = \sin x + \cos 2x$  на відрізку  $[0; \pi]$ .

а) -10;      б) -6;      в) -1;      г) 0.

8. Знайти прямокутник максимальної площі, вписаний у еліпс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

а)  $ab$ ;      б)  $2ab$ ;      в)  $4ab$ ;      г)  $8ab$ .

9. Знайти диференціал функції  $y = \frac{\sin^2 2x}{x}$ .

а)  $dy = \frac{2x \sin 4x - \sin^2 2x}{x^2}$ ;      б)  $\frac{4x \sin 2x - \sin^2 2x}{x} dx$ ;

в)  $\frac{4x \cos 2x - \sin^2 2x}{x} dx$ ;      г)  $\frac{2x \sin 4x - \sin^2 2x}{x^2} dx$ .

10. Знайти асимптоти графіка функції  $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ .

а)  $x = 1$ ;      б)  $y = x$ ;      в)  $y = x + 1$ ;      г)  $y = 1$ .



## Варіант 10

1. Похідна від функції  $y = \arccos x$  дорівнює ...

а)  $\frac{1}{1-x^2}$ ;      б)  $-\frac{1}{1+x^2}$ ;      в)  $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ;      г)  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

2. Якщо функція  $v(x)$  визначає сумарні витрати на випуск  $x$  одиниць продукції, то маржинальні витрати дорівнюють ...

а)  $\frac{v(x)}{x}$ ;      б)  $v'(x)$ ;      в)  $\frac{v'(x)}{x}$ ;      г)  $\frac{v'(x)}{vx}$ ;

3. Знайти границю функції  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 4x - 3}{1 - x - 2x^2}$ .

а) 5;      б)  $\infty$ ;      в) -2,5;      г) -3.

4. Знайти похідну функції  $y = x^4 \sin 4x$ .

а)  $4x^3 \cos 4x$ ;      б)  $4x^3 (\sin 4x + x \cos 4x)$ ;  
в)  $4x^3 \sin 4x + x^4 \cos 4x$ ;      г)  $4x^3 \sin 4x + 4 \cos 4x$ .

5. Знайти проміжки спадання функції  $y = \frac{x^2}{x-2}$ .

а)  $(-\infty; 0) \cup (2; 4)$ ;      б)  $(0; 2) \cup (4; \infty)$ ;      в)  $(-\infty; 0) \cup (4; \infty)$ ;      г)  $(0; 2) \cup (2; 4)$ .

6. Знайти диференціал другого порядку функції  $y_2 = x^3 \sqrt{1-x^2}$

а)  $\frac{6x + 19x^3 + 12x^5}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx^2$ ;      б)  $\frac{6x - 19x^3 - 12x^5}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx^2$ ;  
в)  $\frac{6x + 19x^3 - 12x^5}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx^2$ ;      г)  $\frac{6x - 19x^3 + 12x^5}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx^2$ .

7. Знайти точки перегину графіка функції  $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

а)  $x = \pm 3$ ;      б)  $x = 0$ ;      в)  $x = \pm \sqrt{3}$ ;      г)  $x = 0; \pm \sqrt{3}$ .

8. Знайти проміжки опуклості графіка функції  $f(x) = x^2 \cdot e^x$ .

а)  $(-2 - 2\sqrt{2}; -2 + 2\sqrt{2})$ ;      б)  $(-\infty; -2 - 2\sqrt{2})$ ;      в)  $(-2 + 2\sqrt{2}; +\infty)$ ;      г)  $(0; -2 + 2\sqrt{2})$ .

9. Знайти найбільше значення функції  $y = e^{-x^2}$  на відрізку  $[-1; 1]$ .

а)  $e$ ;      б)  $e^{-1}$ ;      в) 1;      г)  $2e^{-1}$ .

10. Знайти асимптоти графіка функції  $y = \frac{3-x^2}{x+2}$ .

а)  $x = -2$ ;  $y = x$ ;      б)  $y = -x + 2$ ;  $x = -2$ ;      в)  $y = x - 2$ ;      г)  $y = -x + 2$ ,  $x = 2$ .

# Функції багатьох змінних

## Варіант 1

1. Градієнт функції характеризує...

- а) максимальну зміну швидкості функції;
- б) напрям і значення максимальної швидкості зміни функції в даній точці;
- в) напрям і значення мінімальної швидкості зміни функції в даній точці;
- г) мінімальну зміну швидкості функції.

2. Повні диференціали функції обчислюються за формулою:

а)  $dz = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ ; б)  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ ; в)  $dz = \Delta z_x dx + \Delta z_y dy$ ; г)  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ .

3. Знайти область визначення функції  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ :

а)  $x^2 + y^2 \leq 1$ ; б)  $x - y > 0$ ; в)  $x^2 + y^2 \leq 4$ ; г)  $x^2 + y^2 \geq 4$ .

4. Знайти частинні похідні 1-го порядку функції  $z = 4x^2 - 5xy - 7y^2 - x + 2y + 1$

а)  $\begin{cases} z'_x = -5x - 14y - 1, \\ z'_y = 8x - 5y + 2; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} z'_x = 8x - 5y - 1, \\ z'_y = -5x - 14y + 2; \end{cases}$  в)  $\begin{cases} z'_x = 5x - 14y - 1, \\ z'_y = 8x + 5y + 2; \end{cases}$  г)  $\begin{cases} z'_x = -5x - 14y + 2, \\ z'_y = 8x - 5y - 1. \end{cases}$

5. Знайти мішану похідну II порядку  $z''_{xy}$  функції  $z = \frac{x+y}{x-y}$ :

а)  $\frac{-4y}{(x-y)^3}$ ; б)  $\frac{2x}{(x-y)^2}$ ; в)  $\frac{-2y}{(x-y)^3}$ ; г)  $\frac{-xy}{(x-y)^2}$ .

6. Знайти еластичність  $E_{p_1}(q)$  функції  $q = p_1^2 + 2p_1p_2 + p_2^2$  при  $p_1 = 1$ .

а)  $\frac{3}{2}$ ; б)  $\frac{4}{3}$ ; в)  $\frac{1}{2}$ ; г)  $\frac{1}{5}$ .

7. Знайти градієнт функції  $z = 3x^2 - 4xy + 2y^2 - 10x + 8y + 7$  в точці  $M_0(1;1)$ .

а)  $-8$ ; б)  $8$ ; в)  $\sqrt{128}$ ; г)  $\sqrt{63}$ .

8. Дослідіть на екстремум функцію  $z = 3x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 2y + 3$ .

а)  $z_{\max} = 4$ ; б)  $z_{\min} = 0$ ; в)  $z_{\min}(0;0) = 1$ ; г)  $z_{\max}(0;0) = 1$ .

9. Знайти умовний екстремуми функції  $z = x^2 + y^2$  при умові  $x + y - 2 = 0$ .

а)  $z_{\min}(1;1) = 2$ ; б)  $z_{\max}(1;1) = 2$ ; в)  $z_{\max}(0;1) = 1$ ; г)  $z_{\min}(0;1) = 1$ .

10. За даною емпіричною таблицею знайти лінійну залежність між  $x$  і  $y$  ( $k$  і  $b$  округліть до сотих).

$x$	1	3	3	4	6
$y$	3	2	4	6	7

а)  $y = x + 2,7$ ; б)  $y = 0,92x + 1,272$ ; в)  $y = 3x + 1$ ; г)  $y = 2x + 1,27$ .

## Варіант 2

1. Частинною похідною I-го порядку функції  $z = f(x, y)$  по  $x$  називають:

а)  $z'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ ; б)  $z'_x = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{\Delta_y z - \Delta_x z}{\Delta x}$ ; в)  $z'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow a} \frac{\Delta_y z - \Delta_x z}{\Delta x}$ ; г)  $z'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta x}$ .

2. Відшукування умовного екстремуму можна звести до дослідження на звичайний екстремум:

- а) функції Кобба-Дугласа; б) функції Лагранжа  $u = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$ ;  
в) функції Гаусса; г) функції Лапласа.

3. Знайти область визначення функції  $y = \arcsin \frac{x}{y}$ :

а)  $-y \leq x \leq y$ ; б)  $-1 \leq x \leq 1$ ; в)  $-1 \leq \frac{y}{x} \leq 1$ ; г)  $0 < \frac{x}{y} < 1$ .

4. Знайти частинні похідні I-го порядку функції  $z = e^{3x^2y+y^2}$ :

а)  $\begin{cases} z'_x = 6xye^{3x^2y+y^2}, \\ z'_y = (3x^2 + 2y)e^{3x^2y+y^2}; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} z'_x = 3x^2e^{3x^2y+y^2}, \\ z'_y = 2ye^{3x^2y+y^2}; \end{cases}$   
в)  $\begin{cases} z'_x = xe^{3x^2y+y^2}, \\ z'_y = ye^{3x^2y+y^2}; \end{cases}$  г)  $\begin{cases} z'_x = (3x^2 + 2y)e^{3x^2y+y^2}, \\ z'_y = 6xye^{3x^2y+y^2}. \end{cases}$

5. Знайти мішану похідну II порядку  $z''_{xy}$  функції  $z = \sin xy$ :

а)  $\cos xy - xy \sin xy$ ; б)  $\sin xy - y \cos xy$ ; в)  $\cos xy - \sin xy$ ; г)  $xy \cos xy$ .

6. Знайти еластичність  $E_{p_2}(q)$  функції  $q = 3p_1^2 p_2 + p_2$  при  $p_2 = 1$ .

а) 1; б) 1,5; в) 0,25; г) 0,2.

7. Знайти градієнт функції  $y = \ln(-2x + y^2)$  в точці  $M_0(8;5)$ .

а)  $-\frac{2}{9}$ ; б)  $\frac{10}{9}$ ; в)  $\frac{4}{81}$ ; г)  $\frac{2}{9}\sqrt{26}$ .

8. Дослідіть на екстремум функцію  $z = -\frac{x^2}{2} - 2xy - \frac{y^2}{2} + 4x + 5y - 2$ .

а)  $z_{\max} = 4,5$ ; б)  $z_{\min} = 0$ ; в)  $z_{\max} = 4$ ; г)  $z_{\min} = 3,5$ .

9. Знайти умовний екстремуми функції  $z = x^4 + y^4$  при умові  $x + y = 4$ .

а)  $z_{\max}(2;2) = 32$ ; б)  $z_{\min}(2;2) = 32$ ; в)  $z_{\min}(1;3) = 82$ ; г)  $z_{\max}(1;3) = 82$ .

10. За даною емпіричною таблицею знайти лінійну залежність між  $x$  і  $y$  ( $k$  і  $b$  округліть до сотих).

$x$	-1	-2	-3	-4	-5
$y$	3	1	3	6	5

а)  $y = 0,1x + 3$ ; б)  $y = -0,8x + 0,6$ ; в)  $y = -0,9x + 0,9$ ; г)  $y = -x + 1$ .

### Варіант 3

1. Функція  $z = f(x, y)$  називається неперервною в т.  $M_0(x, y)$ , якщо :

а) вона в цій точці невизначена і  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x, y_0)$ ;

б) вона задана в цій точці та деякому її околі і виконується умова

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0);$$

в) в цій точці  $f'(x, y) = g(x, y)$ ;

г) в цій точці виконується умова  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = b$ .

2. Якщо в точці  $M_0(x_0, y_0)$  функція  $z = f(x, y)$  досягає екстремуму, то:

а) існує  $D = AB - C^2$ ,  $D > 0$ ;

б)  $z'_x(x_0, y_0) = 0$  і  $z'_y(x_0, y_0) = 0$ ;

в) вона диференційована і існують  $z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy}$ ; г)  $z'_x(x_0, y_0) = c$  і  $z'_y(x_0, y_0) = c$ .

3. Знайти область визначення функції  $z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ :

а)  $x^2 + y^2 > 0$ ; б)  $x^2 - y^2 > 1$ ; в)  $x^2 + y^2 < 1$ ; г)  $x^2 - y^2 > -1$ .

4. Знайти частинні похідні I-го порядку функції  $z = e^{\frac{x}{y}}$ :

$$\text{а) } \begin{cases} z'_x = -\frac{x}{y} e^{\frac{x}{y}}, \\ z'_y = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} z'_x = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}, \\ z'_y = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} z'_x = y e^{\frac{x}{y}}, \\ z'_y = x e^{\frac{x}{y}}; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} z'_x = \frac{1}{x} e^{\frac{x}{y}}, \\ z'_y = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}. \end{cases}$$

5. Знайти мішану похідну II порядку  $z''_{xy}$  функції  $z = x^y$ :

а)  $1 + \ln x$ ; б)  $x^{y-1}(1 + y \ln x)$ ; в)  $x^y y \ln x$ ; г)  $y^x(1 + x \ln y)$ .

6. Знайти еластичність  $E_{p_1}(q)$  функції  $q = p_1^3 + 3p_1^2 p_2$  при заданих  $p_1 = 2$ .

а)  $\frac{12}{5}$ ; б)  $\frac{4}{5}$ ; в)  $\frac{1}{4}$ ; г)  $\frac{2}{5}$ .

7. Знайти градієнт функції  $z = x^2 - xy + 2y^2 - 3x + 5y + 8$  в точці  $M_0(4; 1)$ .

а)  $\sqrt{41}$ ; б)  $\sqrt{5}$ ; в) 4; г)  $\sqrt{40}$ .

8. Дослідіть на екстремум функцію  $z = x^2 - 3xy + y^2 - 6x + 5y + 3$ .

а)  $z_{\min} = -4$ ; б)  $z_{\max} = 3$ ; в)  $z_{\min} = 0$ ; г)  $z_{\max} = -2$ .

9. Знайти умовний екстремуми функції  $z = xy$  при умові  $2x + 3y - 5 = 0$ .

а)  $z_{\min}\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right) = \frac{25}{24}$ ; б)  $z_{\max}\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right) = \frac{25}{24}$ ; в)  $z_{\max}\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{3}\right) = \frac{25}{6}$ ; г)  $z_{\min}\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{3}\right) = \frac{25}{6}$ .

10. За даною емпіричною таблицею знайти лінійну залежність між  $x$  і  $y$  ( $k$  і  $b$  округліть до сотих).

$x$	5	5	7	9	10
$y$	1	3	4	5	7

а)  $y = x - 3$ ; б)  $y = 0,91x - 2,55$ ; в)  $y = 9x - 2$ ; г)  $y = 0,5x - 2,5$ .

### Варіант 4

1. Градієнтом функції  $z = f(x; y)$  називають:

а) функцію  $z = z'_x + z'_y y$ ;

б) вектор  $grad z = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} z(x, y)$ ;

в) вектор  $grad z = z'_x \vec{i} + z'_y \vec{j}$ ;

г)  $grad z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$ .

2. Необхідна умова екстремуму для функції Лагранжа має вигляд:

$$а) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + h \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + h \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \\ \phi(x; y) = 0; \end{cases} \quad б) \begin{cases} u'_x = 0, \\ u'_y = 0; \end{cases} \quad в) \begin{cases} \phi(x; y) \leq c, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \leq 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \end{cases} \quad г) \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \\ \phi(x; y) \leq 0. \end{cases}$$

3. Знайти область визначення функції  $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ :

а)  $x^2 + y^2 > 0$ ; б)  $x^2 + y^2 \geq 1$ ; в)  $x^2 + y^2 < 1$ ; г)  $x^2 + y^2 < 2$ .

4. Знайти частинні похідні 1-го порядку функцій  $z = 3y^5 \sqrt{x}$ :

$$а) \begin{cases} z'_x = 3y^5 \frac{1}{2\sqrt{x}}, \\ z'_y = 15y^4 \sqrt{x}; \end{cases} \quad б) \begin{cases} z'_x = 15y^4 \sqrt{x}, \\ z'_y = \frac{3y^5}{\sqrt{x}}; \end{cases} \quad в) \begin{cases} z'_x = 3x^{\frac{1}{2}} y^5, \\ z'_y = \frac{3}{5} y^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}; \end{cases} \quad г) \begin{cases} z'_x = 3\sqrt{xy}, \\ z'_y = 15y^4 \sqrt{x}. \end{cases}$$

5. Знайти мішану похідну II порядку  $z''_{xy}$  функції  $z = \ln(x^2 + y^3)$ :

а)  $\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}$ ; б)  $\frac{xy}{x^2 + y^3}$ ; в)  $\frac{-6xy^2}{(x^2 + y^3)^2}$ ; г)  $\frac{6x^2 y}{(x^2 + y^3)^2}$ .

6. Знайти еластичність  $E_{p_2}(q)$  функції  $q = 5p_1 p_2^2 + p_2^3$  при  $p_2 = 5$ .

а)  $\frac{1}{3}$ ; б)  $\frac{1}{2}$ ; в)  $\frac{7}{2}$ ; г)  $\frac{5}{2}$

7. Знайти градієнт функції  $z = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1$  в точці  $M_0(-3; 1)$ .

а)  $\sqrt{103}$ ; б) 3; в)  $\sqrt{109}$ ; г) -10.

8. Дослідіть на екстремум функцію  $z = 3x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 2y + 3$ .

а)  $z_{\min} = 0$ ; б)  $z_{\max} = 0$ ; в)  $z_{\min} = 1$ ; г)  $z_{\max} = -4$ .

9. Знайти умовний екстремуми функції  $z = xy$  при умові  $x + y - 1 = 0$ .

а)  $z_{\min}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ ; б)  $z_{\max}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ ; в)  $z_{\max}(0, 2; 0, 3) = 0,06$ ; г)  $z_{\min}(0, 2; 0, 3) = 0,06$ .

10. За даною емпіричною таблицею знайти лінійну залежність між  $x$  і  $y$  ( $k$  і  $b$  округліть до сотих).

$x$	-2	-3	-3	-4	-5
$y$	3	2	4	3	5

а)  $y = -0,62x + 1,292$ ; б)  $y = -0,3x - 2$ ; в)  $y = -0,9x + 2$ ; г)  $y = -0,5x + 1,3$ .

## Варіант 5

1. Повним диференціалом функції  $z = f(x, y)$  називають :

а)  $\partial z = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ ;

б)  $dz = f(x; y) - f(x_0; y_0)$ ;

в)  $dz = z'_x dx + z'_y dy$ ;

г)  $dz = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$ .

2. Умовним екстремумом функції  $z = f(x, y)$  називають:

а) функцію зв'язку  $\varphi(x; y) = 0$ ;

б) екстремум функції, досягнутий при умові , що змінні  $x$  та  $y$  зв'язані рівнянням  $\varphi(x; y) = 0$ ;

в) функцію  $u = f(x; y) + \alpha \varphi(x; y)$ ;

г) екстремум функції  $z = f(x, y)$ .

3. Знайти область визначення функції  $z = \arcsin(y + x)$ :

а)  $x + y \geq 0$ ; б)  $x + y \leq -1$ ; в)  $-1 \leq x + y \leq 1$ ; г)  $y + x \geq 0$ .

4. Знайти частинні похідні I-го порядку функції  $z = e^{x^3 + y^2 x}$ :

а)  $\begin{cases} z'_x = (3x^2 + y^2)e^{x^3 + y^2 x}, \\ z'_y = 2xye^{x^3 + y^2 x}; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} z'_x = 3x^2 e^{x^3 + y^2 x}, \\ z'_y = 2ye^{x^3 + y^2 x}; \end{cases}$  в)  $\begin{cases} z'_x = 2yxe^{x^3 + y^2 x}, \\ z'_y = (3x^2 + y^2)e^{x^3 + y^2 x}; \end{cases}$  г)  $\begin{cases} z'_x = x^3 e^{x^3 + y^2 x}, \\ z'_y = y^2 x e^{x^3 + y^2 x}. \end{cases}$

5. Знайти мішану похідну II порядку  $z''_{xy}$  функції  $z = \sin(x^2 - 7y)$ :

а)  $2x \cos(x^2 - 7y)$ ; б)  $14x \sin(x^2 - 7y)$ ; в)  $7 \sin(x^2 - 7y)$ ; г)  $14x \cos(x^2 - 7y)$ .

6. Знайти еластичність  $E_{p_1}(q)$  функції  $q = p_1 + 7p_1^2 p_2$  при  $p_1 = 1$ .

а)  $\frac{7}{2}$ ; б)  $\frac{3}{2}$ ; в)  $\frac{4}{3}$ ; г)  $\frac{1}{2}$ .

7. Знайти градієнт функції  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  в точці  $M_0(3; 4)$ .

а)  $\frac{16}{25}$ ; б) 1; в)  $\frac{3}{5}$ ; г)  $\frac{4}{5}$ .

8. Дослідіть на екстремум функцію  $z = 4x^2 - xy + y^2 - 9x + 3y - 5$ .

а)  $z_{\min} = -1$ ; б)  $z_{\max} = -2$ ; в)  $z_{\min} = -11$ ; г)  $z_{\max} = 0$ .

9. Знайти умовний екстремуми функції  $z = x^2 + y^2$  при умові  $x + y - 5 = 0$ .

а)  $z_{\min}\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4}$ ; б)  $z_{\max}\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4}$ ; в)  $z_{\max}\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right) = \frac{25}{2}$ ; г)  $z_{\min}\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right) = \frac{25}{2}$ .

10. За даною емпіричною таблицею знайти лінійну залежність між  $x$  і  $y$  ( $k$  і  $b$  округліть до сотих).

$x$	4	6	6	8	9
$y$	1	1	3	3	5

а)  $y = 0,74x - 2,284$ ; б)  $y = 0,6x - 3$ ; в)  $y = 0,7x - 5$ ; г)  $y = 0,5x - 2,28$ .

## Варіант 6

1. Необхідна умова укрестримуму функції:

а) якщо  $D = AC - B^2 > 0$ , то в т.  $M_0(x_0, y_0)$  функція  $z = f(x, y)$  має екстремум;

б) якщо в т.  $M_0(x_0, y_0)$  функція  $z = f(x, y)$  досягає екстремуму, то її частинні похідні I-го порядку в цій точці дорівнюють 0;

в) якщо  $\begin{cases} z'_x(x_0; y_0) \leq 0 \\ z'_y(x_0; y_0) = 0 \end{cases}$ , то функція в т.  $M_0(x_0, y_0)$  досягає екстремуму;

г) функція  $z = f(x, y)$  в т.  $M_0(x_0, y_0)$  досягає екстремуму, якщо  $D = AC - B^2 > 0$ ,  $D > 0$  і  $A > 0$ , то досягає максимуму,  $D > 0$  і  $A < 0$  досягає мінімуму.

2. Частинною похідною I-го порядку функції  $z = f(x, y)$  по  $y$  називають:

а)  $z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ ; б)  $z'_y = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta_y z - \Delta_x z}{\Delta y}$ ; в)  $z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow a} \frac{\Delta_y z - \Delta_x z}{\Delta y}$ ; г)  $z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ .

3. Знайти область визначення функції  $z = \ln(y - x)$ :

а)  $y > 0$ ; б)  $x > 0$ ; в)  $x > y$ ; г)  $y > x$ .

4. Знайти частинні похідні I-го порядку функції  $z = \sin(x^2 y)$ :

а)  $\begin{cases} z'_x = 2xy \cos x^2 y, \\ z'_y = x^2 \cos x^2 y; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} z'_x = x^2 \cos x^2 y, \\ z'_y = y \cos x^2 y; \end{cases}$  в)  $\begin{cases} z'_x = x^2 \cos x^2 y, \\ z'_y = 2xy \cos x^2 y; \end{cases}$  г)  $\begin{cases} z'_x = 2xy \sin xy, \\ z'_y = x^2 \sin x^2 y. \end{cases}$

5. Знайти мішану похідну II порядку  $z''_{xy}$  функції  $z = \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$ :

а)  $-\frac{1}{3} \frac{y}{x^{\frac{4}{3}}}$ ; б)  $\frac{x^{\frac{4}{3}}}{3y}$ ; в)  $-\frac{1}{4} \frac{y}{3x^{\frac{4}{3}}}$ ; г)  $\frac{y}{8x^{\frac{5}{3}}}$ .

6. Знайти еластичність  $E_{p_2}(q)$  функції  $q = p_1^4 + 2p_1 p_2$  при  $p_2 = \frac{1}{2}$ .

а)  $\frac{5}{2}$ ; б)  $\frac{3}{5}$ ; в)  $\frac{1}{2}$ ; г)  $\frac{3}{2}$ .

7. Знайти градієнт функції  $z = 2x^3 + x^2 y + xy^2$  в точці  $M_0(-2; 1)$ .

а) 21; б)  $\sqrt{450}$ ; в)  $\sqrt{500}$ ; г) -3.

8. Дослідіть на екстремум функцію  $z = -2x^2 + 2xy - 3y^2 - 2x + 16y - 3$ .

а)  $z_{\max} = 0$ ; б)  $z_{\min} = 10$ ; в)  $z_{\max} = 20$ ; г)  $z_{\min} = -5$ .

9. Знайти умовний екстремуми функції  $z = x^2 + y^2$  при умові  $x + y - 3 = 0$ .

а)  $z_{\min}\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) = \frac{81}{18}$ ; б)  $z_{\max}\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) = \frac{81}{18}$ ; в)  $z_{\max}(1; 2) = 5$ ; г)  $z_{\min}(1; 2) = 5$ .

10. За даною емпіричною таблицею знайти лінійну залежність між  $x$  і  $y$  ( $k$  і  $b$  округліть до сотих)

$x$	-1	1	2	2	3
$y$	2	1	3	6	5

а)  $y = 0,8x + 3$ ; б)  $y = 0,81x + 2$ ; в)  $y = 0,89x + 2,15$ ; г)  $y = 0,5x + 4$ .

## Варіант 7

1. Змінна величина  $z$  називається однозначною функцією двох змінних  $x$  і  $y$ , якщо:
- кожному значенню  $x$  із множини  $X$  поставити у відповідність  $y$  із множини  $Y$ ;
  - кожній парі чисел  $(x, y)$  поставити за певним законом відповідну кількість чисел змінної величини  $z$ ;
  - кожній парі дійсних чисел  $(x, y) \in D$  відповідає одне визначене дійсне значення змінної величини  $z$ ;
  - кожному значенню  $z$  поставити у відповідність пару чисел  $(x, y)$ .
2. Якщо функція  $z = f(x, y)$  має частинні похідні другого порядку в деякому околі точки  $M$  і мішані похідні  $f''_{xy}$  і  $f''_{yx}$  неперервні в самі точки, то справедлива рівність:
- $f''_{xy} > f''_{yx}$ ;
  - $f''_{xy} < f''_{yx}$ ;
  - $f''_{xy} \neq f''_{yx}$ ;
  - $f''_{xy} = f''_{yx}$ .
3. Знайти область визначення функції  $z = \ln(4x^2 + 9y^2 - 36)$ :
- $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} > 1$ ;
  - $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} > 1$ ;
  - $x^2 + y^2 > 1$ ;
  - $3x^2 + 2y^2 > 1$ .
4. Знайти частинні похідні I-го порядку функції  $z = \ln(x^2 + 3xy^7)$ :
- $\begin{cases} z'_x = \frac{2x+3y}{x^2+3xy^7}, \\ z'_y = \frac{3y^7}{x^2+3xy^7}; \end{cases}$
  - $\begin{cases} z'_x = \frac{2x+3y^7}{x^2+3xy^7}, \\ z'_y = \frac{21xy^6}{x^2+3xy^7}; \end{cases}$
  - $\begin{cases} z'_x = \frac{x^2+3xy^7}{2x+3y}, \\ z'_y = \frac{x^2+3xy^7}{21xy^6}; \end{cases}$
  - $\begin{cases} z'_x = \frac{3y^7}{x^2+3xy^7}, \\ z'_y = \frac{21x}{x^2+3xy^7}. \end{cases}$
5. Знайти мішану похідну II порядку  $z''_{xy}$  функції  $z = \arctg(x\sqrt{y})$ :
- $\frac{\sqrt{y}}{1+x^2y}$ ;
  - $\frac{2x^2y}{(1+x^2y)^2}$ ;
  - $\frac{1+x^2y}{2\sqrt{y}}$ ;
  - $\frac{1-x^2y}{2\sqrt{y}(1+x^2y)^2}$ .
6. Знайти еластичність  $E_{p_1}(q)$  функції  $q = 6p_1p_2^2 + p_2^3$  при  $p_1 = \frac{1}{2}$ .
- $\frac{3}{5}$ ;
  - $\frac{5}{3}$ ;
  - $\frac{12}{5}$ ;
  - $\frac{1}{4}$ .
7. Знайти градієнт функції  $z = x^4 + 3x^2y^2 + y^4$  в точці  $M_0(1;1)$ .
- $\sqrt{2}$ ;
  - 10;
  - 200;
  - $10\sqrt{2}$ .
8. Дослідіть на екстремум функцію  $z = 4x^2 - xy + y^2 - 9x + 3y - 5$ .
- $z_{\min} = -1$ ;
  - $z_{\max} = -2$ ;
  - $z_{\min} = -11$ ;
  - $z_{\max} = 0$ .
9. Знайти умовний екстремуми функції  $z = x^2 + y^2$  при умові  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0$ .
- $z_{\min}\left(\frac{16}{9}; \frac{8}{9}\right) = \frac{32}{9}$ ;
  - $z_{\max}\left(\frac{16}{9}; \frac{8}{9}\right) = \frac{32}{9}$ ;
  - $z_{\max}(2; -3) = 13$ ;
  - $z_{\min}(2; -3) = 13$ .
10. За даною емпіричною таблицею знайти лінійну залежність між  $x$  і  $y$  ( $k$  і  $b$  округліть до сотих)
- |     |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|
| $x$ | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $y$ | 4 | 6 | 1 | 3 | 2 |
- $y = -0,7x + 6$ ;
  - $y = -x + 7$ ;
  - $y = -0,91x + 7,02$ ;
  - $y = -0,6x + 7$ .



## Варіант 8

1. Лінією рівня функції  $z = f(x, y)$  називають:

- а) лінію  $f(x, y) = C$  на площині  $XOY$ , в точках яких функція зберігає постійне значення  $z = C$ ;
- б) певний графік кривої на площині  $XOY$ ;
- в) область визначення функції  $z = f(x, y)$ ;
- г) лінію  $f(x, y) = f(x_0 + \Delta x; y + \Delta y)$ .

2. Запишіть нормальну систему рівнянь методу найменших квадратів у випадку лінійної залежності:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \left\{ \begin{array}{l} k \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i; \end{array} \right. & \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} k \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ k \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i; \end{array} \right. \\ \text{в)} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n x_i + b = \sum_{i=1}^n y_i, \\ k \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i; \end{array} \right. & \text{г)} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n x_i^2 + nb = \sum_{i=1}^n y_i, \\ k \sum_{i=1}^n x_i + b = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{array} \right. \end{array}$$

3. Знайти область визначення функції  $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ :

- а)  $x^2 - y^2 \geq 16$ ; б)  $x^2 - y^2 \leq 16$ ; в)  $x^2 - y^2 \geq 1$ ; г)  $x^2 + y^2 \leq 16$ .

4. Знайти частинні похідні I-го порядку функції  $z = 4x^3 + 5x^2y + 3xy^2 - y^3$ :

$$\text{а)} \begin{cases} z'_x = 5x^2 + 6xy - 3y^2, \\ z'_y = 12x^2 + 10xy + 3y^2; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} z'_x = 6xy - 3y^2, \\ z'_y = 10xy + 3y^2; \end{cases} \quad \text{в)} \begin{cases} z'_x = 12x^2 + 10xy + 3y^2, \\ z'_y = 5x^2 + 6xy - 3y^2; \end{cases} \quad \text{г)} \begin{cases} z'_x = 4x^3 - 3y^2 - y^3, \\ z'_y = 5x^2 + 3y^2 - 3. \end{cases}$$

5. Знайти мішану похідну II порядку  $z''_{xy}$  функції  $z = x^2 \ln y$ :

- а)  $2x \ln y$ ; б)  $-\frac{2x}{y}$ ; в)  $\frac{\ln y}{x}$ ; г)  $-\frac{2y}{x}$ .

6. Знайти еластичність  $E_{p_2}(q)$  функції  $q = p_1 + 4p_1p_2 + p_2^2$  при  $p_2 = 1$ .

- а)  $\frac{10}{11}$ ; б)  $\frac{1}{11}$ ; в)  $\frac{1}{2}$ ; г)  $\frac{11}{10}$ .

7. Знайти градієнт функції  $z = x^3 + 2xy + y^3$  в точці  $M_0(1; 2)$ .

- а)  $\sqrt{14}$ ; б)  $\sqrt{7}$ ; в)  $\sqrt{245}$ ; г)  $\sqrt{200}$ .

8. Дослідіть на екстремум функцію  $z = -2x^2 + xy - \frac{y^2}{2} + 7x - y + 3$ .

- а)  $z_{\max} = 9,5$ ; б)  $z_{\min} = 0$ ; в)  $z_{\max} = 9$ ; г)  $z_{\min} = -2$ .

9. Знайти умовний екстремуми функції  $z = x^4 + y^4$  при умові  $x + y = 2$ .

- а)  $z_{\min}(1; 1) = 2$ ; б)  $z_{\max}(1; 1) = 2$ ; в)  $z_{\max}(3; -1) = 82$ ; г)  $z_{\min}(3; -1) = 82$ .

10. За даною емпіричною таблицею знайти лінійну залежність між  $x$  і  $y$  ( $k$  і  $b$  округліть до сотих)

$x$	-3	-1	1	1	3
$y$	2	3	4	6	7

- а)  $y = 0,4x + 4,2$ ; б)  $y = 0,53x + 4,294$ ; в)  $y = 0,6x + 5$ ; г)  $y = 0,6x + 4,29$ .

## Варіант 9

1. Повним приростом функції  $z = f(x, y)$  в т.  $M(x; y)$  називають :

- а) різницю  $\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$ ;      б)  $\Delta z = \Delta_y z - \Delta_x z$ ;  
 в)  $\Delta z = f(x + x_0; y + y_0) - f(x; y)$ ;      г)  $\Delta z = dy - dx$ .

2. Що називають похідною функції по напрямку?

- а) Повний приріст функції  $\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$ ;  
 б) Повний диференціал функції  $dz = z'_x dx + z'_y dy$ ;  
 в)  $\frac{dz}{dl} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \varphi$ ;  
 г)  $\vec{g} = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}$ .

3. Знайти область визначення функції  $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}}$  :

- а)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$ ;      б)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ ;      в)  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} \geq 1$ ;      г)  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

4. Знайти градієнт функції  $y = \ln(x^2 + y^2)$  в точці  $M_0(3; 4)$

- а)  $\frac{2}{5}$ ;      б)  $\frac{4}{25}$ ;      в)  $\frac{6}{25} \vec{i} + \frac{8}{25} \vec{j}$ ;      г)  $\frac{9}{25}$ .

5. Знайти мішану похідну II порядку  $z''_{xy}$  функції  $z = e^{x^2 y}$  :

- а)  $2e^{x^2 y}$ ;      б)  $2xe^{x^2 y}(1 + yx^2)$ ;      в)  $ye^{x^2 y}(1 + xy^2)$ ;      г)  $1 + yx^2$ .

6. Знайти еластичність  $E_{p_1}(q)$  функції  $q = 2p_1^3 p_2 + p_2^2$  при  $p_1 = 1$ .

- а) 2;      б)  $\frac{3}{4}$ ;      в)  $\frac{7}{3}$ ;      г)  $\frac{2}{3}$ .

7. Знайти частинні похідні I-го порядку функції  $z = \cos(2xy^3)$  :

- а)  $\begin{cases} z'_x = -6xy^2 \sin(2xy^3), \\ z'_y = -2y^3 \sin(2xy^3); \end{cases}$       б)  $\begin{cases} z'_x = -2y^3 \sin(2xy^3), \\ z'_y = -6xy^2 \sin(2xy^3); \end{cases}$   
 в)  $\begin{cases} z'_x = -y^3 \sin(2xy^3), \\ z'_y = -xy^2 \sin(2xy^3); \end{cases}$       г)  $\begin{cases} z'_x = 2x \sin(2xy^3), \\ z'_y = y^3 \sin(2xy^3). \end{cases}$

8. Дослідіть на екстремум функцію  $z = -2x^2 + 3xy - 3y^2 + x + 3y + 6$ .

- а)  $z_{\min} = 15$ ;      б)  $z_{\max} = 8$ ;      в)  $z_{\min} = 4$ ;      г)  $z_{\max} = 4$ .

9. Знайти умовний екстремуми функції  $z = x^2 + y^2$  при умові  $x + y = 4$ .

- а)  $z_{\min}(2; 2) = 8$ ;      б)  $z_{\max}(2; 2) = 8$ ;      в)  $z_{\max}(3; 1) = 10$ ;      г)  $z_{\min}(3; 1) = 10$ .

10. За даною емпіричною таблицею знайти лінійну залежність між  $x$  і  $y$  ( $k$  і  $b$  10. За даною емпіричною таблицею знайти лінійну залежність між  $x$  і  $y$  ( $k$  і  $b$  округліть до сотих)

$x$	-2	-1	1	2	3
$y$	5	7	4	2	4

- а)  $y = -0,69x + 5,75$ ;      б)  $y = -0,59x + 4,75$ ;      в)  $y = -0,42x + 5$ ;      г)  $y = -0,6x + 7$ .

## Варіант 10

1. Достатня умова екстремуму функції:

а) якщо в т.  $M_0(x_0; y_0)$   $z = f(x, y)$  досягає екстремуму, то  $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$  і  $D = AC - B^2 > 0$ ;

б)  $z = f(x, y)$  досягає екстремуму, якщо існують частинні похідні II-го порядку і вони не дорівнюють 0;

в) якщо  $z'_x(x_0; y_0) = 0$ ;  $z'_y(x_0; y_0) = 0$ , то функція в т.  $M_0$  досягає екстремуму;

г) якщо  $D > 0$ , то в т.  $M_0(x_0; y_0)$  функція  $z = f(x, y)$  має екстремум, якщо  $D < 0$ , то екстремуму немає. Якщо  $D > 0$  і  $A > 0$ , то досягає мінімуму,  $D > 0$  і  $A < 0$  - максимуму.

2. Повним диференціалом функції називається головна лінійна частина приросту функції відносно  $\Delta x$  і  $\Delta y$   $dz = Adx + Bdy$ :

а)  $dz = Adx + Bdy$ ; б)  $dz = \partial x dx + \partial y dy$ ; в)  $dz = z''_{xx} dx + z''_{yy} dy$ ; г)  $dz = (A - B)dx + (A + B)dy$ .

3. Знайти область визначення функції  $z = \ln(x^2 + y^2 - 16)$ :

а)  $x^2 + y^2 > 16$ ; б)  $x^2 + y^2 < 16$ ; в)  $x^2 + y^2 < 4$ ; г)  $x^2 + y^2 > -4$ .

4. Знайти частинні похідні I-го порядку функції  $z = \operatorname{tg}(x^2 y^3)$ :

$$\text{а) } \begin{cases} z'_x = \frac{2xy^3}{\operatorname{ctgx}^2 y^3}, \\ z'_y = \frac{x^2 y^3}{\operatorname{tgx}^2 y^3}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} z'_x = \frac{-2xy^3}{\sin^2 x^2 y^3}, \\ z'_y = -\frac{3x^2 y^2}{\sin^2 x^2 y^3}; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} z'_x = \frac{2xy^3}{\cos^2 x^2 y^3}, \\ z'_y = \frac{3x^2 y^2}{\cos^2 x^2 y^3}; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} z'_x = \frac{\sin x^2 y^3}{\cos^2 x^2 y^3}, \\ z'_y = \frac{\cos x^2 y^3}{\sin^2 x^2 y^3}. \end{cases}$$

5. Знайти мішану похідну II порядку  $z''_{xy}$  функції  $z = \frac{y}{x}$ :

а)  $-\frac{1}{x^2}$ ; б)  $-\frac{y}{x^2}$ ; в)  $\frac{x}{y^2}$ ; г)  $-\frac{x^2}{y^3}$ .

6. Знайти еластичність  $E_{p_2}(q)$  функції  $q = p_1^2 + 5p_1 p_2^2$  при  $p_2 = 1$ .

а)  $\frac{7}{10}$ ; б)  $\frac{9}{7}$ ; в)  $\frac{10}{7}$ ; г)  $\frac{1}{7}$ .

7. Знайти градієнт функції  $z = x^2 - xy + y^2$  в точці  $M_0(1; 1)$ .

а)  $\sqrt{1}$ ; б)  $\sqrt{2}$ ; в)  $\sqrt{3}$ ; г)  $\sqrt{5}$ .

8. Дослідіть на екстремум функцію  $z = -2x^2 + xy - 2y^2 + 9x - 6y + 5$ .

а)  $z_{\max} = 17$ ; б)  $z_{\min} = 15$ ; в)  $z_{\max} = 10$ ; г)  $z_{\min} = 0$ .

9. Знайти умовний екстремуми функції  $z = xy$  при умові  $2x + 3y = 6$ .

а)  $z_{\min}\left(\frac{3}{2}; 2\right) = \frac{3}{2}$ ; б)  $z_{\max}\left(\frac{3}{2}; 2\right) = \frac{3}{2}$ ; в)  $z_{\max}\left(2; \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$ ; г)  $z_{\min}\left(2; \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$ .

10. За даною емпіричною таблицею знайти лінійну залежність між  $x$  і  $y$  ( $k$  і  $b$  округліть до сотих)

$x$	3	3	5	5	7
$y$	1	3	3	5	7

а)  $y = x - 2$ ; б)  $y = 1,6x - 4$ ; в)  $y = 1,21x - 1,778$ ; г)  $y = 2x - 1,76$ .

## Інтегральне числення

### Варіант 1

1. Чому дорівнює інтеграл  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}}$  ?

а)  $\ln|x^2 + \sqrt{x^2 + \alpha}| + C$ ;   б)  $\ln|x - \sqrt{x^2 + \alpha}| + C$ ;   в)  $\ln|x + \sqrt{x^2 + \alpha}| + C$ ;   г)  $\arcsin \frac{x}{\sqrt{\alpha}} + 1$ .

2. Записати формулу Ньютона-Лейбніца для визначеного інтегралу.

а)  $\int_a^b f(x)dx = F(a) + F(b)$ ;   б)  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ;

в)  $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$ ;   г)  $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b$ .

3. Обчислити  $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+4x^2}}$ .

а)  $\sqrt{1+4x^2} + C$ ;   б)  $\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}x$ ;   в)  $\frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} + C$ ;   г)  $\frac{1}{4}\sqrt{1+4x^2} + C$ .

4. Обчислити  $\int xe^{2x}dx$ .

а)  $e^{2x}(x - \frac{1}{2}) + C$ ;   б)  $\frac{1}{4}e^{2x}(x - \frac{1}{2}) + C$ ;   в)  $\frac{1}{2}e^{2x}(x - \frac{1}{4}) + C$ ;   г)  $\frac{1}{2}e^{2x}(x - \frac{1}{2}) + C$ .

5. Обчислити  $\int \sin^3 x dx$ .

а)  $-\sin x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$ ;   б)  $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$ ;

в)  $-\sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + C$ ;   г)  $-\sin x + \frac{\cos^3 x}{2} + C$ ;

6. Обчислити визначений інтеграл  $\int_0^2 \frac{3x+2}{x^2+4} dx$ .

а)  $\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{3}$ ;   б)  $\frac{3}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}$ ;   в)  $\frac{1}{2} \ln 4 + \frac{\pi}{4}$ ;   г)  $\ln 2 + \frac{\pi}{4}$ .

7. Обчислити невластний інтеграл  $\int_0^{\infty} e^{-2x} dx$ .

а)  $\frac{1}{4}$ ;   б)  $\frac{2}{3}$ ;   в)  $\frac{1}{2}$ ;   г)  $-\frac{1}{2}$ .

8. Обчислити невластний інтеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[9]{x^{10}}}$ .

а) 9;   б) 4;   в) 10;   г)  $\infty$ .

9. Знайти площу плоскої фігури, обмеженої лініями:  $y = -x^2 + 2$ ;  $y = x^2$ .

а)  $\frac{4}{3}$  кв. од.;   б)  $\frac{2}{3}$  кв. од.;   в)  $\frac{7}{3}$  кв. од.;   г)  $\frac{8}{3}$  кв. од.

10. Обчислити об'єм тіла обертання навколо осі  $Ox$ :  $V_{Ox} : y = \sqrt{5-x}$ ;  $x \in [1;5]$ .

а)  $8\pi$  куб. од.;   б)  $4\pi$  куб. од.;   в)  $12\pi$  куб. од.;   г)  $5\pi$  куб. од.

## Варіант 2

1. Яка підстановка для інтегралу  $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$  ?  
 а)  $x = \sin t$ ;                      б)  $x = \cos t$ ;                      в)  $x = a \cos t$ ;                      г)  $x = atgt$ .
2. Чому дорівнює похідна від інтегралу із змінною верхньою межею  $\left[ \int_a^x f(t) dt \right]_x'$  ?  
 а)  $f(x)dx$ ;                      б)  $f(a)$ ;                      в)  $f(t)$ ;                      г)  $f(x)$ .
3. Обчислити інтеграл  $\int \sqrt{x} \ln x dx$ .  
 а)  $x\sqrt{x}(\ln x - 2) + C$ ;                      б)  $\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x - \frac{2}{3}) + C$ ;  
 в)  $2x\sqrt{x}(\ln x - 3) + C$ ;                      г)  $\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x + 1) + C$ .
4. Обчислити інтеграл  $\int \frac{3x+5}{x^2+9} dx$ .  
 а)  $\frac{1}{2} \ln(x^2+9) + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C$ ;                      б)  $\frac{1}{3} \ln(x^2+9) + \frac{5}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C$ ;  
 в)  $1,5 \ln(x^2+9) + \frac{5}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C$ ;                      г)  $0,5 \ln(x^2+9) + \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C$ .
5. Обчислити інтеграл  $\int \cos^3 x dx$ .  
 а)  $\cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x + C$ ;                      б)  $\cos x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$ ;  
 в)  $\sin x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C$ ;                      г)  $\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$ .
6. Обчислити визначений інтеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5x+4}}$ .  
 а)  $\frac{2}{5}$ ;                      б)  $\frac{3}{5}$ ;                      в)  $\frac{1}{5}$ ;                      г)  $\frac{4}{5}$ .
7. Обчислити невластний інтеграл  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ .  
 а) 2;                      б)  $\frac{1}{2}$ ;                      в)  $\frac{1}{3}$ ;                      г)  $\frac{2}{3}$ .
8. Обчислити невластний інтеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+36}$ .  
 а)  $2\pi$ ;                      б)  $\frac{\pi}{2}$ ;                      в)  $\frac{\pi}{3}$ ;                      г)  $\frac{\pi}{6}$ .
9. Знайти площу плоскої фігури, обмеженої лініями:  $y = \frac{2}{x}$  і  $y = 3 - x$ .  
 а)  $2,5 + 2 \ln 2$  (кв. од.)                      б)  $1,5 - \ln 2$  (кв. од.)                      в)  $1,5 + \ln 2$  (кв. од.)                      г)  $1,5 - 2 \ln 2$  (кв. од.)
10. Обчислити об'єм тіла обертання навколо осі  $Oy$ :  $V_{Oy} : y = \sin 3x$ ;  $x \in \left[ 0; \frac{\pi}{3} \right]$ .  
 а)  $\frac{\pi^3}{36} - \frac{2\pi}{9}$  куб. од.;                      б)  $\frac{\pi^3}{16} - \frac{\pi}{9}$  куб. од.;                      в)  $\frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{8}$  куб. од.;                      г)  $\frac{\pi^3}{81} - \frac{3\pi}{8}$  куб. од.

### Варіант 3

1. Яка заміна для інтегралу  $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx$  ?

- а)  $a \sin t$ ;      б)  $a \cos t$ ;      в)  $tgt$ ;      г)  $actgt$ .

2. Як записується формула Ньютона-Лейбніца?

- а)  $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$ ;      б)  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ ;  
в)  $\int_a^b f(x) dx = F(a) + F(b)$ ;      г)  $\int_b^a f(x) dx = F(x) \Big|_b^a$ .

3. Обчислити інтеграл  $\int x \sin 2x dx$ .

- а)  $-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$ ;      б)  $\frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$ ;  
в)  $-\frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$ ;      г)  $-\frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$ .

4. Обчислити інтеграл  $\int \frac{2x+3}{x^2-3x+2} dx$ .

- а)  $5 \ln|x+1| + 7 \ln|x+2| + C$ ;      б)  $-5 \ln|x-1| + 7 \ln|x-2| + C$ ;  
в)  $5 \ln|x+1| - 7 \ln|x+2| + C$ ;      г)  $-5 \ln|x-2| + 7 \ln|x-1| + C$ .

5. Обчислити інтеграл  $\int \sin^2 x dx$ .

- а)  $\frac{1}{2} (x + \frac{1}{2} \cos 2x) + C$ ;      б)  $\frac{1}{2} (x - \frac{1}{2} \cos 2x) + C$ ;  
в)  $\frac{1}{2} (x - \frac{1}{2} \sin 2x) + C$ ;      г)  $x - \frac{1}{2} \sin 2x + C$ .

6. Обчислити визначений інтеграл  $\int_0^1 x \sqrt{5x^2 + 4} dx$ .

- а)  $\frac{19}{25}$ ;      б)  $\frac{18}{15}$ ;      в)  $\frac{19}{15}$ ;      г)  $\frac{20}{15}$ .

7. Обчислити невластний інтеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^9}}$ .

- а)  $\frac{1}{4}$ ;      б)  $\frac{3}{4}$ ;      в)  $\frac{5}{4}$ ;      г)  $\infty$ .

8. Обчислити невластний інтеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4+x^2}$ .

- а)  $\frac{\pi}{4}$ ;      б)  $-\frac{\pi}{4}$ ;      в)  $\frac{\pi}{2}$ ;      г)  $\pi$ .

9. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями  $y = \frac{4}{x}$ ;  $y = x$ ;  $y = 0$ ;  $x = 4$ .

- а)  $2 + \ln 2$  (кв. од.)      б)  $2 - \ln 2$  (кв. од.)      в)  $2 + 4 \ln 2$  (кв. од.)      г)  $2 - 4 \ln 2$  (кв. од.)

10. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обмеженої лініями:

$y = \frac{4}{x}$ ;  $y = 0$ ;  $x = 2$ ;  $x = 4$  навколо осі  $Ox$ .

- а)  $2\pi$  куб. од.;      б)  $3\pi$  куб. од.;      в)  $5\pi$  куб. од.;      г)  $4\pi$  куб. од.

## Варіант 4

1. Чому дорівнює  $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + \alpha}}$  ?

- а)  $\ln(\sqrt{u^2 + \alpha}) + C$ ; б)  $\arcsin \frac{u}{\sqrt{\alpha}} + C$ ; в)  $\ln |u + \sqrt{u^2 + \alpha}| + C$ ; г)  $\ln(\sqrt{u^2 + \alpha}) + C$ .

2. Обчислити інтеграл  $\int x \ln x dx$ .

- а)  $\frac{x^2}{2}(\ln x - \frac{1}{2}) + C$ ; б)  $\frac{x}{2}(\ln x - \frac{1}{2}) + C$ ; в)  $\frac{x^2}{2}(\ln x + \frac{1}{2}) + C$ ; г)  $\frac{x^2}{2}(\ln x + \frac{x}{2}) + C$ .

3. Обчислити інтеграл  $\int \frac{2x+3}{x^2-4} dx$ .

- а)  $\frac{1}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{7} \ln|x+2| + C$ ; б)  $\frac{7}{4} \ln|x+2| - \frac{1}{4} \ln|x-2| + C$ ;  
в)  $\frac{7}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x+2| + C$ ; г)  $\frac{1}{4} \ln|x-2| + \frac{7}{7} \ln|x+2| + C$ .

4. Обчислити інтеграл  $\int \sin 2x \cos 3x dx$ .

- а)  $\frac{1}{10} \sin 5x + \frac{1}{2} \cos x + C$ ; б)  $-\frac{1}{10} \sin 5x + \frac{1}{2} \sin x + C$ ;  
в)  $\frac{1}{2} \cos 5x + \cos x + C$ ; г)  $-\frac{1}{10} \cos 5x + \frac{1}{2} \cos x + C$ .

5. Обчислити визначений інтеграл  $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{3x^2 + 1}}$ .

- а)  $\frac{1}{2}$ ; б)  $\frac{1}{3}$ ; в)  $\frac{1}{5}$ ; г)  $\frac{1}{4}$ .

6. Обчислити невластний інтеграл  $\int_0^{\infty} e^{-3x} dx$ .

- а) 1; б)  $\frac{1}{2}$ ; в)  $\frac{1}{3}$ ; г) -3.

7. Обчислити невластний інтеграл  $\int_{-\infty}^0 21^{3x} dx$ .

- а)  $3 \ln 21$ ; б)  $\frac{1}{3 \ln 21}$ ; в)  $\frac{1}{21 \ln 3}$ ; г)  $21 \ln 3$ .

8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями  $y = x^2$  і  $y = 4x - 3$ .

- а)  $\frac{2}{3}$  кв.од.; б)  $\frac{1}{3}$  кв.од.; в)  $\frac{5}{3}$  кв.од.; г)  $\frac{4}{3}$  кв.од.

9. Обчислити об'єм тіла обертання навколо осі  $Ox$ :  $V_{Ox} : y = x^2 + 2x$ ;  $x \in [-2; 0]$ .

- а)  $\frac{15}{16} \pi$  куб. од.; б)  $\frac{16}{15} \pi$  куб. од.; в)  $\frac{5}{6} \pi$  куб. од.; г)  $\frac{6}{5} \pi$  куб. од.

10. Обчислити довжину кривої:  $y = \frac{1}{12} \ln \sin 12x$ ;  $x \in \left[ \frac{\pi}{24}; \frac{11\pi}{144} \right]$ .

- а)  $\frac{1}{12} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{11\pi}{12} \right|$  од.; б)  $\frac{1}{12} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{11\pi}{24} \right|$  од.; в)  $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{11\pi}{12} \right|$  од.; г)  $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{11\pi}{24} \right|$  од.

## Варіант 5

1. Яка підстановка для  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  ?

- а)  $t = \sin x$ ;      б)  $t = \operatorname{tg} x$ ;      в)  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ ;      г)  $t = \operatorname{ctg} x$ .

2. Обчислити інтеграл  $\int x^2 \ln x dx$

- а)  $\frac{x^2}{2} (\ln x - \frac{1}{2}) + C$ ;      б)  $\frac{x}{2} (\ln x - \frac{1}{2}) + C$ ;      в)  $\frac{x^3}{2} (\ln x - \frac{1}{3}) + C$ ;      г)  $\frac{x^3}{3} (\ln x - \frac{1}{3}) + C$ .

3. Обчислити інтеграл  $\int \frac{dx}{x^2 - 4}$ .

- а)  $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$ ;      б)  $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| + C$ ;      в)  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| + C$ ;      г)  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$ .

4. Обчислити інтеграл  $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ .

- а)  $\operatorname{ctg} x - x + C$ ;      б)  $\operatorname{tg} x - x + C$ ;      в)  $\operatorname{tg} x + x + C$ ;      г)  $\operatorname{ctg} x + x + C$ .

5. Обчислити визначений інтеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5x+4}}$ .

- а)  $\frac{4}{5}$ ;      б)  $\frac{3}{5}$ ;      в)  $\frac{1}{5}$ ;      г)  $\frac{2}{5}$ .

6. Обчислити невластний інтеграл  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ .

- а)  $\frac{\pi}{4}$ ;      б)  $\frac{\pi}{2}$ ;      в)  $\frac{\pi}{3}$ ;      г)  $\pi$ .

7. Обчислити невластний інтеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[7]{x^5}}$ .

- а)  $\frac{1}{7}$ ;      б)  $\frac{3}{5}$ ;      в)  $\frac{5}{7}$ ;      г)  $\infty$ .

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $y = -x^2 + 2$ ;  $y = x^2$ .

- а)  $\frac{5}{3}$  кв. од.;      б)  $\frac{7}{3}$  кв. од.;      в) 2 кв. од.;      г)  $\frac{8}{3}$  кв. од.

9. Обчислити об'єм тіла обертання навколо осі  $Oy$ :  $V_{Oy} : y = \ln x$ ;  $x \in [1; e^2]$ .

- а)  $\frac{\pi}{2} (e^4 + 1)$  куб. од.;      б)  $\frac{\pi}{2} (3e^4 + 1)$  куб. од.;      в)  $\frac{\pi}{2} (5e^4 + 1)$  куб. од.;      г)  $\pi (e^4 + 1)$  куб. од.

10. Обчислити довжину кривої:  $y = (4x - 1)^{\frac{3}{2}}$ ;  $x \in \left[ 0,25; \frac{5}{12} \right]$ .

- а)  $\frac{31}{24}$  од.;      б)  $\frac{31}{36}$  од.;      в)  $\frac{31}{16}$  од.;      г)  $\frac{31}{8}$  од.



### Варіант 6

1. Яка підстановка для інтеграла  $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx$  ?

- а)  $t = \sqrt{ax+b}$ ;      б)  $t = \sqrt[n]{ax+b}$ ;      в)  $t = \sqrt[3]{ax+b}$ ;      г)  $t^2 = ax+b$ .

2. Обчислити інтеграл  $\int xe^{3x} dx$ .

- а)  $xe^{3x} - e^{3x} + C$ ;      б)  $\frac{1}{3}e^{3x}\left(x - \frac{1}{3}\right) + C$ ;      в)  $e^{3x}\left(x - \frac{1}{3}\right) + C$ ;      г)  $e^{3x}\left(\frac{1}{9}x - \frac{1}{3}\right) + C$ .

3. Обчислити інтеграл  $\int \frac{2x+3}{x^2-9} dx$ .

- а)  $\frac{1}{2} \ln|x-3| + \frac{1}{3} \ln|x+3| + C$ ;      б)  $\frac{3}{4} \ln|x-3| + \frac{1}{2} \ln|x+3| + C$ ;  
в)  $1,5 \ln|x-3| + 0,5 \ln|x+3| + C$ ;      г)  $2 \ln|x-3| + \ln|x+3| + C$ .

4. Обчислити інтеграл  $\int \frac{dx}{\sin x}$ .

- а)  $\ln\left|\operatorname{ctg} \frac{x}{2}\right| + C$ ;      б)  $\ln|\operatorname{tg} x| + C$ ;      в)  $\ln|\operatorname{ctg} x| + C$ ;      г)  $\ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C$ .

5. Обчислити визначений інтеграл  $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{5x^2+4}}$ .

- а)  $\frac{1}{5}$ ;      б)  $\frac{1}{4}$ ;      в)  $\frac{1}{3}$ ;      г)  $\frac{1}{2}$ .

6. Обчислити невластний інтеграл  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ .

- а) 1;      б) 2;      в) 2,5;      г) 1,5.

7. Обчислити невластний інтеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+169}$ .

- а)  $-\frac{\pi}{13}$ ;      б)  $-13\pi$ ;      в)  $\frac{\pi}{13}$ ;      г)  $13\pi$ .

8. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $y = 2x + 18$ ;  $y = -12 - 4x$ ;  $y = 0$

- а) 18 кв. од.;      б) 20 кв. од.;      в) 22 кв. од.;      г) 24 кв. од.

9. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обмеженої лініями

$$y = \frac{3}{x+2}; \quad x = 1; \quad x = 4 \quad \text{навколо осі } Ox.$$

- а) 3  $\pi$  куб. од.;      б) 23  $\pi$  куб. од.;      в) 2,5  $\pi$  куб. од.;      г) 1,5  $\pi$  куб. од.

10. Обчислити довжину кривої:  $y = \frac{1}{6} \ln \sin 6x$ ;  $x \in \left[\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{36}\right]$ .

- а)  $\frac{1}{6} \ln\left|\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}\right|$  од.;      б)  $\frac{1}{6} \ln\left|\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}\right|$  од.;      в)  $\ln\left|\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}\right|$  од.;      г)  $\ln\left|\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}\right|$  од.

## Варіант 7

1. Чому дорівнює диференціал від невизначеного інтеграла  $d \int f(x) dx$  ?  
а)  $f(x)$ ;                      б)  $f'(x) dx$ ;                      в)  $\int f(x) dx$ ;                      г)  $f(x) dx$ .
2. Яка площа фігури обмеженої лініями  $y = f_1(x), y = f_2(x), x = a, x = b, f_2(x) \geq f_1(x), a < b$ , то її площу можна знайти за формулою:  
а)  $\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx$ ;                      б)  $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx$ ;  
в)  $\int_b^a [f_2(x) - f_1(x)] dx$ ;                      г)  $\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$ .
3. Обчислити інтеграл  $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ .  
а)  $\arccos \frac{x-2}{2} + C$ ;                      б)  $\operatorname{arctg} \frac{x-2}{2} + C$ ;                      в)  $\arcsin \frac{x-2}{2} + C$ ;                      г)  $\arcsin \frac{x-2}{\sqrt{2}} + C$ .
4. Обчислити інтеграл  $\int \operatorname{arctg} x dx$ .  
а)  $x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$ ;                      б)  $\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$ ;  
в)  $x \cdot \operatorname{arctg} x + \ln(1+x^2) + C$ ;                      г)  $x \cdot \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2) + C$ .
5. Обчислити інтеграл  $\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2} dx$ .  
а)  $-3 \ln|x-1| + 4 \ln|x-2| + C$ ;                      б)  $-3 \ln|x-1| + 5 \ln|x-2| + C$ ;  
в)  $2 \ln|x-1| + 5 \ln|x-2| + C$ ;                      г)  $-3 \ln|x-1| + \ln|x-2| + C$ .
6. Обчислити інтеграл  $\int_0^1 x \sqrt{4+5x^2} dx$ .  
а)  $\frac{17}{15}$ ;                      б)  $\frac{19}{25}$ ;                      в)  $\frac{19}{15}$ ;                      г)  $\frac{18}{15}$ .
7. Обчислити невластний інтеграл  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(3x+2)^2}$ .  
а)  $\frac{1}{15}$ ;                      б)  $\frac{2}{25}$ ;                      в)  $\frac{3}{5}$ ;                      г)  $\frac{1}{16}$ .
8. Обчислити невластний інтеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[8]{x^9}}$ .  
а) 2;                      б) 4;                      в) 8;                      г)  $\infty$ .
9. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $y = x^2, y = 3x - 2$ .  
а)  $\frac{1}{3}$  кв. од.;                      б)  $\frac{1}{2}$  кв. од.;                      в)  $\frac{2}{3}$  кв. од.;                      г)  $\frac{1}{6}$  кв. од.
10. Обчислити об'єм тіла обертання навколо осі  $Ox$ :  $V_{Ox} : y = \sin 8x; x \in \left[0; \frac{\pi}{16}\right]$ .  
а)  $\frac{\pi^2}{8}$  куб. од.;                      б)  $\frac{\pi^2}{16}$  куб. од.;                      в)  $\frac{\pi^2}{32}$  куб. од.;                      г)  $\frac{\pi^2}{64}$  куб. од.

## Варіант 8

1. Яку потрібно зробити підстановку для інтегралу  $\int \sin^m x \cos^n x dx$ , якщо  $n$  – додатне ціле непарне число?  
а)  $t = \sin x$ ;                      б)  $t = \cos x$ ;                      в)  $t = \operatorname{tg} x$ ;                      г)  $t = \operatorname{ctg} x$ .
2. Чому дорівнює інтеграл  $\int_a^b [k_1 f_1(x) \pm k_2 f_2(x)] dx$ ?  
а)  $\int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$ ;                      б)  $k_1 \int_a^b f_1(x) dx \pm k_2 \int_a^b f_2(x) dx$ ;  
в)  $k_1 \int_b^a f_1(x) dx \pm k_2 \int_b^a f_2(x) dx$ ;                      г)  $\int_b^a k_1 f_1(x) dx \pm \int_b^a k_2 f_2(x) dx$ .
3. Обчислити інтеграл  $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$ .  
а)  $x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C$ ;                      б)  $x \operatorname{tg} x - \ln |\cos x| + C$ ;  
в)  $x \operatorname{tg} x + \ln |\sin x| + C$ ;                      г)  $x \operatorname{tg} x - \ln |\sin x| + C$ .
4. Обчислити інтеграл  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x}}$ .  
а)  $\arcsin \frac{x+2}{2} + C$ ; б)  $\arccos \frac{x+2}{2} + C$ ; в)  $\ln |x+2 + \sqrt{x^2 + 4x}| + C$ ; г)  $2\sqrt{x^2 + 4x} + C$ .
5. Обчислити інтеграл  $\int \frac{dx}{(3x+2)^4}$ .  
а)  $\frac{1}{9(3x+2)^2} + C$ ;                      б)  $-\frac{1}{9(3x+2)^3} + C$ ; в)  $\frac{1}{9(3x+2)^3} + C$ ;                      г)  $-\frac{1}{4(3x+2)^3} + C$ .
6. Обчислити інтеграл  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$ .  
а)  $\frac{1}{2}$ ;                      б)  $\frac{1}{4}$ ;                      в)  $\frac{1}{3}$ ;                      г)  $\frac{1}{5}$ .
7. Обчислити невластний інтеграл  $\int_0^{\infty} e^{-4x} dx$ .  
а)  $\frac{1}{4}$ ;                      б) 1;                      в)  $-\frac{1}{2}$ ;                      г) -1.
8. Обчислити невластний інтеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[12]{x^7}}$ .  
а) 2;                      б) 4;                      в) 8;                      г)  $\infty$ .
9. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $y = 2x$ ;  $y = 12 - x$ ;  $y = 0$ ;  
а) 20 кв. од.;                      б) 18 кв. од.;                      в) 24 кв. од.;                      г) 26 кв. од.
10. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обмеженої лініями  $y^2 = 4x$ ,  $x = 2$ , навколо осі  $Ox$ .  
а)  $6\pi$  куб.од.; б)  $4\pi$  куб.од.; в)  $2\pi$  куб.од.; г)  $8\pi$  куб.од.

### Варіант 9

1. Яку заміну змінної необхідно зробити для обчислення інтеграла  $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx$ ?
- а)  $x = a \sin t$ ;      б)  $x = a \cdot \cos t$ ;      в)  $x = a \cdot \operatorname{tg} t$ ;      г)  $x = \operatorname{tg} t$ .
2. Чому дорівнює похідна від інтеграла  $\left[ \int_a^x f(t) dt \right]'$ ?
- а)  $f(a)$ ;      б)  $f(t)$ ;      в)  $f'(x)$ ;      г)  $f(x)$ .
3. Обчислити інтеграл  $\int x \sin 2x dx$ .
- а)  $\frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$ ;      б)  $-\frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$ ;  
в)  $-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$ ;      г)  $-x \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + C$ .
4. Обчислити інтеграл  $\int \sqrt{1 + 2 \sin x} \cdot \cos x dx$ .
- а)  $(1 + 2 \sin x)^{\frac{3}{2}} + C$ ;      б)  $\sqrt{1 + 2 \sin x} + C$ ;      в)  $2\sqrt{(1 + 2 \sin x)^3} + C$ ;      г)  $\frac{1}{3}\sqrt{(1 + 2 \sin x)^3} + C$ .
5. Обчислити інтеграл  $\int \cos^2 3x dx$ .
- а)  $\frac{1}{2} x + \frac{1}{12} \sin 6x + C$ ;      б)  $\frac{1}{2} x + \frac{1}{12} \cos 6x + C$ ;      в)  $\frac{1}{2} x + \frac{1}{6} \sin 3x + C$ ;      г)  $\frac{1}{2} x - \frac{1}{12} \sin 6x + C$ .
6. Обчислити визначений інтеграл  $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$ .
- а)  $\operatorname{arctg}(e) + \frac{\pi}{4}$ ;      б)  $\operatorname{arctg}(e) - \frac{\pi}{4}$ ;      в)  $\operatorname{arctg}(e) - \frac{\pi}{2}$ ;      г)  $\operatorname{arctg}(e) - \frac{\pi}{3}$ .
7. Обчислити невластний інтеграл  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ .
- а) 2;      б) -1;      в) -2;      г) 1.
8. Обчислити невластний інтеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 625}$ .
- а)  $-\frac{\pi}{25}$ ;      б)  $-25\pi$ ;      в)  $\frac{\pi}{25}$ ;      г)  $25\pi$ .
9. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями  $y = 4 - 2x - x^2$ ;  $y = x$ .
- а)  $\frac{125}{3}$  кв. од.;      б)  $\frac{125}{6}$  кв. од.;      в)  $\frac{6}{125}$  кв. од.;      г)  $\frac{3}{125}$  кв. од.
10. Обчислити об'єм тіла обертання навколо осі  $Oy$ :  $V_{Oy} : y = 5^x$ ;  $x \in [0; 1]$ .
- а)  $\frac{\pi}{\ln 5} - \frac{\pi}{\ln^2 5}$  куб. од.;      б)  $\frac{10\pi}{\ln 5} - \frac{\pi}{\ln^2 5}$  куб. од.;  
в)  $\frac{\pi}{\ln 5} - \frac{8\pi}{\ln^2 5}$  куб. од.;      г)  $\frac{10\pi}{\ln 5} - \frac{8\pi}{\ln^2 5}$  куб. од.

## Варіант 10

1. Яку заміну змінної необхідно зробити для обчислення інтеграла  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  ?

- а)  $t = \sin x$ ;                      б)  $t = \cos x$ ;                      в)  $t = \operatorname{tg} x$ ;                      г)  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .

2. Обчислити інтеграл  $\int \sqrt{x} \ln(x) dx$ .

- а)  $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \left( \ln \frac{x}{2} - \frac{2}{3} \right) + C$ ;                      б)  $x \sqrt{x} \left( \ln(x) - \frac{1}{2} \right) + C$ ;  
в)  $\frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}} \left( \ln(x) + \frac{2}{3} \right) + C$ ;                      г)  $\frac{2}{3} x \sqrt{x} (\ln(x) + 2) + C$ .

3. Обчислити інтеграл  $\int \frac{2x+1}{x^2-1} dx$ .

- а)  $\frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$ ;                      б)  $\frac{3}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$ ;  
в)  $\frac{2}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+1| + C$ ;                      г)  $\frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$ .

4. Обчислити інтеграл  $\int \sin 3x \sin 2x dx$ .

- а)  $\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{10} \cos 5x + C$ ;                      б)  $\frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{10} \cos 5x + C$ ;  
в)  $\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{10} \sin 5x + C$ ;                      г)  $\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{10} \sin 5x + C$ .

5. Обчислити визначений інтеграл  $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$ .

- а) 1;                      б) 3;                      в) 2;                      г) 4.

6. Обчислити невластний інтеграл  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^5}$ .

- а) 0,25;                      б) 0,5;                      в) 1/3;                      г) 1.

7. Обчислити невластний інтеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 529}$ .

- а)  $-\frac{\pi}{23}$ ;                      б)  $-23\pi$ ;                      в)  $\frac{\pi}{23}$ ;                      г)  $23\pi$ .

8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями  $y = -15 - 8x - x^2$ ;  $y = 2x + 9$ .

- а)  $\frac{4}{3}$  кв. од.;                      б)  $\frac{5}{6}$  кв. од.;                      в)  $\frac{6}{5}$  кв. од.;                      г)  $\frac{3}{4}$  кв. од.

9. Обчислити об'єм тіла. Утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями  $y = 1 - x^2$ ,  $y = 0$  навколо осі  $Ox$ .

- а)  $\frac{14}{15} \pi$  куб. од.;                      б)  $\frac{16}{15} \pi$  куб. од.;                      в)  $\frac{13}{15} \pi$  куб. од.;                      г)  $\frac{12}{15} \pi$  куб. од.

10. Обчислити довжину кривої:  $y = (6x-1)^{\frac{3}{2}}$ ;  $x \in \left[ \frac{1}{6}; \frac{14}{81} \right]$ .

- а)  $\frac{7}{729}$  од.;                      б)  $\frac{11}{729}$  од.;                      в)  $\frac{13}{729}$  од.;                      г)  $\frac{17}{729}$  од.

# Диференціальні рівняння

## Варіант 1

1. Записати загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння  $k_1$  і  $k_2$  дійсні і різні.

а)  $y_{з.о.} = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_2 x} + c;$

б)  $y_{з.о.} = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x};$

в)  $y_{з.о.} = c_1 x e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + c;$

г)  $y_{з.о.} = (c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x})x + c.$

2. Диференціальне рівняння  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  є рівнянням в повних диференціалах, якщо виконується умова:

а)  $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y};$

б)  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x};$

в)  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y};$

г)  $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$

3. Яку підстановку треба застосувати для розв'язування рівняння  $y'(x^2 + 2xy) + xy = 0$  ?

а)  $y = xu;$

б)  $y = uv;$

в)  $y = \frac{u}{x};$

г)  $y = \frac{u}{v}.$

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y' = \frac{y}{x+1}.$

а)  $y = c(x+1);$

б)  $y = \ln(c+x);$

в)  $y = x+c;$

г)  $y = x \ln x + c.$

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y'x = x + y.$

а)  $y = (x+c) \ln x;$

б)  $y = \ln cx;$

в)  $y = x \ln cx;$

г)  $y = x \ln x + c.$

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y' - \frac{y}{x} = x.$

а)  $y = x^2 + c;$

б)  $y = x^2 + x + c;$

в)  $y = x + c;$

г)  $y = x^2 + cx.$

7. Знайти загальний розв'язок рівняння  $y'' + 2y' = 0.$

а)  $y = c_1 + c_2 e^{-2x};$

б)  $y = c_1 x + c_2 e^{-2x};$

в)  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x};$

г)  $y = ce^{-2x}.$

8. Знайти частковий розв'язок рівняння  $y'' + 2y' + y = 2x + 1.$

а)  $y_{ч.н.} = 2x + 3;$

б)  $y_{ч.н.} = x;$

в)  $y_{ч.н.} = x + 1;$

г)  $y_{ч.н.} = 2x - 3.$

9. Задано еластичність  $E_x(f) = -\frac{1}{2}$ . Знайдіть функцію  $f(x)$ , для якої  $f(1) = 2$ .

а)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}};$

б)  $f(x) = \sqrt{2x};$

в)  $f(x) = \sqrt{x};$

г)  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}.$

10. Моторний човен масою  $m$  рухається прямолінійно в стоячій воді зі швидкістю 5 м/с. Після вимкнення двигуна він продовжує рухатися зі швидкістю, яка задана функцією  $v(t)$ . Знайдіть функцію швидкості руху  $v(t)$ , якщо вважати, що сила опору води пропорційна швидкості руху човна (коефіцієнт пропорційності  $k > 0$ ).

а)  $v(t) = 5e^{-\frac{k}{m}t};$

б)  $v(t) = 5 + e^{-\frac{k}{m}t};$

в)  $v(t) = e^{-\frac{k}{5m}t};$

г)  $v(t) = e^{-\frac{5k}{m}t}.$



### Варіант 3

1. Як представити загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами  $y'' + py' + qy = 0$ , якщо корені характеристичного рівняння  $k^2 + pk + q = 0$  дійсні і рівні?

а)  $y_{з.о.} = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$ ;                      б)  $y_{з.о.} = (c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x})x$ ;

в)  $y_{з.о.} = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_2 x}$ ;                      г)  $y_{з.о.} = (c_1 + c_2)x e^{k_1 x}$ .

2. Вкажіть тип диференціального рівняння першого порядку  $y' - 2y = 4x$ .

а) з відокремлювальними змінними;                      б) лінійне;                      в) однорідне;                      г) Бернуллі.

3. Яку підстановку треба застосувати для розв'язування рівняння  $y' + 2y = 2x$ ?

а)  $y = xu$ ;                      б)  $y = uv$ ;                      в)  $y = \frac{u}{x}$ ;                      г)  $y = \frac{u}{v}$ .

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $udx + (x+1)dy = 0$

а)  $y = xc - 1$ ;                      б)  $y = \frac{c}{x+1}$ ;                      в)  $y = c(x+1)$ ;                      г)  $y = xc + 1$ ;

5. Знайти розв'язок диференціального рівняння  $y' = \frac{3x+y}{x}$ , який задовольняє умові  $y(1) = 1$ .

а)  $y = x \ln cx^3$ ;                      б)  $y = 3x \ln(x+1)$ ;                      в)  $y = x \ln ex^3$ ;                      г)  $y = x^2 \ln ex^3$ .

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y' - \frac{y}{x} = 2x$ .

а)  $y = x^2 + cx$ ;                      б)  $y = 2x^2 + cx$ ;                      в)  $y = 2x^2 + 4cx$ ;                      г)  $y = x^2 + 2cx$ .

7. Знайти загальний розв'язок рівняння  $y'' + 4y' + 4y = 0$ .

а)  $y_{з.о.} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ ;                      б)  $y_{з.о.} = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$ ;

в)  $y_{з.о.} = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$ ;                      г)  $y_{з.о.} = (c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x})x$ .

8. Знайти частковий розв'язок диференціального рівняння  $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$ .

а)  $y_{ч.н.} = \frac{1}{5}e^{3x}$ ;                      б)  $y_{ч.н.} = \frac{1}{3}xe^{3x}$ ;                      в)  $y_{ч.н.} = \frac{1}{3}e^{3x}$ ;                      г)  $y_{ч.н.} = e^{3x}$ .

9. Задано еластичність  $E_x(f) = -1$ . Знайдіть функцію  $f(x)$ , для якої  $f(1) = 2$ .

а)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ;                      б)  $f(x) = \frac{2}{x}$ ;                      в)  $f(x) = 2x$ ;                      г)  $f(x) = x$ .

10. Нехай на поверхню води перпендикулярно до неї падає світло з яскравістю  $A_0$ .  $A(x)$  – яскравість світла на глибині  $x$ . Знайдіть функцію  $A(t)$ , якщо швидкість поглинання світла на глибині  $x$  пропорційна яскравості світла на цій глибині (коефіцієнт пропорційності  $k > 0$ ).

а)  $A(t) = A_0 e^{-kt}$ ;                      б)  $A(t) = k e^{-A_0 t}$ ;                      в)  $A(t) = A_0 + e^{-kt}$ ;                      г)  $A(t) = e^{-A_0 kt}$ .



## Варіант 4

1. Задано лінійне диференціальне рівняння II порядку з постійними коефіцієнтами  $y'' + py' + qy = f(x)$ . Нехай  $f(x) = P_n(\lambda)e^{\alpha x}$ , де  $P_n(x)$  – многочлен  $n$ -го степеня. Вкажіть частинний розв'язок диференціального рівняння, якщо  $\alpha$  не є коренем характеристичного рівняння  $k^2 + pk + q = 0$ , а  $Q_n(x)$  – многочлен  $n$ -го степеня.

а)  $y_{ч.н.} = Ae^{\alpha x}$ ;      б)  $y_{ч.н.} = Q_n(x)$ ;      в)  $y_{ч.н.} = Q_n(x)e^x$ ;      г)  $y_{ч.н.} = Q_n(x)e^{\alpha x}$ .

2. Вкажіть тип диференціального рівняння першого порядку  $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$ .

а) з відокремлювальними змінними;      б) лінійне;      в) однорідне;      г) Бернуллі.

3. Яку підстановку треба застосувати для розв'язування рівняння  $y' = \frac{x+y}{x}$ ?

а)  $y = xu$ ;      б)  $y = uv$ ;      в)  $y = \frac{u}{x}$ ;      г)  $y = \frac{u}{v}$ .

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $yy' + x = 1$ .

а)  $y^2 = 2x - x^2 + c$ ;      б)  $y^2 = (2x - x^2)c$ ;      в)  $y = (2x + x^2)c$ ;      г)  $y = xc + 1$ ;

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $xy' = 4x + y$ .

а)  $y = x \ln cx^2$ ;      б)  $y = x \ln cx^3$ ;      в)  $y = x \ln cx^4$ ;      г)  $y = \ln cx^3$ .

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y' - 2y = 4e^{2x}$ .

а)  $y_{3.0} = e^{2x}(2x + C)$ ;      б)  $y_{3.0} = e^{2x}(3x + C)$ ;      в)  $y_{3.0} = e^{2x}(4x + C)$ ;      г)  $y_{3.0} = e^{2x}(x + C)$ .

7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y'' + 9y = 0$ .

а)  $y_{3.0} = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$ ;      б)  $y_{3.0} = (c_1 + c_2) e^{-3x}$ ;  
в)  $y_{3.0} = c_1 \cos 3x - c_2 \sin 3x$ ;      г)  $y_{3.0} = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x$ .

8. Знайти частковий розв'язок диференціального рівняння  $y'' - 3y' + 2y = x + 1$ .

а)  $y_ч = 0,5x + 1,25$ ;      б)  $y_ч = 2x + 2,5$ ;      в)  $y_ч = 2,5x + 0,5$ ;      г)  $y_ч = 2x + 3$ .

9. Задано еластичність  $E_x(f) = -2$ . Знайдіть функцію  $f(x)$ , для якої  $f(1) = 3$ .

а)  $f(x) = \frac{2}{x}$ ;      б)  $f(x) = \frac{3}{x^2}$ ;      в)  $f(x) = \frac{2}{x^2}$ ;      г)  $f(x) = \frac{3}{x}$ .

10. Металева деталь нагріта до  $400^\circ\text{C}$ , охолоджується в повітрі при температурі  $20^\circ\text{C}$ . Знайдіть функцію зміни температури  $U(t)$  на поверхні деталі, якщо швидкість охолодження поверхні тіла з часом  $t$  пропорційна різниці температур поверхні тіла і навколишнього середовища (коефіцієнт пропорційності  $k > 0$ ).

а)  $U(t) = 420e^{-20kt}$ ;      б)  $U(t) = 380e^{-kt} + 20$ ;      в)  $U(t) = 380e^{-kt}$ ;      г)  $U(t) = 380e^{-20kt}$ .

## Варіант 5

1. Задано диференціальне рівняння  $y'' + py' + qy = f(x)$ . Нехай  $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ , де  $P_n(x)$  – многочлен  $n$ -го степеня,  $\alpha$  – корінь характеристичного рівняння  $k^2 + pk + q = 0$  кратності 1. Вкажіть частинний розв'язок диференціального рівняння, якщо  $Q_n(x)$  – многочлен  $n$ -го степеня.

а)  $y_{ч.н.} = Q_n(x)e^{\alpha x}$ ;      б)  $y_{ч.н.} = Ae^{\alpha x}$ ;      в)  $y_{ч.н.} = Q_n(x)$ ;      г)  $y_{ч.н.} = e^{\alpha x}Q_n(x)x$ .

2. Вкажіть лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку.

а)  $y'' + 2y' + y = 1$ ;      б)  $y'' + 2y' + y = x$ ;      в)  $y'' + 2y' + y = 0$ ;      г)  $y'' + 2y' = 1$ .

3. Яку підстановку треба застосувати для розв'язування рівняння  $y' = \frac{3y}{x}$  ?

а)  $y = xu$ ;      б)  $y = uv$ ;      в)  $y = \frac{u}{x}$ ;      г)  $y = \frac{u}{v}$ .

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $(1+x^2)dy + ydx = 0$ .

а)  $y = e^{\arctg x}c$ ;      б)  $y = e^{\arctg x + c}$ ;      в)  $y = e^{\arctg x + c}$ ;      г)  $y = e^{\arctg x}c$ .

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y'x = 5x + y$ .

а)  $y = x \ln cx^3$ ;      б)  $y = x \ln cx^2$ ;      в)  $y = x \ln cx^5$ ;      г)  $y = x \ln xc^4$ .

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y' + \frac{2y}{x} = x^3$ .

а)  $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{c}{x^2}$ ;      б)  $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{c}{x^2}$ ;      в)  $y = \frac{1}{3}x^4 + \frac{c}{x^3}$ ;      г)  $y = \frac{1}{6}x^5 + \frac{c}{x^3}$ .

7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y'' + 3y' + 2y = 0$ .

а)  $y_{з.о.} = c_1e^{2x} + c_2e^x$ ; б)  $y_{з.о.} = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x}$ ; в)  $y_{з.о.} = (c_1e^{-2x} + c_2e^{-x})x$ ; г)  $y_{з.о.} = (c_1e^{2x} + c_2e^x)x$ .

8. Знайти частковий розв'язок диференціального рівняння  $y'' + y = 2e^{2x}$ .

а)  $y_{ч.н.} = 0,2e^{2x}$ ;      б)  $y_{ч.н.} = 0,5e^{2x}$ ;      в)  $y_{ч.н.} = 0,4e^{2x}$ ;      г)  $y_{ч.н.} = 0,6e^{2x}$ ;

9. Задано еластичність  $E_x(f) = \frac{1}{3}$ . Знайдіть функцію  $f(x)$ , для якої  $f(1) = 5$ .

а)  $f(x) = 3\sqrt[3]{x}$ ;      б)  $f(x) = 5\sqrt[3]{x}$ ;      в)  $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$ ;      г)  $f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{x}}$ .

10. Послідовно ввімкнені джерело струму ЕРС  $E$ , котушка з індуктивністю  $L$  і активний опір  $R$ . Вважаючи, що ЕРС є сталою, матимемо рівняння  $I(t)R + I'(t)L = E$ .

Знайти закон зміни сили струму  $I(t)$  в колі, вважаючи, що в початковий момент часу ( $t = 0$ ) вона дорівнює нулю.

а)  $I(t) = \frac{R}{E} - \frac{R}{E}e^{-\frac{R}{L}t}$ ;      б)  $I(t) = \frac{E}{R} + \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$ ; в)  $I(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$ ;      г)  $I(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{L}{R}t}$ .

## Варіант 6

1. Задано лінійне диференціальне рівняння II порядку з постійними коефіцієнтами  $y'' + py' + qy = f(x)$ . Нехай  $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + R_m \sin \beta x)$ , де  $P_n(x), R_m(x)$  – многочлени  $n$ -го та  $m$ -го степенів відповідно. Вкажіть частинний розв'язок диференціального рівняння, якщо  $\alpha + \beta i$  не є коренем характеристичного рівняння  $k^2 + pk + q = 0$ , а  $P_k^*(x), R_k^*(x)$  – многочлени  $k$ -го степеня,  $k = \max(m, n)$ .

- а)  $y_{ч.н.} = P_k^*(x) \cos \beta x + P_k^*(x) \sin \beta x$ ;      б)  $y_{ч.н.} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + \sin \beta x)$ ;  
в)  $y_{ч.н.} = e^{\alpha x} (P_k^*(x) \cos \beta x + P_k^*(x) \sin \beta x) \cdot x$ ;      г)  $y_{ч.н.} = e^{\alpha x} (P_k^*(x) \cos \beta x + P_k^*(x) \sin \beta x)$ .

2. Вкажіть лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку.

- а)  $y'' + 2y' = 0$ ;      б)  $y'' + y = 0$ ;      в)  $y'' + 2y' + y = 0$ ;      г)  $y'' + 2y' + x = 0$ .

3. Яку підстановку треба застосувати для розв'язування рівняння  $y' + y \operatorname{tg} x = \cos x$  ?

- а)  $y = xu$ ;      б)  $y = uv$ ;      в)  $y = \frac{u}{x}$ ;      г)  $y = \frac{u}{v}$ .

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $\sqrt{1+x^2} dy - y dx = 0$ .

- а)  $y = e^{\arcsin x} c$ ;      б)  $y = e^{\arcsin x + c}$ ;      в)  $y = e^{\arccos x + c}$ ;      г)  $y = e^{\arccos x} c$ .

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $xy \cdot y' = x^2 + y^2$ .

- а)  $2x \ln cx + y^2 = 0$ ;      б)  $2x^2 \ln cx - y^2 = 0$ ;      в)  $3x^2 \ln cx + y^2 = 0$ ;      г)  $2x^2 \ln cx + y^2 = 0$ .

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y' - 3y = 4e^{3x}$ .

- а)  $y = e^{2x} (4x + C)$ ;      б)  $y = e^{3x} (-2x + C)$ ;      в)  $y = e^{3x} (4x + C)$ ;      г)  $y = -e^{3x} (4x + C)$ .

7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y'' - 4y' + 4y = 0$ .

- а)  $y_{3,0} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ ;      б)  $y_{3,0} = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}$ ;  
в)  $y_{3,0} = e^{2x} (C_1 + C_2 x)$ ;      г)  $y_{3,0} = (C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x}) x$ .

8. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння  $y'' + y' = 5e^{2x}$ .

- а)  $y_ч = \frac{5}{4} e^{2x}$ ;      б)  $y_ч = \frac{3}{2} e^{2x}$ ;      в)  $y_ч = \frac{5}{6} e^{2x}$ ;      г)  $y_ч = 2e^{2x}$ .

9. Задано еластичність  $E_x(f) = -2$ . Знайдіть функцію  $f(x)$ , для якої  $f(1) = 3$ .

- а)  $f(x) = \frac{2}{x^2}$ ;      б)  $f(x) = \frac{3}{x^2}$ ;      в)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ;      г)  $f(x) = \frac{3}{x}$ .

10. Знайти швидкість  $v(t)$  руху тіла масою  $m$ , що падає в повітрі на Землю, вважаючи силу опору повітря пропорційною швидкості руху і початкову швидкість рівною 0 м/с (коефіцієнт пропорційності  $k > 0$ ).

- а)  $v(t) = \frac{mg}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$ ;      б)  $v(t) = \frac{mg}{k} e^{-\frac{k}{m}t}$ ;      в)  $v(t) = \frac{mg}{k} \left( 1 + e^{-\frac{k}{m}t} \right)$ ;      г)  $v(t) = \frac{mg}{k} (1 - e^{-kt})$ .

## Варіант 7

1. Яка заміна приводить однорідне диференціальне рівняння I порядку до рівняння з відокремленими змінними?

а)  $y = u(x)v(x)$ ; б)  $y = u + v$ ; в)  $y = \frac{u}{x}$ ; г)  $y = u \cdot x$ .

2. Диференціальне рівняння першого порядку  $f(x)dx + \varphi(y)dy = 0$  є рівнянням ...

а) з відокремленими змінними; б) лінійним; в) однорідним; г) Бернуллі.

3. Яку підстановку треба застосувати для розв'язування рівняння  $y' = \frac{x+y}{x}$ ?

а)  $y = xu$ ; б)  $y = uv$ ; в)  $y = \frac{u}{x}$ ; г)  $y = \frac{u}{v}$ .

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $2y'\sqrt{x} = y$ .

а)  $y = e^{\sqrt{x}c}$ ; б)  $y = e^{\sqrt{x+c}}$ ; в)  $y = \sqrt{x+c}$ ; г)  $y = 2\sqrt{x+c}$ .

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $xy' + y = 2x^2$ .

а)  $y = \frac{x}{C+2x}$ ; б)  $y = \frac{x}{C-2x^2}$ ; в)  $y = \frac{x}{C-2x}$ ; г)  $y = -\frac{x}{\ln cx^2}$ .

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $xy' + 2y = \frac{4}{x}$ .

а)  $y = \frac{2}{x} + \frac{C}{x^2}$ ; б)  $y = \frac{4}{x} + \frac{C}{x^2}$ ; в)  $y = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^3}$ ; г)  $y = \frac{3}{x} + \frac{C}{x^2}$ .

7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y'' + 2y' = 0$ .

а)  $y_{3,0} = C_1 + C_2e^{-2x}$ ; б)  $y_{3,0} = C_1 + C_2e^{2x}$ ; в)  $y_{3,0} = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$ ; г)  $y_{3,0} = (C_1 + C_2x)e^{2x}$ .

8. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння  $y'' + 4y = 2e^{2x}$ .

а)  $y_4 = \frac{1}{2}e^{2x}$ ; б)  $y_4 = \frac{1}{4}e^{2x}$ ; в)  $y_4 = \frac{1}{3}e^{2x}$ ; г)  $y_4 = 2e^{2x}$ .

9. Задано еластичність  $E_x(f) = -\frac{1}{4}$ . Знайдіть функцію  $f(x)$ , для якої  $f(1) = 3$ .

а)  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ ; б)  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ ; в)  $f(x) = \frac{3}{\sqrt[4]{x}}$ ; г)  $f(x) = \frac{4}{\sqrt[4]{x}}$ .

10. Знайти швидкість  $v(t)$  руху тіла, що падає у вакуумі на Землю, вважаючи початкову швидкість рівною 5 м/с.

а)  $v(t) = 5 + gt$ ; б)  $v(t) = 5gt$ ; в)  $v(t) = \frac{gt}{5}$ ; г)  $v(t) = 5 + g\frac{t^2}{2}$ .

## Варіант 8

1. Яка заміна приводить лінійне диференціальне рівняння I порядку до диференціальних рівнянь з відокремленими змінними?

а)  $y = xu$ ;      б)  $y = x + u$ ;      в)  $y = u + v$ ;      г)  $y = u \cdot v$ .

2. Диференціальне рівняння I порядку  $y' + p(x) \cdot y = f(x)$  є рівнянням ...

а) з відокремленими змінними; б) лінійним; в) однорідним; г) Бернуллі.

3. Яку підстановку треба застосувати для розв'язування рівняння  $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$ ?

а)  $y = xu$ ;      б)  $y = uv$ ;      в)  $y = \frac{u}{x}$ ;      г)  $y = \frac{u}{v}$ .

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $(x+1)y' = y$ .

а)  $y = c(x+1)$ ;      б)  $y = \ln(c+x)$ ;      в)  $y = x + c$ ;      г)  $y = x \ln x + c$ .

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $(x-y)dx + xdy = 0$ .

а)  $y = x \ln cx$ ;      б)  $y = x \ln \frac{c}{x}$ ;      в)  $y = \frac{1}{x} \ln cx$ ;      г)  $y = \frac{c}{x} \ln x$ .

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $xy' - y = 2x^3$ .

а)  $y = x^3 + cx^2$ ;      б)  $y = x^3 + cx$ ;      в)  $y = 2x^3 + cx^2$ ;      г)  $y = x^2 + cx^3$ .

7. Знайти розв'язок рівняння  $y'' - 4y = 0$ , який задовольняє умови  $y(0) = 1$ ;  $y'(0) = 0$ .

а)  $y = e^{2x} + e^{-2x}$ ;      б)  $y = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x})$ ;      в)  $y = \frac{1}{3}(e^{2x} + e^{-2x})$ ;      г)  $y = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x})$ .

8. Знайти частковий розв'язок диференціального рівняння  $y'' + 4y' + 5y = 2x$ .

а)  $y_c = \frac{2}{5}x - \frac{6}{25}$ ;      б)  $y_c = \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$ ;      в)  $y_c = \frac{2}{5}x - \frac{8}{25}$ ;      г)  $y_c = \frac{2}{5}x + \frac{6}{25}$ .

9. Задано еластичність  $E_x(f) = -\frac{1}{2}$ . Знайдіть функцію  $f(x)$ , для якої  $f(1) = 4$ .

а)  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ ;      б)  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ ;      в)  $f(x) = 4\sqrt{x}$ ;      г)  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$ .

10. Швидкість охолодження поверхні тіла пропорційна різниці температур поверхні тіла і навколишнього середовища (коефіцієнт пропорційності  $k > 0$ ). Початкова температура поверхні тіла  $100^\circ\text{C}$ , температура навколишнього середовища  $15^\circ\text{C}$ . Знайдіть функцію  $U(t)$  температури поверхні тіла в момент часу  $t$ .

а)  $U(t) = 15e^{-kt} + 85$ ;      б)  $U(t) = 85e^{-kt} + 15$ ;      в)  $U(t) = 85e^{-kt} - 15$ ;      г)  $U(t) = 85e^{-15kt}$ .

## Варіант 9

1. Як представити загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння II порядку  $y'' + py' + qy = 0$  з постійними коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння  $k^2 + pk + q = 0$  дійсні та рівні. ( $k_1 = k_2$ )?

а)  $y_{3.0} = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$ ; б)  $y_{3.0} = (c_1 + c_2) \cdot e^{k_1 x}$ ; в)  $y_{3.0} = (c_1 + c_2 x) \cdot e^{k_1 x}$ ; г)  $y_{3.0} = c_1 \cdot e^{k_1 x}$ .

2. Оберіть серед запропонованих диференціальних рівнянь рівняння з відокремлюваними змінними.

а)  $(x + y)dx + (y - x)dy = 0$ ; б)  $x^2 + 2y^2 = 2x^2 y'$ ; в)  $xydx + (1 + y^2)dy = 0$ ; г)  $y' + y = xe^x$ .

3. Яку підстановку треба застосувати для розв'язування рівняння  $y' - \frac{y}{x} = x$ ?

а)  $y = xu$ ; б)  $y = uv$ ; в)  $y = \frac{u}{x}$ ; г)  $y = \frac{u}{v}$ .

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $xy' = 1 + y^2$ .

а)  $\operatorname{arctg} y = c \ln|x|$ ; б)  $\operatorname{arctg} y = \ln|x| + c$ ; в)  $\operatorname{arctg} y = c \ln|x|$ ; г)  $\operatorname{arctg} y = \ln|x| + c$ .

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $xy' = y - 4x$ .

а)  $y = x \ln \frac{c}{x^2}$ ; б)  $y = x \ln \frac{c}{x^3}$ ; в)  $y = x \ln \frac{c}{x^4}$ ; г)  $y = x \ln cx^4$ .

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $xy' - y = 2x^3$ .

а)  $y = x^2 + cx$ ; б)  $y = x^3 + cx$ ; в)  $y = x^3 + cx^2$ ; г)  $y = x^2 + cx^3$ .

7. Знайти розв'язок диференціального рівняння  $y'' + 2y' = 0$ , який задовольняє умови  $y(0) = 0$ ;  $y'(0) = 1$ .

а)  $y = \frac{1}{2}(1 + e^{-2x})$ ; б)  $y = \frac{1}{2}(1 - e^{-2x})$ ; в)  $y = \frac{1}{2}(1 - e^{-2x})$ ; г)  $y = \frac{1}{3}(1 - e^{-2x})$ .

8. Знайти частковий розв'язок диференціального рівняння  $y'' - y = 4e^{2x}$ .

а)  $y_ч = \frac{4}{3}e^{2x}$ ; б)  $y_ч = \frac{2}{3}e^{2x}$ ; в)  $y_ч = \frac{1}{3}e^{2x}$ ; г)  $y_ч = \frac{5}{3}e^{2x}$ .

9. Задано еластичність  $E_x(f) = -1$ . Знайдіть функцію  $f(x)$ , для якої  $f(1) = 4$ .

а)  $f(x) = \frac{2}{x}$ ; б)  $f(x) = 2x$ ; в)  $f(x) = 2\sqrt{x}$ ; г)  $f(x) = \frac{4}{x}$ .

10. Початкова кількість радіоактивної речовини  $10\text{мг}$ . Знайдіть функцію  $N(t)$  кількості радіоактивних атомів речовини, що не розпалися, в момент часу  $t$ , якщо швидкість розпаду атомів радіоактивної речовини прямо пропорційна часу (коефіцієнт пропорційності  $\lambda > 0$  – стала розпаду).

а)  $N(t) = 10 - \frac{kt^2}{2}$ ; б)  $N(t) = 10 + \frac{kt^2}{2}$ ; в)  $N(t) = 10 - kt^2$ ; г)  $N(t) = 5 - \frac{kt^2}{2}$ .

## Варіант 10

1. Яким чином записується загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння II порядку з постійними коефіцієнтами  $y'' + py' + qy = 0$ , якщо корені характеристичного рівняння  $k^2 + pk + q = 0$  комплексно спряжені. ( $k_1 = \alpha + i\beta, k_2 = \alpha - i\beta$ )?

а)  $y_{3,0} = c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x$ ;

б)  $y_{3,0} = e^x (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ ;

в)  $y_{3,0} = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ ;

г)  $y_{3,0} = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \cdot x$ .

2. Вкажіть тип диференціального рівняння  $(2x+1)y' + y = x^2$ .

а) з відокремлюваними змінними; б) лінійне; в) однорідне; г) Бернуллі.

3. Яку підстановку треба застосувати для розв'язування рівняння  $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$ ?

а)  $y = xu$ ;

б)  $y = uv$ ;

в)  $y = \frac{u}{x}$ ;

г)  $y = \frac{u}{v}$ .

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $xdy = y^2 dx$ .

а)  $y = \frac{-1}{xc}$ ;

б)  $y = \frac{1}{xc}$ ;

в)  $y = -xc$ ;

г)  $y = xc$ .

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $x^2 y' = xy + 4y^2$ .

а)  $y = \frac{x}{\ln cx^3}$ ;

б)  $y = -\frac{x}{\ln cx^4}$ ;

в)  $y = \frac{x}{\ln cx^2}$ ;

г)  $y = -\frac{x}{\ln cx^3}$ .

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$ .

а)  $y = x^3 + cx^2$ ;

б)  $y = x^4 + cx$ ;

в)  $y' = x^4 + cx^2$ ;

г)  $y' = 2x^4 + cx$ .

7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння  $y'' + y = 0$ , який задовольняє умови  $y(0) = 0; y'(0) = 1$ .

а)  $y = \sin x - \cos x$ ; б)  $y = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$ ; в)  $y = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$ ; г)  $y = \sin x + \cos x$ .

8. Знайти частковий розв'язок диференціального рівняння  $y'' + 4y' = 5e^{2x}$ .

а)  $y = \frac{1}{2}e^{2x}$ ;

б)  $y = \frac{1}{6}e^{2x}$ ;

в)  $y = \frac{5}{12}e^{2x}$ ;

г)  $y = \frac{7}{12}e^{2x}$ .

9. Задано еластичність  $E_x(f) = 0,5$ . Знайдіть функцію  $f(x)$ , для якої  $f(1) = 4$ .

а)  $f(x) = 2\sqrt{x}$ ;

б)  $f(x) = 3\sqrt{x}$ ;

в)  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$ ;

г)  $f(x) = 4\sqrt{x}$ .

10. Човен масою  $m$  рухається рівномірно прямолінійно зі швидкістю  $v_0$ . Після вимкнення двигуна він продовжує рухатися зі швидкістю, яка задана функцією  $v(t)$ . Знайдіть функцію швидкості руху  $v(t)$ , якщо вважати, що сила опору води пропорційна швидкості руху човна (коефіцієнт пропорційності  $k > 0$ ).

а)  $v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$ ;

б)  $v(t) = v_0 + e^{-\frac{k}{m}t}$ ;

в)  $v(t) = e^{-\frac{k}{v_0 m}t}$ ;

г)  $v(t) = e^{-v_0 \frac{k}{m}t}$ .





## Варіант 2

1. Задано збіжний ряд. При відкиданні кількох його ненульових членів:

- а) ряд залишиться збіжним і його сума не зміниться;  
 б) ряд залишиться збіжним і його сума зміниться;  
 в) ряд стане розбіжним;  
 г) ряд залишиться збіжним і його сума обов'язково зменшиться.

2. Розкласти функцію  $f(x) = e^x$  по степенях  $x$ .

а)  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ ;   б)  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}$ ;   в)  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ;   г)  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ .

3. Знайти суму ряду  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots$

- а) 1;   б) 1,5;   в) 2,5;   г) 2.

4. Що можна сказати про збіжність ряду  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$ ? Виберіть одну правильну найбільш повну відповідь.

- а) збіжний;   б) умовно збіжний;   в) розбіжний;   г) абсолютно збіжний.

5. В числовому ряді  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$  підібрати функцію  $f(x)$ . Обчислити невласний інтеграл

$\int_1^{\infty} f(x) dx$ . При якому значенні невласного інтегралу ряд збіжний?

- а) 1;   б)  $\frac{1}{4}$ ;   в)  $\frac{1}{2}$ ;   г)  $\frac{1}{3}$ .

6. Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  розбіжний, якщо:

- а)  $p = 2$ ;   б)  $p > 1$ ;   в)  $p \leq 1$ ;   г)  $p \geq 1$ .

7. Коефіцієнти Фур'є для функції  $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  за основною тригонометричною системою функцій на проміжку  $[-l; l]$  знаходяться за формулами:

а)  $a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$ ,  $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$ ,  $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ ,  $n \in N$ ;

б)  $a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$ ,  $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \pi x dx$ ,  $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \pi x dx$ ,  $n \in N$ ;

в)  $a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx$ ,  $a_n = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$ ,  $b_n = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ ,  $n \in N$ .

8. Знайти коефіцієнти Фур'є  $a_n$  для функції  $f(x) = x^2$  на відрізку  $[-\pi; \pi]$ .

а)  $a_n = \frac{4}{n^2} (-1)^n$ ,  $n \in N$ ;   б)  $a_n = \frac{4}{n^2} (-1)^{n+1}$ ,  $n \in N$ ;   в)  $a_n = \frac{1}{n^2} (-1)^n$ ,  $n \in N$ ;   г)  $a_n = 0$ ,  $n \in N$ .

9. Знайти область збіжності степеневого ряду  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$

- а)  $x \in (-1; 1)$ ;   б)  $x \in (-1; 1]$ ;   в)  $x \in [-1; 1]$ ;   г)  $x \in [-1; 1)$ .

10. Розкласти функцію  $f(x) = \cos 2x$  по степенях  $x$ .

а)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n)!}$ ;   б)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$ ;   в)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} 2^n x^{2n}}{(2n)!}$ ;   г)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n x^{2n}}{(2n)!}$ .

### Варіант 3

1. Ряд виду  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  з коефіцієнтами  $a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$ ,

$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$ ,  $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ ,  $n \in N$  називається...

- а) рядом Тейлора; б) тригонометричним рядом Фур'є;  
в) рядом Маклорена; г) гармонічним рядом.

2. Записати розклад функції  $f(x) = \sin x$  по степенях  $x$ .

- а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n)!}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1} x^n}{(2n-1)!}$ ; в)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^{2n}}{(2n)!}$ ; г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ .

3. Задано ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^n}$ . Визначити  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ . Для якого  $l$  ряд збіжний?

- а)  $l = 3/5$ ; б)  $l = 0,4$ ; в)  $l = 0,5$ ; г)  $l = 2/3$ .

4. Що можна сказати про збіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n}$ ? Виберіть одну правильну найбільш повну відповідь.

- а) абсолютно збіжний; б) збіжний; в) розбіжний; г) умовно збіжний.

5. Знайти радіус збіжності ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$ .

- а)  $-5$ ; б)  $5$ ; в)  $-1/5$ ; г)  $1/5$ .

6. Дано розклад функції в степеневий ряд:  $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ . Вкажіть функцію  $f(x)$ .

- а)  $\frac{1}{1-x}$ ; б)  $\sin x$ ; в)  $\cos x$ ; г)  $\ln(1+x)$ .

7. Ряд Фур'є парної функції  $f(x)$  на відрізку  $[-l; l]$  має вигляд  $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$ .

Вкажіть коефіцієнти даного ряду.

а)  $a_0 = \frac{2}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$ ,  $a_n = \frac{2}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$ ,  $n \in N$ ;

б)  $a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx$ ,  $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$ ,  $n \in N$ ;

в)  $a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx$ ,  $a_n = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$ ,  $n \in N$ .

8. Знайти коефіцієнти Фур'є  $a_n$  для функції  $f(x) = |x|$  на відрізку  $[-\pi; \pi]$ .

- а)  $a_n = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi}$ ,  $n \in N$ ; б)  $a_n = \frac{2(-1)^n}{n^2 \pi}$ ,  $n \in N$ ; в)  $a_n = \frac{2((-1)^n - 1)}{n}$ ,  $n \in N$ ; г)  $a_n = 0$ ,  $n \in N$ .

9. Знайти область збіжності степеневого ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}$

- а)  $x \in (-1; 1)$ ; б)  $x \in [-1; 1)$ ; в)  $x \in [-1; 1]$ ; г)  $x \in (-1; 1]$ .

10. Розкласти функцію  $f(x) = x^3 - 3x$  по степенях  $(x-2)$ .

а)  $f(x) = 1 + \frac{2}{1!}(x-2) + \frac{5}{2!}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-3)^3$ ; б)  $f(x) = 2 + 9(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-3)^3$ ;

в)  $f(x) = 2 + 6(x-2) + 12(x-2)^2 + 4(x-3)^3$ ; г)  $f(x) = 1 + 3(x-2) + 4(x-2)^2 + 6(x-3)^3$ .

### Варіант 4

1. Запишіть найпростішу формулу  $n$ -го члена ряду  $\frac{5}{2} + \frac{8}{4} + \frac{11}{8} + \frac{14}{16} + \dots$

а)  $u_n = \frac{2+3n}{2^{n+1}}$ ;    б)  $u_n = \frac{1+2n}{2^n}$ ;    в)  $u_n = \frac{2+3n}{2^n}$ ;    г)  $u_n = \frac{2-n}{2^n}$ .

2. Записати розклад функції  $f(x) = \cos x$  по степенях  $x$ .

а)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$ ;    б)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ ;    в)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ ;    г)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ .

3. В числовому ряді  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$  встановити функцію  $f(x)$ . Обчислити невластний інтеграл

$\int_1^{\infty} f(x) dx$ . При якому значенні невластного інтегралу ряд збіжний?

а) 1;    б)  $\frac{1}{3}$ ;    в)  $\frac{1}{2}$ ;    г) 1,5.

4. Що можна сказати про збіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{2^n}$ ? Виберіть одну правильну найбільш повну відповідь.

а) розбіжний;    б) збіжний;    в) абсолютно збіжний;    г) умовно збіжний.

5. Знайти суму ряду  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$

а) 0,5;    б) 1;    в) 2;    г) 1,5.

6. Дано розклад функції в степеневий ряд:  $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$ . Вкажіть функцію  $f(x)$ .

а)  $\operatorname{arctg} x$ ;    б)  $\sin x$ ;    в)  $\cos x$ ;    г)  $\ln(1+x)$ .

7. Знайти коефіцієнт Фур'є  $a_0$  для функції  $f(x) = x^2$  на відрізку  $[-\pi; \pi]$ .

а)  $a_0 = \frac{2}{3}\pi$ ;    б)  $a_0 = \frac{2}{3}\pi^2$ ;    в)  $a_0 = \frac{2}{3}\pi^3$ ;    г)  $a_0 = 0$ .

8. Знайти коефіцієнт Фур'є  $a_0$  для функції  $f(x) = x^2$  на відрізку  $[0; 2\pi]$ .

а)  $a_0 = \frac{8}{3}\pi$ ;    б)  $a_0 = \frac{8}{3}\pi^2$ ;    в)  $a_0 = \frac{8}{3}\pi^3$ ;    г)  $a_0 = 0$ .

9. За допомогою степеневого ряду наближено обрахувати  $\sqrt[3]{130}$ , обмежившись двома членами ряду.

а) 5,2;    б)  $5\frac{1}{3}$ ;    в)  $5\frac{1}{5}$ ;    г)  $5\frac{1}{15}$ .

10. Знайдіть довжину інтервалу збіжності ряду  $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$

а) 2;    б) 1;    в) 3;    г) 4.

## Варіант 5

1. Знайти загальний член ряду  $\frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \dots$

а)  $u_n = \frac{n+1}{3n+2}$ ;    б)  $u_n = \frac{n+1}{n+4}$ ;    в)  $u_n = \frac{2n}{2n+3}$ ;    г)  $u_n = \frac{n^2}{2n+3}$ .

2. Розкласти функцію  $f(x) = (1+x)^m$  по степенях  $x$ .

а)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ;    б)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n$ ;    в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m-n+1)}{n!}$ ;    г)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{n!} x^n$ .

3. Знайти суму ряду  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots$

а)  $\frac{5}{4}$ ;    б)  $\frac{1}{3}$ ;    в) 1;    г)  $\frac{4}{3}$ .

4. Що можна сказати про збіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}$ ? Виберіть одну правильну найбільш повну відповідь.

а) збіжний;    б) абсолютно збіжний;    в) розбіжний;    г) умовно збіжний.

5. Запишіть найпростішу формулу  $n$ -го члена ряду  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$

а)  $u_n = \frac{2}{2n-1}$ ;    б)  $u_n = \frac{1}{2n+1}$ ;    в)  $u_n = \frac{1}{2n-1}$ ;    г)  $u_n = 1 + \frac{1}{2n}$ .

6. Дано розклад функції в степеневий ряд:  $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$ . Вкажіть функцію  $f(x)$ .

а)  $\arctg x$ ;    б)  $\sin x$ ;    в)  $\cos x$ ;    г)  $\ln(1+x)$ .

7. Ряд Фур'є непарної функції  $f(x)$  на відрізку  $[-l; l]$  має вигляд  $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ .

Вкажіть коефіцієнти даного ряду.

а)  $b_n = \frac{2}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, n \in N$ ;    б)  $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, n \in N$ ;

в)  $b_n = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, n \in N$ .

8. Знайти коефіцієнт Фур'є  $a_0$  для функції  $f(x) = x$  на відрізку  $[0; 2\pi]$ .

а)  $a_0 = 2\pi$ ;    б)  $a_0 = \pi$ ;    в)  $a_0 = -2\pi$ ;    г)  $a_0 = 0$ .

9. Знайти область збіжності степеневого ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$ .

а)  $x \in (-1; 1)$ ;    б)  $x \in (0; \infty)$ ;    в)  $x \in (-\infty; \infty)$ ;    г)  $x \in (-\infty; 0]$ .

10. Обчислити  $\sqrt[5]{1,1}$  з точністю до 0,001

а) 1,201;    б) 1,019;    в) 1,031;    г) 1,121.

### Варіант 6

1. Знайти загальний член ряду  $\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \dots$ .

а)  $u_n = \frac{2n+1}{n^2}$ ;    б)  $u_n = \frac{n+2}{n^2}$ ;    в)  $u_n = \frac{n+1}{n^2}$ ;    г)  $u_n = \frac{n+3}{n^2}$ .

2. Розкласти функцію  $f(x) = \ln(1+x)$  по степенях  $x$ .

а)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ ;    б)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ ;    в)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$ ;    г)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$ .

3. В числовому ряді  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \sqrt{n}}$  знайти  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ . Вказати при якому значенні  $l$  ряд збіжний.

а)  $\frac{1}{3}$ ;    б)  $\frac{1}{2}$ ;    в) 0;    г) 1,5.

4. Що можна сказати про збіжність ряду  $\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n} + \dots$ ? Виберіть одну правильну найбільш повну відповідь.

а) абсолютно збіжний; б) збіжний;    в) розбіжний;    г) умовно збіжний.

5. Чому дорівнює частинна сума  $S_n$  ряду  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ ?

а)  $S_n = \frac{0,5^n - 1}{0,5}$ ;    б)  $S_n = \frac{0,5^n}{0,5}$ ;    в)  $S_n = \frac{1 - 0,5^{n-1}}{0,5}$ ;    г)  $S_n = \frac{1 - 0,5^n}{0,5}$ .

6. Дано розклад функції в ряд Маклорена:  $f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ . Вкажіть функцію  $f(x)$ .

а)  $e^x$ ;    б)  $\sin x$ ;    в)  $\cos x$ ;    г)  $\ln x$ .

7. Коефіцієнти Фур'є для функції  $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$  на проміжку  $[a; b]$

( $2l = b - a$ ) мають вигляд:

а)  $a_0 = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) dx$ ,  $a_n = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$ ,  $b_n = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;

б)  $a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$ ,  $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$ ,  $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;

в)  $a_0 = \frac{1}{2l} \int_a^b f(x) dx$ ,  $a_n = \frac{1}{2l} \int_a^b f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$ ,  $b_n = \frac{1}{2l} \int_a^b f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

8. Знайти коефіцієнт Фур'є  $a_0$  для функції  $f(x) = x + 1$  на відрізку  $[-\pi; \pi]$ .

а)  $a_0 = \pi$ ;    б)  $a_0 = 4$ ;    в)  $a_0 = 2$ ;    г)  $a_0 = 0$ .

9. Знайти область збіжності степеневого ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$ .

а)  $x \in [-1; 1]$ ;    б)  $x \in (-1; 1]$ ;    в)  $x \in (-1; 1)$ ;    г)  $x \in [-1; 1)$ .

10. Обчислити  $\cos 5^\circ$ , обмежившись двома членами розкладу.

а) 1,011;    б) 0,955;    в) 0,961;    г) 0,996.

## Варіант 7

1. Знайти загальний член ряду  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$

а)  $u_n = \frac{1}{2n}$ ;      б)  $u_n = \frac{1}{n^2}$ ;      в)  $u_n = \frac{1}{n+1}$ ;      г)  $u_n = \frac{1}{n+2}$ .

2. Розкласти функцію  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  по степенях  $x$ .

а)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n}$ ;      б)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ ;      в)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ;      г)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ .

3. В числовому ряді  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$  підібрати функцію  $f(x)$ . Обчислити невластний інтеграл

$\int_1^{\infty} f(x) dx$ . При якому значенні невластного інтегралу ряд збіжний?

а)  $1/4$ ;      б)  $1/3$ ;      в)  $1/2$ ;      г)  $1$ .

4. Що можна сказати про збіжність ряду  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$ ? Виберіть одну правильну найбільш повну відповідь.

а) умовно збіжний; б) збіжний;      в) розбіжний;      г) абсолютно збіжний.

5. В якому випадку ряд  $1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \dots$  є збіжний?

а)  $1 > \frac{1}{\sqrt[3]{2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{3}} > \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$ ; в)  $1 > \frac{1}{\sqrt[3]{2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{3}} > \dots$ ; г) члени ряду

утворюють монотонно спадну коливну числову послідовність.

6. Дано розклад функції в ряд Маклорена:  $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots$ . Вкажіть функцію  $f(x)$ .

а)  $e^x$ ;      б)  $\sin x$ ;      в)  $\cos x$ ;      г)  $\ln x$ .

7. Ряд Фур'є непарної функції  $f(x)$  на відрізку  $[-\pi; \pi]$  має вигляд  $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ .

Вкажіть коефіцієнти даного ряду.

а)  $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx, n \in N$ ;      б)  $b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx, n \in N$ ;

в)  $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx, n \in N$ .

8. Знайти коефіцієнти Фур'є  $a_n$  для функції  $f(x) = x+1$  на відрізку  $[-\pi; \pi]$ .

а)  $a_n = -\frac{2}{n}, n \in N$ ;      б)  $a_n = -\frac{2(-1)^n}{n}, n \in N$ ;      в)  $a_n = \frac{2(-1)^n}{n}, n \in N$ ;      г)  $a_n = 0, n \in N$ .

9. Знайти суму ряду  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$

а)  $1$ ;      б)  $2/3$ ;      в)  $1,5$ ;      г)  $0,5$ .

10. Розкласти функцію  $f(x) = e^{-2x}$  по степенях  $x$ .

а)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{n!}$ ;      б)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$ ;      в)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{n}$ ;      г)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{(2n)!}$ .

### Варіант 8

1. Знайти загальний член ряду  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$ .

а)  $u_n = \frac{1}{2n}$ ;      б)  $u_n = \frac{1}{2n+1}$ ;      в)  $u_n = \frac{1}{n+1}$ ;      г)  $u_n = \frac{1}{n+2}$ .

2. Розкласти функцію  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  по степенях  $x$ .

а)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ;      б)  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ;      в)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ ;      г)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ .

3. В якому випадку ряд  $1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} - \dots$  є збіжний?

а) члени ряду утворюють монотонно спадну коливну числову послідовність;

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}} = 0$ ;      в)  $1 > \frac{1}{\sqrt[4]{2}} > \frac{1}{\sqrt[4]{3}} > \dots$ ;      г)  $1 > \frac{1}{\sqrt[4]{2}} > \frac{1}{\sqrt[4]{3}} > \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}} = 0$ .

4. Запишіть найпростішу формулу  $n$ -го члена ряду  $\frac{\cos \alpha}{1} + \frac{\cos 2\alpha}{2} + \frac{\cos 3\alpha}{3} + \dots$ .

а)  $u_n = 1 + \frac{\cos(n\alpha)}{n}$ ;      б)  $u_n = \frac{\sin(n\alpha)}{n}$ ;      в)  $u_n = \frac{\cos \alpha}{n}$ ;      г)  $u_n = \frac{\cos(n\alpha)}{n}$ .

5. Ряд  $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots$  є ...

а) абсолютно розбіжний;

б) абсолютно збіжний;

в) не абсолютно розбіжний;

г) абсолютно розбіжний, але не абсолютно збіжний.

6. Дано розклад функції в ряд Маклорена:  $f(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$ . Вкажіть функцію  $f(x)$ .

а)  $e^x$ ;

б)  $\sin x$ ;

в)  $\cos x$ ;

г)  $\ln x$ .

7. Ряд Фур'є парної функції  $f(x)$  на відрізку  $[-\pi; \pi]$  має вигляд  $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ .

Вкажіть коефіцієнти даного ряду.

а)  $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx, n \in N$ ;

б)  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx, n \in N$ ;

в)  $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, n \in N$ .

8. Знайти коефіцієнти Фур'є  $b_n$  для функції  $f(x) = x+1$  на відрізку  $[-\pi; \pi]$ .

а)  $b_n = -\frac{2}{n}, n \in N$ ;      б)  $b_n = -\frac{2(-1)^n}{n}, n \in N$ ;      в)  $b_n = \frac{2(-1)^n}{n}, n \in N$ ;      г)  $b_n = 0, n \in N$ .

9. Знайти область збіжності степеневого ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ .

а)  $x \in [-2; 2]$ ;

б)  $x \in (-2; 2)$ ;

в)  $x \in [-2; 2)$ ;

г)  $x \in (-2; 2]$ .

10. Обчислити  $\ln 1,25$ , обмежившись трьома членами ряду.

а) 0, 211;

б) 0,219;

в) 0,233;

г) 0.321.

## Варіант 9

1. Знайти загальний член ряду  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$ .

а)  $u_n = \frac{1}{2n-1}$ ;    б)  $u_n = \frac{1}{2n+1}$ ;    в)  $u_n = \frac{1}{n+1}$ ;    г)  $u_n = \frac{1}{n+2}$ .

2. Нехай всі члени ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  додатні і  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ . При якому  $l$  ряд збіжний?

а)  $l > 1$ ;    б)  $l = 1$ ;    в)  $l \leq 1$ ;    г)  $l < 1$ .

3. Чому дорівнює частинна сума  $S_n$  ряду  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ ?

а)  $S_n = \frac{0,5^n}{0,5}$ ;    б)  $S_n = \frac{1-0,5^n}{0,5}$ ;    в)  $S_n = \frac{1-0,5^{n-1}}{0,5}$ ;    г)  $S_n = \frac{0,5^n - 1}{0,5}$ .

4. Задано ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^n}$ . Визначити  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ . Для якого  $l$  ряд збіжний?

а)  $l = \frac{2}{3}$ ;    б)  $l = 0,4$ ;    в)  $l = \frac{3}{5}$ ;    г)  $l = \frac{1}{2}$ .

5. Радіус збіжності степеневого ряду  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$  можна знайти за формулою...

а)  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ ;    б)  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ ;    в)  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ ;    г)  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ .

6. Що можна сказати про збіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n!}$ ? Виберіть одну правильну найбільш повну відповідь.

а) збіжний;    б) абсолютно збіжний;    в) розбіжний;    г) умовно збіжний.

7. Знайти коефіцієнти Фур'є  $b_n$  для функції  $f(x) = |x|$  на відрізку  $[-\pi; \pi]$ .

а)  $b_n = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi}$ ,  $n \in N$ ;    б)  $b_n = \frac{2(-1)^n}{n^2 \pi}$ ,  $n \in N$ ;    в)  $b_n = \frac{2((-1)^n - 1)}{n}$ ,  $n \in N$ ;    г)  $b_n = 0$ ,  $n \in N$ .

8. Знайти коефіцієнти Фур'є  $a_n$  для функції  $f(x) = x$  на відрізку  $[0; 2\pi]$ .

а)  $a_n = 0$ ,  $n \in N$ ;    б)  $a_n = \frac{2}{n}$ ,  $n \in N$ ;    в)  $a_n = -\frac{2}{n}$ ,  $n \in N$ ;    г)  $a_n = -\frac{4}{n}$ ,  $n \in N$ .

9. Знайти область збіжності степеневого ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{n}}$ .

а)  $x \in (-2; 2)$ ;    б)  $x \in (-2; 2]$ ;    в)  $x \in [-2; 2]$ ;    г)  $x \in [-2; 2)$ .

10. Розкласти функцію  $f(x) = x^3 + 2x$  по степенях  $(x-1)$ .

а)  $f(x) = 2 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + 2(x-1)^3$ ;    б)  $f(x) = 3 + 4(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$ ;  
в)  $f(x) = 3 + 5(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$ ;    г)  $f(x) = 1 + 4(x-1) + 2(x-1)^2 + (x-1)^3$ .



## Варіант 10

1. Радіус збіжності степеневого ряду  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$  можна знайти за формулою...

а)  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ ;   б)  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{a_n}}$ ;   в)  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n}$ ;   г)  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ .

2. Чому дорівнює  $S_n$  – частина суми ряду нескінченної геометричної прогресії  $a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$ , де  $q$  – знаменник прогресії?

а)  $S_n = \frac{aq^n}{1-q}$ ;   б)  $S_n = \frac{q^n - 1}{q-1}$ ;   в)  $S_n = \frac{1-q^n}{q-1}$ ;   г)  $S_n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$ .

3. Запишіть найпростішу формулу  $n$ -го члена ряду  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$ .

а)  $u_n = 1 + \frac{1}{2n}$ ;   б)  $u_n = \frac{1}{2n+1}$ ;   в)  $u_n = \frac{2}{2n-1}$ ;   г)  $u_n = \frac{1}{2n-1}$ .

4. В числовому ряді  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$  встановити функцію  $f(x)$ . Обчислити невластний інтеграл

$\int_1^{\infty} f(x) dx$ . При якому значенні невластного інтегралу ряд збіжний?

а)  $\frac{1}{2}$ ;   б)  $\frac{1}{3}$ ;   в) 1;   г) 1,5.

5. Що можна сказати про збіжність ряду  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$ ? Виберіть одну правильну найбільш повну відповідь.

а) абсолютно збіжний;   б) збіжний;   в) розбіжний;   г) умовно збіжний.

6. Знайти радіус збіжності ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} (-9)^n x^n$ .

а)  $-9$ ;   б)  $9$ ;   в)  $-1/9$ ;   г)  $1/9$ .

7. Знайти коефіцієнт Фур'є  $a_0$  для функції  $f(x) = |x|$  на відрізку  $[-\pi; \pi]$ .

а)  $a_0 = \pi$ ;   б)  $a_0 = 2\pi$ ;   в)  $a_0 = -\pi$ ;   г)  $a_0 = 0$ .

8. Знайти коефіцієнти Фур'є  $b_n$  для функції  $f(x) = x$  на відрізку  $[0; 2\pi]$ .

а)  $b_n = -\frac{2}{n}, n \in N$ ;   б)  $b_n = \frac{2}{n}, n \in N$ ;   в)  $b_n = -\frac{4}{n}, n \in N$ ;   г)  $b_n = 0, n \in N$ .

9. Знайти область збіжності степеневого ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n \sqrt{n}}$ .

а)  $x \in [-2; 2]$ ;   б)  $x \in (-2; 2)$ ;   в)  $x \in (-2; 2)$ ;   г)  $x \in (-2; 2]$ .

10. Розкласти функцію  $f(x) = \sqrt{1+x}$  по степенях  $x$ .

а)  $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$ ;

б)  $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + \dots$ ;

в)  $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \dots$ ;

г)  $f(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots$ .

## Зміст

Вступ.....	3
1. Лінійна та векторна алгебра.....	4
2. Аналітична геометрія.....	14
3. Математичний аналіз.....	24
4. Функції багатьох змінних.....	34
5. Інтегральне числення.....	44
6. Диференціальні рівняння .....	54
7. Числові та функціональні ряди.....	64