УДК 519.688:517.443

РЕКУРЕНТНІ МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ БАГАТОВИМІРНИХ ДИСКРЕТНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУР'Є ТА ХАРТЛІ

В. І. Волинець, к.т.н., доц.

Сучасні технічні засоби спектрального аналізу повинні забезпечувати проведення спектрального аналізу в режимах, коли аналіз проводиться з кроком рівним розміру вибірки цифрового сигналу та з кроком рівним одному або декільком відлікам цифрового сигналу. В першому випадку спектральний аналіз базується на методах обчислення спектра, що отримали назву швидких перетворень. В другому випадку спектральний аналіз базується на рекурентних методах обчислення спектра. На відміну від методів швидких перетворень рекурентні методи для обчислення спектра чергового фрагмента сигналу використовують спектр попереднього фрагмента сигналу, внаслідок чого їх швидкодія значно вища, ніж методів швидких перетворень [1].

Обчислення спектра базується на дискретному перетворенні Фур'є (ДПФ) [2] або дискретному перетворенні Хартлі (ДПХ) [3], котрі мають тісний зв'язок між собою. Існує ряд робіт, в яких описані рекурентні вирази обчислення багатовимірного ДПФ для окремих випадків. Зокрема, в роботі [4] описані рекурентні вирази обчислення двовимірного ДПФ при зсуві фрагментів сигналу на декілька (стрибкові інтервали) та один (ковзні інтервали) відлік по одному та двом вимірам, а в роботі [5] наведені рекурентні вирази обчислення багатовимірного модифікованого ДПФ на ковзному інтервалі по одному виміру.

Метою даної роботи є отримання рекурентних виразів обчислення багатовимірних ДПФ та ДПХ на стрибкових і ковзних інтервалах та проведення порівняльного аналізу арифметичної складності рекурентних методів обчислення багатовимірних ДПФ та ДПХ.

Визначимо багатовимірні ДПФ та ДПХ як

$$X(k_1, k_2, \ldots, k_r) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \ldots \sum_{n_r=0}^{N_r-1} x(n_1, n_2, \ldots, n_r)\,\alpha(n_1 k_1, n_2 k_2, \ldots, n_r k_r), \qquad (1)$$

де $X(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ та $x(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ – відповідно r- вимірні перетворення та вхідний сигнал розмірами $\prod_{i=1}^{r} N_i$; $\alpha(n_1 k_1, n_2 k_2, \ldots, n_r k_r)$ – ядро перетворення, котре для ДПФ є $W^{\sum_{i=1}^{r} \frac{n_i k_i}{N_i}}$, де $W = \exp(-j2\pi)$ ($j = \sqrt{-1}$), а для ДПХ – $\mathrm{cas}\left(2\pi \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i k_i}{N_i}\right)$, де $\mathrm{cas}(k) = \cos(k) + \sin(k)$; $k_i = \overline{1, N_i - 1}$ для $i = \overline{1, r}$.

Нехай деякий фрагмент вхідного сигналу $x_0(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ має перетворення $X_0(k_1, k_2, \ldots, k_r)$, і необхідно визначити перетворення $X_1(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ для фрагмента сигналу $x_1(n_1, n_2, \ldots, n_r)$, який зміщений відносно фрагмента $x_0(n_1, n_2, \ldots, n_r)$.

Якщо фрагмент $x_1(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ зміщений відносно фрагмента $x_0(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ лише по одному виміру, наприклад, на p_r відліків по n_r-му виміру, то після циклічного зсуву фрагмента

$x_1(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ на p_r відліків по n_r-му виміру отримаємо фрагмент $x_1^{c}(n_1, n_2, \ldots, n_r)$. Поділивши фрагменти $x_0(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ та $x_1^{c}(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ на межі відліку p_r по n_r-му виміру, їх можна представити у вигляді двох блочних r - вимірних векторів

$$x_0(n_1, n_2, \ldots, n_r) = |A \,\vdots\, B| \text{ та } x_1^{c}(n_1, n_2, \ldots, n_r) = |A' \,\vdots\, B|,$$

де A, A' та B – блочні r - вимірні вектори розміром $p_r \prod_{i=1}^{r-1} N_i$ та $(N_r - p_r)\prod_{i=1}^{r-1} N_i$ відповідно. Тоді фрагмент $x_1^{c}(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ може бути визначений як

$$x_1^{c}(n_1, n_2, \ldots, n_r) = x_0(n_1, n_2, \ldots, n_r) + |A' - A \,\vdots\, O|,$$

де O – нульовий r - вимірний вектор розміром $(N_r - p_r)\prod_{i=1}^{r-1} N_i$. Враховуючи властивість лінійності перетворення (1) та індексацію значень векторів A та A', згідно з якою n_r-му індексу значення вектора A відповідає $(N_r + n_r)$-й індекс вектора A', багатовимірне перетворення фрагмента $x_1^{c}(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ може бути обчислене таким чином:

$$\begin{gathered} X_1^{c}(k_1, k_2, \ldots, k_r) = X_0(k_1, k_2, \ldots, k_r) + \\ + \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \ldots \sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} \sum_{n_r=0}^{p_r-1} \left[x(n_1, n_2, \ldots, N_r + n_r) - x(n_1, n_2, \ldots, n_r)\right] \alpha(n_1 k_1, n_2 k_2, \ldots, n_r k_r). \end{gathered} \tag{2}$$

Для $p_r = 1$ вираз (2) приймає такий вигляд:

$$\begin{gathered} X_1^{c}(k_1, k_2, \ldots, k_r) = X_0(k_1, k_2, \ldots, k_r) + \\ + \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \ldots \sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} \left[x(n_1, n_2, \ldots, N_r + n_r) - x(n_1, n_2, \ldots, n_r)\right] \alpha(n_1 k_1, n_2 k_2, \ldots, n_{r-1} k_{r-1}). \end{gathered} \tag{3}$$

Якщо фрагмент $x_1(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ зміщений відносно фрагмента $x_0(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ на p_i відліків по n_i-му виміру ($i = \overline{1, r}$), то після циклічного зсуву фрагмента $x_1(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ на p_i відліків по n_i-му виміру ($i = \overline{1, r}$) отримаємо фрагмент $x_1^{c}(n_1, n_2, \ldots, n_r)$. Поділивши фрагменти $x_0(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ та $x_1^{c}(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ на межах відліків p_i по n_i-м вимірам, їх можна представити у вигляді 2^r блочних r - вимірних векторів, розміри яких визначаються як $\prod_{i=1}^{r}\left[(N_i - p_i)s_i + p_i q_i\right]$, де s_i – $(r-i)$-й розряд двійкового представлення числа $s = \overline{0, 2^r - 1}$, що є умовним порядковим номером блочного вектора, а $q_i = 1 - s_i$. При цьому фрагменти $x_0(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ та $x_1^{c}(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ містять один однаковий блочний r - вимірний вектор, умовний порядковий номер якого $s = 2^r - 1$. В результаті фрагмент $x_1^{c}(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ може бути представлений у вигляді суми фрагмента $x_0(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ та r - вимірного вектора, що складається з блочних r - вимірних векторів, $2^r - 1$ з яких є різницями відповідних r - вимірних векторів з порядковими номерами $s = \overline{0, 2^r - 2}$ фрагментів $x_1^{c}(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ та $x_0(n_1, n_2, \ldots, n_r)$, а один є нульовим вектором. Враховуючи властивість лінійності перетворення (1) та індексацію значень фрагментів $x_1^{c}(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ та $x_0(n_1, n_2, \ldots, n_r)$, згідно з якою n_i-му індексу значення r- вимірного вектора фрагмента $x_0(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ відповідає $(N_i q_i + n_i)$-й індекс r - вимірного вектора фрагмента $x_1^{c}(n_1, n_2, \ldots, n_r)$, багатовимірне перетворення фрагмента $x_1^{c}(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ може бути обчислене таким чином:

$$\begin{aligned} X_1^{c}(k_1, k_2, \ldots, k_r) &= X_0(k_1, k_2, \ldots, k_r) + \\ &+ \sum_{s=0}^{2^r-2} \sum_{n_1=a_1}^{b_1-1} \sum_{n_2=a_2}^{b_2-1} \ldots \sum_{n_r=a_r}^{b_r-1} \left[x(N_1 q_1 + n_1, N_2 q_2 + n_2, \ldots, N_r q_r + n_r) - x(n_1, n_2, \ldots, n_r)\right] \alpha(n_1 k_1, n_2 k_2, \ldots, n_r k_r), \end{aligned} \tag{4}$$

де $a_i = p_i s_i$; $b_i = p_i q_i + N_i s_i$; $i = \overline{1, r}$.

Для $p_i = 1$ ($i = \overline{1, r}$) вираз (4) приймає такий вигляд:

$$\begin{aligned} X_1^{c}(k_1, k_2, \ldots, k_r) &= X_0(k_1, k_2, \ldots, k_r) + \left[x(N_1, N_2, \ldots, N_r) - x(0, 0, \ldots, 0)\right] + \\ &+ \sum_{s=1}^{2^r-2} \underbrace{\sum_{n_1=1}^{N_1-1} \sum_{n_2=1}^{N_2-1} \ldots \sum_{n_r=1}^{N_r-1}}_{\text{лише по } n_i, \text{ де } i \ni s_i = 1} \left[x(N_1 q_1 + n_1 s_1, N_2 q_2 + n_2 s_2, \ldots, N_r q_r + n_r s_r) - x(n_1 s_1, n_2 s_2, \ldots, n_r s_r)\right] \times \\ &\times \alpha(n_1 k_1 s_1, n_2 k_2 s_2, \ldots, n_r k_r s_r). \end{aligned} \tag{5}$$

Перетворення $X_1(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ може бути отримане з перетворення $X_1^{c}(k_1, k_2, \ldots, k_r)$, враховуючи властивості зсуву перетворення (1), в результаті чого багатовимірні ДПФ та ДПХ визначаються відповідно як

$$X_1(k_1, k_2, \ldots, k_r) = X_1^{c}(k_1, k_2, \ldots, k_r) \cdot W^{-\sum_{i=1}^{r} \frac{p_i k_i}{N_i}}, \tag{6}$$

$$X_1(k_1, k_2, \ldots, k_r) = X_1^{c}(k_1, k_2, \ldots, k_r) \cdot \cos\left(2\pi \sum_{i=1}^{r} \frac{p_i k_i}{N_i}\right) - X_1^{c}(-k_1, -k_2, \ldots, -k_r) \cdot \sin\left(2\pi \sum_{i=1}^{r} \frac{p_i k_i}{N_i}\right). \tag{7}$$

Вирази (6) та (7) із врахуванням виразів (2) – (5) є рекурентними виразами обчислення відповідно багатовимірного ДПФ та ДПХ.

Враховуючи вирази (6) – (7) та те, що енергетичний спектр сигналу на основі ДПФ визначається як $\left|X(k_1, k_2, \ldots, k_r)\right|^2$, а на основі ДПХ – як $\left\{[X(k_1, k_2, \ldots, k_r)]^2 + [X(-k_1, -k_2, \ldots, -k_r)]^2\right\}/2$, можна отримати рекурентні вирази обчислення енергетичного спектра, котрі з використанням ДПФ та ДПХ мають відповідно такий вигляд:

$$\left|X_1(k_1, k_2, \ldots, k_r)\right|^2 = \left|X_1^{c}(k_1, k_2, \ldots, k_r)\right|^2, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &\left\{[X_1(k_1, k_2, \ldots, k_r)]^2 + [X_1(-k_1, -k_2, \ldots, -k_r)]^2\right\}/2 = \\ &= \left\{\left[X_1^{c}(k_1, k_2, \ldots, k_r)\right]^2 + \left[X_1^{c}(-k_1, -k_2, \ldots, -k_r)\right]^2\right\}/2. \end{aligned} \tag{9}$$

Для обчислення енергетичного спектра використовують також модифіковані ДПФ та ДПХ. Визначимо модифіковані багатовимірні ДПФ та ДПХ як

$$X^{\text{м}}(k_1, k_2, \ldots, k_r) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \ldots \sum_{n_r=0}^{N_r-1} x(n_1, n_2, \ldots, n_r)\,\alpha\big((n_1+i_1)k_1, (n_2+i_2)k_2, \ldots, (n_r+i_r)k_r\big), \qquad (10)$$

де $i_i = \overline{0, N_i-1}$ для $i = \overline{1, r}$ – зміщення фрагмента вхідного сигналу $x(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ відносно початку координат відповідно по n_i-му виміру.

Приймемо вираз (10) в якості модифікованого перетворення $X_0^{\text{м}}(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ фрагмента $x_0(n_1, n_2, \ldots, n_r)$.

Якщо вхідний сигнал зміщується відносно початку координат лише по одному виміру, наприклад, по n_r-му виміру ($i_i = 0$ для $i = \overline{1, r-1}$), і фрагмент $x_1(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ зміщений відносно фрагмента $x_0(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ на p_r відліків по n_r-му виміру, то фрагмент $x_1(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ буде мати модифіковане перетворення

$$X_1^{\text{м}}(k_1, k_2, \ldots, k_r) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \ldots \sum_{n_r=0}^{N_r-1} x(n_1, n_2, \ldots, n_r+p_r)\,\alpha\big(n_1k_1, n_2k_2, \ldots, (n_r+i_r+p_r)k_r\big). \qquad (11)$$

Виконавши у виразі (11) підстановку $l_r = n_r + p_r$ та перетворивши отриманий вираз і вираз (10) таким чином, щоб обчислення по n_r-му виміру виконувати за два кроки, в результаті їх порівняння отримаємо, що

$$\begin{aligned} &X_1^{\text{м}}(k_1, k_2, \ldots, k_r) = X_0^{\text{м}}(k_1, k_2, \ldots, k_r) + \\ &+ \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \ldots \sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} \sum_{n_r=0}^{p_r-1} \big[x(n_1, n_2, \ldots, N_r+n_r) - x(n_1, n_2, \ldots, n_r)\big]\alpha\big(n_1k_1, n_2k_2, \ldots, (n_r+i_r)k_r\big). \end{aligned} \qquad (12)$$

Для $p_r = 1$ вираз (12) приймає такий вигляд:

$$\begin{aligned} &X_1^{\text{м}}(k_1, k_2, \ldots, k_r) = X_0^{\text{м}}(k_1, k_2, \ldots, k_r) + \\ &+ \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \ldots \sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} \big[x(n_1, n_2, \ldots, N_r) - x(n_1, n_2, \ldots, 0)\big]\alpha\big(n_1k_1, n_2k_2, \ldots, i_rk_r\big). \end{aligned} \qquad (13)$$

Враховуючи властивості ядер перетворень, вираз (13) для ДПФ та ДПХ приймає відповідно такий вигляд:

$$\begin{aligned} &X_1^{\text{м}}(k_1, k_2, \ldots, k_r) = X_0^{\text{м}}(k_1, k_2, \ldots, k_r) + \\ &+ \alpha(i_rk_r) \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \ldots \sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} \big[x(n_1, n_2, \ldots, N_r) - x(n_1, n_2, \ldots, 0)\big]\alpha\big(n_1k_1, n_2k_2, \ldots, n_{r-1}k_{r-1}\big), \end{aligned} \qquad (14)$$

$$\begin{aligned} &X_1^{\text{м}}(k_1, k_2, \ldots, k_r) = X_0^{\text{м}}(k_1, k_2, \ldots, k_r) + \\ &+ \cos(i_rk_r) \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \ldots \sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} \big[x(n_1, n_2, \ldots, N_r) - x(n_1, n_2, \ldots, 0)\big]\alpha\big(n_1k_1, n_2k_2, \ldots, n_{r-1}k_{r-1}\big) + \\ &+ \sin(i_rk_r) \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \ldots \sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1} \big[x(n_1, n_2, \ldots, N_r) - x(n_1, n_2, \ldots, 0)\big]\alpha\big(-n_1k_1, -n_2k_2, \ldots, -n_{r-1}k_{r-1}\big). \end{aligned} \qquad (15)$$

Якщо вхідний сигнал зміщується відносно початку координат по всім вимірам, і фрагмент $x_1(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ зміщений відносно фрагмента $x_0(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ на p_i відліків по n_i-му виміру ($i = \overline{1, r}$), то фрагмент $x_1(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ буде мати модифіковане перетворення

$$
\begin{gathered}
X_1^{\text{м}}(k_1, k_2, \ldots, k_r) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \ldots \sum_{n_r=0}^{N_r-1} x(n_1+p_1, n_2+p_2, \ldots, n_r+p_r) \times \\
\times \alpha((n_1+i_1+p_1)k_1, (n_2+i_2+p_2)k_2, \ldots, (n_r+i_r+p_r)k_r).
\end{gathered} \tag{16}
$$

Виконавши у виразі (16) підстановку $l_i = n_i + p_i$ та перетворивши отриманий вираз і вираз (10) таким чином, щоб обчислення по n_i-му виміру для $i = \overline{1, r}$ виконувати за два кроки, в результаті їх порівняння отримаємо, що

$$
\begin{gathered}
X_1^{\text{м}}(k_1, k_2, \ldots, k_r) = X_0^{\text{м}}(k_1, k_2, \ldots, k_r) + \\
+ \sum_{s=0}^{2^r-2} \sum_{n_1=a_1}^{b_1-1} \sum_{n_2=a_2}^{b_2-1} \ldots \sum_{n_r=a_r}^{b_r-1} [x(N_1 q_1 + n_1, N_2 q_2 + n_2, \ldots, N_r q_r + n_r) - x(n_1, n_2, \ldots, n_r)] \times \\
\times \alpha((n_1+i_1)k_1, (n_2+i_2)k_2, \ldots, (n_r+i_r)k_r).
\end{gathered} \tag{17}
$$

Для $p_i = 1$ ($i = \overline{1, r}$) вираз (17) приймає такий вигляд:

$$
\begin{gathered}
X_1^{\text{м}}(k_1, k_2, \ldots, k_r) = X_0^{\text{м}}(k_1, k_2, \ldots, k_r) + [x(N_1, N_2, \ldots, N_r) - x(0, 0, \ldots, 0)] \times \alpha(i_1 k_1, i_2 k_2, \ldots, i_r k_r) + \\
+ \sum_{s=1}^{2^r-2} \underbrace{\sum_{n_1=1}^{N_1-1} \sum_{n_2=1}^{N_2-1} \ldots \sum_{n_r=1}^{N_r-1}}_{\textit{лише по } n_i \textit{, де } i \ni s_i=1} [x(N_1 q_1 + n_1 s_1, N_2 q_2 + n_2 s_2, \ldots, N_r q_r + n_r s_r) - x(n_1 s_1, n_2 s_2, \ldots, n_r s_r)] \times \\
\times \alpha((n_1 s_1 + i_1)k_1, (n_2 s_2 + i_2)k_2, \ldots, (n_r s_r + i_r)k_r).
\end{gathered} \tag{18}
$$

Враховуючи властивості ядер перетворень, вираз (18) для ДПФ та ДПХ приймає відповідно такий вигляд:

$$
\begin{gathered}
X_1^{\text{м}}(k_1, k_2, \ldots, k_r) = X_0^{\text{м}}(k_1, k_2, \ldots, k_r) + [x(N_1, N_2, \ldots, N_r) - x(0, 0, \ldots, 0)] \alpha(i_1 k_1, i_2 k_2, \ldots, i_r k_r) + \\
+ \sum_{s=1}^{2^r-2} \alpha(i_1 k_1 q_1, i_2 k_2 q_2, \ldots, i_r k_r q_r) \underbrace{\sum_{n_1=1}^{N_1-1} \sum_{n_2=1}^{N_2-1} \ldots \sum_{n_r=1}^{N_r-1}}_{\textit{лише по } n_i \textit{, де } i \ni s_i=1} [x(N_1 q_1 + n_1 s_1, N_2 q_2 + n_2 s_2, \ldots, N_r q_r + n_r s_r) - \\
- x(n_1 s_1, n_2 s_2, \ldots, n_r s_r)] \alpha((n_1+i_1)k_1 s_1, (n_2+i_2)k_2 s_2, \ldots, (n_r+i_r)k_r s_r),
\end{gathered} \tag{19}
$$

$$
\begin{gathered}
X_1^{\text{м}}(k_1, k_2, \ldots, k_r) = X_0^{\text{м}}(k_1, k_2, \ldots, k_r) + [x(N_1, N_2, \ldots, N_r) - x(0, 0, \ldots, 0)] \alpha(i_1 k_1, i_2 k_2, \ldots, i_r k_r) + \\
+ \sum_{s=1}^{2^r-2} \{\cos(i_1 k_1 q_1, i_2 k_2 q_2, \ldots, i_r k_r q_r) \underbrace{\sum_{n_1=1}^{N_1-1} \sum_{n_2=1}^{N_2-1} \ldots \sum_{n_r=1}^{N_r-1}}_{\textit{лише по } n_i \textit{, де } i \ni s_i=1} [x(N_1 q_1 + n_1 s_1, N_2 q_2 + n_2 s_2, \ldots, N_r q_r + n_r s_r) - \\
- x(n_1 s_1, n_2 s_2, \ldots, n_r s_r)] \alpha((n_1+i_1)k_1 s_1, (n_2+i_2)k_2 s_2, \ldots, (n_r+i_r)k_r s_r) + \\
+ \sin(i_1 k_1 q_1, i_2 k_2 q_2, \ldots, i_r k_r q_r) \underbrace{\sum_{n_1=1}^{N_1-1} \sum_{n_2=1}^{N_2-1} \ldots \sum_{n_r=1}^{N_r-1}}_{\textit{лише по } n_i \textit{, де } i \ni s_i=1} [x(N_1 q_1 + n_1 s_1, N_2 q_2 + n_2 s_2, \ldots, N_r q_r + n_r s_r) - \\
- x(n_1 s_1, n_2 s_2, \ldots, n_r s_r)] \alpha(-(n_1+i_1)k_1 s_1, -(n_2+i_2)k_2 s_2, \ldots, -(n_r+i_r)k_r s_r)\}.
\end{gathered} \tag{20}
$$

Вирази (12) – (15) та (17) – (20) є рекурентними виразами обчислення модифікованого багатовимірного ДПФ та ДПХ при зсуві фрагмента вхідного сигналу по одному та всім вимірам відповідно, при цьому вираз (13) співпадає з виразом, наведеним у [5].

В таблиці наведені вирази визначення арифметичної складності рекурентних методів обчислення звичайних та модифікованих багатовимірних ДПФ та ДПХ на стрибкових інтервалах по всім та одному виміру (I, II) та ковзних інтервалах по всім та одному виміру (III, IV) для випадку, коли вхідний сигнал $x(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ є дійсним, з врахуванням того, що перетворення Фур'є має комплексно-спряжений характер, а операція комплексного множення вимагає виконання чотирьох операцій дійсного множення та двох операцій дійсного додавання.

Таблиця

Арифметична складність рекурентних методів обчислення багатовимірних ДПФ та ДПХ

Вид методу	Рекурентні методи обчислення звичайних ДПФ та ДПХ		Рекурентні методи обчислення модифікованих ДПФ та ДПХ	
	Кількість операцій		Кількість операцій	
	множення	додавання	множення	додавання
I	$(A+2)\prod_{i=1}^{r} N_i$	$A\left(\prod_{i=1}^{r} N_i+1\right)+\prod_{i=1}^{r} N_i$	$A\prod_{i=1}^{r} N_i$	$A\left(\prod_{i=1}^{r} N_i+1\right)$
II	$(B+2)\prod_{i=1}^{r} N_i$	$B\left(\prod_{i=1}^{r} N_i+1\right)+\prod_{i=1}^{r} N_i$	$B\prod_{i=1}^{r} N_i$	$B\left(\prod_{i=1}^{r} N_i+1\right)$
III	$\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{k=1}^{C_r^i} M_i^{Q_k^{r,i}} + 2\prod_{i=1}^{r} N_i$	$\left(2^r+\frac{1}{2}\right)\prod_{i=1}^{r} N_i - \prod_{i=1}^{r}(N_i-1)+\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{k=1}^{C_r^i} A_i^{Q_k^{r,i}} + \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{r} N_i$ (Хартлі)	$\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{k=1}^{C_r^i} M_i^{Q_k^{r,i}} + \left(2^{r+1}-3\right)\times \prod_{i=1}^{r} N_i$	$\left(2^{r+1}-2\right)\prod_{i=1}^{r} N_i - \prod_{i=1}^{r}(N_i-1)+\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{k=1}^{C_r^i} A_i^{Q_k^{r,i}}$
IV	$\left[\prod_{i=1}^{r-1} N_i\right]^2 + 2\prod_{i=1}^{r} N_i$	$\left[\prod_{i=1}^{r-1} N_i\right]^2 + 2\prod_{i=1}^{r} N_i$	$\left[\prod_{i=1}^{r-1} N_i\right]^2 + 2\prod_{i=1}^{r} N_i$	$\left[\prod_{i=1}^{r-1} N_i\right]^2 + 2\prod_{i=1}^{r} N_i$

Примітки:

1. $A=\prod_{i=1}^{r} N_i-\prod_{i=1}^{r}(N_i-p_i)$; $B=p_r\prod_{i=1}^{r-1} N_i$.

2. C_r^i – кількість сполучень із r елементів по i елементам.

3. $M_i^{Q_k^{r,i}}$ та $A_i^{Q_k^{r,i}}$ – відповідно кількість множень та додавань i - вимірного укороченого перетворення по вимірам з індексами, що є елементами сполучення $Q_k^{r,i}$ із r перших натуральних чисел по i елементам, котрі визначаються як

$$M_i^{Q_k^{r,i}} = \prod_{\substack{n \\ n\in Q_k^{r,i}}}\left(N_n^2-N_n\right);\quad A_i^{Q_k^{r,i}} = \prod_{\substack{n \\ n\in Q_k^{r,i}}}\left(N_n^2-2N_n\right).$$

На основі порівняльного аналізу виразів, наведених у таблиці, можна зробити такі основні висновки:

1. Арифметична складність p - кратного виконання рекурентних методів обчислення багатовимірних ДПФ та ДПХ на ковзних інтервалах менша за арифметичну складність відповідних

рекурентних методів на стрибкових інтервалах у $\approx N$ разів.

2. Арифметична складність r - кратного виконання рекурентних методів обчислення багатовимірних ДПФ та ДПХ на ковзних інтервалах по одному виміру одного порядку з арифметичною складністю рекурентних методів на ковзних інтервалах по всім вимірам.

3. Для обчислення багатовимірних ДПФ та ДПХ на стрибкових і ковзних інтервалах по всім і одному виміру доцільно використовувати рекурентні методи обчислення багатовимірних ДПФ та ДПХ на ковзних інтервалах по одному виміру.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Волынец В.И. Рекуррентные алгоритмы вычисления дискретных преобразований и энергетического спектра // Винницкий политехнический институт. – Винница, 1988. – 14 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 18.11.88, № 2898-Ук88.

2. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Пер. с англ. под ред. Ю.Н. Александрова. – М.: Мир, 1978. – 848 с.

3. Брейсуэлл Р. Преобразование Хартли / Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 175 с.

4. Ярославский Л.П. Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии: Введение в цифровую оптику. – М.: Радио и связь, 1987. – 296 с.

5. Цифровые анализаторы спектра / В.Н. Плотников, А.В. Белинский, В.А. Суханов, Ю.Н. Жигулевцев. – М.: Радио и связь, 1990. – 184 с.

Рекомендована кафедрою електроніки