УДК 517.44:004

В.І. ВОЛИНЕЦЬ
Вінницький торговельно-економічний інститут

АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ РЕКУРЕНТНИХ МЕТОДІВ ОБЧИСЛЕННЯ ДВОВИМІРНИХ ДИСКРЕТНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУР'Є ТА ХАРТЛІ В АРИФМЕТИЦІ З ФІКСОВАНОЮ КОМОЮ

На основі статистичного методу проведено аналіз точності рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих двовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі на стрибкових і ковзних інтервалах по двох і одному виміру в арифметиці з фіксованою комою. Отримано аналітичні вирази для визначення середньоквадратичних значень похибок обчислення перетворень в залежності від розрядності даних та кількості ітерацій обчислення, на підставі яких проведено порівняльний аналіз точності рекурентних методів обчислення.

В основі динамічного спектрального аналізу двовимірних сигналів, який проводиться на ковзних або стрибкових інтервалах вхідного сигналу, тобто коли черговий фрагмент вхідного сигналу відрізняється від попереднього фрагменту відповідно на одну або декілька груп відліків по одному або двох вимірах, лежить використання рекурентних методів обчислення двовимірних дискретних перетворень Фур'є (ДПФ) та Хартлі (ДПХ) [1-3], арифметична складність яких значно нижча за складність прямих та швидких методів обчислення дискретних перетворень, оскільки рекурентні методи враховують результати обчислення на попередніх інтервалах вхідного сигналу.

Важливим критерієм вибору методу обчислення є точність обчислення, яку він забезпечує. У праці [4] проведений аналіз точності рекурентних методів обчислення одновимірних звичайних і модифікованих ДПФ та ДПХ в арифметиці з фіксованою комою, в основу якого покладений статистичний метод аналізу, при якому кожному джерелу елементарної похибки ставиться у відповідність генератор випадкової похибки з рівномірним законом розподілу та робиться припущення, що всі джерела елементарних похибок не корелюють між собою та з вхідним сигналом. В якості кількісної оцінки точності обчислення приймаються середньоквадратичне значення (СКЗ) похибки обчислення перетворення та відношення СКЗ похибки обчислення до СКЗ перетворення, яке фізично інтерпретується як відношення потужності шуму до потужності сигналу.

У цій роботі ставиться завдання провести аналіз точності рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих двовимірних ДПФ та ДПХ на стрибкових і ковзних інтервалах по двох і одному виміру в арифметиці з фіксованою комою.

Рекурентні методи обчислення звичайних і модифікованих двовимірних ДПФ на стрибкових інтервалах по двох вимірах базуються на таких рекурентних виразах [3]:

$$F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)=\left[F_{i_1,i_2}(k_1,k_2)+\Delta F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)\right]\cdot W^{-\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)}, \quad (1)$$

$$F^{м}_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)=F^{м}_{i_1,i_2}(k_1,k_2)+\Delta F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)\cdot W^{\left(\frac{i_1k_1}{N_1}+\frac{i_2k_2}{N_2}\right)}, \quad (2)$$

де $F_{x,y}(k_1,k_2)$ та $F^{м}_{x,y}(k_1,k_2)$ – звичайне та модифіковане двовимірне ДПФ вхідного сигналу $x(n_1,n_2)$ розміром $N_1\times N_2$ на інтервалі (x,y), де (i_1,i_2) та (i_1+m_1,i_2+m_2) – попередній та черговий інтервали при зсуві вхідного сигналу по двох вимірах на (m_1,m_2) відліків;

$W=\exp(-j2\pi)$, де $j=\sqrt{-1}$;

$$\Delta F_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)=\sum_{n_1=0}^{m_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\left[x(N_1+n_1+i_1,N_2+n_2+i_2)-x(n_1,n_2)\right]\cdot W^{\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)}+$$
$$+\sum_{n_1=0}^{m_1-1}\sum_{n_2=m_2}^{N_2-1}\left[x(N_1+n_1+i_1,n_2+i_2)-x(n_1+i_1,n_2+i_2)\right]\cdot W^{\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)}+ \qquad (3)$$
$$+\sum_{n_1=m_1}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\left[x(n_1+i_1,N_2+n_2+i_2)-x(n_1+i_1,n_2+i_2)\right]\cdot W^{\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)}.$$

Рекурентні методи обчислення звичайних і модифікованих двовимірних ДПХ на стрибкових інтервалах по двох вимірах базуються на таких рекурентних виразах [3]:

$$H_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)=\left[H_{i_1,i_2}(k_1,k_2)+\Delta H_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)\right]\cdot\cos\left(2\pi\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)\right)-$$
$$-\left[H_{i_1,i_2}(-k_1,-k_2)+\Delta H_{i_1+m_1,i_2+m_2}(-k_1,-k_2)\right]\cdot\sin\left(2\pi\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)\right), \qquad (4)$$

$$H^{м}_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)=H^{м}_{i_1,i_2}(k_1,k_2)+\Delta H_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)\cdot\cos\left(2\pi\left(\frac{i_1k_1}{N_1}+\frac{i_2k_2}{N_2}\right)\right)+$$
$$+\Delta H_{i_1+m_1,i_2+m_2}(-k_1,-k_2)\cdot\sin\left(2\pi\left(\frac{i_1k_1}{N_1}+\frac{i_2k_2}{N_2}\right)\right), \qquad (5)$$

де $H_{x,y}(k_1,k_2)$ та $H^{м}_{x,y}(k_1,k_2)$ – звичайне та модифіковане двовимірне ДПФ вхідного сигналу $x(n_1,n_2)$ розміром $N_1\times N_2$ на інтервалі (x,y), де (i_1,i_2) та (i_1+m_1,i_2+m_2) – попередній та черговий інтервали при зсуві вхідного сигналу по двох вимірах на (m_1,m_2) відліків;

$$\Delta H_{i_1+m_1,i_2+m_2}(k_1,k_2)=\sum_{n_1=0}^{m_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\left[x(N_1+n_1+i_1,N_2+n_2+i_2)-x(n_1+i_1,n_2+i_2)\right]\cdot\operatorname{cas}\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)+$$
$$+\sum_{n_1=0}^{m_1-1}\sum_{n_2=m_2}^{N_2-1}\left[x(N_1+n_1+i_1,n_2+i_2)-x(n_1+i_1,n_2+i_2)\right]\cdot\operatorname{cas}\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right)+ \qquad (6)$$
$$+\sum_{n_1=m_1}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}\left[x(n_1+i_1,N_2+n_2+i_2)-x(n_1+i_1,n_2+i_2)\right]\cdot\operatorname{cas}\left(\frac{n_1k_1}{N_1}+\frac{n_2k_2}{N_2}\right),$$

де $\operatorname{cas}(X)=\cos(2\pi X)+\sin(2\pi X)$.

Рекурентні вирази для обчислення звичайних і модифікованих двовимірних ДПФ та ДПХ на стрибкових інтервалах по одному виміру отримують з виразів (1) – (6) при $m_1=0$ та $i_1=0$ у коефіцієнтах W, $\cos$ та $\sin$. Рекурентні вирази для обчислення звичайних і модифікованих двовимірних ДПФ та ДПХ на ковзних інтервалах отримують з виразів (1) – (6) при $m_1=m_2=1$.

Між виразами (1), (2) для обчислення ДПФ та виразами (4), (5) для обчислення ДПХ існує тісний зв'язок у випадку дійсної вхідної послідовності $x(n_1,n_2)$. З аналізу цих виразів видно, що вирази обчислення дійсних $\operatorname{Re}[F(k_1,k_2)]$ та уявних $\operatorname{Im}[F(k_1,k_2)]$ частин ДПФ на основі виразів (1), (2) мають вигляд, подібний до виразів (4), (5) обчислення значень $H(k_1,k_2)$ та $H(-k_1,-k_2)$ ДПХ відповідно. Отже, вирази похибок обчислення дійсних $\mathrm{Re}\left[F\left(k_1,k_2\right)\right]$ та уявних $\mathrm{Im}\left[F\left(k_1,k_2\right)\right]$ частин значень ДПФ і відповідно значень $H(k_1,k_2)$ та $H(-k_1,-k_2)$ ДПХ матимуть подібний вигляд, а їхні значення збігатимуться. Враховуючи це, обмежимось отриманням виразів для визначення похибок обчислення ДПФ.

Оскільки обчислювальними операціями виразів (1) – (6) є операції додавання та множення, то при реалізації рекурентних методів обчислення двовимірних ДПФ та ДПХ в арифметиці з фіксованою комою джерелами похибок обчислення можуть бути лише похибки операцій множення, обумовлені округленням або усіканням результатів добутків, оскільки похибки операцій зсувів, виконання яких необхідно для усунення можливих переповнень розрядної сітки при виконанні операцій додавання, відсутні внаслідок вхідного масштабування, при якому значення вхідного сигналу масштабуються так, щоб в процесі обчислення не виникло переповнень.

Враховуючи можливі джерела похибок обчислення, на підставі виразів (1), (2) отримуємо рекурентні вирази для визначення похибок обчислення звичайного і модифікованого двовимірного ДПФ на стрибкових інтервалах по двох вимірах в арифметиці з фіксованою комою, які мають такий вигляд:

$$E\left(F_{i_1+m_1,i_2+m_2}\left(k_1,k_2\right)\right)=\left[E\left(F_{i_1,i_2}\left(k_1,k_2\right)\right)+E\left(\Delta F_{i_1+m_1,i_2+m_2}\left(k_1,k_2\right)\right)\right]\cdot W^{-\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)}+E_{\text{мк}2_{i_1+m_1,i_2+m_2}},\quad(7)$$

$$E\left(F^{\text{м}}_{i_1+m_1,i_2+m_2}\left(k_1,k_2\right)\right)=E\left(F^{\text{м}}_{i_1,i_2}\left(k_1,k_2\right)\right)+E\left(\Delta F_{i_1+m_1,i_2+m_2}\left(k_1,k_2\right)\right)\cdot W^{\left(\frac{i_1k_1}{N_1}+\frac{i_2k_2}{N_2}\right)}+E_{\text{мк}2_{i_1+m_1,i_2+m_2}},\quad(8)$$

де $E(X)$ – похибка обчислення значення X;

$E_{\text{мк}2_{x,y}}$ – похибка операції комплексного множення другого виду на інтервалі (x,y);

Ітераційні вирази для визначення похибок обчислення звичайного і модифікованого двовимірного ДПФ отримаємо на підставі рекурентних виразів (7), (8) з урахуванням того, що для $i_1=i_2=0$ $E\left(F_{0,0}(k_1,k_2)\right)=E\left(F^{\text{м}}_{0,0}(k_1,k_2)\right)=0$, внаслідок чого вони мають такий вигляд:

$$E\left(F_{pm_1,pm_2}\left(k_1,k_2\right)\right)=\left[\ldots\left[E\left(\Delta F_{m_1,m_2}\left(k_1,k_2\right)\right)\cdot W^{-\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)}+E_{\text{мк}2_{m_1,m_2}}+E\left(\Delta F_{2m_1,2m_2}\left(k_1,k_2\right)\right)\right]\times\right.$$
$$\left.\times W^{-\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)}+E_{\text{мк}2_{2m_1,2m_2}}+\ldots+E\left(\Delta F_{pm_1,pm_2}\left(k_1,k_2\right)\right)\right]\cdot W^{-\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)}+E_{\text{мк}2_{pm_1,pm_2}}=\quad(9)$$
$$=\sum_{l=1}^{p}E\left(\Delta F_{lm_1,lm_2}\left(k_1,k_2\right)\right)\cdot W^{-(p-l+1)\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)}+\sum_{l=1}^{p}E_{\text{мк}2_{lm_1,lm_2}}W^{-(p-l)\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)},$$

$$E\left(F^{\text{м}}_{pm_1,pm_2}\left(k_1,k_2\right)\right)=E\left(\Delta F_{m_1,m_2}\left(k_1,k_2\right)\right)\cdot W^{\left(\frac{i_1k_1}{N_1}+\frac{i_2k_2}{N_2}\right)}+E_{\text{мк}2_{m_1,m_2}}+E\left(\Delta F_{2m_1,2m_2}\left(k_1,k_2\right)\right)\times$$
$$\times W^{\left(\frac{i_1k_1}{N_1}+\frac{i_2k_2}{N_2}\right)}+E_{\text{мк}2_{2m_1,2m_2}}+\ldots+E\left(\Delta F_{pm_1,pm_2}\left(k_1,k_2\right)\right)\cdot W^{\left(\frac{i_1k_1}{N_1}+\frac{i_2k_2}{N_2}\right)}+E_{\text{мк}2_{pm_1,pm_2}}=\quad(10)$$
$$=W^{\left(\frac{i_1k_1}{N_1}+\frac{i_2k_2}{N_2}\right)}\sum_{l=1}^{p}E\left(\Delta F_{lm_1,lm_2}\left(k_1,k_2\right)\right)+\sum_{l=1}^{p}E_{\text{мк}2_{lm_1,lm_2}},$$

де p – кількість ітерацій обчислення.

Для визначення СКЗ похибок обчислення необхідно визначити дисперсії та квадрати середніх значень похибок обчислення за виразами (9), (10).

Враховуючи те, що дисперсія суми (різниці) некорельованих похибок дорівнює сумі дисперсій цих похибок, а дисперсія добутку похибки на константу W^X дорівнює дисперсії похибки, вирази для визначення дисперсій похибок обчислення за виразами (9), (10) мають такий вигляд:

$$D\left[E\left(F_{pm_1,pm_2}(k_1,k_2)\right)\right]=D\left[E\left(F^{м}_{pm_1,pm_2}(k_1,k_2)\right)\right]=\sum_{l=1}^{p}\left(D\left[E\left(\Delta F_{lm_1,lm_2}(k_1,k_2)\right)\right]+D\left[E_{мк2_{lm_1,lm_2}}\right]\right)= \\ =p\cdot\left(D\left[E\left(\Delta F_{m_1,m_2}(k_1,k_2)\right)\right]+D\left[E_{мк2}\right]\right), \tag{11}$$

де $D[X]$ – дисперсія похибки обчислення значення X.

Квадрати середніх значень похибок обчислення можуть бути визначені на підставі середніх значень похибок, які для похибок за виразами (9), (10) визначаються як

$$M\left[E\left(F_{pm_1,pm_2}(k_1,k_2)\right)\right]=\sum_{l=1}^{p}M\left[E\left(\Delta F_{lm_1,lm_2}(k_1,k_2)\right)\right]\cdot W^{-(p-l+1)\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)}+ \\ +\sum_{l=1}^{p}M\left[E_{мк2_{lm_1,lm_2}}\right]\cdot W^{-(p-l)\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)}=M\left[E\left(\Delta F_{m_1,m_2}(k_1,k_2)\right)\right]\sum_{l=1}^{p}W^{-(p-l+1)\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)}+ \\ +M\left[E_{мк2}\right]\sum_{l=1}^{p}W^{-(p-l)\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)}\approx M\left[E\left(\Delta F_{m_1,m_2}(k_1,k_2)\right)\right]\sum_{l=1}^{p}W^{-(p-l+1)\left(\frac{m_1k_1}{N_1}+\frac{m_2k_2}{N_2}\right)}, \tag{12}$$

$$M\left[E\left(F^{м}_{pm_1,pm_2}(k_1,k_2)\right)\right]=W^{\left(\frac{i_1k_1}{N_1}+\frac{i_2k_2}{N_2}\right)}\sum_{l=1}^{p}M\left[E\left(\Delta F_{lm_1,lm_2}(k_1,k_2)\right)\right]+\sum_{l=1}^{p}M\left[E_{мк2_{lm_1,lm_2}}\right]= \\ =p\cdot M\left[E\left(\Delta F_{m_1,m_2}(k_1,k_2)\right)\right]\cdot W^{\left(\frac{i_1k_1}{N_1}+\frac{i_2k_2}{N_2}\right)}+p\cdot M\left[E_{мк2}\right]\approx p\cdot M\left[E\left(\Delta F_{m_1,m_2}(k_1,k_2)\right)\right]\cdot W^{\left(\frac{i_1k_1}{N_1}+\frac{i_2k_2}{N_2}\right)}, \tag{13}$$

де $M[X]$ – математичне очікування значення X.

Визначимо дисперсії та середні значення похибок обчислення $\Delta F_{m_1,m_2}(k_1,k_2)$, які використовуються у виразах (11) – (13). Оскільки похибки обчислення $\Delta F_{m_1,m_2}(k_1,k_2)$ на стрибкових та ковзних інтервалах по двох та одному виміру на підставі виразу (3) визначаються як

$$E\left(\Delta F_{m_1,m_2}(k_1,k_2)\right)_{с2}=\sum_{n_1=0}^{m_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}E_{мк1_{n_1,n_2}}+\sum_{n_1=0}^{m_1-1}\sum_{n_2=m_2}^{N_2-1}E_{мк1_{n_1+m_1,n_2+m_2}}+\sum_{n_1=m_1}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}E_{мк1_{n_1+2m_1,n_2+N_2}}, \tag{14}$$

$$E\left(\Delta F_{m_1,m_2}(k_1,k_2)\right)_{с1}=\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{m_2-1}E_{мк1_{n_1,n_2}}, \tag{15}$$

$$E\left(\Delta F_{m_1,m_2}(k_1,k_2)\right)_{к2}=\sum_{n_2=1}^{N_2-1}E_{мк1_{n_2}}+\sum_{n_1=1}^{N_1-1}E_{мк1_{n_1+N_2-1}}, \tag{16}$$

$$E\left(\Delta F_{m_1,m_2}(k_1,k_2)\right)_{к1}=\sum_{n_1=0}^{N_1-1}E_{мк1_{n_1}}, \tag{17}$$

то дисперсії похибок обчислення за виразами (14) – (17) визначаються як

$$D\left[E\left(\Delta F_{m_1,m_2}(k_1,k_2)\right)\right]_{\text{с}2} = \left(m_1 m_2 + m_1(N_2 - m_2) + m_2(N_1 - m_1)\right) \cdot D\left[E_{\text{мк}1}\right], \tag{18}$$

$$D\left[E\left(\Delta F_{m_1,m_2}(k_1,k_2)\right)\right]_{\text{с}1} = N_1 \cdot m_2 \cdot D\left[E_{\text{мк}1}\right], \tag{19}$$

$$D\left[E\left(\Delta F_{m_1,m_2}(k_1,k_2)\right)\right]_{\text{к}2} = \left(N_1 + N_2 - 2\right) \cdot D\left[E_{\text{мк}1}\right], \tag{20}$$

$$D\left[E\left(\Delta F_{m_1,m_2}(k_1,k_2)\right)\right]_{\text{к}1} = N_1 \cdot D\left[E_{\text{мк}1}\right], \tag{21}$$

а середні значення похибок обчислення за виразами (14) – (17) визначаються як

$$M\left[E\left(\Delta F_{m_1,m_2}(k_1,k_2)\right)\right]_{\text{с}2} = \left(m_1 m_2 + m_1(N_2 - m_2) + m_2(N_1 - m_1)\right) \cdot M\left[E_{\text{мк}1}\right], \tag{22}$$

$$M\left[E\left(\Delta F_{m_1,m_2}(k_1,k_2)\right)\right]_{\text{с}1} = N_1 \cdot m_2 \cdot M\left[E_{\text{мк}1}\right], \tag{23}$$

$$M\left[E\left(\Delta F_{m_1,m_2}(k_1,k_2)\right)\right]_{\text{к}2} = \left(N_1 + N_2 - 2\right) \cdot M\left[E_{\text{мк}1}\right], \tag{24}$$

$$M\left[E\left(\Delta F_{m_1,m_2}(k_1,k_2)\right)\right]_{\text{к}1} = N_1 \cdot M\left[E_{\text{мк}1}\right], \tag{25}$$

де $\text{с}2$, $\text{с}1$, $\text{к}2$, $\text{к}1$ – позначення приналежності до похибок обчислення на стрибкових та ковзних інтервалах по двох та одному виміру;

$E_{\text{мк}1_{a,b}}$ – (a,b)-та похибка операції комплексного множення першого виду.

Отже, як видно з формул (11) – (13) та (18) – (25), значення дисперсій та середні значення похибок обчислення ДПФ визначаються через значення дисперсій та середні значення похибок обчислення операцій комплексного множення першого та другого виду, які для різних видів апроксимації результатів множення $(b+1)$-розрядних чисел наведені у [4]. Оскільки $M\left[E_{\text{мк}1}\right] = M\left[E_{\text{мк}2}\right] = 0$ для операцій множення з округленням прямого, оберненого та додаткового коду і усіканням прямого та оберненого коду, то середні значення похибок обчислення ДПФ за виразами (12), (13) також дорівнюють нулю, внаслідок чого СКЗ похибок обчислення ДПФ визначаються дисперсіями похибок обчислення ДПФ за виразом (11). Для операцій множення з усіканням додаткового коду СКЗ похибок обчислення ДПФ визначаються як $M\left[\left|X\right|^2\right] = D[X] + \left|M[X]\right|^2$, де $D[X]$ та $M[X]$ – дисперсії та середні значення похибок обчислення ДПФ за виразами (11) – (13). СКЗ похибок рекурентних методів обчислення двовимірних ДПФ для $N_1 = N_2 = N$ та $m_1 = m_2 = m$ представлені в таблиці 1. Оскільки СКЗ похибок обчислення значень $F(k_1,k_2)$ ДПФ дорівнюють сумі СКЗ похибок обчислення значень $H(k_1,k_2)$ та $H(-k_1,k_2)$ ДПХ, то для рекурентних методів обчислення двовимірних ДПХ приймаються вдвічі менші за наведені в таблиці значення.

Для визначення відношення СКЗ похибок обчислення до СКЗ двовимірних ДПФ та ДПХ, слід врахувати, що для вхідного масштабування, при якому значення вхідного сигналу $\left|x(n_1,n_2)\right| < 1/N^2$, СКЗ двовимірних ДПФ та ДПХ співпадають та, зокрема, при рівномірному законі розподілу вхідного сигналу дорівнюють $1/(3N^2)$ для інтервалу $pm \geq N$.

В результаті порівняльного аналізу точності рекурентних методів обчислення двовимірних ДПФ та ДПХ можна зробити такі основні висновки:

1. Точність рекурентних методів обчислення двовимірних ДПФ та ДПХ на стрибкових (для $pm = N$) і ковзних (для $p = N$) інтервалах по одному виміру збігається з точністю прямих методів обчислення двовимірних ДПФ та ДПХ.

2. Точність рекурентних методів обчислення двовимірних ДПХ вдвічі вища за точність рекурентних методів обчислення двовимірних ДПФ.

3. Точність рекурентних методів обчислення звичайних двовимірних ДПФ та ДПХ збігається з точністю обчислення модифікованих двовимірних ДПФ та ДПХ для всіх видів апроксимації результатів операцій множення, окрім усікання додаткового коду.

4. Точність рекурентних методів обчислення двовимірних ДПФ та ДПХ на інтервалах по одному виміру вдвічі вища за точність обчислення двовимірних ДПФ та ДПХ на інтервалах по двох вимірах для всіх видів апроксимації результатів операцій множення, окрім усікання додаткового коду, для якого точність вища в чотири рази.

Таблиця 1

Точність рекурентних методів обчислення двовимірних ДПФ

Вид апроксимації результатів операцій множення	**СКЗ похибок обчислення двовимірних ДПФ**			
	на ковзних інтервалах		**на стрибкових інтервалах**	
	по одному виміру	**по двох вимірах**	**по одному виміру**	**по двох вимірах**
округлення прямого, оберненого та додаткового коду	$\frac{pN}{6}\cdot 2^{-2b}$	$\frac{pN}{3}\cdot 2^{-2b}$	$\frac{mpN}{6}\cdot 2^{-2b}$	$\frac{mpN}{3}\cdot 2^{-2b}$
усікання прямого та оберненого коду	$\frac{2pN}{3}\cdot 2^{-2b}$	$\frac{4pN}{3}\cdot 2^{-2b}$	$\frac{2mpN}{3}\cdot 2^{-2b}$	$\frac{4mpN}{3}\cdot 2^{-2b}$
усікання додаткового коду	$\left[\frac{pN}{6}+\frac{p^2Q}{2}\right]\cdot 2^{-2b}$	$\left[\frac{pN}{3}+2p^2Q\right]\cdot 2^{-2b}$	$\left[\frac{mpN}{6}+\frac{(mp)^2Q}{2}\right]\cdot 2^{-2b}$	$\left[\frac{mpN}{3}+2(mp)^2Q\right]\cdot 2^{-2b}$

Примітки:

1. $Q = N$ для звичайних ДПФ та $Q = N^2$ для модифікованих ДПФ.
2. Для випадку усікання додаткового коду СКЗ похибок обчислення звичайних двовимірних ДПФ усереднені по k_1, k_2.

Отримані результати можуть бути використані для визначення розрядності даних при апаратурній та програмній реалізації двовимірних ДПФ та ДПХ на основі рекурентних методів обчислення в залежності від необхідної точності та кількості ітерацій обчислення.

Література

1. Ярославский Л.П. Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии: Введение в цифровую оптику. – М.: Радио и связь, 1987. – 296 с.

2. Цифровые анализаторы спектра / В.Н. Плотников, А.В. Белинский, В.А. Суханов, Ю.Н. Жигулевцев. – М.: Радио и связь, 1990. – 184 с.

3. Волинець В.І. Рекурентні методи обчислення багатовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі // Вісник ВПІ. – 2003. – № 4. – С. 69-74.

4. Волинець В.І. Аналіз точності рекурентних методів обчислення дискретних перетворень Фур'є та Хартлі в арифметиці з фіксованою комою // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2006. – Т. 1. – № 2. – С. 171-175.