УДК 519.688:517.443

В.І. Волинець, канд. техн. наук, доц.

БЕЗНАДЛИШКОВІ РЕКУРЕНТНІ МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ МОДИФІКОВАНИХ ДПФ І ДПХ ДЛЯ ОКРЕМИХ РОЗМІРІВ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Вінницький торговельно-економічний інститут КНТЕУ, e-mail: victvol@mail.ru

Отримано рекурентні вирази безнадлишкових рекурентних методів обчислення модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі на стрибкових та ковзних інтервалах для розмірів перетворень, кратних чотирьом та восьми. За рахунок усунення надлишковості обчислення запропоновані методи можуть бути використані для зменшення апаратурних витрат аналізаторів спектра.

Вступ і постановка завдання. В основі динамічного спектрального аналізу, який проводиться на ковзних або стрибкових інтервалах вхідного сигналу, тобто коли черговий інтервал вхідного сигналу включає відповідно один або декілька нових відліків і така ж кількість початкових відліків вхідного сигналу відкидається, лежить використання рекурентних методів обчислення дискретних перетворень Фур'є (ДПФ) та Хартлі (ДПХ), ефективність яких значно вища за ефективність прямих та швидких методів обчислення дискретних перетворень, оскільки рекурентні методи враховують результати обчислення на попередніх інтервалах вхідного сигналу.

Рекурентні методи обчислення ДПФ і ДПХ ґрунтуються на рекурентних виразах [1–4]. Зокрема, у працях [1; 3] на основі загального підходу до розроблення рекурентних методів отримано рекурентні вирази для обчислення звичайних [1] та модифікованих [3] ДПФ і ДПХ на ковзних та стрибкових інтервалах, порівняльний аналіз арифметичної складності яких показав [3], що рекурентні методи обчислення модифікованих ДПФ і ДПХ забезпечують виграш, який на ковзних інтервалах досягає двох разів за кількістю операцій множення та додавання, внаслідок чого вони можуть бути використані в аналізаторах спектра для підвищення їх швидкодії або зменшення апаратурних витрат. У праці [4] запропоновано рекурентні методи обчислення модифікованих ДПФ і ДПХ для окремих розмірів перетворень, арифметична складність яких за кількістю операцій множення в 2 – 4 рази менша арифметичної складності рекурентних методів для довільних розмірів перетворень.

Однак запропоновані у [4] методи є надлишковими для розмірів перетворень, кратних чотирьом та восьми, оскільки деякі значення ДПФ і ДПХ обчислюються двічі. Тому цю роботу присвячено розв'язанню задачі усунення надлишковості рекурентних методів обчислення ДПФ і ДПХ для розмірів перетворень, кратних чотирьом та восьми.

Рекурентні методи обчислення модифікованих ДПФ і ДПХ. Рекурентний метод обчислення модифікованого ДПФ на стрибкових інтервалах для розмірів перетворень, кратних двом, ґрунтується на таких рекурентних виразах [4]:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\big[F_{i+m}(k)\big] &= \mathrm{Re}\big[F_i(k)\big] + \sum_{n=0}^{m-1} A_{1,n+i}(k);\\
\mathrm{Im}\big[F_{i+m}(k)\big] &= \mathrm{Im}\big[F_i(k)\big] + \sum_{n=0}^{m-1} A_{2,n+i}(k);\\
\mathrm{Re}\big[F_{i+m}(N/2-k)\big] &= \mathrm{Re}\big[F_i(N/2-k)\big] + \sum_{n=0}^{m-1} A_{3,n+i}(k);\\
\mathrm{Im}\big[F_{i+m}(N/2-k)\big] &= \mathrm{Im}\big[F_i(N/2-k)\big] + \sum_{n=0}^{m-1} A_{4,n+i}(k),
\end{aligned} \tag{1}$$

де $F_{i+m}(k)$ та $F_i(k)$ – значення ДПФ дійсного вхідного сигналу $x(n)$ розміром N на $(i+m)$-му та i-му інтервалах відповідно, де $i = 0, 1, 2, \ldots,$ m – відстань між інтервалами; Re та Im –

дійсні та уявні частини значень ДПФ;

$$A_{1,n+i}(k) = \Delta x_i(n) \cdot \cos(2\pi(n+i)k/N)\,;\; A_{2,n+i}(k) = \Delta x_i(n) \cdot (-\sin(2\pi(n+i)k/N))\,;$$

$$A_{3,n+i}(k) = \begin{cases} A_{1,n+i}(k), & (n+i) = 2l \\ -A_{1,n+i}(k), & (n+i) = 2l+1 \end{cases};\; A_{4,n+i}(k) = \begin{cases} -A_{2,n+i}(k), & (n+i) = 2l \\ A_{2,n+i}(k), & (n+i) = 2l+1 \end{cases},$$

де $\Delta x_i(n) = [x(N+n+i) - x(n+i)]$; $l = 0, 1, 2\ldots$; $k = \overline{0,]N/4[}$ ($]X[$ – ціла частина значення X).

Рекурентний метод обчислення модифікованого ДПХ на стрибкових інтервалах для розмірів перетворень, кратних двом, ґрунтується на таких рекурентних виразах [4]:

$$\begin{aligned} H_{i+m}(k) &= H_i(k) + \sum_{n=0}^{m-1} B_{1,n+i}(k)\,; \\ H_{i+m}(N-k) &= H_i(N-k) + \sum_{n=0}^{m-1} B_{2,n+i}(k)\,; \\ H_{i+m}(N/2+k) &= H_i(N/2+k) + \sum_{n=0}^{m-1} B_{3,n+i}(k)\,; \\ H_{i+m}(N/2-k) &= H_i(N/2-k) + \sum_{n=0}^{m-1} B_{4,n+i}(k)\,, \end{aligned} \tag{2}$$

де $H_{i+m}(k)$ та $H_i(k)$ – значення ДПХ вхідного сигналу $x(n)$ розміром N на $(i+m)$-му та i-му інтервалах відповідно;

$$B_{1,n+i}(k) = \Delta x_i(n) \cdot \mathrm{cas}(2\pi(n+i)k/N)\,;\; B_{2,n+i}(k) = \Delta x_i(n) \cdot \mathrm{cas}(2\pi(n+i)(N-k)/N)\,;$$

$$B_{3,n+i}(k) = \begin{cases} B_{1,n+i}(k), & (n+i) = 2l \\ -B_{1,n+i}(k), & (n+i) = 2l+1 \end{cases};\; B_{4,n+i}(k) = \begin{cases} B_{2,n+i}(k), & (n+i) = 2l \\ -B_{2,n+i}(k), & (n+i) = 2l+1 \end{cases},$$

де $\mathrm{cas}(X) = \cos(X) + \sin(X)$; $k = \overline{0,]N/4[}$.

Рекурентний метод обчислення модифікованого ДПФ на стрибкових інтервалах для розмірів перетворень, кратних чотирьом, ґрунтується на таких рекурентних виразах [4]:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}[F_{i+m}(k)] &= \mathrm{Re}[F_i(k)] + \sum_{n=0}^{m-1} A_{1,n+i}(k)\,; \\ \mathrm{Im}[F_{i+m}(k)] &= \mathrm{Im}[F_i(k)] + \sum_{n=0}^{m-1} A_{2,n+i}(k)\,; \\ \mathrm{Re}[F_{i+m}(N/2-k)] &= \mathrm{Re}[F_i(N/2-k)] + \sum_{n=0}^{m-1} A_{3,n+i}(k)\,; \\ \mathrm{Im}[F_{i+m}(N/2-k)] &= \mathrm{Im}[F_i(N/2-k)] + \sum_{n=0}^{m-1} A_{4,n+i}(k)\,; \\ \mathrm{Re}[F_{i+m}(N/4+k)] &= \mathrm{Re}[F_i(N/4+k)] + \sum_{n=0}^{m-1} A_{5,n+i}(k)\,; \\ \mathrm{Im}[F_{i+m}(N/4+k)] &= \mathrm{Im}[F_i(N/4+k)] + \sum_{n=0}^{m-1} A_{6,n+i}(k)\,; \\ \mathrm{Re}[F_{i+m}(N/4-k)] &= \mathrm{Re}[F_i(N/4-k)] + \sum_{n=0}^{m-1} A_{7,n+i}(k)\,; \\ \mathrm{Im}[F_{i+m}(N/4-k)] &= \mathrm{Im}[F_i(N/4-k)] + \sum_{n=0}^{m-1} A_{8,n+i}(k)\,, \end{aligned} \tag{3}$$

де

$$A_{5,n+i}(k)=\begin{cases} A_{1,n+i}(k), & (n+i)=4l \\ A_{2,n+i}(k), & (n+i)=4l+1 \\ -A_{1,n+i}(k), & (n+i)=4l+2 \\ -A_{2,n+i}(k), & (n+i)=4l+3 \end{cases};\quad A_{6,n+i}(k)=\begin{cases} A_{2,n+i}(k), & (n+i)=4l \\ -A_{1,n+i}(k), & (n+i)=4l+1 \\ -A_{2,n+i}(k), & (n+i)=4l+2 \\ A_{1,n+i}(k), & (n+i)=4l+3 \end{cases};$$

$$A_{7,n+i}(k)=\begin{cases} A_{1,n+i}(k), & (n+i)=4l \\ -A_{2,n+i}(k), & (n+i)=4l+1 \\ -A_{1,n+i}(k), & (n+i)=4l+2 \\ A_{2,n+i}(k), & (n+i)=4l+3 \end{cases};\quad A_{8,n+i}(k)=\begin{cases} -A_{2,n+i}(k), & (n+i)=4l \\ -A_{1,n+i}(k), & (n+i)=4l+1 \\ A_{2,n+i}(k), & (n+i)=4l+2 \\ A_{1,n+i}(k), & (n+i)=4l+3 \end{cases};$$

$k=\overline{0,]N/8[}$.

Рекурентний метод обчислення модифікованого ДПХ на стрибкових інтервалах для розмірів перетворень, кратних чотирьом, ґрунтується на таких рекурентних виразах [4]:

$$\begin{aligned}
&H_{i+m}(k)=H_i(k)+\sum_{n=0}^{m-1}B_{1,n+i}(k);\\
&H_{i+m}(N-k)=H_i(N-k)+\sum_{n=0}^{m-1}B_{2,n+i}(k);\\
&H_{i+m}(N/2+k)=H_i(N/2+k)+\sum_{n=0}^{m-1}B_{3,n+i}(k);\\
&H_{i+m}(N/2-k)=H_i(N/2-k)+\sum_{n=0}^{m-1}B_{4,n+i}(k);\\
&H_{i+m}(N/4+k)=H_i(N/4+k)+\sum_{n=0}^{m-1}B_{5,n+i}(k);\\
&H_{i+m}(3N/4-k)=H_i(3N/4-k)+\sum_{n=0}^{m-1}B_{6,n+i}(k);\\
&H_{i+m}(3N/4+k)=H_i(3N/4+k)+\sum_{n=0}^{m-1}B_{7,n+i}(k);\\
&H_{i+m}(N/4-k)=H_i(N/4-k)+\sum_{n=0}^{m-1}B_{8,n+i}(k),
\end{aligned}\qquad (4)$$

де

$$B_{5,n+i}(k)=\begin{cases} B_{1,n+i}(k), & (n+i)=4l \\ B_{2,n+i}(k), & (n+i)=4l+1 \\ -B_{1,n+i}(k), & (n+i)=4l+2 \\ -B_{2,n+i}(k), & (n+i)=4l+3 \end{cases};\quad B_{6,n+i}(k)=\begin{cases} B_{2,n+i}(k), & (n+i)=4l \\ -B_{1,n+i}(k), & (n+i)=4l+1 \\ -B_{2,n+i}(k), & (n+i)=4l+2 \\ B_{1,n+i}(k), & (n+i)=4l+3 \end{cases};$$

$$B_{7,n+i}(k)=\begin{cases} B_{1,n+i}(k), & (n+i)=4l \\ -B_{2,n+i}(k), & (n+i)=4l+1 \\ -B_{1,n+i}(k), & (n+i)=4l+2 \\ B_{2,n+i}(k), & (n+i)=4l+3 \end{cases};\quad B_{8,n+i}(k)=\begin{cases} B_{2,n+i}(k), & (n+i)=4l \\ B_{1,n+i}(k), & (n+i)=4l+1 \\ -B_{2,n+i}(k), & (n+i)=4l+2 \\ -B_{1,n+i}(k), & (n+i)=4l+3 \end{cases};$$

$k=\overline{0,]N/8[}$.

Рекурентні методи обчислення модифікованих ДПФ і ДПХ на ковзних інтервалах отримують з виразів (1) – (4) для $m=1$ та відповідно $n=0$.

При обчисленні виразу (1) для $k=0$ визначають значення $F(0)$ і $F(N/2)$, а для $k=N/4$ – два значення $F(N/4)$. Оскільки уявні частини значень $F(0)$ і $F(N/2)$ дорівнюють нулю, і їх не потрібно обчислювати, а дійсні частини значень $F(0)$ і $F(N/2)$ можна обчислити без використання операцій множення ($A_{1,n+i}(0)=\Delta x_i(n)$), то значення $F(0)$, $F(N/2)$ і $F(N/4)$ можна обчислити разом за допомогою таких виразів:

$$\mathrm{Re}\big[F_{i+m}(N/4)\big]=\mathrm{Re}\big[F_i(N/4)\big]+\sum_{n=0}^{m-1}A_{1,n+i}(N/4);$$
$$\mathrm{Im}\big[F_{i+m}(N/4)\big]=\mathrm{Im}\big[F_i(N/4)\big]+\sum_{n=0}^{m-1}A_{2,n+i}(N/4);$$
$$\mathrm{Re}\big[F_{i+m}(N/2)\big]=\mathrm{Re}\big[F_i(N/2)\big]+\sum_{n=0}^{m-1}(-1)^{n+i}\Delta x_i(n);$$
$$\mathrm{Re}\big[F_{i+m}(0)\big]=\mathrm{Re}\big[F_i(0)\big]+\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_i(n). \tag{5}$$

При обчисленні виразу (2) для $k=0$ визначають по два значення $H(0)$ і $H(N/2)$, а для $k=N/4$ – по два значення $H(N/4)$ і $H(3N/4)$. Оскільки значення $H(0)$ і $H(N/2)$ можна обчислити без використання операцій множення ($B_{1,n+i}(0)=\Delta x_i(n)$), то значення $H(0)$, $H(N/2)$, $H(N/4)$ і $H(3N/4)$ можна обчислити разом за допомогою таких виразів:

$$H_{i+m}(N/4)=H_i(N/4)+\sum_{n=0}^{m-1}B_{1,n+i}(N/4);$$
$$H_{i+m}(3N/4)=H_i(3N/4)+\sum_{n=0}^{m-1}B_{2,n+i}(N/4);$$
$$H_{i+m}(N/2)=H_i(N/2)+\sum_{n=0}^{m-1}(-1)^{n+i}\Delta x_i(n);$$
$$H_{i+m}(0)=H_i(0)+\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_i(n). \tag{6}$$

При обчисленні виразу (3) для $k=0$ визначають значення $F(0)$, $F(N/2)$ та два значення $F(N/4)$, а для $k=N/8$ – по два значення $F(N/8)$ і $F(3N/8)$. Враховуючи вище зазначені властивості значень $F(0)$ і $F(N/2)$, а також те, що значення $F(0)$, $F(N/2)$ і $F(N/4)$ можна обчислити без використання операцій множення ($A_{1,n+i}(0)=\Delta x_i(n)$), то значення $F(0)$, $F(N/2)$, $F(N/4)$, $F(N/8)$ і $F(3N/8)$ можна обчислити разом за допомогою таких виразів:

$$\mathrm{Re}\big[F_{i+m}(N/8)\big]=\mathrm{Re}\big[F_i(N/8)\big]+\sum_{n=0}^{m-1}A_{1,n+i}(N/8);$$
$$\mathrm{Im}\big[F_{i+m}(N/8)\big]=\mathrm{Im}\big[F_i(N/8)\big]+\sum_{n=0}^{m-1}A_{2,n+i}(N/8);$$
$$\mathrm{Re}\big[F_{i+m}(N/2)\big]=\mathrm{Re}\big[F_i(N/2)\big]+\sum_{n=0}^{m-1}(-1)^{n+i}\Delta x_i(n);$$
$$\mathrm{Re}\big[F_{i+m}(0)\big]=\mathrm{Re}\big[F_i(0)\big]+\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_i(n);$$
$$\mathrm{Re}\big[F_{i+m}(3N/8)\big]=\mathrm{Re}\big[F_i(3N/8)\big]+\sum_{n=0}^{m-1}A_{5,n+i}(N/8);$$
$$\mathrm{Im}\big[F_{i+m}(3N/8)\big]=\mathrm{Im}\big[F_i(3N/8)\big]+\sum_{n=0}^{m-1}A_{6,n+i}(N/8);$$

$$\mathrm{Re}\big[F_{i+m}(N/4)\big]=\mathrm{Re}\big[F_i(N/4)\big]+\sum_{n=0}^{m-1}F_{1,n+i}\Delta x_i(n)\,;$$
$$\mathrm{Im}\big[F_{i+m}(N/4)\big]=\mathrm{Im}\big[F_i(N/4)\big]+\sum_{n=0}^{m-1}F_{2,n+i}\Delta x_i(n)\,, \qquad (7)$$

де

$$F_{1,n+i}=\begin{cases}1, & (n+i)=4l\\ 0, & (n+i)=4l+1\\ -1, & (n+i)=4l+2\\ 0, & (n+i)=4l+3\end{cases};\; F_{2,n+i}=\begin{cases}0, & (n+i)=4l\\ -1, & (n+i)=4l+1\\ 0, & (n+i)=4l+2\\ 1, & (n+i)=4l+3\end{cases}.$$

При обчисленні виразу (4) для $k=0$ визначають по два значення $H(0)$, $H(N/2)$, $H(N/4)$ і $H(3N/4)$, а для $k=N/8$ – по два значення $H(N/8)$, $H(3N/8)$, $H(5N/8)$ і $H(7N/8)$. Оскільки значення $H(0)$, $H(N/2)$, $H(N/4)$ і $H(3N/4)$ можна обчислити без використання операцій множення ($B_{1,n+i}(0)=B_{2,n+i}(0)=\Delta x_i(n)$), то значення $H(0)$, $H(N/2)$, $H(N/4)$, $H(3N/4)$, $H(N/8)$, $H(3N/8)$, $H(5N/8)$ і $H(7N/8)$ можна обчислити разом за допомогою таких виразів:

$$H_{i+m}(N/8)=H_i(N/8)+\sum_{n=0}^{m-1}B_{1,n+i}(N/8)\,;$$
$$H_{i+m}(7N/8)=H_i(7N/8)+\sum_{n=0}^{m-1}B_{2,n+i}(N/8)\,;$$
$$H_{i+m}(N/2)=H_i(N/2)+\sum_{n=0}^{m-1}(-1)^{n+i}\Delta x_i(n)\,;$$
$$H_{i+m}(0)=H_i(0)+\sum_{n=0}^{m-1}\Delta x_i(n)\,;$$
$$H_{i+m}(3N/8)=H_i(3N/8)+\sum_{n=0}^{m-1}B_{5,n+i}(N/8)\,;$$
$$H_{i+m}(5N/8)=H_i(5N/8)+\sum_{n=0}^{m-1}B_{6,n+i}(N/8)\,;$$
$$H_{i+m}(3N/4)=H_i(3N/4)+\sum_{n=0}^{m-1}H_{1,n+i}\Delta x_i(n)\,;$$
$$H_{i+m}(N/4)=H_i(N/4)+\sum_{n=0}^{m-1}H_{2,n+i}\Delta x_i(n)\,, \qquad (8)$$

де

$$H_{1,n+i}=\begin{cases}1, & (n+i)=4l\\ -1, & (n+i)=4l+1\\ -1, & (n+i)=4l+2\\ 1, & (n+i)=4l+3\end{cases};\; H_{2,n+i}=\begin{cases}1, & (n+i)=4l\\ 1, & (n+i)=4l+1\\ -1, & (n+i)=4l+2\\ -1, & (n+i)=4l+3\end{cases}.$$

Отже, якщо обчислення за виразами (1) – (2) та (3) – (4) вимагає $]N/4[+1$ та $]N/8[+1$ циклів обчислення для $k=\overline{0,]N/4[}$ та $k=\overline{0,]N/8[}$ відповідно, то для розмірів перетворень, кратних чотирьом та восьми, кількість циклів обчислення може бути скорочена до $N/4$ та $N/8$ відповідно за рахунок усунення надлишковості обчислення за виразами (1) – (4). Для цього перший цикл обчислення повинен виконуватись за одним з виразів (5) – (8), які усувають надлишковість обчислення для $k=0$ та $k=N/4$ ($k=N/8$), а інші цикли обчислення повинні виконуватись за виразами (1) – (2) та (3) – (4) для $k=\overline{1,N/4-1}$ та $k=\overline{1,N/8-1}$ відповідно.

Оскільки запропоновані рекурентні методи обчислення модифікованих ДПФ і ДПХ для розмірів перетворень, кратних чотирьом та восьми, вимагають лише на один цикл обчислення менше ніж рекурентні методи обчислення модифікованих ДПФ і ДПХ для розмірів перетворень, кратних двом та чотирьом, то арифметична складність і відповідно швидкодія запропонованих і відомих методів практично однакові. Однак усунення надлишковості обчислення в запропонованих методах дозволяє зменшити апаратурні витрати, зокрема, ємність або кількість блоків пам'яті аналізаторів спектра для окремих розмірів перетворень, зокрема $N=2^n$.

Висновки. В результаті аналізу рекурентних виразів, що лежать в основі рекурентних методів обчислення модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі для розмірів перетворень, кратних двом та чотирьом, отримано рекурентні вирази безнадлишкових рекурентних методів обчислення модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі на стрибкових та ковзних інтервалах для розмірів перетворень, кратних чотирьом та восьми. Арифметична складність запропонованих методів практично однакова з арифметичною складністю відомих методів, однак за рахунок усунення надлишковості обчислення вони можуть бути використані для зменшення апаратурних витрат аналізаторів спектра.

Список літератури

1. *Волынец В.И.* Рекуррентные алгоритмы вычисления дискретных преобразований и энергетического спектра // Винницкий политехнический институт. – Винница. – 1988. – 14 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 18.11.88, № 2898-Ук88.
2. *Плотников В.Н., Белинский А.В., Суханов В.А., Жигулевцев Ю.Н.* Цифровые анализаторы спектра. – М.: Радио и связь, 1990. – 184 с.
3. *Волинець В.І.* Рекурентні методи обчислення модифікованих дискретних перетворень Фур'є та Хартлі // Вісник ВПІ. – 2003. – № 1. – С. 77–80.
4. *Волинець В.І.* Рекурентні методи обчислення модифікованих дискретних перетворень *Фур'є* та Хартлі для окремих розмірів перетворень // Електроніка та системи управління. – 2005. – № 4 (6). – С. 27–32.

В.И. Волынец

Безызбыточные рекуррентные методы вычисления модифицированных ДПФ и ДПХ для некоторых размеров преобразований

Получены рекуррентные выражения безызбыточных рекуррентных методов вычисления модифицированных дискретных преобразований Фурье и Хартли на скачущих и скользящих интервалах для размеров преобразований, кратных четырем и восьми. За счет устранения избыточности вычислений предложенные методы могут быть использованы для уменьшения аппаратурных затрат анализаторов спектра.

V.I. Volynets

Nonredundant recurrent methods of calculation of modified DFT and DHT for some sizes of transforms

Recurrent expressions of nonredundant recurrent methods of calculation of the modified discrete Fourier and Hartley transforms on skipping and sliding intervals for the sizes of transforms, multiple to four and to eight, are obtained. Due to the removal of surplus of calculations the offered methods can be used for diminishing of apparatus expenses of spectrum analyzers.