Збірник наукових праць ІПМЕ НАН України. 2007. Випуск 43

УДК 517.44:004

АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ РЕКУРЕНТНИХ МЕТОДІВ ОБЧИСЛЕННЯ БАГАТОВИМІРНИХ ДИСКРЕТНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУР'Є ТА ХАРТЛІ В АРИФМЕТИЦІ З ФІКСОВАНОЮ КОМОЮ

В.І. Волинець, канд. техн. наук

Exactness analysis of recurrent methods of calculation of ordinary and modified multidimensional discrete Fourier and Hartley transforms on skipping and sliding intervals on all and one measuring in fixed-point arithmetic is conducted, as a result analytical expressions for determination of root-mean-squares calculation errors are got.

В основі динамічного спектрального аналізу багатовимірних сигналів, який проводиться на ковзних або стрибкових інтервалах вхідного сигналу, тобто коли черговий фрагмент вхідного сигналу відрізняється від попереднього фрагменту відповідно на одну або декілька груп відліків по одному або всіх вимірах, лежить використання рекурентних методів обчислення багатовимірних дискретних перетворень Фур'є (ДПФ) та Хартлі (ДПХ) [1-3], арифметична складність яких значно нижча за складність прямих та швидких методів обчислення дискретних перетворень, оскільки рекурентні методи враховують результати обчислення на попередніх інтервалах вхідного сигналу.

Важливим критерієм вибору методу обчислення є точність обчислення, яку він забезпечує. У [4] проведений аналіз точності рекурентних методів обчислення одновимірних звичайних і модифікованих ДПФ та ДПХ в арифметиці з фіксованою комою, в основу якого покладений статистичний метод аналізу, при якому кожному джерелу елементарної похибки ставиться у відповідність генератор випадкової похибки з рівномірним законом розподілу та робиться припущення, що всі джерела елементарних похибок не корелюють між собою та з вхідним сигналом. В якості кількісної оцінки точності обчислення приймаються середньоквадратичне значення (СКЗ) похибки обчислення перетворення та відношення СКЗ похибки обчислення до СКЗ перетворення, яке фізично інтерпретується як відношення потужності шуму до потужності сигналу.

У цій роботі ставиться завдання провести аналіз точності рекурентних методів обчислення звичайних і модифікованих багатовимірних ДПФ та ДПХ на стрибкових і ковзних інтервалах по всіх і одному виміру в арифметиці з фіксованою комою.

Рекурентні методи обчислення звичайних і модифікованих багатовимірних ДПФ на стрибкових інтервалах по всіх вимірах базуються на таких рекурентних виразах [3]:

$$F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\left[F_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]\cdot W^{-\sum\limits_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}}, \qquad (1)$$

$$F_1^{M}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=F_0^{M}(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\cdot W^{\sum\limits_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}}, \qquad (2)$$

де $F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $F_1^{M}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ та $F_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $F_0^{M}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ – звичайне та модифіковане r-вимірне ДПФ r-вимірного вхідного сигналу $x(n_1,n_2,\ldots,n_r)$ розмірами $\prod\limits_{i=1}^{r}N_i$ на черговому (першому) та попередньому (нульовому) інтервалах вхідного сигналу, зсунутих відносно один одного на m_i відліків по i-му виміру, де $i=\overline{1,r}$; $W=\exp(-j2\pi)$, де $j=\sqrt{-1}$; M_i – зсув вхідного сигналу на попередньому інтервалі відносно початку координат по i-му виміру;

$$\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\sum_{s=0}^{2^r-2}\sum_{n_1=a_1}^{b_1-1}\sum_{n_2=a_2}^{b_2-1}\ldots\sum_{n_r=a_r}^{b_r-1}\Delta x(n_1,n_2,\ldots,n_r)\cdot W^{\sum\limits_{i=1}^{r}\frac{n_ik_i}{N_i}}, \qquad (3)$$

де $\Delta x(n_1,n_2,\ldots,n_r)=x(N_1q_1+n_1+M_1,N_2q_2+n_2+M_2,\ldots,N_rq_r+n_r+M_r)-$ $-x(n_1+M_1,n_2+M_2,\ldots,n_r+M_r)$; $a_i=m_is_i$ та $b_i=m_iq_i+N_is_i$, де s_i – $(r-i)$- й розряд двійкового представлення числа s, а $q_i=1-s_i$.

Рекурентні методи обчислення звичайних і модифікованих багатовимірних ДПХ на стрибкових інтервалах по всіх вимірах базуються на таких рекурентних виразах [3]:

$$\begin{aligned}H_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)=&\left[H_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\Delta H_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]\cdot\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right)-\\&-\left[H_0(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)+\Delta H_1(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)\right]\cdot\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{m_ik_i}{N_i}\right),\end{aligned} \qquad (4)$$

$$\begin{aligned}H_1^{M}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=&H_0^{M}(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\Delta H_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)\cdot\cos\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right)+\\&+\Delta H_1(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)\cdot\sin\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{M_ik_i}{N_i}\right),\end{aligned} \qquad (5)$$

де $H_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $H_1^{M}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ та $H_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $H_0^{M}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ – звичайне та модифіковане r-вимірне ДПХ r-вимірного вхідного сигналу $x(n_1,n_2,\ldots,n_r)$ на черговому та попередньому інтервалах вхідного сигналу;

$$\Delta H_1(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\sum_{s=0}^{2^r-2}\sum_{n_1=a_1}^{b_1-1}\sum_{n_2=a_2}^{b_2-1}\ldots\sum_{n_r=a_r}^{b_r-1}\Delta x(n_1,n_2,\ldots,n_r)\cdot \mathrm{cas}\left(2\pi\sum_{i=1}^{r}\frac{n_i k_i}{N_i}\right), \quad (6)$$

де $\mathrm{cas}(X)=\cos(X)+\sin(X)$.

Рекурентні вирази для обчислення звичайних і модифікованих багатовимірних ДПФ та ДПХ на стрибкових інтервалах по одному виміру отримують з виразів (1) – (6) при $m_i=0$ та $M_i=0$ у коефіцієнтах W, cos та sin для $i=\overline{1,r-1}$. Рекурентні вирази для обчислення звичайних і модифікованих багатовимірних ДПФ та ДПХ на ковзних інтервалах отримують з виразів (1) – (6) при $m_i=1$ для $i=\overline{1,r}$.

Між виразами (1), (2) для обчислення ДПФ та виразами (4), (5) для обчислення ДПХ існує тісний зв’язок у випадку дійсної вхідної послідовності $x(n_1,n_2,\ldots,n_r)$. З аналізу цих виразів видно, що вирази обчислення дійсних $\mathrm{Re}[F(k_1,k_2,\ldots,k_r)]$ та уявних $\mathrm{Im}[F(k_1,k_2,\ldots,k_r)]$ частин ДПФ на основі виразів (1), (2) мають вигляд, подібний до виразів (4), (5) обчислення значень $H(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ та $H(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)$ ДПХ відповідно. Отже, вирази похибок обчислення дійсних $\mathrm{Re}[F(k_1,k_2,\ldots,k_r)]$ та уявних $\mathrm{Im}[F(k_1,k_2,\ldots,k_r)]$ частин значень ДПФ і відповідно значень $H(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ та $H(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)$ ДПХ матимуть подібний вигляд, а їхні значення збігатимуться. Враховуючи це, обмежимось отриманням виразів для визначення похибок обчислення ДПФ.

Оскільки обчислювальними операціями виразів (1) – (6) є операції додавання та множення, то при реалізації рекурентних методів обчислення багатовимірних ДПФ та ДПХ в арифметиці з фіксованою комою джерелами похибок обчислення можуть бути лише похибки операцій множення, обумовлені округленням або усіканням результатів добутків, оскільки похибки операцій зсувів, виконання яких необхідно для усунення можливих переповнень розрядної сітки при виконанні операцій додавання, відсутні внаслідок вхідного масштабування, при якому значення вхідного сигналу масштабуються так, щоб в процесі обчислення не виникло переповнень.

Враховуючи можливі джерела похибок обчислення, на підставі виразів (1), (2) отримуємо рекурентні вирази для визначення похибок обчислення звичайного і модифікованого багатовимірного ДПФ на стрибкових інтервалах по всіх вимірах в арифметиці з фіксованою комою, які мають такий вигляд:

$$E(F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r))=\left[E(F_0(k_1,k_2,\ldots,k_r))+E(\Delta F_1(k_1,k_2,\ldots,k_r))\right]$$
$$\times W^{-\sum_{i=1}^{r}\frac{m_i k_i}{N_i}}+E_{мк2_1}, \quad (7)$$

$$E\left(F_1^{м}\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)=E\left(F_0^{м}\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)+E\left(\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\times \\ \times W^{\sum_{i=1}^{r}\frac{M_i k_i}{N_i}}+E_{мк2_1}, \qquad (8)$$

де $E(X)$ – похибка обчислення значення X; $E_{мк2_1}$ – похибка операції комплексного множення другого виду на черговому інтервалі.

Ітераційні вирази для визначення похибок обчислення звичайного і модифікованого багатовимірного ДПФ отримаємо на підставі рекурентних виразів (7), (8) з урахуванням того, що для $M_i=0$, де $i=\overline{1,r}$, $E\left(F_0(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right)=E\left(F_0^{м}(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right)=0$, внаслідок чого вирази мають такий вигляд:

$$E\left(F_p\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)=\sum_{l=1}^{p}E\left(\Delta F_l\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\cdot W^{-(p-l+1)\sum_{i=1}^{r}\frac{m_i k_i}{N_i}}+ \\ +\sum_{l=1}^{p}E_{мк2_l}W^{-(p-l)\sum_{i=1}^{r}\frac{m_i k_i}{N_i}}, \qquad (9)$$

$$E\left(F_p^{м}\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)=W^{\sum_{i=1}^{r}\frac{M_i k_i}{N_i}}\sum_{l=1}^{p}E\left(\Delta F_l\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)+\sum_{l=1}^{p}E_{мк2_l}, \qquad (10)$$

де p – кількість ітерацій обчислення.

Враховуючи те, що дисперсія суми (різниці) некорельованих похибок дорівнює сумі дисперсій цих похибок, а дисперсія добутку похибки на константу W^X дорівнює дисперсії похибки, вирази для визначення дисперсій похибок обчислення за виразами (9), (10) мають такий вигляд:

$$D\left[E\left(F_p\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]=D\left[E\left(F_p^{м}\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]= \\ =p\cdot\left(D\left[E\left(\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]+D\left[E_{мк2}\right]\right), \qquad (11)$$

де $D[X]$ – дисперсія похибки обчислення значення X.

Квадрати середніх значень похибок обчислення можуть бути визначені на підставі середніх значень похибок, які для похибок за виразами (9), (10) визначаються як

$$M\left[E\left(F_p\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]=M\left[E\left(\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]\sum_{l=1}^{p}W^{-(p-l+1)\sum_{i=1}^{r}\frac{m_i k_i}{N_i}}+ \\ +M\left[E_{мк2}\right]\sum_{l=1}^{p}W^{-(p-l)\sum_{i=1}^{r}\frac{m_i k_i}{N_i}}, \qquad (12)$$

$$M\left[E\left(F_p^{\mathit{м}}\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]=p\cdot M\left[E\left(\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]\cdot W^{\sum\limits_{i=1}^{r}\frac{M_i k_i}{N_i}}+ \\ +p\cdot M\left[E_{\mathit{мк}2}\right], \tag{13}$$

де $M\left[X\right]$ – математичне очікування значення X.

Визначимо дисперсії та середні значення похибок обчислення $\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)$, які використовуються у виразах (11) – (13). Оскільки похибки обчислення $\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)$ на стрибкових та ковзних інтервалах по всіх та одному виміру на підставі виразу (3) визначаються як

$$E\left(\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)_{c_r}=\sum_{s=0}^{2^r-2}\sum_{n_1=a_1}^{b_1-1}\sum_{n_2=a_2}^{b_2-1}\ldots\sum_{n_r=a_r}^{b_r-1}E_{\mathit{мк}1_{n_1,n_2,\ldots,n_r}}, \tag{14}$$

$$E\left(\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)_{c_1}=\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\ldots\sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1}\sum_{n_r=0}^{m_r-1}E_{\mathit{мк}1_{n_1,n_2,\ldots,n_r}}, \tag{15}$$

$$E\left(\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)_{\kappa_r}=\sum_{s=1}^{2^r-2}\underbrace{\sum_{n_1=1}^{N_1-1}\sum_{n_2=1}^{N_2-1}\ldots\sum_{n_r=1}^{N_r-1}}_{\textit{лише по } n_i\textit{, де } i\,\ni\, s_i=1}E_{\mathit{мк}1_{n_1,n_2,\ldots,n_r}}, \tag{16}$$

$$E\left(\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)_{\kappa_1}=\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\ldots\sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1}E_{\mathit{мк}1_{n_1,n_2,\ldots,n_{r-1}}}, \tag{17}$$

де c_r, c_1, κ_r, κ_1 – позначення приналежності до похибок обчислення на стрибкових та ковзних інтервалах по всіх та одному виміру; $E_{\mathit{мк}1}$ – похибка операції комплексного множення першого виду, то дисперсії та середні значення похибок обчислення за виразами (14) – (17) визначаються як

$$D\left[E\left(\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]=K\cdot D\left[E_{\mathit{мк}1}\right], \tag{18}$$

$$M\left[E\left(\Delta F_1\left(k_1,k_2,\ldots,k_r\right)\right)\right]=K\cdot M\left[E_{\mathit{мк}1}\right], \tag{19}$$

де K – коефіцієнт, який для стрибкових та ковзних інтервалів по всіх та одному виміру визначається відповідно як

$$K=\prod_{i=1}^{r}N_i-\prod_{i=1}^{r}\left(N_i-m_i\right), \tag{20}$$

$$K=m_r\cdot\prod_{i=1}^{r-1}N_i\,. \tag{21}$$

Отже, як видно з формул (11) – (13) та (18) – (21), значення дисперсій та середні значення похибок обчислення ДПФ визначаються через значення дисперсій та середні значення похибок обчислення операцій комплексного множення першого та другого виду, які для різних видів апроксимації результатів множення $(b+1)$-розрядних чисел наведені у [4]. Оскільки $M[E_{мк1}] = M[E_{мк2}] = 0$ для операцій множення з округленням прямого, оберненого та додаткового коду і усіканням прямого та оберненого коду, то середні значення похибок обчислення ДПФ за виразами (12), (13) також дорівнюють нулю, внаслідок чого СКЗ похибок обчислення ДПФ визначаються дисперсіями похибок обчислення ДПФ за виразом (11). Для операцій множення з усіканням додаткового коду СКЗ похибок обчислення ДПФ визначаються як $M\left[|X|^2\right] = D[X] + |M[X]|^2$, де $D[X]$ та $M[X]$ – дисперсії та середні значення похибок обчислення ДПФ за виразами (11) – (13). СКЗ похибок рекурентних методів обчислення багатовимірних ДПФ для $N_i = N$ та $m_i = m$, де $i = \overline{1,r}$, представлені в таблиці 1. Оскільки СКЗ похибок обчислення значень $F(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ ДПФ дорівнюють сумі СКЗ похибок обчислення значень $H(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ та $H(-k_1, -k_2, \ldots, -k_r)$ ДПХ, то для рекурентних методів обчислення багатовимірних ДПХ приймаються вдвічі менші за наведені в таблиці значення.

Таблиця 1

Точність рекурентних методів обчислення багатовимірних ДПФ

Вид апроксимації результатів операцій множення	СКЗ похибок обчислення багатовимірних ДПФ	
	по одному виміру	по всіх вимірах
округлення прямого, оберненого та додаткового коду	$\frac{mpN^{r-1}}{6} \cdot 2^{-2b}$	$\frac{mprN^{r-1}}{6} \cdot 2^{-2b}$
усікання прямого та оберненого коду	$\frac{2mpN^{r-1}}{3} \cdot 2^{-2b}$	$\frac{2mprN^{r-1}}{3} \cdot 2^{-2b}$
усікання додаткового коду	$\left[\frac{mpN^{r-1}}{6} + \frac{Q\left(mN^{r-1}\right)^2}{2}\right] \cdot 2^{-2b}$	$\left[\frac{mprN^{r-1}}{6} + \frac{Q\left(mrN^{r-1}\right)^2}{2}\right] \cdot 2^{-2b}$

Примітки:

1. $Q = p$ для звичайних ДПФ та $Q = p^2$ для модифікованих ДПФ.

2. Для випадку усікання додаткового коду наведені усереднені СКЗ похибок обчислення звичайних багатовимірних ДПФ.

Для визначення відношення СКЗ похибок обчислення до СКЗ багатовимірних ДПФ та ДПХ, слід врахувати, що для вхідного масштабування, при якому $|x(n_1, n_2, \ldots, n_r)| < 1/N^r$, СКЗ багатовимірних ДПФ та ДПХ співпадають та, зокрема при рівномірному законі розподілу вхідного сигналу, дорівнюють $1/(3N^r)$ для інтервалу $p \geq N/m$.

В результаті порівняльного аналізу точності рекурентних методів обчислення багатовимірних ДПФ та ДПХ можна зробити такі основні висновки:

1. Точність рекурентних методів обчислення багатовимірних ДПФ та ДПХ на стрибкових (для $p = N/m$) і ковзних (для $p = N$) інтервалах по одному виміру збігається з точністю прямих методів обчислення багатовимірних ДПФ та ДПХ.
2. Точність рекурентних методів обчислення багатовимірних ДПХ вдвічі вища за точність рекурентних методів обчислення багатовимірних ДПФ.
3. Точність рекурентних методів обчислення звичайних багатовимірних ДПФ та ДПХ збігається з точністю обчислення модифікованих багатовимірних ДПФ та ДПХ для всіх видів апроксимації результатів операцій множення, окрім усікання додаткового коду.
4. Точність рекурентних методів обчислення багатовимірних ДПФ та ДПХ на інтервалах по одному виміру в r разів вища за точність обчислення багатовимірних ДПФ та ДПХ на інтервалах по всіх вимірах для всіх видів апроксимації результатів операцій множення, окрім усікання додаткового коду, для якого точність вища в r^2 разів.

Отримані результати можуть бути використані для визначення розрядності даних при апаратурній та програмній реалізації багатовимірних ДПФ та ДПХ на основі рекурентних методів обчислення в залежності від необхідної точності та кількості ітерацій обчислення.

Література

1. *Ярославский Л.П.* Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии: Введение в цифровую оптику. – М.: Радио и связь, 1987. – 296 с.
2. Цифровые анализаторы спектра / *В.Н. Плотников, А.В. Белинский, В.А. Суханов, Ю.Н. Жигулевцев.* – М.: Радио и связь, 1990. – 184 с.
3. *Волинець В.І.* Рекурентні методи обчислення багатовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2003. – № 4. – С. 69-74.
4. *Волинець В.І.* Аналіз точності рекурентних методів обчислення дискретних перетворень Фур'є та Хартлі в арифметиці з фіксованою комою // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2006. – Т. 1. – № 2. – С.171-175.