УДК 519.688: 517.443

В.І. Волинець, канд. техн. наук, доц.

БЕЗНАДЛИШКОВІ РЕКУРЕНТНІ МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ МОДИФІКОВАНИХ БАГАТОВИМІРНИХ ДПФ І ДПХ ДЛЯ ОКРЕМИХ РОЗМІРІВ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Вінницький торговельно-економічний інститут КНТЕУ, e-mail: victvol@mail.ru

Отримано рекурентні вирази безнадлишкових рекурентних методів обчислення модифікованих багатовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі на стрибкових і ковзних інтервалах за одним виміром для розмірів перетворень за цим виміром, кратних чотирьом та восьми. За рахунок усунення надлишковості обчислення запропоновані методи можуть бути використані для зменшення апаратурних витрат аналізаторів спектра.

Вступ і постановка завдання. В основу динамічного спектрального аналізу, який виконують над ковзними або стрибковими фрагментами багатовимірного вхідного сигналу, тобто коли черговий фрагмент вхідного сигналу зсунутий відносно попереднього фрагменту вхідного сигналу на один або декілька відліків за одним або декількома вимірами, покладено використання рекурентних методів обчислення багатовимірних дискретних перетворень Фур'є (ДПФ) та Хартлі (ДПХ), ефективність яких значно вища за ефективність прямих та швидких методів обчислення багатовимірних дискретних перетворень, оскільки рекурентні методи враховують результати обчислення для попередніх фрагментів вхідного сигналу.

Рекурентні методи обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ ґрунтуються на рекурентних виразах [1–3]. Зокрема, у праці [3] на основі загального підходу до розроблення рекурентних методів отримано рекурентні вирази обчислення звичайних та модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ на ковзних та стрибкових інтервалах, порівняльний аналіз арифметичної складності яких показав, що для обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ доцільно використовувати рекурентні методи обчислення багатовимірних ДПФ і ДПХ на ковзних та стрибкових інтервалах за одним виміром. У праці [4] запропоновано рекурентні методи обчислення модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ на ковзних та стрибкових інтервалах за одним виміром для розмірів перетворень за цим виміром, кратних двом та чотирьом, аналіз арифметичної складності яких показав, що вони забезпечують виграш в порівнянні з відповідними рекурентними методами для довільних розмірів перетворень за цим виміром, який при обчисленні модифікованих двовимірних ДПФ і ДПХ досягає 2 – 2,4 разу за кількістю операцій множення та 1,2 – 1,33 разу за кількістю операцій додавання.

Однак запропоновані у [4] методи є надлишковими для розмірів перетворень за виміром, кратних чотирьом та восьми, оскільки деякі значення ДПФ і ДПХ обчислюються двічі. Тому цю роботу присвячено розв'язанню задачі усунення надлишковості рекурентних методів обчислення модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ на ковзних та стрибкових інтервалах за одним виміром для розмірів перетворень за цим виміром, кратних чотирьом та восьми.

Рекурентні методи обчислення модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ. Рекурентний метод обчислення модифікованого багатовимірного ДПФ на стрибкових інтервалах за одним виміром для розмірів перетворень за цим виміром, кратних двом, ґрунтується на таких рекурентних виразах [4]:

$$\mathrm{Re}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]=\mathrm{Re}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}A_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$\mathrm{Im}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]=\mathrm{Im}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}A_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$\mathrm{Re}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,-k_r)\right]=\mathrm{Re}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,-k_r)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}A_{3,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$\mathrm{Im}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,-k_r)\right]=\mathrm{Im}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,-k_r)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}A_{4,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$\mathrm{Re}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2-k_r)\right]=\mathrm{Re}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2-k_r)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}A_{3,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$\mathrm{Im}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2-k_r)\right]=\mathrm{Im}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2-k_r)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}A_{4,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$\mathrm{Re}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2+k_r)\right]=\mathrm{Re}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2+k_r)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}A_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$\mathrm{Im}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2+k_r)\right]=\mathrm{Im}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2+k_r)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}A_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r), \quad (1)$$

де $F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ та $F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ – значення r-вимірних ДПФ r-вимірних фрагментів дійсного вхідного сигналу $x(n_1,n_2,\ldots,n_r)$, зсунутих за r-м виміром на m_r відліків, де $k_i=\overline{0,N_i-1}$ для $i=\overline{1,r-1}$, $k_r=\overline{0,]N_r/4[}$ ($]X[$ – ціла частина значення X), N_i – розміри перетворення та вхідного сигналу за i-м виміром, $i_r=0,1,2,...$ – номер інтервалу за r-м виміром; Re та Im – дійсні та уявні частини значень;

$$A_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=A_{11,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)+A_{12,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\cos(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r)\times$$
$$\times\mathrm{Re}[\Delta F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})]+\sin(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r)\cdot\mathrm{Im}[\Delta F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})];$$

$$A_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=A_{21,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)-A_{22,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\cos(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r)\times$$
$$\times\mathrm{Im}[\Delta F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})]-\sin(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r)\cdot\mathrm{Re}[\Delta F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})];$$

$$A_{3,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=A_{11,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)-A_{12,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$A_{4,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=A_{21,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)+A_{22,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r),$$

де

$$\Delta F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})=\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\ldots\sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1}\left[x(n_1,n_2,\ldots,N_r+i_r+n_r)-x(n_1,n_2,\ldots,i_r+n_r)\right]\cdot W^{\sum_{i=1}^{r-1}\frac{n_ik_i}{N_i}},$$

де $W=\exp(-j2\pi)$, $j=\sqrt{-1}$.

Рекурентний метод обчислення модифікованого багатовимірного ДПХ на стрибкових інтервалах за одним виміром для розмірів перетворень за цим виміром, кратних двом, ґрунтується на таких рекурентних виразах [4]:

$$H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}B_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)=H_{i_r}(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}B_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,-k_r)=H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,-k_r)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}B_{3,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,k_r)=H_{i_r}(-k_1,-k_2,\ldots,k_r)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}B_{4,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2-k_r)=H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2-k_r)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}B_{3,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/2+k_r)=H_{i_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/2+k_r)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}B_{4,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2+k_r)=H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2+k_r)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}B_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/2-k_r)=H_{i_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/2-k_r)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}B_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r),\qquad(2)$$

де $H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ та $H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ – значення r-вимірних ДПХ r-вимірних фрагментів дійсного вхідного сигналу $x(n_1,n_2,\ldots,n_r)$, зсунутих за r-м виміром на m_r відліків; $k_i=\overline{0,N_i-1}$ для $i=\overline{1,r-1}$; $k_r=\overline{0,]N_r/4[}$;

$$B_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=B_{11,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)+B_{12,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\cos(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r)\times$$
$$\times\Delta H_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})+\sin(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r)\cdot\Delta H_{i_r+n_r}(-k_1,-k_2,\ldots,-k_{r-1});$$

$$B_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=B_{21,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)-B_{22,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\cos(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r)\times$$
$$\times\Delta H_{i_r+n_r}(-k_1,-k_2,\ldots,-k_{r-1})]-\sin(2\pi(i_r+n_r)k_r/N_r)\cdot\Delta H_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})];$$

$$B_{3,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=B_{11,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)-B_{12,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$B_{4,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=B_{21,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)+B_{22,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

де

$$\Delta H_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})=\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\ldots\sum_{n_{r-1}=0}^{N_{r-1}-1}\left[x(n_1,n_2,\ldots,N_r+i_r+n_r)-x(n_1,n_2,\ldots,i_r+n_r)\right]\cdot\operatorname{cas}\left(2\pi\sum_{i=1}^{r-1}\frac{n_ik_i}{N_i}\right),$$

де $\operatorname{cas}(X)=\cos(X)+\sin(X)$.

Рекурентний метод обчислення модифікованого багатовимірного ДПФ на стрибкових інтервалах за одним виміром для розмірів перетворень за цим виміром, кратних чотирьом, ґрунтується на таких рекурентних виразах [4]:

$$\operatorname{Re}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]=\operatorname{Re}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}A_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$\operatorname{Im}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]=\operatorname{Im}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}A_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$\operatorname{Re}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,-k_r)\right]=\operatorname{Re}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,-k_r)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}A_{3,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$\operatorname{Im}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,-k_r)\right]=\operatorname{Im}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,-k_r)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}A_{4,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$\operatorname{Re}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2-k_r)\right]=\operatorname{Re}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2-k_r)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}A_{3,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$\mathrm{Im}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2-k_r)\right]=\mathrm{Im}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2-k_r)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}A_{4,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$\mathrm{Re}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2+k_r)\right]=\mathrm{Re}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2+k_r)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}A_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$\mathrm{Im}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2+k_r)\right]=\mathrm{Im}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2+k_r)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}A_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$\mathrm{Re}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4-k_r)\right]=\mathrm{Re}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4-k_r)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}A_{5,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$\mathrm{Im}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4-k_r)\right]=\mathrm{Im}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4-k_r)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}A_{6,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$\mathrm{Re}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4+k_r)\right]=\mathrm{Re}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4+k_r)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}A_{7,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$\mathrm{Im}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4+k_r)\right]=\mathrm{Im}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4+k_r)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}A_{8,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$\mathrm{Re}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4-k_r)\right]=\mathrm{Re}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4-k_r)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}A_{5,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$\mathrm{Im}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4-k_r)\right]=\mathrm{Im}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4-k_r)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}A_{6,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$\mathrm{Re}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4+k_r)\right]=\mathrm{Re}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4+k_r)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}A_{7,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$\mathrm{Im}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4+k_r)\right]=\mathrm{Im}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4+k_r)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}A_{8,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r),\quad (3)$$

де

$$A_{5,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\begin{cases} A_{3,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ i_r+n_r=4l \\ A_{4,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ i_r+n_r=4l+1 \\ -A_{3,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ i_r+n_r=4l+2 \\ -A_{4,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ i_r+n_r=4l+3 \end{cases};$$

$$A_{6,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\begin{cases} A_{4,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ i_r+n_r=4l \\ -A_{3,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ i_r+n_r=4l+1 \\ -A_{4,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ i_r+n_r=4l+2 \\ A_{3,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ i_r+n_r=4l+3 \end{cases};$$

$$A_{7,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\begin{cases} A_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ i_r+n_r=4l \\ -A_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ i_r+n_r=4l+1 \\ -A_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ i_r+n_r=4l+2 \\ A_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ i_r+n_r=4l+3 \end{cases};$$

$$A_{8,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=\begin{cases} A_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ i_r+n_r=4l \\ A_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ i_r+n_r=4l+1 \\ -A_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ i_r+n_r=4l+2 \\ -A_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r),\ i_r+n_r=4l+3 \end{cases};$$

$k_i=\overline{0,N_i-1}$ для $i=\overline{1,r-1}$; $k_r=\overline{0,]N_r/8[}$; $l=0,1,2,\ldots$.

Рекурентний метод обчислення модифікованого багатовимірного ДПХ на стрибкових інтервалах за одним виміром для розмірів перетворень за цим виміром, кратних чотирьом, ґрунтується на таких рекурентних виразах [4]:

$$H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)=H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}B_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)=H_{i_r}(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}B_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,-k_r)=H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,-k_r)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}B_{3,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,k_r)=H_{i_r}(-k_1,-k_2,\ldots,k_r)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}B_{4,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2-k_r)=H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2-k_r)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}B_{3,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/2+k_r)=H_{i_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/2+k_r)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}B_{4,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2+k_r)=H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2+k_r)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}B_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/2-k_r)=H_{i_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/2-k_r)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}B_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r),$$

$$H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4-k_r)=H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4-k_r)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}B_{5,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,3N_r/4+k_r)=H_{i_r}(-k_1,-k_2,\ldots,3N_r/4+k_r)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}B_{6,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4+k_r)=H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4+k_r)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}B_{7,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/4-k_r)=H_{i_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/4-k_r)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}B_{8,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4-k_r)=H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4-k_r)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}B_{5,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/4+k_r)=H_{i_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/4+k_r)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}B_{6,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4+k_r)=H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4+k_r)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}B_{7,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r);$$

$$H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,3N_r/4-k_r)=H_{i_r}(-k_1,-k_2,\ldots,3N_r/4-k_r)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}B_{8,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r),\quad (4)$$

де $B_{5,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $B_{6,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $B_{7,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $B_{8,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ визначаються аналогічно $A_{5,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $A_{6,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $A_{7,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $A_{8,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ з заміною $A_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $A_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $A_{3,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $A_{4,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ на $B_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $B_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $B_{3,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$, $B_{4,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ відповідно; $k_i=\overline{0,N_i-1}$ для $i=\overline{1,r-1}$; $k_r=\overline{0,]N_r/8[}$.

Рекурентні методи обчислення модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ на ковзних інтервалах отримують з виразів (1) – (4) для $m_r=1$ та відповідно $n_r=0$.

При обчисленні виразів (1) для $k_r=0$ визначають по два значення $F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,0)$ та $F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2)$, а для $k_r=N_r/4$ – по два значення $F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4)$ та $F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4)$. Оскільки для $k_r=0$ обчислення $A_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,0)$ та $A_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,0)$ можна здійснювати без використання операцій множення, то обчислення значень ДПФ для $k_r=0$ та $k_r=N_r/4$ можна проводити разом за допомогою таких виразів:

$$\mathrm{Re}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4)\right]=\mathrm{Re}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}A_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4);$$

$$\mathrm{Im}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4)\right]=\mathrm{Im}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}A_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4);$$

$$\mathrm{Re}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,0)\right]=\mathrm{Re}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,0)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}\mathrm{Re}[\Delta F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})];$$

$$\mathrm{Im}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,0)\right]=\mathrm{Im}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,0)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}\mathrm{Im}[\Delta F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})];$$

$$\mathrm{Re}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2)\right]=\mathrm{Re}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}\,\mathrm{Re}[\Delta F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})];$$

$$\mathrm{Im}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2)\right]=\mathrm{Im}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}\,\mathrm{Im}[\Delta F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})];$$

$$\mathrm{Re}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4)\right]=\mathrm{Re}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}A_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4);$$

$$\mathrm{Im}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4)\right]=\mathrm{Im}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}A_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4). \qquad (5)$$

При обчисленні виразів (2) для $k_r=0$ визначають по два значення $H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,0)$, $H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,0)$, $H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2)$ та $H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/2)$, а для $k_r=N_r/4$ – по два значення $H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4)$, $H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,3N_r/4)$, $H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4)$ та $H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/4)$. Оскільки для $k_r=0$ обчислення $B_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,0)$ та $B_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,0)$ можна здійснювати без використання операцій множення, то обчислення значень ДПХ для $k_r=0$ та $k_r=N_r/4$ можна проводити разом за допомогою таких виразів:

$$H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4)=H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}B_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4);$$

$$H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,3N_r/4)=H_{i_r}(-k_1,-k_2,\ldots,3N_r/4)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}B_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4);$$

$$H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,0)=H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,0)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}\Delta H_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1});$$

$$H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,0)=H_{i_r}(-k_1,-k_2,\ldots,0)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}\Delta H_{i_r+n_r}(-k_1,-k_2,\ldots,-k_{r-1})];$$

$$H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2)=H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}\Delta H_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1});$$

$$H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/2)=H_{i_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/2)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}\Delta H_{i_r+n_r}(-k_1,-k_2,\ldots,-k_{r-1})];$$

$$H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4)=H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}B_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4);$$

$$H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/4)=H_{i_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/4)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}B_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4). \tag{6}$$

При обчисленні виразів (3) для $k_r=0$ визначають по два значення $F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,0)$, $F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2)$, $F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4)$ та $F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4)$, а для $k_r=N_r/8$ – по два значення $F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/8)$, $F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,7N_r/8)$, $F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/8)$ та $F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,5N_r/8)$. Оскільки для $k_r=0$ обчислення $A_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,0)$, $A_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,0)$, $A_{5,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,0)$ та $A_{6,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,0)$ можна здійснювати без використання операцій множення, то обчислення значень ДПФ для $k_r=0$ та $k_r=N_r/8$ можна проводити разом за допомогою таких виразів:

$$\mathrm{Re}\big[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/8)\big]=\mathrm{Re}\big[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/8)\big]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}A_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/8);$$

$$\mathrm{Im}\big[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/8)\big]=\mathrm{Im}\big[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/8)\big]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}A_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/8);$$

$$\mathrm{Re}\big[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,0)\big]=\mathrm{Re}\big[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,0)\big]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}\mathrm{Re}[\Delta F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})];$$

$$\mathrm{Im}\big[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,0)\big]=\mathrm{Im}\big[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,0)\big]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}\mathrm{Im}[\Delta F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})];$$

$$\mathrm{Re}\big[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2)\big]=\mathrm{Re}\big[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2)\big]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}\mathrm{Re}[\Delta F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})];$$

$$\mathrm{Im}\big[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2)\big]=\mathrm{Im}\big[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2)\big]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}\mathrm{Im}[\Delta F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})];$$

$$\mathrm{Re}\big[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,5N_r/8)\big]=\mathrm{Re}\big[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,5N_r/8)\big]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}A_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/8);$$

$$\mathrm{Im}\big[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,5N_r/8)\big]=\mathrm{Im}\big[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,5N_r/8)\big]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}A_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/8);$$

$$\mathrm{Re}\big[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4)\big]=\mathrm{Re}\big[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4)\big]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}T_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1});$$

$$\mathrm{Im}\big[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4)\big]=\mathrm{Im}\big[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4)\big]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}T_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1});$$

$$\mathrm{Re}\big[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,7N_r/8)\big]=\mathrm{Re}\big[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,7N_r/8)\big]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}A_{7,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/8);$$

$$\mathrm{Im}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,7N_r/8)\right]=\mathrm{Im}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,7N_r/8)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}A_{8,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/8);$$

$$\mathrm{Re}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4)\right]=\mathrm{Re}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}T_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1});$$

$$\mathrm{Im}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4)\right]=\mathrm{Im}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}T_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1});$$

$$\mathrm{Re}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/8)\right]=\mathrm{Re}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/8)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}A_{7,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/8);$$

$$\mathrm{Im}\left[F_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/8)\right]=\mathrm{Im}\left[F_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/8)\right]+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}A_{8,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/8), \qquad (7)$$

де

$$T_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})=\begin{cases}\mathrm{Re}[\Delta F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1}),\ i_r+n_r=4l\\ \mathrm{Im}[\Delta F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1}),\ i_r+n_r=4l+1\\ -\mathrm{Re}[\Delta F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1}),\ i_r+n_r=4l+2\\ -\mathrm{Im}[\Delta F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1}),\ i_r+n_r=4l+3\end{cases};$$

$$T_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1})=\begin{cases}\mathrm{Im}[\Delta F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1}),\ i_r+n_r=4l\\ -\mathrm{Re}[\Delta F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1}),\ i_r+n_r=4l+1\\ -\mathrm{Im}[\Delta F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1}),\ i_r+n_r=4l+2\\ \mathrm{Re}[\Delta F_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1}),\ i_r+n_r=4l+3\end{cases}.$$

При обчисленні виразів (4) для $k_r=0$ визначають по два значення $H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,0)$, $H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,0)$, $H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2)$, $H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/2)$, $H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4)$, $H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/4)$, $H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4)$ та $H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,3N_r/4)$, а для $k_r=N_r/8$ – по два значення $H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/8)$, $H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/8)$, $H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/8)$, $H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,3N_r/8)$, $H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,5N_r/8)$, $H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,5N_r/8)$, $H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,7N_r/8)$ та $H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,7N_r/8)$. Оскільки для $k_r=0$ обчислення $B_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,0)$, $B_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,0)$, $B_{5,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,0)$ та $B_{6,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,0)$ можна здійснювати без використання операцій множення, то обчислення значень ДПХ для $k_r=0$ та $k_r=N_r/8$ можна проводити разом за допомогою таких виразів:

$$H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/8)=H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/8)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}B_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/8);$$

$$H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,7N_r/8)=H_{i_r}(-k_1,-k_2,\ldots,7N_r/8)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}B_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/8);$$

$$H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,0)=H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,0)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}\Delta H_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1});$$

$$H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,0)=H_{i_r}(-k_1,-k_2,\ldots,0)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}\Delta H_{i_r+n_r}(-k_1,-k_2,\ldots,-k_{r-1})];$$

$$H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2)=H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/2)+\sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}\Delta H_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1});$$

$$H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/2) = H_{i_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/2) + \sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}\Delta H_{i_r+n_r}(-k_1,-k_2,\ldots,-k_{r-1})];$$

$$H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,5N_r/8) = H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,5N_r/8) + \sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}B_{1,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/8);$$

$$H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,3N_r/8) = H_{i_r}(-k_1,-k_2,\ldots,3N_r/8) + \sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}B_{2,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/8),$$

$$H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4) = H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/4) + \sum_{n_r=0}^{m_r-1}T_{3,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1});$$

$$H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,3N_r/4) = H_{i_r}(-k_1,-k_2,\ldots,3N_r/4) + \sum_{n_r=0}^{m_r-1}T_{4,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1});$$

$$H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,7N_r/8) = H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,7N_r/8) + \sum_{n_r=0}^{m_r-1}B_{7,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/8);$$

$$H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/8) = H_{i_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/8) + \sum_{n_r=0}^{m_r-1}B_{8,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/8);$$

$$H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4) = H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/4) + \sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}T_{3,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1});$$

$$H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/4) = H_{i_r}(-k_1,-k_2,\ldots,N_r/4) + \sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}T_{4,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1});$$

$$H_{i_r+m_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/8) = H_{i_r}(k_1,k_2,\ldots,3N_r/8) + \sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}B_{7,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/8);$$

$$H_{i_r+m_r}(-k_1,-k_2,\ldots,5N_r/8) = H_{i_r}(-k_1,-k_2,\ldots,5N_r/8) + \sum_{n_r=0}^{m_r-1}(-1)^{i_r+n_r}B_{8,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,N_r/8), \tag{8}$$

де

$$T_{3,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1}) = \begin{cases} \Delta H_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1}),\ i_r+n_r=4l \\ \Delta H_{i_r+n_r}(-k_1,-k_2,\ldots,-k_{r-1}),\ i_r+n_r=4l+1 \\ -\Delta H_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1}),\ i_r+n_r=4l+2 \\ -\Delta H_{i_r+n_r}(-k_1,-k_2,\ldots,-k_{r-1}),\ i_r+n_r=4l+3 \end{cases};$$

$$T_{4,i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1}) = \begin{cases} \Delta H_{i_r+n_r}(-k_1,-k_2,\ldots,-k_{r-1}),\ i_r+n_r=4l \\ -\Delta H_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1}),\ i_r+n_r=4l+1 \\ -\Delta H_{i_r+n_r}(-k_1,-k_2,\ldots,-k_{r-1}),\ i_r+n_r=4l+2 \\ \Delta H_{i_r+n_r}(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1}),\ i_r+n_r=4l+3 \end{cases}.$$

Отже, якщо обчислення за виразами (1) – (2) та (3) – (4) вимагає $]N_r/4[+1$ та $]N_r/8[+1$ циклів обчислення для $k_r = \overline{0,]N_r/4[}$ та $k_r = \overline{0,]N_r/8[}$ відповідно, то для N_r, кратних чотирьом та восьми, кількість циклів обчислення може бути скорочена до $N_r/4$ та $N_r/8$ відповідно за рахунок усунення надлишковості обчислення за цими виразами. Для цього перший цикл обчислення повинен виконуватись за однією з груп виразів (5) – (8), які усувають надлишковість обчислення для $k_r = 0$ та $k_r = N_r/4$ ($k_r = N_r/8$), а інші цикли обчислення повинні виконуватись за однією з груп виразів (1) – (2) для $k_r = \overline{1, N_r/4-1}$ або (3) – (4) для $k_r = \overline{1, N_r/8-1}$.

Оскільки запропоновані рекурентні методи обчислення модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ за одним виміром для розмірів перетворень за цим виміром, кратних чотирьом та восьми, вимагають лише на один цикл обчислення менше ніж рекурентні методи обчислення модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ за одним виміром для розмірів перетворень за цим виміром, кратних двом та чотирьом, то арифметична складність і відповідно швидкодія запропонованих і відомих методів практично однакові. Однак усунення надлишковості обчислення в запропонованих методах дозволяє зменшити апаратурні витрати, зокрема, ємність або кількість блоків пам'яті аналізаторів спектра для окремих розмірів перетворень, зокрема для $N_r = 2^n$.

Висновки. В результаті аналізу рекурентних виразів, на яких ґрунтуються рекурентні методи обчислення модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ за одним виміром для розмірів перетворень за цим виміром, кратних двом та чотирьом, отримано рекурентні вирази безнадлишкових рекурентних методів обчислення модифікованих багатовимірних ДПФ і ДПХ на стрибкових та ковзних інтервалах за одним виміром для розмірів перетворень за цим виміром, кратних чотирьом та восьми. Арифметична складність запропонованих методів практично однакова з арифметичною складністю відомих методів, однак за рахунок усунення надлишковості обчислення вони можуть бути використані для зменшення апаратурних витрат аналізаторів спектра.

Список літератури

1. *Ярославский Л.П.* Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии: Введение в цифровую оптику. – М.: Радио и связь, 1987. – 296 с.
2. *Плотников В.Н., Белинский А.В., Суханов В.А., Жигулевцев Ю.Н.* Цифровые анализаторы спектра. – М.: Радио и связь, 1990. – 184 с.
3. *Волинець В.І.* Рекурентні методи обчислення багатовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі // Вісник ВПІ. – 2003. – № 4. – С. 69–74.
4. *Волинець В.І.* Рекурентні методи обчислення модифікованих багатовимірних дискретних перетворень Фур'є та Хартлі для окремих розмірів перетворень // Електроніка та системи управління. – 2007. – № 3 (13). – С. 15–20.

В.И. Волынец

Безызбыточные рекуррентные методы вычисления модифицированных многомерных ДПФ и ДПХ для некоторых размеров преобразований

Получены рекуррентные выражения безызбыточных рекуррентных методов вычисления модифицированных многомерных дискретных преобразований Фурье и Хартли на скачущих и скользящих интервалах по одному измерению для размеров преобразований по этому измерению, кратных четырем и восьми. За счет устранения избыточности вычислений предложенные методы могут быть использованы для уменьшения аппаратурных затрат анализаторов спектра.

V.I. Volynets

Nonredundant recurrent methods of calculation of modified multidimensional DFT and DHT for some sizes of transforms

Recurrent expressions of nonredundant recurrent methods of calculation of the modified multidimensional discrete Fourier and Hartley transforms on skipping and sliding intervals on one measuring for the sizes of transforms on this measuring, multiple to four and to eight, are obtained. Due to the removal of surplus of calculations the offered methods can be used for diminishing of apparatus expenses of spectrum analyzers.