УДК 536.2

Б. С. Окрепкий, В. М. Неміш
Тернопільський національний економічний університет

ОСЕСИМЕТРИЧНА ТЕМПЕРАТУРНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ ДВОХ КОНТАКТУЮЧИХ ШАРІВ З УРАХУВАННЯМ НЕІДЕАЛЬНОГО ТЕПЛОВОГО КОНТАКТУ

Побудовано розв'язок осесиметричної температурної задачі для системи двох контактуючих шарів з урахуванням неідеального теплового контакту. У випадку ізотропних матеріалів одержано формули для визначення температурних полів в будь-якій точці системи двох тіл. Досліджено вплив контактної провідності, коефіцієнтів теплопровідності і теплообміну на розподіл температури.

Ключові слова: *теплопровідність, теплообмін, осесиметрична температурна задача, ізотропні матеріали, шар, неідеальний тепловий контакт, контактна провідність.*

Рис. 4. Форм. 19. Літ. 6.

Б. С. Окрепкий, В. Н. Немиш

ОСЕСИММЕТРИЧЕСКАЯ ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ КОНТАКТИРУЮЩИХ СЛОЕВ С УЧЕТОМ НЕИДЕАЛЬНОГО ТЕПЛОВОГО КОНТАКТА

Построено решение осесимметрической температурной задачи для системы двух контактирующих слоев с учетом неидеального теплового контакта. В случае изотропных материалов получены формулы для определения температурных полей в произвольной точке системы двух тел. Исследовано влияние контактной проводимости, коэффициентов теплопроводности и теплообмена на распределение температуры.

Ключевые слова: *теплопроводность, теплообмен, осесиметричная температурная задача, изотропные материалы, слой, неидеальный контакт, контактная проводимость.*

B. S. Okrepkiy, V. M. Nemish

AXES-SYMMETRIC TEMPERATURE PROBLEM FOR A SYSTEM OF TWO LAYERS IN NON-IDEAL TERMAL CONTACT

A solution to axes-symmetric temperature problem of a system of two layers that are in non-ideal thermal contact has been found. Materials impty isotropic bodies. Formulas for determining the temperature in each point of the system two bodies have been received. The influence of contact conductivity, the coefficients of thermal conductivity and of heat exchange on the temperature distribution has been investigated.

Keywords: *heat conductivity, heat exchange, axes-symmetric temperature problem, isotropic materials, layer, non-ideal heat contact, contact conductivity.*

Постановка проблеми. Проблема визначення контактних деформацій і напружень з урахуванням температурних полів є важливою задачею для дослідження міцності деталей машин і конструкцій у місцях їхньої взаємодії, при розрахунку конструкцій на пружній основі з метою раціонального використання матеріалу і несучої здатності основи.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В працях [1,2] досліджено вплив температурних факторів на характер контактної взаємодії тіл. В роботах [3,4] розв'язані задачі теплопровідності для системи двох контактуючих циліндрів. Зокрема, в роботі [5] розв'язана осесиметрична температурна задача для системи двох контактуючих шарів з урахуванням ідеального теплового контакту. Проте недостатньо вивченими є задачі теплопровідності для системи двох контактуючих шарів з урахуванням неідеального теплового контакту.

Мета роботи. Побудувати розв'язок осесиметричної температурної задачі для системи двох контактуючих ізотропних шарів скінченої товщини з урахуванням неідеального теплового контакту. Дослідити вплив контактної провідності, коефіцієнтів теплопровідності і теплообміну на розподіл температурного поля в системі двох тіл.

Постановка задачі. Нехай задано два ізотропні шари скінченої товщини L і L_1, які знаходяться в неідеальному тепловому контакті. На вільних поверхнях шарів здійснюється теплообмін із зовнішнім середовищем по закону Ньютона. При заданих припущеннях необхідно визначити температурне поле в любій точці системи тіл.

Введемо циліндричну систему координат r, θ, z центр якої лежить на нижній основі верхнього шару, а вісь OZ спрямована вертикально вверх по його осі симетрії. Всі величини, які позначені верхнім індексом “ 1 ” відносяться до нижнього шару, без індексів – до верхнього.

Таким чином, запропонована задача розв'язується при наступних граничних умовах:

$$\frac{\partial T}{\partial z} + H(T - T_c) = 0 \qquad (z = L; 0 \le r < \infty) \; ; \tag{1}$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} + H_1(T_c^1 - T^1) = 0 \qquad (z = -L_1; 0 \le \mathrm{r} < \infty) \; ; \tag{2}$$

$$\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z} \qquad (z = 0; 0 \le \mathrm{r} < \infty) \; ; \tag{3}$$

$$\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} + \lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z} = 2h_0(T - T^1) \; . \tag{4}$$

Тут λ_z, λ_z^1 - коефіцієнти теплопровідності; H, H_1 – коефіцієнти теплообміну; h_0 – контактна провідність; T_c, T_c^1 - температура зовнішнього середовища.

Розв'язування крайової задачі для рівняння теплопровідності.

Відомо [2], що в осесиметричному випадку температурне поле для стаціонарного ізотропного тіла визначається із рівняння

$$\nabla^2 T = 0 \; . \tag{5}$$

Для визначення температурного поля в шарі введемо трансформанту Ганкеля функції $T(r,z)$ нульового порядку:

$$\overline{T}(\xi, z) = \int_0^\infty rT(r,z)J_0(\xi r)dr \; , \tag{6}$$

за допомогою якої, знаходиться вираз для $T(\rho,\zeta)$ через дві довільні функції $\varphi_1(\eta)$ і $\varphi_2(\eta)$ для верхнього шару

$$T(\rho,\zeta) = \int_0^\infty [\varphi_1(\eta)e^{\eta\zeta} + \varphi_2(\eta)e^{-\eta\zeta}]J_0(\eta\rho)d\eta \tag{7}$$

і дві довільні функції $\psi_1(\eta)$ і $\psi_2(\eta)$ для нижнього шару.

$$T^1(\rho,\zeta) = \int_0^\infty [\psi_1(\eta)e^{\eta\zeta} + \psi_2(\eta)e^{-\eta\zeta}]J_0(\eta\rho)d\eta \; , \tag{8}$$

де $J_0(\eta\rho)$ - функція Бесселя першого роду дійсного аргументу; $\rho = \frac{r}{L}, \zeta = \frac{z}{L}, \eta = \xi L$.

Задовільнивши граничні умови (1)-(4), з урахуванням (7), (8), одержимо слідуючу систему інтегральних рівнянь відносно функції $\varphi_1(r)$, $\varphi_2(r)$ і $\psi_1(\eta)$, $\psi_2(\eta)$:

$$\int_0^\infty [(k+\eta)e^{\eta}\varphi_1(\eta) + (k-\eta)e^{-\eta}\varphi_2(\eta)]J_0(\eta\rho)d\eta = kT_c \; , \tag{9}$$

$$\int_0^\infty [(k_1-\eta)e^{-\eta l_1}\psi_1(\eta) + (k_1+\eta)e^{\eta l_1}\psi_2(\eta)]J_0(\eta\rho)d\eta = k_1 T_c^{(1)} \; , \tag{10}$$

$$\lambda_z \int_0^\infty \eta[\varphi_1(\eta) - \varphi_2(\eta)]J_0(\eta\rho)d\eta = \lambda_z^1 \int_0^\infty \eta[\psi_1(\eta) - \psi_2(\eta)]J_0(\eta\rho)d\eta \; , \tag{11}$$

$$\begin{gathered}\lambda_z \int_0^\infty \eta[\varphi_1(\eta) - \varphi_2(\eta)]J_0(\eta\rho)d\eta + \lambda_z^1 \int_0^\infty \eta[\psi_1(\eta) - \psi_2(\eta)]J_0(\eta\rho)d\eta = \\ = 2h_0 L\{\int_0^\infty [\varphi_1(\eta) + \varphi_2(\eta)]J_0(\eta\rho)d\eta - \int_0^\infty [\psi_1(\eta) + \psi_2(\eta)]J_0(\eta\rho d\eta\}\end{gathered} \; , \tag{12}$$

де $k = HL$, $k_1 = H_1 L$, $l_1 = \frac{L_1}{L}, (0 \le \rho < \infty)$.

Застосувавши формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля [6] до рівнянь 9-12, одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно функцій $\varphi_i(\eta)$, $\psi_i(\eta)$ $(i=1,2)$:

$$\begin{gathered}(k+\eta)e^{\eta}\varphi_1(\eta)+(k-\eta)e^{-\eta}\varphi_2(\eta)=kT_c\lim_{\Delta\to 0}\delta(\eta-\Delta),\\(k_1-\eta)e^{-\eta l_1}\psi_1(\eta)+(k_1+\eta)e^{\eta l_1}\psi_2(\eta)=k_1T_c^1\lim_{\Delta\to 0}\delta(\eta-\Delta),\\\lambda_z[\varphi_1(\eta)-\varphi_2(\eta)]=\lambda_z^1[\psi_1(\eta)-\psi_2(\eta)],\\\frac{\lambda_z}{L}\eta[\varphi_1(\eta)-\varphi_2(\eta)]+\frac{\lambda_z^1}{L}\eta[\psi_1(\eta)-\psi_2(\eta)]=2h_0[\varphi_1(\eta)+\varphi_2(\eta)]-2h_0[\psi_1(\eta)+\psi_2(\eta)].\end{gathered}\tag{13}$$

Тут $\delta(\alpha-\beta)=\alpha\int\limits_0^\infty \xi J_m(\alpha\xi)J_m(\beta\xi)d\xi$ - дельта-функція Дірака.

Із системи (13) одержимо:

$$\begin{gathered}\varphi_2(\eta)=-\frac{k+\eta}{k-\eta}e^{2\eta}\varphi_1(\eta)+\frac{kT_c}{k-\eta}e^{\eta}\lim_{\Delta\to 0}\delta(\eta-\Delta),\\\psi_2(\eta)=-\frac{k_1-\eta}{k_1+\eta}e^{-2\eta l_1}\psi_1(\eta)+\frac{k_1T_c^1}{k_1+\eta}e^{-\eta l_1}\lim_{\Delta\to 0}\delta(\eta-\Delta);\end{gathered}\tag{14}$$

$$\lambda_z(1+\frac{k+\eta}{k-\eta}e^{2\eta})\varphi_1(\eta)-\lambda_z^1(1+\frac{k_1-\eta}{k_1+\eta}e^{-2\eta l_1})\psi_1(\eta)=A_1(\eta)\ ;\tag{15}$$

$$\begin{gathered}[\lambda_z\eta-2h_0L+(\lambda_z\eta+2h_0L)\frac{k+\eta}{k-\eta}e^{2\eta}]\varphi_1(\eta)+[\lambda_z^1\eta+2h_0L+(\lambda_z^1\eta-\\-2h_0L)\frac{k_1-\eta}{k_1+\eta}e^{-2\eta l_1}]\psi_1(\eta)=A_2(\eta),\end{gathered}\tag{16}$$

де

$$\begin{gathered}A_1(\eta)=\frac{k(k_1+\eta)T_c\lambda_ze^{\eta}-k_1(k-\eta)\lambda_z^1T_c^1e^{-\eta l_1}}{(k-\eta)(k_1+\eta)}\lim_{\Delta\to 0}\delta(\eta-\Delta),\\A_2(\eta)=\frac{(\lambda_z^1\eta-2h_0L)k_1(k-\eta)T_c^1+(\lambda_z\eta+2h_0L)k(k_1+\eta)T_ce^{\eta}}{(k-\eta)(k_1+\eta)}\lim_{\Delta\to 0}\delta(\eta-\Delta).\end{gathered}\tag{17}$$

Розв'язок системи рівнянь (16) матиме вигляд:

$$\varphi_1(\eta)=\frac{\Delta_1(\eta)}{\Delta(\eta)},\ \psi_1(\eta)=\frac{\Delta_2(\eta)}{\Delta(\eta)}\ ,\tag{18}$$

Тут

$$\Delta(\eta)=\frac{4e^{\eta(1-l_1)}\lambda_z^1}{(k-\eta)(k_1+\eta)}Q(\eta)\ .$$

$$\begin{gathered}Q(\eta)=\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}(\eta sh\eta+kch\eta)[\eta^2sh\eta l_1+(h_0^1+k_1)\eta ch\eta l_1+h_0^1k_1sh\eta l_1]+\\+(k_1ch\eta l_1+\eta sh\eta l_1)[(h_0^1+k)\eta ch\eta+\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}\eta^2sh\eta+kh_0^1sh\eta],\quad h_0^1=\frac{2h_0L}{\lambda_z^1};\end{gathered}$$

$$\Delta_1=\frac{2e^{-\eta l^1}\lambda_z^1}{k_1+\eta}P(\eta)\ ,\Delta_2(\eta)=\frac{2e^{\eta}\lambda_z^1}{k-\eta}\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}P_1(\eta)\ ;\tag{19}$$

$$\begin{gathered}P(\eta)=A_1(\eta)[\eta^2sh\eta l_1+(h_0^1+k_1)\eta ch\eta l_1+h_0^1k_1sh\eta l_1]+A_2(\eta)(\eta sh\eta l_1+k_1ch\eta l_1);\\P_1(\eta)=\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}(\eta sh\eta+kch\eta)A_2(\eta)-[\eta^2sh\eta+(h_0^1+\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1})\eta ch\eta+kh_0^1sh\eta]A_1(\eta).\end{gathered}$$

Температурне поле в системі тіл, згідно (7, 8, 14, 17, 18, 19) знаходиться по формулах:
а) температура у верхньому шарі:

$$T(\rho,\zeta)=T_c+\int_0^{\infty}\frac{G(\eta,\zeta)}{k-\eta}\frac{\Delta_1(\eta)}{\Delta(\eta)}J_0(\eta\rho)\lim_{\Delta\to 0}\delta(\eta-\Delta)d\eta=$$

$$=T_c+\frac{k_1h_0^1(T_c-T_c^1)[k(\zeta-1)-1]}{2kk_1\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}+(k\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}+k_1)h_0^1+kk_1h_0^1(1+l_1\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1})},$$

де $G(\eta,\zeta)=e^{\eta}[ksh(\zeta-1)\eta-\eta ch(\zeta-1)\eta]\quad (0\le\zeta\le 1,\ 0\le\rho<\infty)$;

б) температура в нижньому шарі:

$$T^1(\rho,\zeta)=T_c^1+\int_0^{\infty}\frac{G_1(\eta,\zeta)\Delta_2(\eta)}{(k_1+\eta)\Delta(\eta)}J_0(\eta\rho)\lim_{\Delta\to 0}\delta(\eta-\Delta)d\eta=T_c^1+$$

$$+\frac{kh_0^1\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}(T_c-T_c^1)[k_1(\zeta+l_1)+1]}{2kk_1\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}+(k\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}+k_1)h_0^1+kk_1h_0^1(1+l_1\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1})},$$

де $G_1(\eta,\zeta)=e^{-\eta l_1}[k_1sh(\zeta+l_1)\eta-\eta ch(\zeta+l_1)\eta]\quad (-1\le\zeta\le 0, 0\le\rho\le\infty)$.

Слід відмітити, що при $h_0^1\to\infty$, одержується розв'язок задачі при ідеальному тепловому контакті [5].

Зроблено числові підрахунки і побудовано графіки для температури T/T_0 , T^1/T_0 (пунктирною лінією позначено T^1/T_0) при фіксованих значенях: $T_c=T_0$, $T_c^1=0$, $l_1=\frac{1}{2}$.

На рис. 1. показано розподіл температури при фіксованих $\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}=0{,}5$, $k=\infty$, $k_1=\infty$ по товщині шарів в залежності від контактної провідності h_0^1. На рис.2 показано розподіл температури по товщині шарів при фіксованому $h_0^1=1$, $k=\infty$, $k_1=\infty$ і різних значеннях $\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}$. На рис.3 показано розподіл температури в зоні контакту при фіксованому $h_0^1=1$, $\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}=0{,}5$, $k_1=\infty$ в залежності від коефіцієнта теплообміну k. На рис. 4 показано розподіл температури в зоні контакту при фіксованому $h_0^1=1$, $\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}=0{,}5$, $k=\infty$ і різних значеннях k_1.

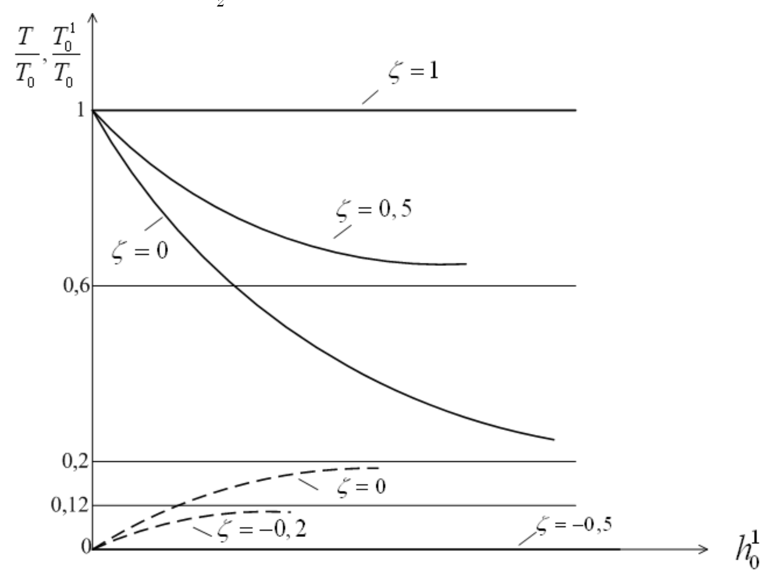

Рис. 1. **Розподіл температури по товщині шарів ($\zeta=-0{,}5$; -0,2 ; 0 ; 0,5 ; 1).**

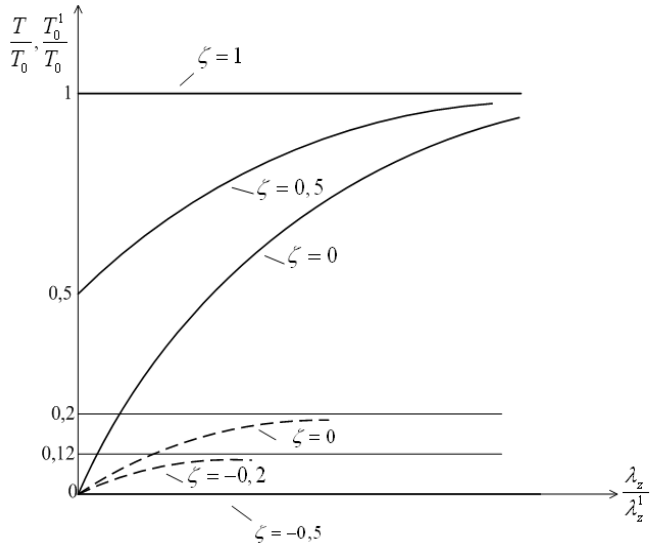

Рис. 2. **Розподіл температури по товщині шарів (** $\zeta = -0,5$; -0,2 **;** 0 ; 0,5 ; 1 **).**

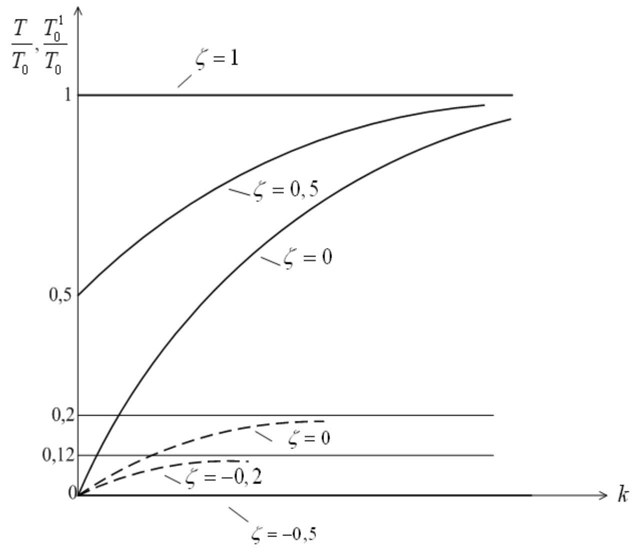

Рис. 3. **Розподіл температури по товщині шарів (** $\zeta = -0,5$; -0,2 **;** 0 ; 0,5 ; 1 **).**

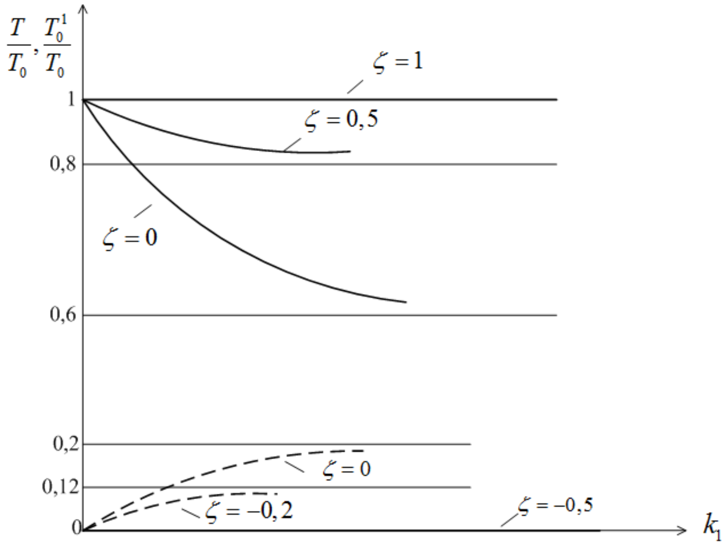

Рис. 4. **Розподіл температури по товщині шарів (** $\zeta = -0,5$; -0,2 **;** 0 ; 0,5 ; 1 **)**

Висновок. Застосувавши інтегральне перетворення Ганкеля температурна задача зведена до знаходження деяких функцій із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, через які визначаються температурні поля в будь-якій точці системи двох тіл.

Результати розрахунків показують, що контактна провідність, коефіцієнти теплопровідності і теплообміну значно впливають на розподіл температури в системі двох контактуючих шарів.

1. Грилицкий Д. В. Осесимметрические контактные задачи теории упругости и термоупругости. (Дмитрий Грилицкий, Ярослав Кизыма). –Львов: Изд-во при Львов. ун.-те, 1981. – 135 с.
2. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. – К.: Наук. думка, 1970. – 304 с.
3. Окрепкий Б. С., Новосад І. Я. Осесиметрична температурна задача для системи двох контактуючих циліндрів. // Міжвузівський збірник за напрямом «Інженерна механіка» – ЛНТУ, – Вип. №28. – Луцьк. – 2010. – С. 367-379.
4. Окрепкий Б. С., Новосад І. Я. Задача теплопровідності для системи двох контактуючих трансверсально-ізотропних циліндричних тіл. // Міжвузівський збірник «Наукові нотатки». – ЛНТУ. – Вип. №30. – Луцьк. – 2011. – С. 131-140.
5. Окрепкий Б. С., Мигович Ф. М. Задача теплопровідності для системи двох контактуючих шарів. // Міжвузівський збірник «Наукові нотатки». – ЛНТУ. – Вип. №44, – Луцьк, 2014. – С. 194-199.
6. Снеддон И. Н. Преобразование Фурье. – М: ИЛ., 1956. – 668 с.

Стаття надійшла до редакції 24.04.2014.