Хохлова Л.Г., Хома Н.Г.

Диференціальні рівняння

Навчальний посібник для студентів фізичних спеціальностей педагогічних вищих навчальних закладів

Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка

Хохлова Л.Г., Хома Н.Г.

Диференціальні рівняння

Рекомендовано вченою радою Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка як навчальний посібник

Тернопіль
Вид-во ТНПУ
2023

УДК 517.9(075.8)

Х-86

Рекомендовано до друку вченою радою Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка

(протокол №9 від 25.04.2023)

Рецензенти: **Романишин О.Я.** – доктор педагогічних наук, професор кафедри інформатики та методики її навчання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка.

Лесик О.Ф. - кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики Західноукраїнського національного університету.

Романюк Л.А. - кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.

Хохлова Л.Г., Хома Н.Г.

Х-86 Практикум з диференціальних рівнянь: Навчальний посібник.-Тернопіль: ТНПУ імені В.Гнатюка, 2023.- 71 с.

Посібник написано відповідно до вимог програми дисципліни “Диференціальні та інтегральні рівняння” для студентів фізичних спеціальностей вищих навчальних закладів. Викладені матеріали з таких розділів теорії диференціальних рівнянь: “Диференціальні рівняння першого порядку”, “Диференціальні рівняння вищих порядків”, “Системи диференціальних рівнянь”. Планування кожної лекції передбачає стислий виклад теоретичного матеріалу, приклади детального розв’язування типових задач, контрольні запитання, вправи для самостійної роботи студентів.

Для студентів вищих педагогічних навчальних закладів.

УДК 517.9(075.8)

ЗМІСТ

Вступ

Багато фізичних процесів у природі та техніці описуються за допомогою звичайних диференціальних рівнянь та їхніх систем. Теорія звичайних диференціальних рівнянь є важливим інструментарієм, що використовується при моделюванні різних прикладних задач. Даний навчальний посібник призначено для студентів фізичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів, які вивчають курс «Диференціальні рівняння». Мета його – підготувати вчителів фізичних спеціальностей до творчого підходу у професійної діяльності при розв'язання конкретних проблем. Основними завданнями курсу «Диференціальні рівняння» є ознайомлення студентів з основними поняттями, методами, теоремами та формулами теорії диференціальних рівнянь та формування первинних навичок застосування теоретичного матеріалу до практичних задач. «Диференціальні рівняння» містять основні питання теорії диференціальних рівнянь першого порядку, диференціальних рівнянь вищих порядків та систем диференціальних рівнянь. На початку кожної лекції, запропонованої у посібнику, наведений перелік основних питань, розглядуваних у лекції, а далі детально викладені стандартні методи розв'язання типових задач. Для закріплення основних положень і навичок розв'язання задач читачеві пропонуються контрольні запитання та завдання для самостійної роботи.

Лекція 1. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку (загальна теорія).

1. Основні поняття та означення.
2. Класифікація розв'язків.
3. Задача Коші. Особливий розв'язок.

1. Диференціальним рівнянням називається співвідношення, яке пов'язує незалежну змінну, невідому функцію та її похідні (або її диференціали).

У випадку, коли невідома функція, яка входить у диференціальне рівняння, залежить тільки від однієї незалежної змінної, диференціальне рівняння називається **звичайним.**

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної (або диференціала), яка входить у рівняння.

Звичайне диференціальне рівняння *n*-го порядку у загальному випадку має вигляд

$$f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1.1}$$

Звичайне диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$f(x, y, y') = 0, \tag{1.2}$$

а якщо його вдається розв'язати відносно похідної, то воно запишеться так:

$$y' = F(x, y). \tag{1.3}$$

Процес відшукання невідомої функції з диференціального рівняння називається розв'язуванням або **інтегруванням** диференціального рівняння.

2. Розв'язком, або інтегралом рівняння (1.3) називається будь-яка диференційовна функція $y = \varphi(x)$, яка задовольняє дане рівняння, тобто при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність

$$\varphi'(x) \equiv F(x, \varphi(x)).$$

Крива $y = \varphi(x)$, що визначається розв'язком рівняння (1.2) або (1.3) називається **інтегральною кривою диференціального рівняння.**

Загальним розв'язком диференціального рівняння (1.2) або (1.3) називаються співвідношення вигляду

$$\Phi(x, y, C) = 0, \text{ або } \Phi(x, y) = C, \tag{1.4}$$

які містять одну довільну сталу величину і володіють тією властивістю, що розв'язуючи їх відносно y при будь-яких часткових значеннях довільної сталої, отримуємо функції виду $y = \varphi(x)$, що є розв'язками рівняння (1.2) чи (1.3).

Рівняння (1.4) визначає **сім'ю інтегральних кривих рівняння** (1.2).

Частковим розв'язком рівняння (1.2) називається такий розв'язок, який одержується із загального розв'язку (1.4) при деякому частковому значенні довільної сталої.

Довільна стала C, що входить у (4), визначається з початкових умов.

Задача з початковими умовами ставиться так: знайти розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (1.2) такий, щоб він приймав задане значення y_0 при заданому значенні незалежної змінної $x = x_0$, тобто, щоб виконувалася рівність

$$y_0 = \varphi(x_0).$$

З точки зору геометрії задача з початковими умовами зводиться до того, щоб із сім'ї інтегральних кривих (1.4) виділити ту, яка проходить через точку (x_0, y_0) площини.

3. Задача Коші. Задача відшукання розв'язку рівняння (1.2), який задовольняє початкові умови

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0,$$

називається задачею Коші.

Особливий розв'язок. Розв'язок диференціального рівняння, який не може бути отриманий із загального розв'язку при жодному частковому значенні довільної сталої, включаючи $\pm\infty$, називається його особливим розв'язком.

Лекція 2. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них.

1. Основні поняття та означення.
2. Приклади розв'язування типових задач.

1. Рівняння з відокремлюваними змінними є важливим типом рівнянь першого порядку.

Якщо в диференціальне рівняння першого порядку $F(x, y, y') = 0$ похідна y' входить у першому степені, то після розв'язування його відносно y' отримаємо рівняння виду

$$f(x, y) + \varphi(x, y)y' = 0.$$

Так як $y' = \frac{dy}{dx}$, то це рівняння може бути записане так:

$$f(x, y)dx + \varphi(x, y)dy = 0.$$

В окремому випадку, коли кожна з функцій $f(x, y)$ і $\varphi(x, y)$ є добутком двох функцій, одна з яких - функція тільки *x*, а інша – тільки *y,* тобто коли

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y), \text{ а } \varphi(x, y) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y),$$

рівняння набуває вигляду

$$f_1(x) \cdot f_2(y)dx + \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y)dy = 0 \qquad (2.1)$$

Рівняння (2.1) називається рівнянням з відокремлюваними змінними. Відокремлення змінних відбувається поділом обох частин (2.1) на добуток $\varphi_1(x) \cdot f_2(y)$, в якому $f_2(y)$ – функція тільки від *y,* а $\varphi_1(x)$- функція тільки від *x*. При діленні на цей добуток рівняння набуде вигляду

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0, \qquad (2.2)$$

а його **загальний інтеграл** запишеться так:

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = C. \qquad (2.3)$$

Особливі розв'язки рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння (2.1) можна записати так:

$$\varphi_1(x)\cdot f_2(y)\cdot\left(\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx+\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy\right)=0.$$

Тому крім знайденого раніше загального інтегралу (2.3) рівняння (2.1), його можуть задовольняти також розв’язки, які одержуються з рівняння

$$\varphi_1(x)\cdot f_2(y)=0. \tag{2.4}$$

Якщо ці розв’язки не входять в загальний інтеграл (2.3), то вони будуть **особливими** розв’язками рівняння (2.1).

Рівняння виду

$$y'=f(ax+by+c) \tag{2.5}$$

зводиться до рівняння з відокремленими змінними за допомогою підстановки

$$ax+by+c=z;\quad a+by'=z';\quad y'=\frac{z'-a}{b}.$$

Рівняння (2.5) набуває вигляду:

$$\frac{z'-a}{b}=f(z);\quad z'=bf(z)+a;$$

$$\frac{dz}{dx}=bf(z)+a,\ \text{або}\quad \frac{dz}{bf(z)+a}=dx.$$

Останнє рівняння – рівняння, в якому змінні відокремлені. В загальному інтегралі варто перейти до старої змінної, замінивши *z* на *ax*+*by*+*c*.

2. Задача 1. Знайти загальний інтеграл та особливі розв’язки рівняння

$$y'+y^2=1.$$

Розв’язання.

Перепишемо рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx}=1-y^2.$$

Розділимо обидві частини рівняння на $1-y^2$ і домножимо на dx. Отримаємо рівняння, в якому змінні розділені:

$$\frac{dy}{1-y^2} = dx.$$

Інтегруємо обидві його частини:

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = x + C;$$

$$\frac{1}{2} ln \left|\frac{1+y}{1-y}\right| = x + C.$$

Звідси

$$ln \left|\frac{1+y}{1-y}\right| = 2(x+C); \quad \left|\frac{1+y}{1-y}\right| = e^{2(x+C)};$$

$$\frac{1+y}{1-y} = e^{2(x+C)}, \text{ або } \frac{1+y}{1-y} = -e^{2(x+C)}.$$

Розглянемо кожен із цих випадків окремо.

1) $\frac{1+y}{1-y} = e^{2(x+C)}$, $y = \frac{e^{2(x+C)-1}}{e^{2(x+C)+1}} = \frac{e^{(x+C)}-e^{-(x+C)}}{e^{(x+C)}+e^{-(x+C)}}$.

Загальний інтеграл: $y = th(x+C)$.

2) $\frac{1+y}{1-y} = -e^{2(x+C)}$, $y = \frac{e^{2(x+C)+1}}{e^{2(x+C)-1}} = \frac{e^{(x+C)}+e^{-(x+C)}}{e^{(x+C)}-e^{-(x+C)}}$.

Загальний інтеграл: $y = cth(x+C)$.

Щоб знайти особливий розв'язок, прирівняємо до нуля вираз $1-y^2$, на який ми ділили обидві частини рівняння:

$$1-y^2 = 0, \qquad y = \pm 1.$$

Ці розв’язки є особливими, тому що не можуть бути отримані із загального ні при одному числовому значенні довільної сталої *C*.

Задача 2. Знайти розв’язок рівняння $y' = \frac{1}{3x+y}$.

Розв’язання.

Здійснимо підстановку $3x + y = z$. Диференціюючи, отримаємо:

$3 + y' = z'; \quad y' = z' - 3$.

Тому

$z' - 3 = \frac{1}{z}; \quad z' = \frac{1+3z}{z}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1+3z}{z}$.

Відокремлюємо змінні, помноживши обидві частини останнього рівняння на $\frac{z}{1+3z}dx$. Одержимо $\frac{z}{1+3z}dz = dx$.

Інтегруючи, знаходимо

$$\int \frac{z}{1+3z}dz = x + C;$$

звідки, обчислюючи інтеграл, одержуємо

$\frac{1}{3}z - \frac{1}{9}ln|1 + 3z| = x + C$,

а замінивши *z* на *3x+y*, маємо

$\frac{1}{3}(3x + y) - \frac{1}{9}ln|9x + 3y + 1| = x + C$.

Завдання 3. Швидкість розпаду радію пропорційна кількості радію, що не розпався. Кількість радію на початку процесу *(t=0*) дорівнювала x_0. Відомо, що за 1600 років розпадається половина початкової кількості.

1) Через скільки років кількість радію, що не розпався, буде становити 80 % від початкової кількості?

2) Визначити, який відсоток радію збережеться через 300 років?

Розв'язання. Процес розпаду описується рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = kx. \qquad (2.6)$$

Його розв'язок, як легко встановити, матиме вигляд

$$x = Ce^{kt}. \qquad (2.7)$$

Визначимо в (2.7) довільну сталу C. Відомо з умови задачі, що в початковий момент, тобто при $t = 0$, кількість радію рівна x_0. Таким чином, початкова умова: $x(0) = x_0$. Підставляючи в (1.11) $t = 0; x = x_0$, отримаємо

$$x_0 = Ce^{0\cdot t}; \quad C = x_0,$$

а тому (2.7) перепишеться так:

$$x = x_0 e^{kt}. \qquad (2.8)$$

Задача містить умову, яка дозволяє визначити коефіцієнт пропорційності *k*: коли *t=1600,* кількість радію *x* рівна половині початкової кількості, тобто $x = \frac{x_0}{2}$. Підставляючи в (2.8) $\frac{x_0}{2}$ замість *x* і 1600 – замість *t*, одержуємо $\frac{x_0}{2} = x_0 e^{k\cdot 1600}$. Скорочуючи на x_0, матимемо $\frac{1}{2} = e^{k\cdot 1600}$. Для визначення *k*, прологарифмуємо за основою *e* обидві частини цієї рівності:

$$ln\frac{1}{2} = k \cdot 1600; \quad ln1 - ln2 = k \cdot 1600; \quad k = -\frac{ln2}{1600}.$$

Тепер рівність (2.8) запишеться у вигляді

$$x = x_0 e^{\frac{-ln2}{1600}t},$$

або

$$\frac{x}{x_0} = e^{\frac{-ln2}{1600}t}. \qquad (2.9)$$

Дамо відповідь на перше запитання. За умовою $\frac{x}{x_0} = 0{,}8$ (80%).

Підставляючи це значення в останнє рівняння, маємо

$$0{,}8 = e^{\frac{-ln2}{1600}t}.$$

Для визначення *t* прологарифмуємо обидві частини рівності

$ln0{,}8 = -\frac{ln2}{1600}t,$

звідси

$t = -\frac{1600ln0{,}8}{ln2} = -\frac{1600(-0{,}22314)}{0{,}69315} \approx 515$ років.

Щоб відповісти на друге запитання, знайдемо з (2.9) відношення $\frac{x}{x_0}$ при *t*=300:

$\frac{x}{x_0} = e^{\frac{-ln2}{1600}\cdot 300}$; $\frac{x}{x_0} = e^{\frac{-0{,}69315}{1600}\cdot 300} = e^{-0{,}130} \approx 0{,}878 = 87{,}8\%.$

Таким чином, через 300 років збережеться 87,8% початкової кількості радію, а отже, розпадеться за 300 років 12,2%.

Контрольні запитання:

1. Сформулюйте означення диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.
2. Наведіть форми запису диференціального рівняння з відокремлюваними змінними і як вони між собою пов'язані?
3. Коли з'являються особливі розв'язки для диференціального рівняння з відокремлюваними змінними?
4. Чи вірне твердження, що через точку (0;3) проходить лише одна інтегральна крива рівняння $y' = 3y^{\frac{1}{3}}$?

Завдання для самостійної роботи:

Знайти загальні інтеграли, особливі і часткові розв'язки диференціальних рівнянь:

1) $y' = 0;$
2) $y' = a;$
1) $y' = 2x^2 + 5x + 12, y(1) = \frac{1}{6};$
2) $y' - y^2 - 3y + 4 = 0;$
3) $\sqrt{1-y^2}dx + \sqrt{1-x^2}dy = 0;$
4) $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0, \quad y(1) = 2.$

Лекція 3. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку та звідні до них.

1. Основні поняття та означення.
2. Приклади розв'язування типових задач.

1. Якщо рівняння $y' = f(x, y)$ або $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ не змінюються при заміні *x* на *kx* і *y* на *ky*, то вони називаються **однорідними.** **Підстановка**

$$y = ux, \tag{3.1}$$

де *u* – нова шукана функція, перетворює однорідне рівняння в рівняння з відокремлюваними змінними. Після того як нове рівняння буде проінтегроване, потрібно *u* замінити на $\frac{y}{x}$.

До однорідного диференціального рівняння **можна звести** диференціальне рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right), \tag{3.2}$$

де a, b, c, a_1, b_1, c_1 – дійсні числа, причому $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$, а *f*- довільна неперервна функція в розглядуваній області.

Введемо нові змінні α, β:

$$x = \alpha + h, \;\; y = \beta + k, \tag{3.3}$$

де *h,k* – невідомі числа. Тоді, підставляючи в (3.2) значення з (3.3) та

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\beta}{d\alpha},$$

одержуємо:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = f\left(\frac{a\alpha+b\beta+ah+bk+c}{a_1\alpha+b_1\beta+a_1h+b_1k+c_1}\right).$$

У даному рівнянні вважатимемо, що

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0, \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Система (3.4) має єдиний розв'язок. Тому диференціальне рівняння

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = f\left(\frac{a\alpha+b\beta}{a_1\alpha+b_1\beta}\right) \qquad (3.5)$$

відносно змінних α, β є однорідним диференціальним рівнянням.

Проінтегрувавши рівняння (3.5) методом, описаним вище, знайдемо його загальний інтеграл

$$\Phi(\alpha, \beta, C)=0. \qquad (3.6)$$

Підставимо в (3.6) значення

$$\alpha = x - h, \;\; \beta = y - k$$

(h і k знаходяться із системи рівнянь (3.4)). Матимемо загальний інтеграл диференціального рівняння (3.2).

2. Задача 1. Проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $y' = \frac{x+y}{x-y}$;

2. $xydy - y^2dx = (x+y)^2 e^{\frac{-y}{x}}dx$;

Розв'язання:

1) Перш за все слід переконатися, що це рівняння є однорідним.

$f(tx, ty) = \frac{tx+ty}{tx-ty} = \frac{x+y}{x-y} = f(x, y)$.

Це і доводить, що воно однорідне. Зробимо підстановку *y* =*ux.* Тоді $y' = u'x + u$, і рівняння запишемо так:

$$u'x+u= \frac{1+u}{1-u}, \qquad (3.7)$$

або

$$u'x= \frac{1+u^2}{1-u}. \qquad (3.8)$$

Відокремлюючи змінні в рівнянні (3.8), дістаємо таке диференціальне рівняння:

$$\frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи це рівняння, маємо

$$\int \frac{1-u}{1+u^2}du = \int \frac{dx}{x} + C = ln|x| + C.$$

Знайдемо інтеграл

$$\int \frac{1-u}{1+u^2}du = \int \frac{du}{1+u^2} - \int \frac{udu}{1+u^2} = arctgu - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) =$$

$= arctg\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\,(1+\frac{y^2}{x^2})$.

Дістаємо такий загальний інтеграл вихідного диференціального рівняння

$arctg\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = ln|x| + C.$

2) Здійснивши відповідні заміни, переконуємося, що рівняння однорідне. Запишемо його для зручності у вигляді

$$\left((x+y)^2 e^{\frac{-y}{x}} + y^2\right)dx - xydy = 0$$

і зробимо підстановку $y = ux$, з якої випливає,що

$$dy = udx + xdu.$$

Рівняння запишеться у вигляді

$$(x+ux)^2 e^{-u} + u^2x^2)dx - x^2u(udx + xdu) = 0.$$

Поділивши обидві частини на x^2, одержимо рівняння

$$(1+u)^2 e^{-u} + u^2)dx - u(udx + xdu) = 0,$$

або

$$(1+u)^2 e^{-u} + u^2 - u^2)dx - uxdu = 0.$$

Це рівняння з відокремленими змінними. Розділяючи їх, одержимо

$$\frac{dx}{x} - \frac{udu}{(1+u)^2 e^{-u}} = 0. \qquad (3.9)$$

Інтеграл $\int \frac{udu}{(1+u)^2 e^{-u}} = \int \frac{ue^u du}{(1+u)^2} = \frac{e^u}{1+u}$.

З (3.9) маємо

$$\ln x - \frac{e^u}{1+u} = -\ln C$$

або

$$\ln x + \ln C = \frac{e^u}{1+u}.$$

Замінюючи u на $\frac{y}{x}$, отримуємо

$$\ln Cx = \frac{xe^{\frac{y}{x}}}{x+y},$$

і накінець

$$(x+y)\ln Cx = xe^{\frac{y}{x}}.$$

Задача 2. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x-7y+7}{3x-7y-3}. \qquad (3.10)$$

Розв'язання. Тут

$$\frac{a}{a_1} = -\frac{7}{3}; \quad \frac{b}{b_1} = -\frac{3}{7}.$$

Отже, $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$.

З системи рівнянь

$$\begin{cases} -7h + 3k + 7 = 0, \\ 3h - 7k - 3 = 0, \end{cases}$$

Знаходимо $h = 1,\ k = 0$.

Використаємо підстановку

$$x = \alpha + 1; \quad y = \beta. \qquad (3.11)$$

Вона зводить рівняння (3.10) до вигляду

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{3\beta - 7\alpha}{3\alpha - 7\beta}.$$

Нехай

$$\beta = u\alpha.$$

Тоді

$$\alpha\frac{du}{d\alpha} + u = \frac{3u-7}{3-7u},$$

або

$$\alpha\frac{du}{d\alpha} = \frac{7(u^2-1)}{3-7u}.$$

Відокремлюючи змінні, дістанемо диференціальне рівняння

$$\frac{3-7u}{7(u^2-1)}du = \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Проітегрувавши обидві частини, матимемо

$$\int \frac{3-7u}{7(u^2-1)}du = \int \frac{d\alpha}{\alpha} + ln|C|,$$

або

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| - \frac{1}{2}ln|u^2-1| = ln|\alpha| + ln|C|. \quad (3.12)$$

З рівності (3.12) одержуємо такий загальний інтеграл:

$$\left(\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}\right)^{3/7} = C(\beta^2-\alpha^2).$$

Підставимо сюди значення β, α і на основі формул (3.11) дістанемо загальний інтеграл вихідного рівняння (1.30):

$$\left(\frac{y-x+1}{y+x-1}\right)^{3/7} = C(y^2-(x-1)^2).$$

<u>Контрольні запитання:</u>

1. Яка функція називається однорідною?
2. Сформулюйте означення однорідного диференціального рівняння 1-го порядку.
3. Вкажіть метод знаходження загального розв'язку однорідного диференціального рівняння 1-го порядку.
4. Диференціальне рівняння записане у вигляді $P(x,y)dx +$ $+Q(x,y)dy = 0$: а) коли це рівняння буде однорідним? б) у якому випадку воно є рівнянням з відокремлюваними змінними?

<u>Завдання для самостійної роботи:</u>

Проінтегрувати рівняння:

1) $(x+y)dx + (y-x)dy = 0;$
2) $(x^2-xy)dy + y^2dx = 0;$
3) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} + 1;$
4) $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y;$

5) $xy' + x\cos\frac{y}{x} - y + x = 0.$

Лекція 4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку та звідні до них.

1. Основні поняття та означення.
2. Приклади розв'язування типових задач.

1. Рівняння виду

$$y' + p(x)y = g(x) \tag{4.1}$$

називається **лінійним** тому, що шукана функція y і її похідна y' входять в нього в першому степені. Функції $p(x), g(x)$ вважаються неперервними на проміжку (a, b), в якому шукається розв'язок рівняння (4.1).

Якщо права частина в (4.1) – функція $g(x)$ тотожньо рівна нулеві при всіх значеннях x із (a, b), то рівняння набуває вигляду

$$y' + p(x)y = 0 \tag{4.2}$$

і називається в цьому випадку **лінійним однорідним** диференціальним рівнянням першого порядку. Воно відповідає рівнянню (4.1), яке при $q(x) \neq 0$ називається **неоднорідним**. Зауважимо, що лінійне однорідне рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (4.1) можна знайти з допомогою **підстановки**

$$y = e^{-\int p(x)dx} v(x), \tag{4.3}$$

де $v(x)$ – нова шукана функція. Множник $e^{-\int p(x)dx}$ - загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (4.2), яке відповідає рівнянню (4.1), причому в цьому загальному розв'язку відсутній множник C.

Ця підстановка має перевагу перед підстановкою $y = uv$, оскільки функція u завжди дорівнює виразу $e^{-\int p(x)dx}$ і її, власне, кожний раз шукати є зайвим.

Підстановка (4.3) зводить (4.1) до рівняння з відокремлюваними змінними.

2. Задача 1. Знайти розв'язок рівняння $y' + y = e^x$, що задовольняє початкову умову $y(0) = 1$.

Розв'язування. Порівнюючи це рівняння з (4.1), ми бачимо, що функція $p(x)$ - коефіцієнт при y - дорівнює 1. Щоб застосувати підстановку (4.3), обчислимо $\int p(x)dx$, який при

$p(x) = 1$ запишеться у вигляді $\int p(x)dx = \int dx = x$, а $e^{-\int p(x)dx} = e^{-x}$. Тому підстановка (4.3) має вигляд

$$y = e^{-x} \cdot v. \tag{4.4}$$

Підставимо вираз (4.4) в задане рівняння. Для цього (4.4) продиференціюємо як добуток

$$\begin{array}{l} 1|\ y' = e^{-x}v'^{(x)} - v(x)e^{-x} \\ + \\ \underline{1|\ y = \qquad\qquad v(x)e^{-x}} \\ \qquad e^x = e^{-x}v'^{(x)} \end{array}$$

(Додаючи в лівих частинах цих рівностей $y' + y$, ми отримаємо праву частину заданого рівняння, тобто, e^x).

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dv}{dx} e^{-x} = e^x.$$

Помноживши обидві його частини на $e^x dx$, одержимо

$$dv = e^{2x}dx,$$

а інтегруючи, отримаємо

$$v = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

Підставимо знайдене значення в (4.4)

$$y = (\frac{1}{2}e^{2x} + C)e^{-x},$$

або

$$y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}e^{x}. \qquad (4.5)$$

Як доводиться в теорії інтегрування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку (4.1), загальний розв'язок цього рівняння дорівнює сумі двох доданків, з яких один є загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння (4.2), а інший – частковим розв'язком неоднорідного рівняння. В нашому випадку у (4.2) перший доданок Ce^{-x} – загальний розв'язок однорідного лінійного рівняння $y' + y = 0$, відповідного заданому, а другий $\frac{1}{2}e^{x}$ - частковий розв'язок заданого рівняння.

Справді, рівняння $y' + y = 0$ – рівняння з відокремлюваними змінними: $\frac{dy}{dx} = -y$; $\frac{dy}{y} - dx$. Інтегруючи, одержимо

$$ln|y| = -x + ln|C|; \;\; ln|y| - ln|C| = -x; \;\; ln\left|\frac{y}{C}\right| = -x;$$

$$\left|\frac{y}{C}\right| = e^{-x}; \;\; |y| = |C|e^{-x}; \;\; y = Ce^{-x}.$$

З (4.5) визначимо довільну сталу *C,* використовуючи початкову умову $y(0) = 1$:

$$1 = Ce^{0} + \frac{1}{2}e^{0}; \;\; 1 = C + \frac{1}{2}; \;\; C = \frac{1}{2}.$$

Підставляючи в (4.5) $C = \frac{1}{2}$, отримаємо частковий розв'язок

$$y = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x}.$$

Задача 2. Знайти залежність сили струму *I* від часу *t* в контурі з електрорушійною силою *E*, опором *R* та індуктивністю *L,* де *E, R, L* – сталі.

Розв'язання. Спираючись на закон Ома, маємо

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E.$$

Це лінійне рівняння. Розв'яжемо його заміною $I = uv$ (викладки пропонується зробити самостійно). Дістанемо загальний розв'язок

$$I(t) = Ce^{\frac{-R}{L}t} + \frac{E}{R},$$

де C – довільна стала. При $t = 0$ одержуємо $I(0) = 0$, тому $C = -\frac{E}{R}$. Отже,

$$I(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{\frac{-R}{L}t}).$$

З формули видно, що сила струму при $t \to +\infty$ наближається до стаціонарного значення $I_0 = \frac{E}{R}$.

Якщо праву частину рівняння (1.33) помножити на y^n при умові, що n – будь-яке дійсне число, крім нуля і одиниці, то отримаємо рівняння

$$y' + p(x)y = g(x)y^n. \tag{4.6}$$

Воно називається рівнянням Бернуллі. Після множення його обох частин на y^{-n} та підстановки $y^{1-n} = z$, де z – нова шукана функція, воно зводиться до лінійного.

Перетворення рівняння Бернуллі в лінійне будемо проводити в такій послідовності:

1) помножимо обидві частини рівняння на y^{-n};

2) здійснимо підстановку $y^{-n} = z$. Обидві частини рівності продиференціюємо :

$$(1-n)y^{-n}y' = z'; \ \ y^{-n}y' = \frac{z\prime}{1-n};$$

3) отримане рівняння проінтегруємо як лінійне з допомогою підстановки (4.3), в якій замість y потрібно писати z;

4) повернемося до шуканої функції, заміняючи z на y^{1-n}.

Задача 3. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$xy' - y(2ylnx - 1) = 0.$$

Розв’язання. Зведемо рівняння до виду (4.6)

$$y' + \frac{1}{x}y = 2\frac{lnx}{x}y^2.$$

1) Обидві частини рівняння помножимо на y^{-2}:

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = 2\frac{lnx}{x}. \tag{4.7}$$

2) Зробимо тепер підстановку

$$y^{-1} = z. \tag{4.8}$$

Диференціюючи обидві частини цієї рівності і пам'ятаючи, що y є функція від x, одержимо

$$-y^{-2}y' = z', \qquad \text{а } y^{-2}y' = -z'.$$

Проводячи ці заміни в (4.7), матимемо рівняння

$$-z' + \frac{1}{x}z = 2\frac{\ln x}{x},$$

або

$$z' - \frac{1}{x}z = -2\frac{lnx}{x},$$

яке є лінійним відносно z і z'.

3) Щоб здійснити підстановку (1.35), обчислимо спочатку вхідний до неї інтеграл.

У нас $p(x) = -\frac{1}{x}$; $-\int p(x)dx = \int \frac{1}{x}dx = lnx$; $e^{-\int p(x)dx} = e^{lnx} = x$.

Підстановка: $z = vx$.

$$\begin{array}{r|l} & z' = v'x + v \\ -\frac{1}{x} & z = \qquad vx \end{array}$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$-2\frac{lnx}{x} = v'x; \quad \frac{dv}{dx} = -2\frac{lnx}{x^2};$$

$$dv = -2\frac{lnx}{x^2}dx;$$

$$v = -2\int \frac{lnx}{x^2}dx = -2(-\frac{lnx}{x} + \int \frac{dx}{x^2}) = 2\frac{lnx}{x} + 2\frac{1}{x} + C;$$

$$\left| \begin{array}{l} u = lnx \\ dt = \frac{dx}{x^2} \end{array} \right| \begin{array}{l} du = \frac{1}{x}dx \\ t = -\frac{1}{x} \end{array}$$

$$- - - - - - - - - -$$

$$z = vx = \left(\frac{lnx}{x} + 2\frac{1}{x} + C\right)x;$$

$$z = Cx + 2(lnx + 1).$$

Щоб повернутися до вихідної шуканої функції, скористаємося підстановкою (4.8) і отримаємо

$$y^{-1} = Cx + 2(lnx+1).$$

Контрольні запитання:

1. Яке рівняння називається лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку?
2. Який вигляд має лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 1-го порядку?
3. Яке рівняння називається лінійним однорідним, що відповідає даному неоднорідному диференціальному рівнянню 1-го порядку?
4. Вкажіть основні кроки методу Бернуллі.
5. У чому полягає суть методу варіації довільної сталої (метод Лагранжа)?
6. Яка структура загального розв'язку лінійного диференціального рівняння 1-го порядку?

Завдання для самостійної роботи:

Проінтегрувати рівняння:

1. $y' + ytgx = cos^2x; \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}5;$
2. $y' - \frac{1}{x+2}y = x^2 + 4x + 5; \quad y(-1) = 1{,}5;$
3. $y' - 2xy = 1 - 2x^2; \quad y(0) = 2;$
4. $xy' + y = x^2 + 3x + 2; \quad y(1) = \frac{29}{6};$
5. $2yx' + x = 2y^3;$
6. $(y^2 + 1)x' + 2xy = 2y^2.$

Лекція 5. Рівняння в повних диференціалах.

1. Основні поняття та означення.
2. Приклади розв'язування типових задач.

1. Диференціальне рівняння виду

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{5.1}$$

називається **рівнянням в повних диференціалах** при умові, що його права частина є повним диференціалом деякої функції. Згідно сказаного вище, рівняння (1.41) можна записати у вигляді

$$dU(x,y)=0,$$

а тому загальним інтегралом (1.41) є $U(x,y)=C$.

Необхідною і достатньою умовою того, що рівняння (1.41) є рівнянням в повних диференціалах є рівність

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{5.2}$$

Доведення достатності дає **спосіб відшукання** функції $U(x,y)$.

1) Спочатку записуємо формулу

$$U(x,y)=\int M(x,y)dx+C(y), \tag{5.3}$$

$C(y)$ – довільна неперервна функція разом зі своєю першою похідною.

2) З рівності

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+C'(y)=N(x,y) \tag{5.4}$$

знаходимо $C'(y)$, інтегруючи яке матимемо $C(y)$.

3) Підставляємо $C(y)$ у формулу (5.3) та одержуємо функцію $U(x,y)$. Для отримання загального інтегралу вихідного рівняння функцію $U(x,y)$ потрібно прирівняти до довільної сталої C.

Виникає питання, чи не можна будь-яким способом звести рівняння (5.1) до рівняння в повних диференціалах. Зокрема, чи можна множенням на деякий множник $\tau(x,y)$ перетворити рівняння (5.1) у рівняння в повних диференціалах?

Виявляється, що за певних умов це цілком можливо. Множник $\tau(x,y)$ при цьому називають інтегрувальним множником рівняння (5.1).

Зауваження. При множенні рівняння (5.1) на інтегрувальний множник можуть виникати сторонні розв’язки, які з’являються з рівняння $\tau(x,y)$=0, які очевидно також справджують і перетворене рівняння

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = (\tau M)dx + (\tau N)dy = 0.$$

Тому такі сторонні розв'язки, якщо вони не входять до множини розв'язків рівняння (5.1), необхідно вилучати.

2. Задача 1. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$xdx + ydy = 0. \tag{5.5}$$

Розв'язання.

Тут $M = x, N = y,$ тому, згідно з (1.42) маємо рівняння в повних диференціалах. Використовуючи (1.43), знаходимо

$$U(x,y) = \int xdx + C(y) = \frac{x^2}{2} + C(y).$$

Диференціюючи цю рівність по y, матимемо

$$\frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y) = y = C'(y),$$

звідки інтегруванням за змінною y знаходимо

$$C(y) = \int ydy + C = \frac{y^2}{y} + C,$$

Так що

$$U(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + C,$$

і загальний інтеграл має вигляд

$$U(x,y) = x^2 + y^2 = C.$$

Задача 2. Рівняння

$$(y - x)e^{-x}dx + xe^{-x}dy = 0$$

має незалежні інтегрувальні множники

$$\tau(x,y) = e^x,\ \tau_1(x,y) = e^x(2xy - x^2).$$

Отже, $\frac{\tau_1}{\tau} = 2xy - x^2 = C$ – загальний інтеграл рівняння. Після множення рівняння на інтегрувальний множник $\tau_1(x,y)$ отримаємо

$$(2xy - x^2)(y - x)dx + (2xy - x^2)xdy = 0,$$

яке перетворюється в нуль при $\tau_1(x,y)$ =0, тобто при $y=\frac{x}{2}$ і при $x=0$. Проте ці функції не є сторонніми розв'язками рівняння, оскільки вони містяться у формулі загального інтегралу.

Розглянемо на конкретному прикладі спосіб побудови інтегрувального множника методом зрівнювання інтегрувальних множників.

Задача 3. Проінтегрувати рівняння

$$(x-y^2)dx+2xydy=0.$$

Розв'язання.

Запишемо його у вигляді

$$xdx+(-y^2dx+2xydy)=0.$$

Для першого доданка інтегрувальний множник, очевидно, має вигляд $\tau_0(x,y)\varphi_1(u_1)=1\cdot\varphi_1(x)=\mu_1;$ для другого доданка він визначається з рівняння

$$\frac{d\tau}{d\omega}=\tau\frac{\tilde{\gamma}(x,y)}{N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y}},$$

$$\tau=\tau\big(\omega(x,y)\big),\qquad \omega=\omega(x,y),\qquad \tilde{\gamma}(x,y)=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$$

і має вигляд $\tau_2=x^{-1}y^{-2}$. Отже,

$$\tau_2(-y^2dx+2xydy)=du_2=dln|x^{-1}|+2dln|y|=dln|x^{-1}y^2|,$$

Тобто $u_2=x^{-1}y^2$. Тоді загальний інтегрувальний множник μ_2 матиме вигляд

$$\mu_2=x^{-1}y^{-2}\varphi_2(x^{-1}y^2).$$

Запишемо вихідне рівняння у вигляді

$$\varphi_1(x)dx+x^{-1}y^{-2}\varphi_2(x^{-1}y^2)(-y^2dx+2xydy)=0$$

і доберемо функцію φ_2 так, щоб знайти спільний інтегрувальний множник $\tau(x,y)$. Для цього потрібно функцію φ_2 дібрати так, щоб множник $\mu_2=x^{-1}y^{-2}\varphi_2(x^{-1}y^2)$ залежав лише від *x*. Це можливо при $\varphi_2=x^{-1}y^2$. При цьому $\mu_2 = x^{-3}$. Якщо покласти $\varphi_1 = x^{-3}$, то спільний інтегрувальний множник буде $\tau = x^{-2}$.

Після множення рівняння на цей множник, одержимо рівняння в повних диференціалах

$$\frac{dx}{x} + \frac{2xydy - y^2dx}{x^2} = 0,$$

$$ln|x| + x^{-1}y^2 = C.$$

<u>Контрольні запитання:</u>

1. Яке рівняння називається диференціальним рівнянням в повних диференціалах?
2. Сформулюйте необхідну і достатню умову того, щоб рівняння було в повних диференціалах.
3. Сформулюйте алгоритм відшукання загального інтегралу рівняння в повних диференціалах.
4. Що таке іетегрувальний множник?
5. Охарактеризуйте методи відшукання інтегрувального множника.

<u>Завдання для самостійної роботи:</u>

Проінтегрувати рівняння:

1. $(3y^2 + 2xy + 2x)dx + (6xy + x^2 + 3)dy = 0.$
2. $(x^2y^2 - 1)dx + 2x^2ydy = 0.$
3. $(ye^x - e^y)dx = (xe^y - e^x)dy.$
4. $(ysin2x + x)dx + (y^2 - cos2x)dy = 0$

Лекція 6-7. Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків.

1. Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають пониження порядку.
2. Рівняння, які містять тільки похідну порядку *n* і незалежну змінну.
3. Рівняння, які не містять шуканої функції.
4. Рівняння, які не містять незалежної змінної.

1. **Диференціальне рівняння порядку $\boldsymbol{n}$** $(n > 1)$ має вигляд

$$f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{6.1}$$

де x – незалежна змінна, y – шукана функція. Довільна функція $y = \varphi(x)$, визначена і n разів диференційовна в проміжку (a, b), називається розв'язком цього рівняння, якщо вона перетворює його в тотожність.

Задача Коші. Задача Коші для диференціального рівняння (6.1) ставиться так:

Знайти такий розв'язок диференціального рівняння, щоб він і його похідні до порядку $(n-1)$ включно при заданому значенні аргументу $x = x_0$ приймали б задані значення, тобто щоб цей розв'язок задовольняв умови:

$$y(x_0) = y_0; \;\; y'(x_0) = {y_0}'; \;\; \dots; \;\; y^{(n-1)}(x_0) = {y_0}^{(n-1)}, \tag{6.2}$$

де x_0 і y_0; ${y_0}'$; ${y_0}''$; …; ${y_0}^{(n-1)}$ – задані числа, які називаються **початковими даними чи початковими умовами.** Число x_0 називається початковим значенням незалежної змінної, а числа y_0; ${y_0}'$; ${y_0}''$; …; ${y_0}^{(n-1)}$ – початковими значенями розв'язку і його похідних.

Особливістю задачі Коші є те, що значення як шуканої функції, так і всіх її похідних до порядку $(n-1)$ включно задаються при одному і тому ж значенні незалежної змінної $x = x_0$.

Розв'язок рівняння (2.1) має в своєму складі n довільних сталих і має вигляд

$F(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$.

Якщо довільні сталі в цей розв'язок входять так, що задачу Коші можна розв'язати при довільних початкових умовах, то він називається **загальним**.

2. **І тип. Рівняння, які містять тільки похідну порядку $\boldsymbol{n}$ і незалежну змінну.**

Це рівняння має вигляд

$$F\left(x, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (6.3)$$

Якщо вдається це рівняння розв'язати відносно $y^{(n)}$, то воно запишеться так:

$$y^{(n)} = f(x). \qquad (6.4)$$

Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = \int dx \int dx \dots \int f(x)dx + C_1 + C_2x + C_3x^2 + \dots + C_nx^{n-1}. \qquad (6.5)$$

З цього видно, що для одержання загального розв'язку рівняння (6.4) потрібно *n* разів проінтегрувати функцію $f(x)$ і додати до отриманого результату многочлен від x степеня (n - 1), коефіцієнти якого є довільні сталі.

Якщо задача Коші розв'язується для рівняння (6.4) з початковими умовами (6.2), то частковий розв'язок рівняння (6.4) має вигляд

$$y = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \dots \int_{x_0}^{x} f(x)dx + \frac{{y_0}^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} +$$

$$+ \frac{{y_0}^{(n-2)}}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2} + \dots + y_0'(x - x_0) + y_0. \qquad (6.6)$$

Задача 1. Розв'язати задачу Коші при вказаних початкових умовах для рівняння $y''' = \frac{1}{x}$; $y(1) = 1$; $y'(1) = 2$; $y''(1) = -2$.

Розв'язання. На основі (6.6) виконаємо тричі інтегрування функції $\frac{1}{x}$ кожний раз в межах від 1 до x ($x_0 = 1$).

Перше інтегрування:

$\int_1^x \frac{1}{x} dx = \ln x - ln1 = lnx.$

Друге інтегрування:

$$\int_1^x lnxdx = xlnx \Big|_1^x - \int_1^x dx = x\ln x - (x - 1).$$

$$\left| \begin{matrix} u = lnx \\ dv = dx \end{matrix} \right| \begin{matrix} du = \frac{1}{x}dx \\ v = x \end{matrix}.$$

Третє інтегрування:

$$\int_1^x (xlnx-(x-1))dx=\int_1^x xlnxdx-\int_1^x (x-1)dx=$$

$$\left|\begin{matrix} u=lnx \\ dv=xdx \end{matrix}\right| \begin{matrix} du=\frac{1}{x}dx \\ v=\frac{x^2}{2} \end{matrix}$$

$$=\frac{x^2}{2}lnx\Big|_1^x-\frac{1}{2}\int_1^x dx-\int_1^x (x-1)dx=\frac{x^2}{2}lnx-\frac{1}{4}x^2\Big|_1^x-$$

$$-\frac{(x-1)^2}{2}\Big|_1^x=\frac{x^2}{2}lnx-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}-\frac{(x-1)^2}{2}=\frac{x^2}{2}lnx-\frac{3}{4}x^2+x-\frac{1}{4}.$$

На основі формули (6.6), покладаючи в ній n=3, маємо

$y_0=1;\ \ y_0{}'=2;\ \ y_0{}''=-2;\ \ x_0=1;$

$$y=\frac{x^2}{2}lnx--\frac{3}{4}x^2+x-\frac{1}{4}-(x-1)^2+2(x-1)+1.$$

Розкриваючи дужки і зводячи подібні доданки, отримаємо

$$y=\frac{x^2}{2}lnx-\frac{7}{4}x^2+5x-\frac{9}{4}.$$

Задача 2. В опорі матеріалів доводять, що диференціальне рівняння пружної лінії консолі з сталим поперечним перерізом і зосередженою на вільному кінці силою P має вигляд

$$\frac{d^2\omega}{dx^2}=-\frac{Px}{EI},$$

де ω - прогин консолі в перерізі з абсцисою x, а EI – постійна величина, так звана жорсткість на прогин балки.

Знайти розв’язок цього рівняння, що задовольняє початкові умови:

$$\omega(l)=0;\ \ \omega'(l)=0.$$

Розв’язання. Рівняння належить до розглядуваного типу (6.4). Якщо не користуватися відразу готовою формулою (6.6), то інтегрування рівняння можна провести так.

Перше інтегрування дає

$$\frac{d\omega}{dx}=-\frac{P}{EI}\int xdx=-\frac{P}{EI}\frac{x^2}{2}+C_1.$$

Враховуючи другу початкову умову $\omega'(l) = 0$, отримуємо рівняння для визначення довільної сталої

$$0 = -\frac{P}{EI}\frac{l^2}{2} + C_1; \;\; C_1 = \frac{P}{EI}\frac{l^2}{2}.$$

Тому

$$\frac{d\omega}{dx} = -\frac{P}{EI}\frac{x^2}{2} + \frac{P}{EI}\frac{l^2}{2} = -\frac{P}{2EI}(x^2 - l^2).$$

Інтегруючи повторно, одержуємо

$$\omega = -\frac{P}{2EI}\left(\frac{x^3}{3} - l^2x\right) + C_2.$$

Використовуючи першу початкову умову, знаходимо

$$0 = -\frac{P}{2EI}\left(\frac{l^3}{3} - l^3\right) + C_2,$$

звідки

$$C_2 = -\frac{Pl^3}{3EI},$$

А тому

$$\omega = -\frac{P}{2EI}\left(\frac{x^3}{3} - l^2x\right) - \frac{Pl^3}{3EI},$$

Дане рівняння – рівняння пружної лінії консолі. З нього видно, що ця лінія – кубічна парабола.

3. ІІ тип. Рівняння, які не містять шуканої функції.

Рівняння порядку *n*, яке не містить шуканої функції, має такий вигляд:

$$f\left(x, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{7.1}$$

Порядок його може бути пониженим на одиницю з допомогою підстановки

$$y' = p(x), \tag{7.2}$$

де $p(x)$ – нова шукана функція.

Ця підстановка приводить до рівняння

$$f\left(x, p, p', p'', \dots, p^{(n-1)}\right) = 0.$$

Якщо рівняння не містить ні шуканої функції *y*, ні її похідних до порядку $(k-1)$ включно, тобто має вигляд

$$f\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0, \qquad (7.3)$$

то його порядок може бути понижений на k одиниць за допомогою підстановки

$$y^{(k)} = p(x). \qquad (7.4)$$

Після визначення функції $p(x)$ рівняння (7.3) буде зведене до рівняння (6.3), інтегрування якого розібрано вище.

До цього ж типу рівнянь відносяться і такі, які містять тільки дві послідовні похідні, тобто рівняння виду

$$f\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (7.5)$$

Якщо це рівняння можна розв'язати відносно $y^{(n)}$, то воно набуває вигляду

$$y^{(n)} = \varphi(y^{(n-1)}) \qquad (7.6)$$

і інтегрується підстановкою

$$y^{(n-1)} = p(x), \qquad (7.7)$$

яка приводить до рівняння

$$\frac{dp}{dx} = \varphi(p).$$

Визначивши з цього рівняння функцію $p(x)$ і підставивши її в (7.7), прийдемо до рівняння (6.3).

Задача 1. Знайти розв'язок рівняння

$$(1 - x^2)y'' - xy' = 2.$$

Розв'язання. Нехай $y' = p(x)$. Тоді $y'' = \frac{dp}{dx}$, і рівняння перепишеться так:

$$(1 - x^2)\frac{dp}{dx} - xp = 2.$$

Це лінійне рівняння відносно p і $\frac{dp}{dx}$. Поділимо його обидві частини на коефіцієнт при $\frac{dp}{dx}$ і отримаємо

$$\frac{dp}{dx} - \frac{x}{1-x^2}p = \frac{2}{1-x^2}. \qquad (7.8)$$

Зробимо підстановку (4.3).

Шукана функція

$$p = e^{-\int -\frac{x}{1-x^2}dx} v(x);$$

$$\int \frac{x}{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2), \quad e^{-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)} = e^{ln\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} v(x).$$

Підстановка в (7.8) дає:

$$\frac{2}{1-x^2} = v'^{(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}; \ \frac{dv}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}; \ dv = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx;$$

$$v = 2arcsinx + C_1; \ p = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(2arcsinx + C_1).$$

Але $p = y' = \frac{dy}{dx}$, а тому

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(2arcsinx + C_1); \ dy = \frac{(2arcsinx + C_1)}{\sqrt{1-x^2}}dx;$$

$$y = 2\int \frac{arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}dx + C_1\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + C_2;$$

$$y = arcsin^2x + C_1 arcsinx + C_2.$$

Задача 2. Знайти плоскі криві, у яких кривизна постійна.

Розв’язування. Відомо, що кривизна кривої

$$K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

Знайдемо розв’язок цього рівняння, вважаючи, що K - величина постійна.

Підстановка: $y' = p(x), \ y'' = \frac{dp}{dx}$;

$$K = \frac{\frac{dp}{dx}}{(1+p^2)^{3/2}}; \ \frac{dp}{dx} = K(1+p^2)^{3/2}.$$

Отримали рівняння з відокремлюючими змінними. Відокремлюючи їх, одержуємо

$$\frac{1}{K}\frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}} = dx; \ \frac{1}{K}\int \frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}} = x + C_1.$$

При обчисленні інтегралу покладемо

$$p = tgz;\ 1 + p^2 = sec^2 z;\ \ dp = \ sec^2 zdz;$$

$$\int \frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}} = \int \frac{sec^2 zdz}{(sec^2 z)^{3/2}} = \int \frac{dz}{secz} = \int coszdz = sinz.$$

Але якщо $tgz = p$, то $sinz = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$.

Тому після першого інтегрування маємо

$$\frac{1}{K}\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = x + C_1.$$

Визначимо звідси p:

$$\frac{1}{K^2}\frac{p^2}{1+p^2} = (x + C_1)^2;\ \ \frac{1}{K^2}p^2 = (x + C_1)^2 + p^2(x + C_1)^2;$$

$$\frac{1}{K^2}p^2 - p^2(x + C_1)^2 = (x + C_1)^2;\ \ p^2\left(\frac{1}{K^2} - (x + C_1)^2\right) =$$

$$= (x + C_1)^2;\ \ p = \pm\frac{x + C_1}{\sqrt{\frac{1}{K^2} - (x + C_1)^2}}.$$

Друге інтегрування дає: $y + C_2 = \pm\sqrt{\frac{1}{K^2} - (x + C_1)^2}$. Замінюючи $\frac{1}{K}$ – величину, обернену до кривизни, радіусом кривизни R ($\frac{1}{K} = R$), отримаємо відповідь

$$(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2 = R^2.$$

Отримане рівняння – рівняння сім’ї всеможливих кіл радіуса *R*.
Отже, ми приходимо до висновку, що єдиними плоскими кривими зі сталою кривизною є кола.

4. ІІІ тип. Рівняння, які не містять незалежної змінної.

Це рівняння в загальному випадку має такий вигляд:

$$f\left(y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{7.9}$$

Пониження порядку на одиницю досягається підстановкою $y' = p(y)$, де $p(y)$ – нова шукана функція. В цьому випадку за незалежну змінну приймається не *x*, а *y*. Тому друга і наступні похідні повинні бути перетворені так, щоб незалежною змінною була *y:*

$$y'' = (p(y))'_x = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p, \qquad (7.10)$$

так як $\frac{dy}{dx} = p$;

$$y''' = (\frac{dp}{dy}p)'_x = (\frac{dp}{dy}p)'_y\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2p}{dy^2}p + \frac{dp}{dy}\frac{dp}{dy}\right)p = \frac{d^2p}{dy^2}p^2 + (\frac{dp}{dy})^2 p \qquad (7.11)$$

і т.д.

Тому рівняння (7.9) запишеться так:

$$f\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2p}{dy^2}, \dots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0.$$

Якщо вдасться знайти загальний розв'язок цього рівняння, то воно матиме вигляд

$$F(y, p, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0. \qquad (7.12)$$

Так як $\frac{dy}{dx} = p$, то (7.12) - рівняння першого порядку, з якого визначиться шукана функція y.

Частковий випадок. Якщо рівняння (7.12) набуває вигляду

$$f(y, y'') = 0 \qquad (7.13)$$

і його вдається розв'язати відносно y'' так, що

$$y'' = \varphi(y), \qquad (7.14)$$

то інтегрування, крім вказаного способу, можна провести так: помножимо обидві його частини на $2y'dx$ і зведемо рівняння до вигляду

$$2y'y''dx = 2\varphi(y)y'dx. \qquad (7.15)$$

Ліва частина цього рівняння $2y'y''dx = d(y'^2)$, а в правій частині $y'dx = dy$, тому (7.15) перепишеться так:

$$d(y'^2) = 2\varphi(y)dy.$$

Звідси випливає, що

$$y'^2 = 2\int\varphi(y)dy + C_1; \;\; y' = \sqrt{2\int\varphi(y)dy + C_1}\;.$$

В останньому рівнянні розділимо змінні. Проінтегрувавши його, знайдемо

$$x + C_2 = \int\frac{dy}{\sqrt{2\int\varphi(y)dy + C_1}},$$

Тобто визначимо x як функцію від y.

До рівняння виду (7.13) зводяться також рівняння вигляду

$$y^{(n)} = f\left(y^{(n-2)}\right), \qquad (7.16)$$

які містять тільки дві похідні, порядки яких відрізняються на дві одиниці. В цьому випадку застосовується підстановка

$y^{(n-2)} = p(x)$.

Задача 1. Знайти загальний роз'язок рівняння $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$.

Розв'язання. Застосуємо підстановку $y' = p(y)$. За (7.10) $y'' = \frac{dp}{dy}p$.

З цими значеннями y' та y'' рівняння перепишеться так:

$$p\frac{dp}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Розділяючи змінні, матимемо $pdp = \frac{dy}{\sqrt{y}}$; $\frac{p^2}{2} = 2\sqrt{y} + 2C_1$; $p^2 = 4\sqrt{y} +$

$+4C_1$.

(Довільнк константу ми ввели під виглядом $2C_1$ з тим, щоб пізніше добути корінь з 4);

$$p = \sqrt{4(\sqrt{y} + C_1)} = 2\sqrt{\sqrt{y} + C_1}.$$

Так як $p = \frac{dy}{dx}$, то останнє рівняння запишеться так: $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{\sqrt{y} + C_1}$.

Розділяючи змінні, одержуємо $\frac{dy}{2\sqrt{\sqrt{y}+C_1}} = dx$. Інтегруючи, отримаємо

$$\frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{\sqrt{y} + C_1}} = x + C_1.$$

Обчислити інтеграл в лівій частині можна з допомогою підстановки

$$\sqrt{y} + C_1 = z^2.$$

В результаті

$$x + C_2 = \frac{2}{3}(\sqrt{y} - 2C_1)\sqrt{\sqrt{y} + C_1}.$$

Контрольні запитання:

1. Опишіть метод розв'язання рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x)$.
2. Охарактеризуйте метод розв'язання рівняння вигляду
F(x, y ′ , y ″) = 0.
3. Охарактеризуйте метод розв'язання рівняння вигляду
F(y, y ′ , y ″) = 0.
4. Для якого випадку при зниженні порядку диференціального рівняння використовується заміна y ′ = p(x) ?
5. Для якого випадку при зниженні порядку диференціального рівняння використовується заміна y ′ = p(y) ?
6. Яку заміну слід використати для зниження порядку рівняння вигляду y ″ = f (y ′) ?
7. Яку заміну потрібно використати для зниження порядку рівняння вигляду $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$.
8. Як можна знизити порядок рівняння $F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$, що містить дві послідовні похідні?

<u>Завдання для самостійної роботи:</u>

Знайти загальні розв'язки рівнянь:

1) $\sqrt{1+x^2}\, y'' - 1 = 0$;
2) $y'' - 2x(x^2 - y') = 0$;
3) $y''^2 = y'$;
4) $y'' = \frac{1}{a}(1 + y'^2)$, *y(0)=y'(0)=0;*
5) $yy'' - 2yy' \ln y = y'^2$.

Лекція 8. Лінійні однорідні диференціальні рівняння вищих порядків.

1. Основні поняття та означення.
2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння із змінними коефіцієнтами.
3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

1. Лінійним диференціальним рівнянням порядку *n* називається рівняння виду

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \quad (8.1)$$

де $f(x)$ – функція незалежної змінної x, по якій обчислені похідні. У рівняння (8.1) функція та її похідні входять у першому степені.

Вважається, що функції $p_{\mathrm{i}}(x)$ $(i = 1,2,\dots,n)$ і права частина рівняння - функція $f(x)$ неперервні в проміжку (a,b). Випадки $a = -\infty, b = +\infty$ не виключаються. Функції $p_{\mathrm{i}}(x)$ називаються коефіцієнтами рівняння.

Задача Коші для цього рівняння при зробленому припущенні завжди має єдиний розв'язок при довільних початкових умовах, тільки б точка $x = x_0$ знаходилась в проміжку (a,b) неперервності функцій $p_{\mathrm{i}}(x)$ та $f(x)$.

Якщо в рівнянні (8.1) права частина $f(x)$ тотожньо рівна нулю в проміжку (a,b), то рівняння (8.1) набуває вигляду

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad (8.2)$$

і називається в цьому випадку лінійним **однорідним** рівнянням, що відповідає рівнянню (8.1). При $f(x) \neq 0$ рівняння (8.1) називається **неоднорідним.**

Якщо функція $y_1(x)$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння (8.2), то і $C_1y_1(x)$ – добуток її на довільну сталу величину C_1 – також є розв'язком цього рівняння.

Якщо функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є розв'язками лінійного однорідного рівняння (8.2), то і їх сума $y_1(x) + y_2(x)$ також є розв'язком цього рівняння.

Якщо функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ є розв'язками рівняння (8.2), то й функція

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x), \qquad (8.3)$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ – довільні сталі, також є розв'язком цього рівняння. Функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ називаються **частковими розв'язками** рівняння (8.2).

Дві функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ називаються **лінійно незалежними** в проміжку (a,b), якщо їх відношення $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ в цьому проміжку не є сталою величиною.

Якщо ж відношення $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ – величина стала, то ці функції називаються **лінійно залежними**.

Якщо є n функцій $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, то вони називаються лінійно незалежними в проміжку (a, b), при умові, що рівність

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0,$$

де α_i $(i = 1,2, \dots, n)$ – сталі, може виконуватися тільки тоді, коли всі коефіцієнти α_i дорівнюють нулю.

Якщо ж ця рівність в проміжку (a, b) має місце, коли хоча б один з коефіцієнтів α_i не дорівнював нулю, то функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ називаються лінійно залежними.

Якщо функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ є розв'язками рівняння (8.2) і в проміжку (a, b) вони лінійно незалежні, то загальний розв'язок цього рівняння має вигляд (8.3):

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x).$$

Ця формула визначає структуру загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (8.2) порядку n і вказує спосіб побудови загального розв'язку.

Таким чином, щоб знайти загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння, потрібно знайти *n* його часткових лінійно незалежних в $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ розв'язків, кожний з них помножити на довільну сталу величину і всі ці добутки додати.

Система лінійно незалежних розв'язків рівняння (8.2) називається **фундаментальною.**

Для того, щоб функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ були лінійно незалежними в проміжку (a, b), необхідно і достатньо, щоб їх так званий визначник Вронського

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ {y_1}' & {y_2}' & \dots & {y_n}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {y_1}^{(n-1)} & {y_2}^{(n-1)} & \dots & {y_n}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

був відмінний від нуля хоча б в одній точці x_0 проміжка (a, b), в якому неперервні коефіцієнти рівняння (8.2).

Таким чином, щоб перевірити лінійну незалежність функцій $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, потрібно скласти їх визначник Вронського $W(x)$ і 'відомий частковий розв'язок $y_1(x)$ лінійного однорідного рівняння (8.2), то його порядок можна понизити на одиницю за допомогою підстановки

$$y = y_1 \int u dx, \tag{8.4}$$

де $u = u(x)$ – нова шукана функція.

Отримане в результаті підстановки (8.4) рівняння також буде лінійним.

2. Доведемо, що якщо $y_1(x)$ - частковий розв'язок лінійного однорідного рівняння другого порядку

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \tag{8.5}$$

то другий його частковий розв'язок, лінійно незалежний з першим, знаходиться за формулою

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{{y_1}^2} dx.$$

Підставимо (8.4) в дане рівняння, пам'ятаючи, що $(\int u dx)' = u$. Одержимо

$$y = y_1 \int u dx\,; \;\; y' = {y_1}' \int u dx + y_1 u;$$

$$y'' = {y_1}'' \int u dx + y_1' u + y_1' u + y_1 u';$$

$$({y_1}'' + p_1(x)y' + p_2(x)y_1) \int u dx + y_1 u' + (2{y_1}' + p_1(x)y_1)u = 0$$

(для скорочення замість $y_1(x)$ пишемо y_1).

Маємо рівняння

$$y_1 u' + (2y_1' + p_1 y_1)u = 0,$$

порядок якого понижений на одиницю в порівнянні з даним. Воно є також лінійним однорідним рівнянням першого порядку, яке допускає розділення змінних.

Розділяючи змінні, отримуємо

$$\frac{du}{u} = -\frac{2y_1{}' + p_1 y_1}{y_1} dx.$$

Інтегруючи, матимемо

$$lnu = -\int \frac{2y_1{}'}{y_1} - \int p_1 dx = -2ln\, y_1 - \int p_1\, dx.$$

Звідси

$$u = e^{-2lny_1 - \int p_1 dx} = e^{-2lny_1} e^{-\int p_1 dx} = e^{lny_1{}^{-2}} e^{-\int p_1 dx} =$$

$$= y_1{}^{-2} e^{-\int p_1 dx} = \frac{e^{-\int p_1 dx}}{y_1{}^2}.$$

Заміняючи у виразі (8.4) $y = y_1 \int u dx$ функцію u тільки що знайденим значенням, одержуємо

$$y = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1 dx}}{y_1{}^2} dx. \tag{8.6}$$

Знайдене значення y і буде другим частковим розв’язком $y_2(x)$ даного рівняння. Його лінійна незалежність з першим випливає з того, що відношення $\frac{y_2}{y_1}$ не є сталою величиною.

Розв’язок цієї задачі показує, що знання одного часткового розв’язку рівняння (8.5) дозволяє знайти другий лінійно незалежний з першим частковий розв’язок з допомогою формули (8.6), яка вимагає виконання двох інтегрувань.

Отже, для відщукання загального розв’язку лінійного однорідного рівняння другого порядку достатньо знати один його частковий розв’язок.

Задача 1. Знайти загальний розв’язок рівняння $(x-1)y'' - xy' + +y = 0,$ якщо відомо, що його частковий розв’язок $y_1 = x$. Знайти частковий розв’язок при початкових умовах $y(0) = 1;\ \ y'(0) = 2.$

Розв'язування. Дане рівняння - лінійне однорідне рівняння другого порядку. Передусім зведемо рівняння до виду (8.5), в якому коефіцієнт при y'' дорівнює одиниці. Отримуємо

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{y}{x-1} = 0.$$

Тут коефіцієнт при y' – функція $p_1(x) = -\frac{x}{x-1}$. Обчислимо передусім інтеграл $-\int p_1(x)dx$, що входить у формулу (8.6):

$$-\int p_1(x)dx = -\int \frac{-x}{x-1}dx = \int \frac{x}{x-1}dx =$$

$$= \int (1 + \frac{1}{x-1})dx = x + \ln(x-1).$$

(довільну сталу вводити не потрібно, так як надалі вона об'єднується з довільною сталою, яка вводиться при побудові загального розв'язку).

Тепер вираз, який входить у (8.6),

$$e^{-\int p_1(x)dx} = e^{x+\ln(x-1)} = e^x e^{\ln(x-1)} = e^x(x-1),$$

а формула (8.6) дає

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^x(x-1)}{x^2}dx = x.\int \frac{e^x(x-1)}{x^2}dx =$$

$$= x(\int \frac{e^x}{x}dx - \int \frac{e^x}{x^2}dx) = x\,(\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x^2}dx) - \int \frac{e^x}{x^2}dx) = x =$$

$$\left| \begin{matrix} u = \dfrac{1}{x} \\ dv = e^x dx \end{matrix} \right| \begin{matrix} du = -\dfrac{1}{x^2}dx \\ v = e^x \end{matrix} \right|$$

$$= x \cdot \frac{1}{x}e^x = e^x.$$

Отже, $y_2 = e^x$. Перемножуючи y_1на C_1, y_2 на C_2 і додаючи добутки, матимемо загальний розв'язок заданого рівняння

$$y = C_1x + C_2e^x. \tag{8.7}$$

Вказівка. Щоб знайти частковий розв'язок, який задовольняє початкові умови, потрібно початкові умови підставити в систему рівнянь, яка складається з загального розв'язку і його похідних до порядку $(n-1)$

включно; визначити з цієї системи довільні сталі і підставити їх значення в знайдений загальний розв'язок. Отриманий вираз і буде шуканим розв'язком.

Диференціюючи знайдений загальний розв'язок один раз, одержуємо систему

$$\begin{cases} y = C_1 x + C_2 e^x \\ y' = C_1 + C_2 e^x \end{cases},$$

підставляємо в неї початкові умови: $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$;

$$\begin{cases} 1 = C_1 \cdot 0 + C_2 e^0 \\ 2 = C_1 + C_2 \end{cases} \text{або} \begin{cases} 1 = C_2 \\ 2 = C_1 + C_2 \end{cases};$$

$$C_2 = 1;\ \ C_1 = 1.$$

Шуканий частковий розв'язок $y = x + e^x$.

Задача 2. Довести, що якщо y_1 та y_2 два лінійно незалежних часткових розв'язки лінійного однорідного рівняння другого порядку

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \quad (8.8)$$

то $p_1(x) = -\frac{W'(x)}{W(x)}$, а $p_2(x) = -\frac{{y_1}''}{y_1} + \frac{{y_1}'}{y_1}\frac{W'(x)}{W(x)}$,

де $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & {y_2}' \end{vmatrix} = y_1{y_2}' - y_2{y_1}'$.

Розв'язання. Так як y_1 та y_2 - розв'язки заданого рівняння, то має місце система рівнянь відносно невідомих $p_1(x)$ і $p_2(x)$, які потрібно визначити:

$$\begin{cases} {y_1}'' + p_1(x){y_1}' + p_2(x)y_1 = 0 \\ {y_2}'' + p_1(x){y_2}' + p_2(x)y_2 = 0 \end{cases},$$

або

$$\begin{cases} p_1(x){y_1}' + p_2(x)y_1 = -{y_1}'' \\ p_1(x){y_2}' + p_2(x)y_2 = -{y_2}'' \end{cases}. \quad (8.9)$$

Дослідимо визначник цієї системи:

$$\begin{vmatrix} {y_1}' & y_1 \\ y_2' & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {y_1}' & {y_2}' \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & {y_2}' \end{vmatrix} = -W(x). \quad (8.10)$$

Так як розв'язки y_1 та y_2 за умовою лінійно незалежні, то $W(x) \neq 0$ і система (8.9) має розв'язок і при тому єдиний:

$$p_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} -y_1'' & y_1 \\ -y_2'' & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1' & y_1 \\ y_2' & y_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}}{-W(x)} = \frac{-W'(x)}{W(x)}.$$

(Потрібно мати на увазі, що похідна визначника Вронського, як легко перевірити, є визначник, який відрізняється від визначника Вронського тим, що в ньому останній рядок містить похідні порядку на одиницю вищого, ніж у визначнику Вронського).

З першого рівняння системи (8.9) випливає, що

$$y_1 p_2(x) = -y_1'' - y_1' p_1(x),$$

звідки і отримується значення $p_2(x)$, наведене в умові задачі.

Знайдені вирази коефіцієнтів $p_1(x)$ і $p_2(x)$ рівняння (8.5) дозволяють скласти лінійне диференціальне рівняння другого порядку, якщо відома його фундаментальна система розв'язків.

3. Якщо у рівнянні (8.2) коефіцієнти сталі, то воно називається **лінійним однорідним рівнянням зі сталими коефіцієнтами** і має вигляд

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (8.11)$$

де всі $a_i (i = 1,2, \dots, n)$ – дійсні числа; y – шукана функція; x – незалежна змінна.

Розв'язок цього рівняння шукається у вигляді

$$y = e^{kx}. \qquad (8.12)$$

При цьому приходимо до алгебраїчного рівняння степеня *n*

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \cdots + a_{n-1} k + a_n = 0, \qquad (8.13)$$

яке називається **характеристичним.**

Таким чином, щоб скласти характеристичне рівняння (8.13), потрібно в рівнянні (8.11) замінити похідні степенями невідомої величини k, причому степінь k повинен дорівнювати відповідній похідній, а шукана функція y замінена одиницею.

Якщо всі корені характеристичного рівняння $k_1, k_2, \dots, k_n$ – дійсні числа і серед них немає рівних між собою, то, підставляючи значення коренів в

(8.12), матимемо *n* часткових лінійно незалежних розв'язків рівняння (8.11) у вигляді

$$y_1 = e^{k_1 x};\ y_2 = e^{k_2 x};\ \ y_3 = e^{k_3 x}; \dots;\ \ y_n = e^{k_n x}. \quad (8.14)$$

Якщо всі корені характеристичного рівняння – числа дійсні, але серед них є рівні, то кожному кореню k_i кратності l відповідає l лінійно незалежних часткових розв'язків рівняння (8.11)

$$y_1 = e^{k_i x};\ y_2 = xe^{k_i x};\ \ y_3 = x^2 e^{k_i x}; \dots;\ \ y_n = x^{l-1} e^{k_i x}. \quad (8.15)$$

Якщо серед коренів характеристичного рівняння є комплексні, але не рівні між собою, то кожній парі спряжених комплексних коренів $\alpha + \beta i$ і $\alpha - \beta i$ відповідають два часткових лінійно незалежних розв'язки рівняння (8.11) виду

$$e^{\alpha x} cos\beta x \text{ і } e^{\alpha x} sin\beta x. \quad (8.16)$$

Якщо серед комплексних коренів характеристичного рівняння є кратні комплексні корені, то кореню $\alpha + \beta i$ кратності l (корінь $\alpha - \beta i$ має ту ж кратність) відповідає $2l$ часткових лінійно незалежних розв'язків рівняння (8.11), які мають вигляд

$$e^{\alpha x} cos\beta x;\ \ xe^{\alpha x} cos\beta x;\ \ x^2 e^{\alpha x} cos\beta x; \dots;\ \ x^{l-1} e^{\alpha x} cos\beta x$$

$$e^{\alpha x} sin\beta x;\ \ xe^{\alpha x} sin\beta x;\ \ x^2 e^{\alpha x} sin\beta x; \dots;\ \ x^{l-1} e^{\alpha x} sin\beta x\,. \quad (8.17)$$

Задача 3. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння виду(8.13) за правилом: замінюємо y'' на k^2, y' на k, а y на 1.

Отримуємо

$$k^2 - 3k + 2 = 0.$$

Розв'язуючи це квадратне рівняння, знаходимо, що $k_1 = 1;\ k_2 = 2$. Корені характеристичного рівняння – числа дійсні і не рівні між собою. Згідно (8.14) частковими розв'язками рівняння будуть функції: $y_1 = e^x;\ \ y_2 = e^{2x}$. Легко бачити, що ці функції будуть лінійно незалежними ($\frac{y_2}{y_1} = e^x \neq const$). Загальним розв'язком, згідно (8.3), буде

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

Задача 4. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 2y' + y = 0$.

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$k^2 - 2k + 1 = 0.$$

Його корені $k_1 = 1$; $k_2 = 1$ - числа дійсні, але рівні між собою. Тому часткові розв'язки потрібно писати у вигляді (8.15):

$$y_1 = e^x;\ \ y_2 = xe^x.$$

Як бачимо, в цьому випадку другий частковий розв'язок отримується множенням першого часткового розв'язку на незалежну змінну. Розв'язки ці лінійно незалежні, так як $\frac{y_2}{y_1} = x \neq const$.

Загальний розв'язок, згідно (8.3), має вигляд

$$y = C_1e^x + xC_2e^x \text{ або } y = e^x(C_1 + C_2x).$$

Задача 5. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння запишеться так:

$$k^2 - 2k + 2 = 0.$$

Його корені $k_1 = 1 + i$; $k_2 = 1 - i$ – спряжені комплексні числа виду $\alpha + \beta i$. Часткові розв'язки мають вигляд (8.16), до того ж в цих розв'язках потрібно взяти $\alpha = 1$, $\beta = 1$:

$$y_1 = e^x cosx;\ y_2 = e^x sinx.$$

Загальний розв'язок:

$$y = C_1e^x cosx + C_2e^x sinx,$$

або

$$y = e^x(C_1cosx + C_2sinx).$$

Задача 6. Знайти розв'язок рівняння $y'' + \omega^2 y = 0$, що задовольняє початкові умови $y(0) = a$; $y'(0) = v_0$.

Розв'язання. Це рівняння є рівнянням вільних гармонічних коливань. Воно має дуже важливе значення в механіці та інших прикладних науках.

Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 + \omega^2 = 0$. Корені - комплексно спряжені - $k_1 = \omega i$; $k_2 = -\omega i$ $(\alpha = 0,\ \beta = \omega)$.

Часткові розв'язки, згідно (8.16), мають вигляд:

$y_1 = cos\omega x$; $y_2 = sin\omega x$.

Потрібно запам'ятати, що коли дійсна частина комплексного кореня характеристичного рівняння дорівнює нулеві, тобто коли корені чисто уявні, то часткові розв'язки містять тільки тригонометричні функції, множник $e^{\alpha x}$ у них відсутній, оскільки при $\alpha = 0$ $e^{\alpha x} = 1$.

Загальний розв'язок, згідно (8.3):

$$y = C_1 cos\omega x + C_2 sin\omega x;$$

$$y' = -C_1 \omega e^x sin\omega x + C_2 \omega cos\omega x. \qquad (8.19)$$

Визначаємо C_1 і C_2 із початкових умов:

$$\begin{cases} C_1 = a \\ C_2 \omega = v_0. \end{cases}$$

Звідси $C_1 = a$; $C_2 = \frac{v_0}{\omega}$. Підставляючи ці значення довільних сталих в (8.19), маємо шуканий розв'язок у вигляді

$$y = acos\omega x + \frac{v_0}{\omega} sin\omega x.$$

Цей розв'язок вигідно зображати в іншому вигляді. Покладемо

$$a = Asin\varphi;\ \frac{v_0}{\omega} = Acos\varphi. \qquad (8.20)$$

Тоді

$$y = Acos\omega x sin\varphi + Asin\omega x cos\varphi = A(cos\omega x sin\varphi + sin\omega x cos\varphi).$$

Нарешті

$$y = Asin(\omega x + \varphi).$$

Піднісши до квадрату обидві частини кожної з рівностей (3.20) і додаючи їх почленно, одержимо:

$$A = \sqrt{a^2 + \frac{{v_0}^2}{\omega^2}};\ tg\varphi = \frac{a\omega}{v_0}.$$

Механічний зміст величин $A,\ \omega$ і φ: A – амплітуда коливань, ω – частота коливань, φ – початкова фаза.

Рух, що описується рівнянням $y'' + \omega^2 y = 0$ – періодичний. Його період $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

<u>Контрольні запитання:</u>

1. Яке рівняння називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами?
2. Який вигляд має лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами?
3. Сформулюйте означення лінійної залежності та лінійної незалежності системи функцій.
4. Який визначник називається визначником Вронського?
5. Що таке фундаментальна система розв’язків лінійного однорідного рівняння?
6. Сформулюйте теорему про структуру загального розв'язку лінійного однорідного рівняння 2-го порядку.
7. У якому вигляді слід шукати частинні розв’язки лінійного однорідного диференціального рівняння?
8. Який вигляд має характеристичне для лінійного однорідного рівняння другого порядку?
9. Як записується загальний розв’язок лінійного однорідного рівняння другого порядку, якщо корені характеристичного рівняння: 1) дійсні(різні); 2) дійсні(рівні); 3) уявні?

<u>Завдання для самостійної роботи:</u>

Знайти загальні розв’язки диференціальних рівнянь (незалежна змінна t):

1) $x'' - 4x' = 0$; 2) $x'' - 9x = 0$; 3) $x'' - 7x' + 10x = 0$;

4) $x'' + 5x' = 0$; 5) $x'' - 16x = 0$; 6) $x'' + x' + x = 0$;
7) $x'' + 2x' + 4x = 0$; 8) $x'' - 4x' + 4x = 0$; 9) $x'' + 6x' + 9x = 0$;
10) $x'' - 4x' + 29x = 0$; 11) $x'' + 4x = 0$.

Лекція 9. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків.

1. Основні теоретичні відомості.
2. Метод Лагранжа.
3. Метод невизначених коефіцієнтів.

1. Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння має вигляд

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \qquad (9.1)$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння знаходиться так:

а) Знайти один будь-який його частковий розв'язок.

б) Знайти загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

в) Додати два ці розв'язки. Сума їх і буде загальним розв'язком рівняння (9.1) .

Наприклад, якщо частковий розв'язок неоднорідного рівняння є Y, а загальний розв'язок відповідного однорідного є $C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$, то загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (4.1):

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n + Y. \qquad (9.2)$$

Умови, які накладаються на коефіцієнти $p_i(x)$ і праву частину $f(x)$, викладені в поясненнях до рівняння (8.1).

Якщо права частина рівняння (9.1) є сума двох функцій:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f_1(x) + f_2(x), \qquad (9.3)$$

потрібно розглядати два рівняння, в яких ліві частини такі ж, як у (9.3), але в одному з них правою частиною буде функція $f_1(x)$, а в другому $f_2(x)$, тобто розглядати рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f_1(x) \tag{9.4}$$

і

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f_2(x). \tag{9.5}$$

Якщо функції Y_1 та Y_2 – відповідно часткові розв'язки рівнянь (9.4) і (9.5), то їх сума $Y_1 + Y_2$ буде частковим розв'язком рівняння (8.3).

2. Якщо відомо загальний розв'язок однорідного лінійного рівняння, що відповідає заданому неоднорідному, то його частковий розв'язок Y можна знайти з допомогою квадратур методом, який вказав Лагранж. Цей метод називається **методом варіації довільних сталих.**

Отримавши загальний розв'язок (8.3)

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$$

лінійного однорідного рівняння (8.3), міркують так: в даному розв'язку величини $C_1, C_2, \ldots, C_n$ є не сталими, а функціями незалежної змінної x. Записують це так:

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n. \tag{9.6}$$

Для визначення функцій $C_i(x)$ $(i = 1,2, \ldots, n)$ складається система рівнянь:

$$\begin{cases} C_1{}'(x)y_1 + C_2{}'(x)y_2 + \cdots + C_n{}'(x)y_n = 0 \\ C_1{}'(x)y_1{}' + C_2{}'(x)y_2{}' + \cdots + C_n{}'(x)y_n{}' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1{}'(x)y_1{}^{(n-2)} + C_2{}'(x)y_2{}^{(n-2)} + \cdots + C_n{}'(x)y_n{}^{(n-2)} = 0 \\ C_1{}'(x)y_1{}^{(n-1)} + C_2{}'(x)y_2{}^{(n-1)} + \cdots + C_n{}'(x)y_n{}^{(n-1)} = f(x) \end{cases} \tag{9.7}$$

Розглянемо детально цей метод для лінійних диференціальних неоднорідних рівнянь другого порядку:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x). \tag{9.8}$$

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд

$$y = C_1y_1 + C_2y_2. \tag{9.9}$$

Вважатимемо, що в цьому розв'язку величини C_1, C_2 є функціями незалежної змінної x, і записуємо

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2.$$

Для визначення функцій $C_1(x)$ та $C_2(x)$ складається система рівнянь (9.7):

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x){y_1}' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}. \qquad (9.10)$$

Визначник цієї системи – визначник Вронського. Оскільки (9.9) є загальний розв'язок рівняння (9.8), то функції y_1 та y_2 лінійно незалежні і їх визначник Вронського не дорівнює нулеві.

Тому система (9.10) завжди має розв'язок і до того ж єдиний.

Розв'язуючи цю систему рівнянь відносно $C_1'(x)$та $C_2'(x)$, одержимо

$$\begin{cases} C_1'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & {y_2}' \end{vmatrix}}{W}; \quad C_1'(x) = -\dfrac{y_2 f(x)}{W} \\ C_2'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ {y_1}' & f(x) \end{vmatrix}}{W}; \quad C_2'(x) = -\dfrac{y_1 f(x)}{W} \end{cases}, \qquad (9.11)$$

де визначник Вронського

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ {y_1}' & {y_2}' \end{vmatrix}.$$

Інтегруючи (9.11), матимемо:

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)dx}{W} + c_1;$$

$$C_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)dx}{W} + c_2. \qquad (9.12)$$

Підставляючи (9.12) в (9.9), отримаємо

$$y = \left(-\int \frac{y_2 f(x)dx}{W} + c_1\right)y_1 + \left(\int \frac{y_1 f(x)dx}{W} + c_2\right)y_2.$$

Розкриваючи дужки, знайдемо

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_2 \int \frac{y_1 f(x)dx}{W} - y_1 \int \frac{y_2 f(x)dx}{W}.$$

Порівнюючи з (9.2), відмічаємо, що перші два доданки $c_1y_1 + c_2y_2$ в правій частині – загальний розв'язок однорідного рівняння, що відповідає (9.8), а останні два доданки – частковий розв'язок неоднорідного рівняння (9.8). Позначаючи ці два доданки через *Y,* отримаємо формулу часткового розв'язку лінійного неоднорідного рівняння другого порядку

$$\mathrm{Y}= y_2 \int \frac{y_1 f(x)dx}{W} - y_1 \int \frac{y_2 f(x)dx}{W}.$$

В більш компактній формі частковий розв'язок лінійного неоднорідного рівняння другого порядку може бути записаний так:

$$Y = \begin{vmatrix} \int \frac{y_1 f(x)dx}{W} & \int \frac{y_2 f(x)dx}{W} \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \tag{9.13}$$

Метод варіації довільних сталих – універсальний. Він дозволяє з допомогою квадратур визначити частковий розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (9.1), якщо відомий загальний розв'язок відповідного йому однорідного рівняння.

Задача 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = x^4 - x^2,$$

знаючи, що частковим розв'язком відповідного йому однорідного рівняння є функція $y_1 = x^2$.

Розв'язання. Передусім перетворимо рівняння так, щоб коефіцієнт при старшій похідній, тобто при y'', дорівнював одиниці. Для цього обидві частини рівняння поділимо на x^2і одержимо

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = x^2 - 1. \tag{9.14}$$

Тепер права частина рівняння $f(x) = x^2 - 1$. Відкинемо її і знайдемо загальний розв'язок рівняння

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0, \tag{9.15}$$

знаючи його один частковий розв'язок. За формулою (9.6) визначимо другий частковий розв'язок:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1 dx}}{{y_1}^2} dx.$$

У нас $p(x) = -\frac{4}{x}$; $-\int p(x)dx = \int \frac{4}{x} dx = 4lnx = lnx^4$; $e^{-\int p_1 dx} = e^{lnx^4} = x^4$. Пам'ятаючи, що $y_1 = x^2$, маємо

$$y_2 = x_2 \int \frac{x^4}{x^4} dx = x_2 \cdot x = x^3.$$

Отже, $y_2 = x^3$. Загальний розв'язок рівняння (9.15) запишеться так:

$$y_0 = C_1 x^2 + C_2 x^3. \qquad (9.16)$$

Тепер застосуємо формулу (9.13) для визначення часткового розв'язку рівняння (9.14). Визначник Вронського

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4;$$

$$\int \frac{y_1 f(x) dx}{W} = \int \frac{x^2(x^2 - 1)}{x^4} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = x + \frac{1}{x};$$

$$\int \frac{y_2 f(x) dx}{W} = \int \frac{x^3(x^2 - 1)}{x^4} = \int \left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} - ln|x|.$$

Підставляючи в (9.13) значення інтегралів і часткові розв'язки y_1 та y_2 рівняння (9.15), одержимо

$$Y = \begin{vmatrix} x + \frac{1}{x} & \frac{x^2}{2} - ln|x| \\ x^2 & x^3 \end{vmatrix} = \frac{x^4}{2} + x^2 + x^2 ln|x|.$$

Додаючи цей частковий розв'язок заданого неоднорідного рівняння до загального розв'язку (9.16) відповідного йому однорідного, отримаємо загальний розв'язок заданого рівняння

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + \frac{x^4}{2} + x^2 + x^2 ln|x|.$$

Цей вираз можна спростити, об'єднавши подібні доданки. Тоді

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^3 + \frac{x^4}{2} + x^2 ln|x|,$$

де $c_1 = C_1 + 1,\ c_2 = C_2$.

3. Нехай в рівнянні (9.1) коефіцієнтами є не функції, а дійсні числа, а його права частина $f(x)$ має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x}(P(x)cos\beta x + Q(x)sin\beta x), \qquad (9.17)$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени, які можуть бути одного і того ж степеня, і різних степенів. Якщо вони різного степеня, то нехай *n* їх найвищий степінь.

Величини α і β – дійсні числа.

В розглядуваному випадку метод варіації довільних сталих для визначення часткового розв'язку неоднорідного рівняння, звичайно, застосовний. Однак тут можна відшукати частковий розв'язок простішим способом, користуючись яким не потрібно буде обчислювати інтеграли. Інтегрування рівняння можна провести з допомогою тільки алгебраїчних операцій при використанні методу, який називається **методом невизначених коефіцієнтів.**

Якщо права частина має вигляд (9.17), то слід розглядати два можливі випадки:

1. Число $\alpha + \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння.

В цьому випадку частковий розв'язок неоднорідного рівняння шукається у вигляді

$$Y = e^{\alpha x}(p(x)cos\beta x + q(x)sin\beta x), \qquad (9.18)$$

де $p(x)$ і $q(x)$ – многочлени одного і того ж степеня, який дорівнює найвищому степеню многочленів $P(x)$ і $Q(x)$. Коефіцієнти многочленів $p(x)$ і $q(x)$ – числа, які потрібно визначити. В (9.18) тільки ці коефіцієнти і потрібно визначити, числа ж α і β – ті ж, що і в (9.17).

2. Якщо число $\alpha + \beta i$ є коренем кратності k ($k \geq 1$) характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння, то частковий розв'язок неоднорідного рівняння шукається у вигляді

$$Y = x^k e^{\alpha x}(p(x)cos\beta x + q(x)sin\beta x), \qquad (9.19)$$

тут $p(x)$ і $q(x)$ – многочлени, степінь яких дорівнює найвищому степеню многочленів $P(x)$ і $Q(x)$ в (9.17), а коефіцієнти многочленів $p(x)$ і $q(x)$ підлягають визначенню; показник степеня k дорівнює кратності кореня $\alpha + \beta i$ характеристичного рівняння. Таким чином, і в цьому випадку визначенню підлягають тільки коефіцієнти многочленів $p(x)$ і $q(x)$, всі інші числа α, β, k – відомі.

Невизначені коефіцієнти многочленів $p(x)$ і $q(x)$ як в першому, так і в другому випадку знаходяться так.

В задане рівняння підставляється Y і порівнюються коефіцієнти при однакових степенях незалежної змінної в лівій і правій частині рівності.

Задача 2. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y'' - 7y' + 12y = 5\,. \tag{9.20}$$

Розв’язання. Рівняння лінійне неоднорідне. Передусім відкидаємо праву частину і розв’язуємо відповідне однорідне рівняння

$$y'' - 7y' + 12y = 0. \tag{4.21}$$

Характеристичне рівняння

$k^2 - 7k + 12 = 0$

має корені

$$k_1 = 3;\ k_2 = 4. \tag{9.22}$$

Часткові розв’язки рівняння (9.21):

$$y_1 = e^{3x};\ \ y_2 = e^{4x}.$$

Загальний розв’язок однорідного рівняння

$$y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}. \tag{9.23}$$

Тепер розглянемо праву частину рівняння (9.20) і порівняємо її з (9.17). Так як права частина не містить множника $e^{\alpha x}$, то потрібно вважати, що $\alpha = 0$. Права частина не містить також ні синуса, ні косинуса. Це означає, $\beta = 0$. Число 5 в правій частині потрібно розглядати як многочлен нульового степеня.

Складаємо число $\alpha + \beta i$, щоб з'ясувати, чи воно є коренем характеристичного рівняння. Так як у нас $\alpha = \beta = 0$, то $\alpha + \beta i = 0$. Серед коренів (9.22) немає 0. Отже має місце перший випадок і частковий розв'язок потрібно шукати у вигляді (9.18), в якому покласти $\alpha = \beta = 0$, а многочлени $p(x)$ і $q(x)$ – нульового степеня.

Таким чином, частковий розв'язок шукатимемо у вигляді

$$Y = A(A - const). \qquad (9.24)$$

Обчислюючи похідні до другого порядку включно, матимемо

$$Y' = 0,\ \ Y'' = 0. \qquad (9.25)$$

Підставляючи (9.24), (9.25) в задане рівняння (4.20), одержимо

$$12A = 5,$$

звідки $A = \frac{5}{12}$, і отже, частковий розв'язок неоднорідного рівняння $Y = \frac{5}{12}$.

Додаючи Y до загального розв'язку (9.23) однорідного рівняння, знаходимо загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{5}{12}.$$

Задача 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + y' + y = 3e^{2x}\ . \qquad (9.26)$$

Розв'язання. Відкидаємо праву частину $3e^{2x}$ і будемо шукати загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y'' + y' + y = 0. \qquad (9.27)$$

Його характеристичне рівняння

$$k^2 + k + 1 = 0$$

має корені

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i. \qquad (9.28)$$

Часткові розв'язки рівняння (9.27):

$$y_1 = e^{-\frac{1}{2}x} cos\frac{\sqrt{3}}{2}x;\ \ y_2 = e^{-\frac{1}{2}x} sin\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

а його загальний розв'язок

$$y_0 = e^{-\frac{1}{2}x}(C_1 cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 sin\tfrac{\sqrt{3}}{2}x). \quad (9.29)$$

Тепер відшукаємо частковий розв'язок неоднорідного рівняння (9.26). Порівняємо його праву частину з (9.17) і бачимо, що $\alpha = 2,\ \beta = 0$, многочлен $P(x)$ має нульовий степінь (множник при $e^{\alpha x}$- величина стала). Число $\alpha + \beta i = 2$ не є коренем характеристичного рівняння (9.28). Частковий розв'язок слід шукати у вигляді (9.18), покладаючи в ньому $\alpha = 2,\ \beta = 0$; многочлени $p(x)$ і $q(x)$ нульового степеня. Таким чином,

$Y = Ae^{2x};\ Y' = 2Ae^{2x};\ Y'' = 4Ae^{2x}$.

Підставляючи отримані рівності у рівняння (9.26), одержимо

$$e^{2x}(A + 2A + 4A) = 3e^{2x};\ \ 7A = 3;\ \ A = \tfrac{3}{7},$$

а тому $Y = \frac{3}{7}e^{2x}$. Загальний розв'язок заданого рівняння буде сумою цього часткового розв'язку неоднорідного рівняння і загального розв'язку (9.29) відповідного однорідного:

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{3}{7}e^{2x}.$$

Задача 4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x}\ . \quad (9.30)$$

Розв'язання. Задане рівняння – неоднорідне лінійне. Однорідне рівняння, яке йому відповідає:

$$y'' - 6y' + 9y = 0. \quad (9.31)$$

Характеристичне рівняння

$$k^2 - 6k + 9 = 0$$

має корені:

$$k_1 = 3;\ k_2 = 3. \quad (9.32)$$

Часткові розв'язки рівняння (9.31):

$$y_1 = e^{3x};\ y_2 = xe^{3x}. \qquad (9.33)$$

Загальний розв'язок рівняння (9.31)

$y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$. (9.34)

Тепер відшукаємо частковий розв'язок неоднорідного рівняння (9.30). Порівнюючи його праву частину з (9.17), зауважуємо, що $\alpha = 3,\ \beta = 0$. Число $\alpha + \beta i = 3$.

Серед коренів (9.32) характеристичного рівняння воно зустрічається двічі. (В такому випадку говорять, що 3 – двократний корінь характеристичного рівняння). Частковий розв'язок слід шукати у вигляді (9.19), в якому потрібно взяти $k = 2$. Враховуючи, що права частина рівняння (9.30) має сталий множник, тобто многочлен нульового степеня, потрібно і в (9.18) многочлени $p(x)$ і $q(x)$ взяти нульового степеня.

Таким чином, частковий розв'язок слід шукати у вигляді

$$Y = x^2 A e^{3x}.$$

Підставивши даний розв'язок разом з його похідними до другого порядку включно в рівняння (9.30), матимемо $Y = 2x^2 e^{3x}$. Додаючи цей розв'язок до загального розв'язку однорідного рівняння, отримаємо загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + 2x^2 e^{3x}.$$

Задача 5. Знайти закон руху точки, на яку діють дві сили: 1) сила притягання до нерухомого центра, пропорційна відстані точки від цього центру $P = -k^2 mx$; 2) періодична сила, яка визначається формулою $F = Am\, cospt$.

Розв'язання. Диференціальне рівняння руху буде таким:

$mx'' = -k^2 mx + Am\, cospt$.

Скоротимо рівняння на m і запишемо його у вигляді

$$x'' + k^2 x = A\, cospt. \qquad (9.35)$$

Рівняння – лінійне неоднорідне.

Розглянемо два випадки: 1) $p \neq k$; 2) $p = k$.

Рівняння (9.35) часто зустрічається у механіці. Воно називається рівнянням вимушених коливань при відсутності сил опору. Сила $F = Am\, cospt$ називається вимушеною.

<u>Перший випадок</u> ($p \neq k$). Відкинемо в рівнянні (9.35) праву частину і знайдемо загальний розв'язок рівняння

$$x'' + k^2 x = 0 \qquad (9.36)$$

(рівняння вільних гармонічних коливань). Характеристичне рівняння $r^2 + k^2 = 0$ має корені:

$$k_{1,2} = \pm ki. \qquad (9.37)$$

Загальний його розв'язок:

$$x_0 = C_1 coskt + C_2 sinkt. \qquad (9.38)$$

Частковий розв'язок неоднорідного рівняння (9.35) у випадку, коли $p \neq k$, слід шукати у вигляді (4.18) ($\alpha = 0$, $\beta = p$; $\alpha + \beta i = pi$ не є коренем характеристичного рівняння):

$$X = Bcospt + Csinpt.$$

Тоді

$$X'' = -Bp^2 cospt - Cp^2 sinpt.$$

Підставляючи значення для X та X'' у рівняння (4.35), матимемо:

$$(Bk^2 - Bp^2)cospt + (Ck^2 - Cp^2)sinpt = Acospt.$$

Порівнюючи коефіцієнти при $cospt$ і $sinpt$, одержуємо рівняння для виначення невідомих коефіцієнтів B і C:

$$\begin{cases} Bk^2 - Bp^2 = A \\ Ck^2 - Cp^2 = 0 \end{cases}.$$

Тому

$$B = \frac{A}{k^2 - p^2}; \;\; C = 0; \;\; X = \frac{A}{k^2 - p^2} cospt$$

(оскільки $p \neq k$, то $k^2 - p^2 \neq 0$).

Загальний розв'язок рівняння (4.35) в цьому випадку буде

$$x = C_1 coskt + C_2 sinkt + \frac{A}{k^2 - p^2} cospt. \quad (9.39)$$

Другий випадок ($p = k$). В цьому випадку $\alpha = 0,\ \beta = p$, але оскільки $p = k$, то $\beta = k,$ а число $\alpha + \beta i = ki$ є коренем характеристичного рівняння (4.37), тому частковий розв'язок потрібно шукати у вигляді (4.19) (тільки пам'ятати, що незалежну змінну x потрібно замінити на t. Права частина заданого рівняння тепер дорівнює $A\ coskt$.

Отже, частковий розв'язок у цьому випадку:

$$X = t(Ccoskt + Dsinkt).$$

Тоді

$$X'' = 2(-Ck\ sinkt + Dk\ coskt) + t(-Ck^2 coskt - Dk^2 sinkt).$$

Підставляючи значення для X та X'' у рівняння

$$x'' + k^2 x = A\ coskt,$$

матимемо

$$-2Ck\ sinkt + 2Dk\ coskt = Acoskt\ .$$

Порівнюючи коефіцієнти при $coskt$ і $sinkt$ в лівій і правій частинах цієї рівності, одержуємо

$$D = \frac{A}{2k};\ \ C = 0;$$

частковий розв'язок неоднорідного рівняння $X = t\frac{Asinkt}{2k}$, а тому загальний розв'язок рівняння вимушених коливань (4.35) при $p = k$ запишеться так:

$$x = C_1 coskt + C_2 sinkt + t\frac{Asinkt}{2k}.$$

Контрольні запитання.

1.Яке рівняння називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами?

2. Який вигляд має лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами?

3. Яке рівняння називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням, відповідним даному неоднорідному рівнянню?

4. Сформулюйте теорему про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння.
5. У чому полягає метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа)?

<u>Завдання для самостійної роботи:</u>

Знайти загальний розв'язок рівняння. Розв'язати, де вказано, задачу Коші:

1. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$
2. $y'' + y = ctgx$
3. $y'' - y = \frac{e^x}{e^x+1}$
4. $-2y' + y = \frac{e^x}{x}$
5. $y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}$
6. $y'' + 2y' + y = \frac{1}{xe^x}$
7. $y'' + 4y = \frac{1}{sin^2 x}$
8. $y'' + y = tgx, y(0) = 0, y'^{(0)} = 1.$

Лекція 10. Системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами.

1. Основні поняття та означення.
2. Інтегрування нормальних систем лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

1. Нормальною системою диференціальних рівнянь називається система виду:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \tag{10.1}$$

В цій системі рівнянь невідомими є *n* функцій $x_1, x_2, \dots, x_n$, а незалежною змінною – *t*.

Особливості нормальної системи диференціальних рівнянь:

1) Всі рівняння, які входять в систему, є рівняннями першого порядку.

2) Всі рівняння системи розв'язані відносно похідних шуканих функцій

$$\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}.$$

Якщо нормальна система рівнянь (10.1) лінійна, а коефіцієнти при невідомих функціях сталі, то вона має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + \varphi_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + \varphi_2(t) \\ \frac{dx_3}{dt} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n + \varphi_3(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + \varphi_n(t) \end{cases} \tag{10.2}$$

Всі шукані функції $x_1, x_2, \dots, x_n$ входять в систему (10.2) в першому степені, а функції $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, …, $\varphi_n(t)$ – функції незалежної змінної *t,* по якій обчислюються похідні.

Якшо всі ці функції дорівнюють нулю, то система (10.2) називається однорідною, а якщо хоча б одна з них не дорівнює нулю, - неоднорідною.

Кількість довільних констант, що входять в загальний розв'язок нормальної системи рівнянь, дорівнює кількості невідомих функцій, що входять в систему. Довільні сталі визначаються з початкових чи крайових умов.

2. Продемонструємо **інтегрування нормальних систем лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами** на прикладі однорідної системи.

Задача 1. Знайти загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = -x + 5y - z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 3z \end{cases} \tag{10.3}$$

Розв'язання. Невідомими функціями є *x, y, z,* а незалежною змінною *t.*

Зведемо розв'язування цієї системи до розв'язування одного рівняння, порядок якого дорівнює числу рівнянь, які входять в систему. Для цього довільне з рівнянь системи (10.3) продиференціюємо по *t* і замінимо в отриманому рівнянні похідні $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ їх вираженнями з системи (10.3). Зробивши так, наприклад, з першим рівняням, одержимо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}.$$

Замінимо в цьому рівнянні похідні $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, які стоять в правій частині, їх вираженнями з другого і третього рівнянь заданої системи (10.3) і одержимо рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3(3x - y + z) - (-x + 5y - z) + (x - y + 3z),$$

звідки після зведення подібних доданків в правій частині матимемо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 11x - 9y + 7z. \tag{10.4}$$

Це рівняння знову продиференціюємо по t і одержимо

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 11\frac{dx}{dt} - 9\frac{dy}{dt} + 7\frac{dz}{dt}.$$

Знову замінимо в правій частині похідні $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ їх виразами з заданої системи (10.3) і отримаємо рівняння

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 11(3x - y + z) - 9(-x + 5y - z) + 7(x - y + 3z),$$

яке після зведення подібних членів в правій частині запишеться так:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 49x - 63y + 41z. \tag{10.5}$$

Розглянемо систему рівнянь, що складається з першого рівняння заданої системи (10.3), тобто рівняння, обидві частини якого ми диференціювали, і рівняння (10.4) та (10.5):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \frac{d^2x}{dt^2} = 11x - 9y + 7z \\ \frac{d^3x}{dt^3} = 49x - 63y + 41z \end{cases} \tag{10.6}$$

Щоб прийти до рівняння, яке містить тільки одну невідому функцію, з перших двох рівнянь системи (10.6) визначимо функції y та z. З цих рівнянь випливає:

$$\begin{cases} y - z = 3x - \frac{dx}{dt} \\ 9y - 7z = 11x - \frac{d^2x}{dt^2} \end{cases}.$$

Розв'язуючи їх відносно *y* та *z*, одержуємо

$$y = \frac{-10x + 7\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}}{2}; \quad z = \frac{-16x + 9\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}}{2}. \qquad (10.7)$$

Підставляючи ці значення *y* та *z* в третє рівняння системи (10.6), отримуємо

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 49x - 63\frac{-10x + 7\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}}{2} + 41\frac{-16x + 9\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}}{2}.$$

Після спрощень в правій частині маємо

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 36x - 36\frac{dx}{dt} + 11\frac{d^2x}{dt^2}. \qquad (10.8)$$

Рівняння (10.8) – лінійне однорідне рівняння третього порядку зі сталими коефіцієнтами. Перепишемо його так:

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 11\frac{d^2x}{dt^2} + 36\frac{dx}{dt} - 36x = 0 \qquad (10.9)$$

і знайдемо його розв'язок за відомими правилами. Складемо характеристичне рівняння

$$k^3 - 11k^2 + 36k - 36 = 0.$$

Коренями цього рівняння є числа:

$$k_1 = 2; \ k_2 = 3; \ \ k_3 = 6.$$

Частковими розв'язками рівняння (10.8) будуть функції:

$$x_1 = e^{2t}; \ \ x_2 = e^{3t}; \ \ x_3 = e^{6t},$$

а його загальним розв'язком

$$x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t}. \qquad (10.10)$$

Щоб визначити дві інші невідомі функції *y* та *z*, скористаємося рівностями (10.7). Після підстановки в (10.7) виразів *x*, $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}$ одержуємо:

$$y = C_2e^{3t} - 2C_3e^{6t}; \ \ z = -C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t}.$$

Контрольні запитання.

1. Що називається системою диференціальних рівнянь n-го порядку?
2. Що називається системою диференціальних рівнянь 1-го порядку?
5. Сформулюйте означення загального розв'язку системи диференціальних рівнянь 1-го порядку?
6. Сформулюйте означення часткового розв'язку системи диференціальних рівнянь 1-го порядку?
7. Яка система диференціальних рівнянь називається лінійною?
8. Яка система диференціальних рівнянь називається однорідною (неоднорідною)?
11. Що розуміють під фундаментальною системою розв'язків лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь?
12. Сформулюйте теорему про структуру загального розв'язку лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь.
13. Сформулюйте теорему про структуру загального розв'язку лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь.
15. У чому суть методу виключення невідомих при розв'язанні лінійних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами?
17. Які недоліки методу виключення змінних?
18. Для яких систем диференціальних рівнянь можна застосувати матричний метод?
19. У чому суть матричного методу при розв'язанні лінійних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами?
20. В якому вигляді шукають частинні розв'язки системи однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами?

Завдання для самостійної роботи:

Знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

1. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + y \\ \dot{y} = -20x + 6y \end{cases}$;

2. $\begin{cases} \dot{x} = -\frac{y}{2} \\ \dot{y} = 2x \end{cases}$;

3. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y \\ \dot{y} = y - 3x \end{cases}$;

$$\left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}; \dot{y} = \frac{dy}{dt}\right).$$

Лекція 11. Системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

1. Основні поняття та означення.
2. Інтегрування систем лінійних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

1. З лінійними системами диференціальних рівнянь другого порядку доводиться зустрічатися часто в теоретичній механіці, опорі матеріалів і інших прикладних аспектах математики.

Система диференціальних рівнянь, розв'язаних відносно найвищих похідних шуканих функцій, називається **канонічною.** У випадку трьох невідомих функцій x, y, z і незалежної змінної t ця система рівнянь записується так:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) \\ \frac{d^2y}{dt^2} = f(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) \\ \frac{d^2z}{dt^2} = f(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) \end{cases} \qquad (11.1)$$

Загальний розв'язок цієї системи містить шість довільних сталих, для визначення яких задається шість початкових умов (в механіці це початкове положення і швидкість точки в деякий момент часу $t = t_0$).

Для визначення розв'язку канонічної системи рівнянь (11.1) застосовується такий же метод, як і при розв'язуванні нормальних систем: послідовним диференціюванням одного рівняння системи (чи декількох її рівнянь) слід виключити всі шукані функції, крім одної. Розглянемо детальніше на прикладі наступної задачі.

Задача 1. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -2x - 4y \\ \frac{d^2y}{dt^2} = x - 4y \end{cases}.$$

Розв'язання. Продиференціюємо перше рівняння два рази по t і отримаємо

$$\frac{d^4x}{dt^4} = -2\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{d^2y}{dt^2}. \qquad (11.2)$$

Підставимо в (11.2) замість $\frac{d^2y}{dt^2}$ його вираження з другого рівняння системи.

Тоді

$$\frac{d^4x}{dt^4} = -2\frac{d^2x}{dt^2} - 4(x - 7y),$$

або

$$\frac{d^4x}{dt^4} = -2\frac{d^2x}{dt^2} - 4x + 28y. \qquad (11.3)$$

З першого рівняння системи визначимо y і підставимо його в рівняння (11.3):

$$y = \frac{1}{4}\left(-2x - \frac{d^2x}{dt^2}\right). \qquad (11.4)$$

З цим значенням y рівняння (11.3) перепишеться так:

$$\frac{d^4x}{dt^4} = -2\frac{d^2x}{dt^2} - 4x + 28 \cdot \frac{1}{4}\left(-2x - \frac{d^2x}{dt^2}\right).$$

Розкриваючи дужки і переносячи всі члени рівняння в його ліву частину, одержуємо

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 9\frac{d^2x}{dt^2} + 18x = 0.$$

Характеристичне рівняння

$$k^4 + 9k^2 + 18 = 0$$

має корені: $k_{1,2} = \pm\sqrt{3}i$; $k_{3,4} = \pm\sqrt{6}i$.

Часткові розв'язки:

$$x_1 = \cos\sqrt{3}t; \quad x_2 = \sin\sqrt{3}t; \quad x_3 = \cos\sqrt{6}t; \quad x_4 = \sin\sqrt{6}t.$$

Функція

$$x = C_1\cos\sqrt{3}t + C_2\sin\sqrt{3}t + C_3\cos\sqrt{6}t + C_4\sin\sqrt{6}t. \qquad (11.5)$$

Тепер з (11.4) знайдемо y. З (11.5) маємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -3C_1\cos\sqrt{3}t - 3C_2\sin\sqrt{3}t - 6C_3\cos\sqrt{6}t - 6C_4\sin\sqrt{6}t.$$

Підставляючи x і $\frac{d^2x}{dt^2}$ в (11.4), одержуємо

$$y = \frac{1}{4}C_1\cos\sqrt{3}t + \frac{1}{4}C_2\sin\sqrt{3}t + C_3\cos\sqrt{6}t + C_4\sin\sqrt{6}t.$$

Задача 2. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -k\frac{dy}{dt} - g \end{cases},$$

що задовольняє початкові умови:

$x(0) = y(0) = 0$; $x'(0) = v_{0x}$; $y'(0) = v_{0y}$ (k і g – сталі величини).

Розв'язання. Запропонована система рівнянь описує рух снаряду з врахуванням опору середовища.

Кожне з рівнянь містить тільки одну невідому функцію.

З першого рівняння випливає

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} = 0.$$

Характеристичне рівняння $r^2 + kr = 0$ має корені: $r_1 = 0$; $r_2 = -k$. Часткові розв'язки рівняння: $x_1 = 1$; $x_2 = e^{-kt}$. Його загальний розв'язок

$$x = C_1 + C_2e^{-kt}. \qquad (11.6)$$

Щоб визначити C_1 та C_2, знайдемо x' :

$$x' = -C_2ke^{-kt}. \qquad (11.7)$$

При $t = 0$ маємо:

з (11.6) $0 = C_1 + C_2$;

з (11.7) $v_{0x} = -C_2k$.

Звідси $C_1 = \frac{v_{0x}}{k}$; $C_2 = -\frac{v_{0x}}{k}$.

Підставляючи ці значення C_1 і C_2 в (11.6), одержуємо

$$x = \frac{v_{0x}}{k}(1 - e^{-kt}). \qquad (11.8)$$

Друге рівняння перепишеться так:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k\frac{dy}{dt} = -g. \qquad (11.9)$$

Рівняння лінійне неоднорідне. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y_0 = C_3 + C_4 e^{-kt}.$$

Оскільки корені характеристичного рівняння – числа 0 і $-k$, з порівняння з (9.17) $\alpha = \beta = 0$, а число $\alpha + \beta i$ є коренем характеристичного рівняння, то частковий розв'язок потрібно щукати у вигляді: $Y = At$. Тоді

$$Y' = A,\ Y'' = 0,\ \ -g = Ak;\quad A = -\frac{g}{k};\quad Y = -\frac{g}{k}t.$$

Загальний розв'язок рівняння (11.9):

$$y = C_3 + C_4 e^{-kt} - \frac{g}{k}t. \qquad (11.10)$$

Для визначення C_3 та C_4 з початкових умов знайдемо y':

$$y' = -C_4 k e^{-kt} - \frac{g}{k}. \qquad (11.11)$$

Враховуючи початкові умови, отримуємо систему рівнянь:

з (11.10) 0= $C_3 + C_4$;

з (11.11) $v_{0y} = -C_4 k - \frac{g}{k}$;

$$C_4 = -\frac{v_{0y}+\frac{g}{k}}{k};\quad C_3 = \frac{v_{0y}+\frac{g}{k}}{k}.$$

Підставляючи ці значення C_3 і C_4 в (11.10), матимемо

$$y = \frac{v_{0y}+\frac{g}{k}}{k}(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k}t. \qquad (11.12)$$

Рівняння (11.8) та (11.12) є параметричними рівняннями траєкторії снаряду. Якщо виключити параметр t з цих рівнянь, то

$$y = \frac{v_{0y}+\frac{g}{k}}{v_{0x}}x + \frac{g}{k^2}\ln\left(1 - k\frac{x}{v_{0x}}\right).$$

З останнього рівняння можна визначити горизонтальну дальність стрільби, якщо покласти в ньому $y = 0$, і з отриманого рівняння знайти x.

Контрольні запитання.

1 . Що називається системою лінійних диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами?
2. Сформулюйте означення загального розв'язку системи диференціальних рівнянь 2-го порядку?
3. Сформулюйте означення часткового розв'язку системи диференціальних рівнянь 2-го порядку?
4. Яка система диференціальних рівнянь 2-го порядку називається лінійною?
5. Яка система диференціальних рівнянь 2-го порядку називається однорідною (неоднорідною)?
6. У чому суть методу виключення невідомих при розв'язанні лінійних систем диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами?

Завдання для самостійної роботи:

Знайти загальний розв'язок системи (в другій системі знайти розв'язок, який задовольняє початкові умови):

4. $\begin{cases} x''(t) + a^2 y = 0 \\ y''(t) - a^2 y = 0 \end{cases};$

5. $\begin{cases} x''(t) + 6x + 7y = 0 \\ y''(t) + 3x + 2y = 2t \end{cases};$

$$x(0) = 2; y(0) = 1; x'(0) = 1; y'(0) = 3.$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Диференціальні рівняння / П. І. Каленюк, Ю. К. Рудавський, Р. М. Тацій та ін. – Львів : Вид-во Львівської політехніки, 2014. – 380 с.
2. Диференціальні рівняння: методи та застосування / С. Д. Івасишен, В. П. Лавренчук, П. П. Настасієв, І. І. Дрінь. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2010. – 288 с.
3. Збірник задач з диференціальних рівнянь / Ю. К. Рудавський, І.П. Каленюк, Р. М. Тацій та ін. – Львів : Вид-во Нац. ун-ту «Львівська політехніка», 2001. – 244 с.
4. Кривошея С. А. Диференціальні та інтегральні рівняння / С.А. Кривошея М. О. Перестюк, В. М. Бурим. – К. : Либідь, 2004. – 408 с.

5. Лавренюк С. П. Курс диференціальних рівнянь / С. П. Лавренюк. – Львів : Вид-во наук.-техн. літ., 1997. – 216 с.
6. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння / А. М. Самойленко, М.О. Перестюк, І. О. Парасюк. – К. : Либідь, 2003. – 600 с.
7. Перестюк М. О. Збірник задач з диференціальних рівнянь / М.О.Перестюк, М. Я. Свіщук. – К. : ТВіМС, 2004. – 224 с.
8. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння: Підручник. — К.: Либідь, 1994. — 360 с.
9. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння у задачах / А.М. Самойленко, С. А. Кривошея, М. О. Перестюк. – К. : Либідь, 2003. –504 с.