Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

Семчишин Ліда Михайлівна

УДК 518.25

АЛГОРИТМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ АЛГЕБРИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Чернівці – 2011

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі економічної кібернетики та інформатики Тернопільського національного економічного університету Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
НЕДАШКОВСЬКИЙ Микола Олександрович,
Тернопільський національний економічний університет,
професор кафедри економічної кібернетики та інформатики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
МОЛЧАНОВ Ігор Миколайович,
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, професор,
старший науковий співробітник відділу числових методів та
комп'ютерного моделювання;

доктор фізико-математичних наук, професор
СОПРОНЮК Федір Олексійович,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
завідувач кафедри математичних проблем управління і
кібернетики, декан факультету комп'ютерних наук.

Захист відбудеться " 3 " червня 2011 р. о 15^{30} год. на засіданні спеціалізованої вченої ради К 76.051.02 у Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича за адресою: 58012, м. Чернівці, вул. Університетська, 28, факультет прикладної математики, аудиторія 8.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича за адресою: м. Чернівці, вул. Лесі Українки, 23.

Автореферат розіслано "___" __________ 2011 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Я.Й. Бігун

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Обчислювальні методи алгебри один із найважливіших складників базового програмного забезпечення сучасних комп'ютерних систем. Ці методи ґрунтуються на побудові скінченної послідовності дій над скінченною множиною чисел. Використовуючи їх, розв'язок математичної задачі отримують у вигляді числового результату. Тепер особливо зросла потреба широкого використання алгоритмів комп'ютерної алгебри для розрахунку й оптимізації економіко-математичних моделей, розв'язування задач лінійного та параметричного програмування, задач хімічної кінетики та синтезу великих електронних схем, задач будівельної механіки та динамічного програмування.

Вагомий внесок у розвиток методів комп'ютерної алгебри та їх застосування в математичному моделюванні зробили В.М. Фаддєєв, Д.К. Фаддєєва, В.М. Кублановська, В.В. Воєводін, Е.Е. Тиртишніков, М.О. Недашковський, І.М. Молчанов, О.М. Хіміч, І.І. Босікова, Ф.О.Сопронюк, О.Я. Ковальчук, M.T. Macclelian, E.H. Bareiss, J.D. Lipson, J. Smit, R.T. Moenk, S. Cabay та інші.

Проте в практичному застосуванні виникають проблеми як числового, так і символьного розв'язування квадратних матричних рівнянь, алгебричних матричних рівнянь довільного порядку. Досліджуючи ті чи інші процеси або явища, використовуючи математичні методи й обчислювальні системи, спочатку будують математичну модель досліджуваного об'єкта, тобто описують об'єкт за допомогою математичних співвідношень (системи лінійних чи нелінійних рівнянь, диференціальних рівнянь тощо). Як результат одержують математичну задачу, яку розв'язати або дуже важко, або неможливо. Тоді побудовану математичну модель дискретизують, тобто перетворюють до такого вигляду, щоб розв'язок можна було знайти (звичайно, з певною похибкою) у вигляді числового результату за допомогою послідовності арифметичних і логічних операцій або в аналітичному вигляді. Таке перетворення виконують, застосовуючи обчислювальні методи. Закономірно, що на цьому етапі виникає низка проблем, пов'язаних зі збіжністю алгоритмів, їхньою обчислювальною стійкістю, оцінкою похибки розв'язку і т. ін. Реалізація дискретної моделі, зазвичай, відбувається за допомогою ЕОМ. Числовий результат розв'язування дискретної задачі аналізують з метою перевірки адекватності побудованої математичної моделі реальній дійсності. Якщо з'ясується, що математична модель недостатньо відображає реальну дійсність, її уточнюють, і весь процес дослідження повторюється.

Першою моделлю, що описує взаємозв'язок економіки і математики, стала міжгалузева балансова модель Леонтьєва.

Питання вивчення міжгалузевих моделей в економіко-математичних дослідженнях актуальне, відповідає на важливі методологічні та змістові питання економічної науки, допомагає оцінити можливості та перспективи використання математичного моделювання в економіці.

Використання математичного моделювання в економіці дозволяє поглибити кількісний економічний аналіз, розширити сферу економічної інформації, інтенсифікувати економічні розрахунки.

Відзначимо, що проведення досліджень за допомогою математичного моделювання в економіці зумовило стійкий інтерес до використання комп'ютерів для символьних перетворень та одержання аналітичних розв'язків. Це дає можливість дослідження не тільки кількісних, а й якісних характеристик об’єкта, що моделюється.

Застосування методів економіко-математичного моделювання дає змогу аналізувати якісно і кількісно складні економічні процеси. Нові методи моделювання, засновані на строгих математичних розв'язаннях економічних завдань із застосуванням виявлених законів економіки виробництва, у поєднанні із сучасною обчислювальною технікою, сприяють створенню високоефективних систем для аналізу стану та науково обґрунтованого прогнозування розвитку економіки підприємств, галузей і країни загалом, дають можливість усвідомлено управляти економічними процесами виробництва.

Побудова та дослідження математичних моделей прикладних задач з використанням методів лінійної алгебри традиційно пов'язані із задачею розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР).

Практичне застосування моделей Леонтьєва висуває до методів розв'язування матричних рівнянь ряд вимог, а саме: робота з матрицями великої розмірності, погана зумовленість і виродженість матриці нормативних коефіцієнтів, цілочислові змінні, що значно звужує можливість застосування відомих числових методів, нечітка інформація про значення нормативних коефіцієнтів, розрідженість матриці нормативних коефіцієнтів тощо.

Недостатня вивченість СЛАР з $\lambda-$матрицями від багатьох змінних, які можна застосовувати в узагальнених моделях Леонтьєва, виокремлює задачу пошуку нових ефективних алгоритмів комп'ютерної алгебри як особливо актуальну.

У значній кількості прикладних задач виникає необхідність використання динамічних міжгалузевих моделей в економіці. Тому питання міжгалузевих моделей розглядаються у багатьох публікаціях вітчизняних і зарубіжних учених. Застосування моделей Леонтьєва набуло широкого практичного значення в різних сферах науки, особливо в економічних дослідженнях і для розв'язування еколого-економічних математичних задач. Використанню міжгалузевих моделей присвячено праці О.Ф. Волошина, Н.Б. Чорней, В.С. Григорківа, І.М. Ляшенка, М.В. Коробової, А.М. Столяр, М. Інтрилігатора, С.А. Жукова, А.Ф. Кабака, В.І. Кудіна, P.M. van Dooren, A. Hadjidimos, H.A. van der Vorst.

Наше дослідження присвячене побудові алгоритмів розв'язування широкого кола систем алгебричних рівнянь у моделях Леонтьєва і застосуванню СЛАР з $\lambda-$матрицями.

Для об'єктивного аналізу ефективності розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь у моделях Леонтьєва необхідні розробка та дослідження математичних моделей взаємодії економіки та математики з використанням, зокрема, систем лінійних алгебричних рівнянь з $\lambda-$матрицями.

Зважаючи на недостатню ефективність існуючих методів розв'язування СЛАР для міжгалузевої моделі Леонтьєва, актуальне застосування методу послідовного аналізу варіантів, який добре проявив себе для розв'язування багатьох прикладних задач.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі економічної кібернетики та інформатики Тернопільського національного економічного університету і є складовою частиною досліджень наукової держбюджетної теми "Аналітична теорія гіллястих ланцюгових дробів і її застосування в комп'ютерній алгебрі, диференціальних рівняннях і в моделюванні електронного бізнесу" (номер держреєстрації №0110U001442).

Мета і завдання дослідження. Мета дисертаційної роботи – побудова методів розв'язування окремих видів СЛАР з $\lambda-$матрицями в моделях Леонтьєва. Для досягнення мети були поставлені такі завдання:

- розробити стійкі методи розв'язування розріджених СЛАР з блочними елементами. Знайти кількість записів для символьного розв’язування та кількість арифметичних операцій для числової реалізації алгоритму множення матриць. Охарактеризувати складність алгоритму з погляду комп'ютерної алгебри. Провести порівняння отриманого алгоритму та існуючих методів;
- створити алгоритми розв'язування СЛАР з багатовимірними $\lambda-$матрицями для динамічної моделі Леонтьєва. Розвинути скінченно-різницевий підхід до розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь із двовимірними $\lambda-$матрицями. Дослідити зведення системи лінійних алгебричних рівнянь з $m-$вимірними $\lambda-$матрицями до системи з числовими елементами й обчислити кількість арифметичних операцій;
- розробити новий підхід до розв'язування кліткових алгоритмів для систем лінійних алгебричних рівнянь з блочними елементами в моделях Леонтьєва. Описати алгоритм для тридіагональної блочної системи лінійних алгебричних рівнянь. Розглянути блочний варіант другого алгоритму відсічних систем, а також провести розрахунок кількості операцій, потрібних для його реалізації;

- визначити умови розв'язності прямокутних і розріджених систем лінійних рівнянь з $\lambda-$матрицями в моделях Леонтьєва. Розробити новий підхід до розв'язання СЛАР Леонтьєва із прямокутними матрицями. Створити оптимізаційну модель з матрицями міжгалузевого балансу та запропонувати ефективний обчислювальний метод реалізації цієї моделі;
- запропонувати новий підхід до розв'язування погано зумовлених СЛАР у моделі Леонтьєва. Виконати аналіз складності числової реалізації алгоритму розв'язування СЛАР на ЕОМ. Дослідити обчислювальну стійкість запропонованого алгоритму розв'язування СЛАР у моделі Леонтьєва. Охарактеризувати складність алгоритму та показати його ефективність з погляду комп'ютерної алгебри;
- провести тестування якості запропонованих обчислювальних алгоритмів і відповідних оцінок їх основних характеристик.

Об'єкт дослідження – алгоритми комп'ютерної алгебри для розв'язування матричних рівнянь у моделях Леонтьєва.

Предмет дослідження – алгоритми розв'язування СЛАР з $\lambda-$матрицями в узагальнених моделях Леонтьєва.

Методи дослідження. У роботі застосовуються методи математичного моделювання для дослідження моделей міжгалузевого балансу; методи розв'язування СЛАР з $\lambda-$матрицями від двох змінних на основі скінченно-різницевого підходу; методи обчислювальної математики для побудови узагальнених і динамічних моделей Леонтьєва; елементи теорії прикладного програмування для побудови пакета програм; методи організації та проведення обчислювальних експериментів числового дослідження систем лінійних алгебричних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів.

У процесі розв'язування поставлених задач уперше отримані такі наукові результати:

- розвинено та обґрунтовано матричну модель міжгалузевого балансу, проведено аналіз її статистичних характеристик;
- для підвищення швидкодії програмних засобів розв'язування СЛАР з $\lambda-$матрицями в моделях Леонтьєва удосконалено деякі алгоритми, що забезпечують розв'язування систем даного класу;
- для математичного моделювання динамічного варіанта моделі Леонтьєва розроблено методи комп'ютерної алгебри, які розширюють можливості сучасних дослідницьких комп'ютерних технологій;
- розроблено схему зведення СЛАР динамічного варіанта моделі Леонтьєва з $\lambda-$матрицями від багатьох змінних до систем з числовими коефіцієнтами спеціального вигляду;
- методами зворотного аналізу встановлено обчислювальну стійкість запропонованих алгоритмів до похибок заокруглення, які виникають при реалізації на комп'ютерних обчислювальних системах;
- розроблено комплекс програм для розширення можливостей системи MatLab і підвищення її функціональності з проблем розв'язування задач, які описуються системами лінійних алгебричних рівнянь з $\lambda-$матрицями.

Практичне значення отриманих результатів. Розроблено комплекс взаємозв'язаних алгоритмів і програм для комп'ютерного дослідження динамічних об'єктів, що описуються системами лінійних алгебричних рівнянь з $\lambda-$матрицями у моделях Леонтьєва. Ці алгоритми суттєво розширюють можливості вказаних комп'ютерних засобів проведення наукових та інженерних розрахунків у динамічних моделях.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи, винесені на захист, отримані автором самостійно. У [7], яка опублікована спільно з науковим керівником, співавтору належить ідея ефективного методу реалізації динамічної міжгалузевої моделі.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційних досліджень доповідалися на конференціях: XII та XIII міжнародні наукові конференції імені академіка М. Кравчука (м. Київ, 15-17 травня 2008 р. та 13-15 травня 2010 р.); II міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики" (м. Львів, 25-29 травня 2008 р.); І міжнародна науково-методична конференція "Математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці" (м. Чернівці, 1-4 квітня 2009 р.); Український математичний конгрес – 2009 (м. Київ, 27-29 серпня 2009 р.).; неодноразово доповідалися на семінарах кафедри економічної кібернетики та інформатики Тернопільського національного економічного університету, на семінарі факультету прикладної математики Чернівецького національного університету ім. Ю. Федьковича і відділу числових методів та комп'ютерного моделювання Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України.

Публікації. На тему дисертації опубліковано 12 праць, у тому числі 7 статей, з них 5 статей у наукових журналах і збірниках наукових праць, які входять до переліку ВАК України з даної спеціальності, 5 тез доповідей, опублікованих у матеріалах наукових міжнародних конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел та кількох додатків. Список використаних джерел містить 146 найменувань і розташований на 14 сторінках. Загальний обсяг дисертації складає 165 сторінок.

Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику професору Недашковському М.О. за постановку задач, конструктивні поради і цікаві ідеї.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, показано її наукову спрямованість, сформульовано мету роботи та завдання дослідження, які потрібно виконати для її досягнення, визначено об'єкт, предмет і методи досліджень. Подано коротку характеристику результатів дослідження та кількість публікацій на тему дисертації.

Перший розділ *"Аналітичний огляд результатів із розв'язання та застосування матричних рівнянь"* присвячено розгляду літературних джерел і результатів за тематикою дисертації. Розглянено теоретико-числові основи обчислювальних методів на основі теорії СЛАР з $\lambda-$матрицями, які модифікують прямі числові методи лінійної алгебри. Викладено відомі наукові результати та підходи до розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь з $\lambda-$матрицями. Обґрунтовано вибір подальших напрямів досліджень, пов'язаних з побудовою економічних алгоритмів для розв'язування СЛАР з $\lambda-$матрицями в моделях Леонтьєва.

Проведено аналіз комп'ютерної системи для розв'язування задач із вхідними даними числового характеру. Запропоновано порівняльну характеристику розвитку декількох напрямків і концепцій для виконання символьних перетворень. Проаналізовано методи комп'ютерної алгебри для розв'язування СЛАР.

У **другому розділі *"Системи лінійних алгебричних рівнянь спеціального виду"*** розглянено системи лінійних алгебричних рівнянь спеціального вигляду, в тому числі матричні рівняння, пов'язані з економіко-математичними моделями Леонтьєва.

У ***підрозділі 2.1.*** подано теоретико-числові основи матричних обчислень. ***Підрозділи 2.2.*** і ***2.3*** присвячено теорії систем лінійних алгебричних рівнянь з $\lambda-$матрицями, елементарним перетворенням для систем з поліноміальними елементами. Східчасті системи розглянено у ***підрозділі 2.4.*** Системам матричних рівнянь, що виникають при використанні економіко-математичних моделей Леонтьєва, присвячено ***підрозділ 2.5.***.

У **третьому розділі *"Математичні моделі міжгалузевого балансу"*** досліджено продуктивність моделі міжгалузевого балансу на основі теорії невід'ємних матриць.

У ***підрозділі 3.1.*** побудовано матричну модель міжгалузевого балансу вигляду:

$$X = AX + Y , \tag{1}$$

де $A = \left(a_{ij}\right)$- матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат, X - вектор-стовпець валової продукції і Y - вектор-стовпець кінцевої продукції.

Користуючись цією моделлю, можна виконувати три види розрахунків, а саме:

- ☑ визначити обсяги Y_j кінцевої продукції кожної галузі, задавши в моделі її обсяги X_i валової продукції $Y = \left(E - A\right)X$, де E – одинична матриця n-го порядку;
- ☑ знайти обсяг X_i валової продукції кожної галузі, задавши обсяги Y_j кінцевої продукції всіх галузей

$$X = \left(E - A\right)^{-1} Y,$$

де $\left(E - A\right)^{-1}$ – матриця, обернена до матриці $\left(E - A\right)$;

- ☑ обчислити обсяги кінцевої продукції Y_j для деяких галузей і обсяги валової продукції X_i для решти галузей, задавши обсяги валової продукції X_i для деяких галузей, а для решти галузей – обсяги кінцевої продукції Y_j.

У ***підрозділі 3.2*** досліджено продуктивність моделі міжгалузевого балансу, яку ще називають моделлю Леонтьєва.

Аналіз моделі Леонтьєва з математичного погляду пов'язаний з теорією невід'ємних матриць. Останні, поділяють на два класи: розкладні та нерозкладні.

Означення. Невід'ємна матриця $B = \left(b_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ називається розкладною, якщо множину індексів $K = \{1,\dots,n\}$ можна розбити на таких дві підмножини: $K_1 = \{i_1,\dots,i_k\}$, $K_2 = \{j_1,\dots,j_m\}$, причому $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, $K_1 \cup K_2 = K$, $\left(k + m = n\right)$ і $b_{i_a j_b} = 0, i_a \in K_1$,

$j_b \in K_2$.

Усі інші невід'ємні матриці називаються нерозкладними. Зазначимо, що підмножини K_1 і K_2 називають ізольованими. Якщо перенумерувати індекси так, щоб вони набули вигляду $K_1 = \{1, 2, \dots, l\}$, а $K_2 = \{l + 1,\dots,k\}$, то для матриці B це означатиме одночасну перестановку рядків і стовпців. Матрицю B за допомогою такої операції можна звести до вигляду:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

де B_{11} і B_{22} – квадратні матриці.

Нерозкладні матриці мають такі властивості:

- ☑ нерозкладна матриця не може мати ні нульових рядків, ні нульових стовпців;
- ☑ якщо матриця B нерозкладна, а вектор $x > 0$, то $Bx > 0$;
- ☑ якщо B – нерозкладна матриця розмірності $\left(m \times m\right)$, то $\left(I_m + B\right)^{m-1} > 0$, тобто всі елементи матриці $\left(I_m + B\right)^{m-1}$ додатні;
- ☑ якщо B – нерозкладна матриця, то для будь-якої пари індексів $\left(i, j \in I\right)$ існує натуральне число n, для якого $b_{ij}^{(k)} > 0$, де $b_{ij}^{(k)} \in B^k$;

- ☑ щоб матриця B – була нерозкладною, необхідно і достатньо, щоб для будь-яких індексів i, j існувала послідовність $\{l_k\}$, $1 \le l_k \le n, k = \overline{1, m}$ така, що $l_1 = i, l_m = j, b_{l_k l_{k+1}} > 0, k = \overline{1, m-1}$;
- ☑ якщо B – нерозкладна матриця, а n – довільне натуральне число, то в матриці B^n не може бути ні нульових рядків, ні нульових стовпців.

У ***підрозділі 3.3*** проведено аналіз статистичних характеристик у моделях міжгалузевого балансу.

Як строгі математичні твердження сформульовано та обґрунтовано результати досліджень:

ТЕОРЕМА 1. Якщо в моделі (1) матриця $B = \left(b_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ невід'ємна, нерозкладна і продуктивна, а вектор $y \ge 0, \left(y \ne 0\right)$, то вектор валового випуску буде додатний: $x\left(y\right) > 0$.

ТЕОРЕМА 2. Нехай у моделі (1) матриця $B = \left(b_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ невід'ємна, нерозкладна і продуктивна. Якщо $y = \left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right)^T$, $\tilde{y} = \left(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n\right)^T$, причому $y \ge 0$, то $y > \tilde{y}$, то

$$\max_{i=\overline{1,n}} \frac{x_j\left(\tilde{y}\right)}{x_j\left(y\right)} = \frac{x_1\left(\tilde{y}\right)}{x_1\left(y\right)}.$$

Якщо

$$\frac{x_1\left(\tilde{y}\right)}{x_1\left(y\right)} = \frac{x_i\left(\tilde{y}\right)}{x_i\left(y\right)}$$

при $i \ne 1$, то $y_i = 0$.

Означення. Еластичністю i - того валового продукту відносно попиту на j - тий кінцевий продукт називається величина

$$E_{ij} = \frac{y_j}{x_i\left(y\right)} \times \frac{\partial x_i\left(y\right)}{\partial y_j} = \frac{\partial x_i\left(y\right)}{\partial y_j} : \frac{x_i\left(y\right)}{y_j} = \frac{\partial x_i\left(y\right)}{x_i\left(y\right)} : \frac{\partial y_j}{y_j}.$$

Очевидно, еластичність дорівнює відношенню граничної ефективності до середньої ефективності.

ТЕОРЕМА 3. Якщо матриця $B = \left(b_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ – невід'ємна, нерозкладна і продуктивна, то еластичність будь-якого валового продукту відносно попиту на довільний кінцевий продукт не перевищує одиниці: $E_{ij} \le 1 \left(i, j = \overline{1, n}\right)$. Якщо ж $y_i > 0$, то $E_{ij} < 1$ при $i \ne j$.

У **четвертому розділі** ***"Узагальнені матричні моделі Леонтьєва"*** розроблено ефективні алгоритми для узагальнених моделей Леонтьєва, побудовано матричне рівняння для динамічної моделі Леонтьєва, розв'язано систему лінійних алгебричних рівнянь з m - вимірними λ – матрицями і показано зведення системи алгебричних рівнянь з m - вимірними λ – матрицями до системи з числовими елементами.

Розглядається система лінійних алгебричних рівнянь, яка є m - вимірним аналогом системи

$$\left(B\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m\right)-E\right)Y\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m\right)=C\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m\right), \tag{2}$$

де $B\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m\right), C\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m\right)$ – поліноміальні матриці багатьох змінних. Їх можна подати як матричні поліноми

$$B\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m\right)=\sum_{k_1+k_2+...+k_m=0}^{l}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}B_{k_1k_2...k_m}$$

та

$$C\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m\right)=\sum_{k_1+k_2+...+k_m=0}^{l}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}C_{k_1k_2...k_m}.$$

Розв'язок системи шукається як відношення двох поліномів

$$Y\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m\right)=\frac{\sum_{k_1+k_2+...+k_m=0}^{l}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}Y_{k_1k_2...k_m}}{\sum_{k_1+k_2+...+k_m=0}^{l}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}Z_{k_1k_2...k_m}}, \tag{3}$$

де $Y_{k_1k_2\ldots k_m}$ - вектори розмірності n, $Z_{k_1k_2\ldots k_m}$ - скалярні величини.

Невідомі $Y_{k_1k_2\ldots k_m}$ та $Z_{k_1k_2\ldots k_m}$ обчислено методом невизначених коефіцієнтів.

Система (2) записана у вигляді:

$$\begin{gathered}\sum_{k_1+k_2+...+k_m=0}^{l}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}Y_{k_1k_2...k_m}\left(E-\sum_{k_1+k_2+...+k_m=0}^{nl}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}B_{k_1k_2...k_m}\right)= \\ =\sum_{k_1+k_2+...+k_m=0}^{l}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}Z_{k_1k_2...k_m}\sum_{k_1+k_2+...+k_m=0}^{nl}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}...\lambda_m^{k_m}C_{k_1k_2...k_m}.\end{gathered} \tag{4}$$

На основі методу невизначених коефіцієнтів одержана система лінійних алгебричних рівнянь спеціального вигляду з числовими блочними елементами

$$\begin{gathered}Y_{00..0}\left(E-B_{00..0}\right)-Z_{00..0}C_{00..0}=0; \\ Y_{10..0}\left(E-B_{00..0}\right)+Y_{00..0}\left(E-B_{10..0}\right)-\left[Z_{10..0}C_{00..0}+Z_{00..0}C_{10..0}\right]=0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_{nl,0..0}\left(E-B_{l0..0}\right)-Z_{nl,0..0}C_{l0..0}=0; \\ \sum_{k_s=0}^{l}Y_{0..0,l-k_s,0..0}\left(E-B_{0..0k_s0..0}\right)-\sum_{k_s=0}^{l}Z_{0..0,l-k_s,0..0}C_{0..0k_s0..0}=0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underset{k_1+k_2+..+k_m=nl+l}{\sum_{k_1=0}^{l}\sum_{k_2=0}^{l}\ldots\sum_{k_m=0}^{l}}Y_{nl+l-k_1,nl+l-k_2,\ldots,nl+l-k_m}\left(E-B_{k_1k_2...k_m}\right)- \\ -\underset{k_1+k_2+..+k_m=nl+l}{\sum_{k_1=0}^{l}\sum_{k_2=0}^{l}\ldots\sum_{k_m=0}^{l}}Z_{nl+l-k_1,nl+l-k_2,\ldots,nl+l-k_m}C_{k_1k_2...k_m}=0.\end{gathered} \tag{5}$$

для визначення невідомих матричних коефіцієнтів $Y_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ та $Z_{k_1 k_2 \ldots k_m}$.

У ***підрозділі 4.2.4*** подано алгоритм розв'язування блочної системи (5) з числовими елементами. Для розв'язування системи (5) використано модифікацію алгоритму схеми розрізання. Для цього система (5) записується у спеціальному вигляді. З цією метою позначено через B_r матрицю, яка складається із матриць $B_{k_1 k_2 \ldots k_m}$, сума індексів яких задовольняє умову

$$\sum_{i=1}^{m} k_i = r, \left(r = \overline{0, 1} \right)$$

Тоді отримано матриці $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_r, \ldots, B_l$, які мають такий вигляд:

$$B_0 = \left(B_{00\ldots0} \right)$$

складається з одного елемента. Матриці

$$B_1 = \begin{bmatrix} B_{10\ldots0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_{010\ldots0} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{0\ldots01} \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} B_{20\ldots0} & B_{110\ldots0} & B_{1010\ldots0} & \cdots & B_{10\ldots01} \\ 0 & B_{020\ldots0} & B_{0110\ldots0} & \cdots & B_{010\ldots01} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_{0\ldots02} \end{bmatrix}$$

мають розмірність $m \times m$. Наступна матриця

$$B_3 = \begin{bmatrix} B_{30..0} & B_{210\ldots0} & B_{2010\ldots0} & B_{20010\ldots0} & \cdots & B_{20\ldots010} & B_{20\ldots001} \\ 0 & B_{120\ldots0} & B_{1110\ldots0} & B_{11010\ldots0} & \cdots & B_{110\ldots010} & B_{110\ldots001} \\ 0 & 0 & B_{1020\ldots0} & B_{10110\ldots0} & \cdots & B_{1010\ldots010} & B_{1010\ldots01} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & B_{0\ldots030} & B_{0\ldots021} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & B_{010\ldots02} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & B_{0\ldots021} \end{bmatrix}$$

вже має m стовпців і $1 + 2 + 3 + \ldots + m = \frac{(1+m)m}{2}$ рядків. Аналогічно записуються матриці $B_4, B_5, B_6, \ldots, B_l$, кожна з яких має по m стовпців, а кількість рядків у матриці B_l не перевищує $\frac{(l+m)!}{l!m!}$.

Легко навести матриці $C_i \left(i = \overline{1, l} \right), X_i \left(i = \overline{1, nl} \right)$ та $Z_i \left(i = \overline{1, nl} \right)$. Кількість рядків у матрицях X_{nl} і Z_{nl} не перевищує $\frac{(nl+m)!}{(nl)!m!}$.

Використавши означення Кронекерового добутку, систему (5) записано у вигляді:

$$X \otimes (E - B) - Z \otimes C = 0, \tag{6}$$

або

$$X - X \otimes B - Z \otimes C = 0, \qquad (7)$$

де $X \otimes B$, $Z \otimes C$ - тензорні добутки.

Система розв’язується за алгоритмом схеми розрізання. Для цього попередньо матриця системи (7) розділяється на блоки

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix},$$

де M_{11} - квадратна матриця, розміри якої не перевищують $\dfrac{(nl + l + m)!}{(nl + l)!\,m!\,(n + 1)}$, а M_{12}, M_{21}, M_{22} - прямокутні матриці відповідних розмірів. Використовуючи останні $(n + 1)\dfrac{(nl + m)!}{(nl)!\,m!} - \dfrac{(nl + l + m)!}{(nl + l)!\,m!}$ невідомих Z системи (7) як параметри, які складаються з останніх $2l + 1$ компонент вектора N_2, можна одержати неоднорідну квадратну систему

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix},$$

порядок якої обмежений числом $\dfrac{(nl + l + m)!}{(nl + l)!\,m!}$. Отже, пошук невідомих U і V зводиться до розв'язування двох систем меншого порядку. Вектор V визначається із системи

$$\left(M_{22} - M_{21} \times \left(M_{11}^{-1} \times M_{12}\right)\right) \times V = N_2 - M_{21} \times \left(M_{11}^{-1} \times N_1\right), \qquad (8)$$

причому $M_{11} \neq 0$. U обчислюються із системи

$$M_{11} \times U = N_1 - M_{12} \times V. \qquad (9)$$

Розв'язування отриманої системи вимагає деяких проміжних матричних операцій. Для обчислення добутку $M_{11}^{-1} \times N_1$ потрібно знайти розв'язки систем

$$\begin{bmatrix} B_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ B_1 & B_0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ B_2 & B_1 & B_0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_l & B_{l-1} & B_{l-2} & \dots & B_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & B_0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_0^{(i)} \\ W_1^{(i)} \\ \dots \\ W_l^{(i)} \\ \dots \\ W^{(i)}_{\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_l \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

де $i = 0, 1, \dots, nl$.

Передусім, потрібно розв'язати систему при $i = 0$, а решта невідомих визначається за співвідношеннями:

$$\begin{cases} W_0^{(i)} = W_1^{(i)} = \ldots W_{i-1}^{(i)} = 0; \\ W_i^{(i)} = W_0^{(0)} \\ W_{i+1}^{(i)} = W_1^{(0)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ W^{(i)}_{\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}} = W^{(0)}_{\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}-1}. \end{cases}$$

Розв'язки системи (10) при $i = 0$ обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} W_i^{(0)} &= B_0^{-1} \cdot \left[B_i - \sum_{j=1}^{i} B_j \cdot W_{i-j}^{(0)} \right] \left(i = \overline{0,1} \right); \\ W_i^{(0)} &= B_0^{-1} \cdot \left[B_i - \sum_{j=1}^{i} B_j \cdot W_{i-j}^{(0)} \right] \left(i = \overline{l+1, \frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}} \right). \end{aligned} \tag{11}$$

Для знаходження всіх $W_j^{(0)} \left(j = \overline{l+1, \frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}} \right)$ треба виконати з точністю до головного члена $n^3 m \frac{(l+m)!}{l!m!} \frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)}$ арифметичних операцій. Обчислення добутків $M_{21} \cdot \left(M_{11}^{-1} \cdot M_{12} \right)$ та $M_{21} \cdot \left(M_{11}^{-1} \cdot N_1 \right)$ вимагає виконання $n^3 \left[\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)} \right]^2$ арифметичних дій. Для визначення невідомих V із системи $\frac{(nl+l+m)!n}{(nl+l)!m!(n+1)}$ - го порядку треба затратити $O\left(\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!} \right)^b$ операцій. Коли використовується алгоритм відсічених систем, $b = 3$.

Щоб розв'язати систему (10), спочатку треба знайти добуток $M_{12} \cdot V$. Для цього необхідно $n^2 \left[\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)} \right]^2$ операцій, після чого систему можна розв'язати за формулами (10), на що потрібно $n^3 \left[\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)} \right]^2$ дій. Отже, для повної реалізації алгоритму схеми розрізання для системи (10) потрібно виконати $n^3 \left[\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!(n+1)} \right]^2 + O\left(\frac{(nl+l+m)!}{(nl+l)!m!} \right)^b$ арифметичних операцій на комп'ютері.

П'ятий розділ ***"Методи комп'ютерної алгебри динамічних варіантів моделі Леонтьєва"*** присвячено застосуванню методів комп'ютерної алгебри для динамічних варіантів моделі Леонтьєва. Розглянено числові методи розв'язування розріджених систем лінійних алгебричних рівнянь, кліткові обчислювальні методи розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь, методи розв'язання вироджених і погано зумовлених систем. Проаналізовано можливості використання запропонованих алгоритмів на паралельних обчислювальних системах.

Проведено аналіз обчислювальної стійкості алгоритмів розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь. Охарактеризовано складність алгоритму та показано його ефективність з погляду комп'ютерної алгебри.

У ***підрозділі 5.3.*** показано застосування алгоритмів теорії λ – матриць для динамічних матричних моделей Леонтьєва.

Розглядається узагальнена модель Леонтьєва із прямокутними λ – матрицями вигляду

$$X(\lambda) = A(\lambda)X(\lambda) + y(\lambda), \tag{12}$$

де $X(\lambda) = \left(x_1(\lambda), x_2(\lambda), \ldots, x_n(\lambda)\right)^T$ та $Y(\lambda) = \left(y_1(\lambda), y_2(\lambda), \ldots, y_n(\lambda)\right)^T$ – відповідно вектори валової й кінцевої продукції, а матриця $A(\lambda) = \left(a_{ij}(\lambda)\right), \left(i = \overline{1,m};, j = \overline{1,n};\right)$ – матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат.

Систему (12) можна подати у вигляді

$$\left(A(\lambda) - E\right)X(\lambda) = -y(\lambda), \tag{13}$$

де $A(\lambda)$ – матриця розміру $n \times m$, елементи якої поліноми від λ. Припускається, що значення для λ і коефіцієнтів многочленів беруться з деякого поля F так, що елементи матриці $A(\lambda)$ обчислюються для деякого часткового значення λ, наприклад $\lambda = \lambda_0 \in F^{n \times m}$, $y(\lambda)$ – вектор $\left(a_{1,m}(\lambda), a_{2,m}(\lambda), \ldots, a_{n,m}(\lambda)\right)^T$. Матриця $A(\lambda)$ і вектор $Y(\lambda)$ мають степінь l, тобто $a_{ij}(\lambda) = \sum_{k=0}^{l} a_{i,j}\lambda^{l-k}$, $\left(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m+1}\right)$.

Розв'язок системи шукається у вигляді частки двох поліномів з невідомими коефіцієнтами.

$$X(t) = \sum_{i=0}^{nl} \lambda^{nl-i} X_i \Big/ \sum_{i=0}^{nl} \lambda^{nl-i} z_i, \tag{14}$$

де k - ранг матриці $A(\lambda) - E$, $X_1, \ldots, X_{ln}$ - вектори розмірності r, а $z_0, z_1, \ldots, z_{\ln}$ - скалярні величини. Тоді для системи (12) можна одержати еквівалентну їй числову систему $m\left(l + s + 1\right)$ рівнянь з $m\left(s + 1\right)$ невідомими x_{ij} і $\left(s + 1\right)$ невідомими z_j.

$$\begin{cases} -A_0x_0 - y_0z_0 = 0; \\ -A_1x_0 - A_0x_1 - y_0z_1 - y_1z_0 = 0; \\ -A_1x_1 - A_0x_2 - y_0z_2 - y_1z_1 = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{nl-1} - A_lx_{nl-1} - x_{nl}A_{l-1} - z_{nl-1}y_l = 0; \\ x_{nl} - A_lx_{nl} - z_{nl}y_l = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Даний підхід дозволяє проаналізувати розв'язування прямокутних систем, а також одержувати якісні теоретичні оцінки щодо сумісності, існування та числа розв'язків.

Для розв'язування одержаних систем числових рівнянь (15) можна застосувати кілька обчислювальних алгоритмів.

Схема розрізання. Схематична матриця числової системи може бути подана у вигляді:

$$A^{*}=\begin{pmatrix} \times & I & & & & & & & & \\ \times & I & \times & I & & & & & & \\ \times & I & \times & I & \times & I & & & & \\ \times & I & \times & I & \times & I & \times & I & & \\ & & \times & I & \times & I & \times & I & \times & I \\ & & & & \times & I & \times & I & \times & I \\ & & & & & & \times & I & \times & I \\ & & & & & & & & \times & I \end{pmatrix}, \tag{16}$$

де через "$\times$" позначено квадратні клітки, а через "I" – прямокутні блоки.

Для визначеності вважається, що система (13) складається з $m\left(l+s+1\right)$ рівнянь і має $m\left(l+s+1\right)+k$ невідомих $\left(k\ \text{і}\ \ 1\right)$. І нехай $rank\, A_0 = \min\left\{m, n\right\}$.

Перестановкою стовпців систему (15) можна перетворити так, щоб її матриця набула заповнення

$$\begin{pmatrix} \times & & & & & I & & & & \\ \times & \times & & & & I & I & & & \\ \times & \times & \times & & & I & I & I & & \\ \times & \times & \times & \times & & I & I & I & I & \\ & \times & \times & \times & \times & & I & I & I & I \\ & & \times & \times & \times & & & I & I & I \\ & & & \times & \times & & & & I & I \\ & & & & \times & & & & & I \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Загальна стратегія розв'язування цієї системи залежить від її рангу. Найбільш трудомісткий з обчислювального погляду варіант числової системи одержано в припущенні, що всі головні мінори схематично побудованої матриці не дорівнюють нулю. Тоді перші $m\left(l+s+1\right)$ невідомих можуть бути виражені через k останніх розв'язків системи (14). За зроблених припущень про характер матриці (17) підматриця, утворена блоками "$\times$", буде невиродженою. Схематично процес перетворення матриці системи подамо у вигляді

$$\begin{pmatrix} \times & & & & & I & & & & \\ \times & \times & & & & I & I & & & \\ \times & \times & \times & & & I & I & I & & \\ \times & \times & \times & \times & & I & I & I & I & \\ & \times & \times & \times & \times & & I & I & I & I \\ & & \times & \times & \times & & & I & I & I \\ & & & \times & \times & & & & I & I \\ & & & & \times & & & & & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} O & & & & & I & & & & \\ & O & & & & I & I & & & \\ & & O & & & I & I & I & & \\ & & & O & & I & I & I & I & \\ & & & & O & I & I & I & I & I \\ & & & & & I & I & I & I & I \\ & & & & & I & I & I & I & I \\ & & & & & I & I & I & I & I \end{pmatrix}.$$

Для реалізації алгоритму на обчислювальній системі потрібно виконати з точністю до головного члена Cm^3l^3 арифметичних операцій. Причому величина сталої C залежить від вибраного алгоритму зведення матриці до діагонального вигляду.

*У **підрозділі 5.5.*** проведені дослідження паралельності описаних алгоритмів розв'язування матричних систем з λ-матрицями для двох найбільш часто використовуваних моделей – концепції необмеженого паралелізму, а також для комп'ютерів з конкретною архітектурою – багатопроцесорною обчислювальною системою типу MIMD.

Установлено, що для концепції необмеженого паралелізму коефіцієнт прискорення $S_p = T_1 / T_p$ дорівнює p. Тут T_1 – час реалізації алгоритму на одному процесорі паралельної обчислювальної системи, а T_p - час його реалізації на p процесорах. Показано, що коефіцієнт економічності $E_p = S_p / p$ близький до 1.

Для обчислювальних систем класу MIMD за умов обмеженості обчислювальних ресурсів і технічних можливостей проведені дослідження ефективності розпаралелювання алгоритмів розв'язування матричних систем з λ – матрицями для ланцюгового способу передачі даних.

Із застосуванням принципу привілейованої передачі даних проведені дослідження для принципу передачі даних і для магістральної обробки даних. Установлено, що для всіх способів передачі даних у MIMD-системах розглянені алгоритми розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь можна успішно використовувати на багатопроцесорних обчислювальних комплексах. Для p - процесорних ЕОМ при $p \le n$ досягається повна завантаженість усіх процесорів для кожного алгоритму. Характерно, що значення коефіцієнтів ефективності та прискорення практично збігаються для концепції необмеженого паралелізму та для обчислювальних систем з MIMD-архітектурою.

Підрозділ 5.6. присвячено аналізу обчислювальної стійкості алгоритмів розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь з λ – матрицями. Проведено зворотний аналіз похибок заокруглення, тобто встановлено еквівалентні збурення вхідних даних для алгоритму розрізання розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь з λ – матрицями.

ТЕОРЕМА 4. Якщо при реалізації алгоритму схеми розрізання для СЛАР на ЕОМ у режимі плаваючої коми обчислення скалярних добутків проводяться з одинарною точністю, то еквівалентні збурення задовольняють нерівність

$$\left\| a_{i,j}^{(0)} \right\| \le C_0 \cdot nl \cdot \max \left\{ \|A\|, \left\|Y_2 - C_{21}C_{11}^{-1}C_{12}\right\|, \left\|C_{22} - C_{21}C_{11}^{-1}Y_1\right\|, \left\|Y_1 - C_{12}Z\right\| \right\} h^{-t+1}$$

Тут C_0 – обмежена додатна стала, а решта:

$$A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \text{ і } \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} -$$

проміжні матриці в методі розрізання.

ТЕОРЕМА 5. Якщо комп'ютерна реалізація алгоритму схеми розрізання для системи рівнянь у режимі плаваючої коми обчислення скалярних добутків проводиться з подвійною точністю, то еквівалентні збурення задовольняють нерівність

$$\left\| a_{i,j}^{(0)} \right\| \le C_0 \cdot \max \left\{ \|A\|, \left\|Y_2 - C_{21}C_{11}^{-1}C_{12}\right\|, \left\|C_{22} - C_{21}C_{11}^{-1}Y_1\right\|, \left\|Y_1 - C_{12}Z\right\| \right\} h^{-t+1}$$

Отже, і за кількістю арифметичних операцій, і за малістю еквівалентних збурень алгоритм схеми розрізання придатний для використання на ЕОМ. Одержані оцінки еквівалентних збурень можна поліпшити лише з точністю до сталої.

У **висновках** сформульовано основні результати роботи.

У **додатках** наведено тексти розроблених програм і результати числового експерименту.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена побудові алгоритмів комп'ютерної алгебри для розв'язання матричних рівнянь. Розроблені алгоритми можна застосувати в математичному моделюванні для розв'язування прикладних задач економіки, механіки, коли виникає необхідність розв'язувати і досліджувати розв'язки СЛАР з λ – матрицями в моделі Леонтьєва.

Математичні моделі, одержані теоретичні результати й обчислювальні алгоритми, запропоновані в роботі, можна використати для розробки програмних засобів і для подальших досліджень, пов'язаних з розв'язуванням систем лінійних алгебричних рівнянь з λ – матрицями в моделі Леонтьєва, які виникають у багатьох задачах моделювання.

У роботі одержано такі основні результати:

- розроблено й обґрунтовано ефективні алгоритми розв'язування розріджених систем лінійних алгебричних рівнянь із блочними елементами, одержано оцінки складності алгоритмів з погляду комп'ютерної алгебри;
- запропоновано новий підхід із застосуванням блочних алгоритмів для систем лінійних алгебричних рівнянь у моделях Леонтьєва;
- за допомогою скінченно-різницевого підходу розроблено алгоритм розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь з багатовимірними λ – матрицями зведенням до систем з числовими елементами;
- одержано ефективний підхід до розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь Леонтьєва з прямокутними λ – матрицями, створено оптимізаційну модель з матрицями міжгалузевого балансу;
- проведено дослідження та встановлено широкі можливості для розпаралелювання описаних алгоритмів розв'язування матричних систем з λ – матрицями для двох найбільш часто використовуваних моделей з концепцією необмеженого паралелізму, а також для комп'ютерів з конкретною архітектурою – багатопроцесорною обчислювальною системою типу MIMD.
- проведений зворотний аналіз похибок заокруглення та встановлено еквівалентні збурення вхідних даних для алгоритму розрізання для розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь з λ – матрицями.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Семчишин Л.М. Розв’язання розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь з блочними елементами / Л.М. Семчишин // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. Випуск 6. – Львів: Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України, 2007. – С. 128-135.

2. Семчишин Л.М. Клетковые алгоритмы для систем линейных алгебраических уравнений с блочными элементами в моделях В. Леонтьева / Л.М. Семчишин // Компьютерная математика. Выпуск 2. – Киев, 2009. – С. 24-35.

3. Семчишин Л.М. Розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь із багатовимірними λ – матрицями для динамічної моделі Леонтьєва / Л.М. Семчишин // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. Випуск 10. – Львів: Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України, 2009. – С. 123-131.

4. Семчишин Л.М. Розв’язування погано обумовлених систем лінійних алгебраїчних рівнянь у моделі Леонтьєва / Л.М. Семчишин // Вісник Тернопільського державного технічного університету. Тернопіль. –2009. – Том 14, №4 – С. 168-175.

5. Семчишин Л.М. Розв’язування прямокутних та розріджених систем лінійних рівнянь з $\lambda-$матрицями в моделях В. Леонтьєва / Л.М. Семчишин // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: фізико-математичні науки: збірник наукових праць / Кам’янець-Подільський національний університет, Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова Національної академії наук України. – Випуск 1. Кам’янець-Подільський, 2009. – С. 121-133.

6. Семчишин Л.М. Динамічні математичні моделі в економіці / Л.М. Семчишин // Вісник Тернопільського національного економічного університету. Випуск 3. – Тернопіль: Економічна думка, 2008. – С. 123-129.

7. Недашковський М.О. Узагальнені динамічні міжгалузеві моделі / М.О. Недашковський, Л.М. Семчишин // Вісник Тернопільського національного економічного університету. Випуск 1. – Тернопіль: Економічна думка, 2009. – С. 169-187.

8. Семчишин Л.М. До розв’язання розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь / Л.М. Семчишин // Матеріали XII міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука, 15-17 травня 2008 року, Київ – 2008.: ТОВ "Задруга", 2008. – Ч. 1. – С. 786.

9. Семчишин Л.М. Економіко-математичні моделі в багаторівневому управлінні / Л.М. Семчишин // Матеріали II міжнародної наукової конференції імені Я. С. Підстригача, 25-29 травня 2008 року, Львів, 2008. – Т.3. – С. 46-48.

10. Семчишин Л.М. Узагальнена динамічна модель Леонтьєва / Л.М. Семчишин // Матеріали I міжнародної науково-методичної конференції, 1 – 4 квітня 2009 року, – Чернівці: ДрукАрт, 2009. – С. 360-362.

11. Семчишин Л.М. До розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з $m-$мірними $\lambda-$матрицями / Л.М. Семчишин // м. Київ, Інститут математики НАН України, 27-29 серпня 2009 р. // www.imath.kiev.ua/~congress2009/

12. Семчишин Л.М. Розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь із двовимірними $\lambda-$матрицями для динамічної моделі Леонтьєва / Л.М. Семчишин // Матеріали XIII міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука, 13-15 травня 2010 року, Київ: Матеріали конф. Т.2 – К., НТУУ, 2010. – С. 243.

АНОТАЦІЯ

Семчишин Л.М. *Алгоритми комп'ютерної алгебри для розв'язання матричних рівнянь.* – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02. – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, 2011.

У дисертаційній роботі вперше запропоновано й обґрунтовано ефективні алгоритми розв'язування СЛАР з $\lambda-$матрицями в моделі Леонтьєва. Розроблено схему зведення СЛАР динамічного варіанта моделі Леонтьєва з $\lambda-$матрицями від багатьох змінних до систем з числовими коефіцієнтами спеціального вигляду. Виконано зворотний аналіз похибок

заокруглення й аналіз обчислювальної стійкості запропонованих алгоритмів. Одержано аналітичне розвинення невідомих x_i даної розрідженої системи лінійних алгебричних рівнянь у скінченні матричні ланцюгові дроби. Розроблено новий підхід до розв'язування кліткових алгоритмів для СЛАР з блочними елементами в моделях Леонтьєва та систем лінійних алгебричних рівнянь з m–вимірними λ–матрицями в моделі Леонтьєва. Засобами програмного забезпечення MatLab створено набір інструментальних алгоритмів, які слугують для комп'ютерної реалізації динамічних міжгалузевих моделей. Проведено обчислювальні експерименти, які підтверджують ефективність запропонованих обчислювальних схем.

Ключові слова: λ – матриця, блочний алгоритм, модель міжгалузевого балансу (модель Леонтьєва), ланцюговий дріб, кліткові алгоритми, m – вимірні λ – матриці.

АНОТАЦИЯ

Семчишин Л.М. *Алгоритмы компьютерной алгебры для решения матричных уравнений*. - Рукопись.

Диссертация на соискание научной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02. – математическое моделирование и вычислительные методы. – Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича, Черновцы, 2011.

В диссертационной работе впервые предложены эффективные алгоритмы решения СЛАР с λ – матрицами для модели Леонтьева. Разработана схема сведения СЛАР динамического варианта модели Леонтьева с λ – матрицами от многих сменных к системам с числовыми коэффициентами специального вида. Выполнен обратный анализ погрешностей округления и анализ вычислительной устойчивости предложенных алгоритмов, который подтверждает их высокую эффективность. Получено аналитическое развитие неизвестных данной разреженной системы линейных алгебраических уравнений в конечные матричные цепные дроби. Разработан новый подход к решению клеточных алгоритмов для СЛАУ с блочными элементами в моделях Леонтьева и систем линейных алгебраических уравнений с m – измеримыми λ – матрицами в моделях Леонтьева.

Средствами программного обеспечения MatLab создан набор инструментальных алгоритмов, который служит для компьютерной реализации динамических межотраслевых моделей. Проведены вычислительные эксперименты, которые подтверждают эффективность предложенных вычислительных схем.

В процессе решения задач развита и обоснована матричная модель межотраслевого баланса и проведен анализ ее статистических характеристик. Для повышения быстродействия программных средств при решении СЛАР с λ – матрицами в моделях Леонтьева предложена линейка алгоритмов, которые обеспечивают решение систем данного класса.

Для математического моделирования динамического варианта модели Леонтьева разработаны методы компьютерной алгебры, которые расширяют возможности современных исследовательских компьютерных технологий. Разработана схема сведения СЛАР динамического варианта модели Леонтьева с λ – матрицами со многими переменными к системам с числовыми коэффициентами специального вида.

Разработан комплекс программ для расширения возможностей системы MatLab и повышение ее функциональности в направлении решения задач, которые описываются системами линейных алгебраических уравнений с λ – матрицами. Многочисленные числовые экперименты для плохо обусловленных линейных систем подтверждают несомненное

преимущество предложенных алгоритмов в точности по сравнению со стандарнтыми процедурами пакета MatLab.

Ключевые слова: λ – матрица, блочный алгоритм, модель межотраслевого баланса (модель Леонтьева), цепная дробь, блочные алгоритмы, m – измеримые λ – матрицы.

ABSTRACT

Semchushun L.M. Algorithms of computer algebra for the matrix equation solution. – Manuscript.

Thesis for a candidate's degree by speciality 01.05.02. – mathematics modelling and calculative methods. – Chernivtsi National University after Yurii Fedkovych, Chernivtsi, 2011.

For the first time the effective algorithms of the computer algebra for the system of linear algebraic equation (SLAE) with Leontyev's λ – matrix generalised model are suggested in the dissertation. The scheme of the Leontyev's λ – matrix model SLAE dynamic version reduction on many variables for the systems with numerical coefficient of the special figuration is worked out. The error round-up inverse and the suggested algorithms calculating stability analysis which certify their high effectiveness is carried out. The given sparse system analytical expansionof the linear algebraic equation into the finite matrix concatenation fractionsare attained. New approach to the bit-mapped algorithmssolution for the SLAE with block elements in the V.Leontyev's models and to thesystem of linear algebraic equation with m- measured ƛ-matrix in the Leontyev'smodel is worked out. By means of MatLab software the set of instrumental algorithms which serves for the dynamic inter-branch models computer realisation is created. Calculating experiments which confirm the suggested calculating schemes effectiveness is carried out.

Key words: λ – matrix, inter-branch balance model (Leontyev's model), matrix branched continued fraction, block algorithms, m – moderate λ – matrix.