Тетяна СТЕЧИШИН

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ПІДХІД ДО ФОРМУВАННЯ ПОРТФЕЛЯ ФІНАНСОВИХ ІНСТРУМЕНТІВ БАНКІВСЬКОЇ УСТАНОВИ

Анотація

Розглянуто основні підходи щодо формування оптимального інвестиційного портфелю банківської установи. Проведено аналіз класичної теорії вибору портфеля та оцінку можливих альтернативних портфелів з огляду на їх сподівані дохідності, стандартні відхилення, коваріацію та кореляцію. Запропоновано формування оптимального портфеля фінансових інструментів шляхом економіко-математичного моделювання, виходячи із заданого рівня ризику портфеля та врахування ймовірності дохідності трьох різновидів його складових.

Актуальність дослідження. В умовах формування фінансового ринку і у зв’язку з переходом до ринкових відносин, особливо актуальним є завдання раціонального розміщення та управління фінансовими ресурсами. Світовий досвід доводить, що саме ефективне формування та використання фінансового капіталу в інвестиційній діяльності банків є запорукою їх економічного поступу та забезпечення стабільності діяльності. В результаті провадження інвестицій банківські установи формують інвестиційний портфель, якістю якого визначається ефективність роботи банку. Погана якість портфеля призводить до його збиткової діяльності, водночас уміле управління джерелами ресурсів і ефективний розподіл між доступними фінансовими інструментами і напрямами інвестування веде за собою високу прибутковість. Саме тому питання формування ефективного і оптимального портфеля фінансових інструментів було і залишається надзвичайно актуальним.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблеми визначення основних підходів щодо формування оптимального портфеля фінансових інструментів банківської установи досліджували вчені економісти, зокрема: Л. Александер, В. Бейлі, Г. Бірман, Дж. Гітман, Е. Долан, К. Еклаунд, Д. Линдсей, А. Маршал, Ф. Фаббоці, В. Шарп, С. Шмідт, Й. Шумпетер. Однак, зважаючи на мінливість економічного середовища, питання формування оптимального портфеля фінансових інструментів вивчені не в повній мірі і потребують подальших досліджень.

Підвищити якість інвестування дозволить застосування ефективних економіко-математичних методів формування і управління портфелем. Відтак, **метою** статті є визначення пропозицій щодо формування ефективної та оптимальної структури портфеля фінансових інструментів банківської установи шляхом моделювання.

Виклад основного матеріалу. При здійсненні інвестиційної діяльності банків важливим є обґрунтування рішень при вкладенні капіталу у придбання цінних паперів різних видів, що зазвичай передбачає використання положень теорії вибору портфеля [1]. Це дає змогу визначити особливості використання інвесторами власних ліквідних засобів, співвідношення акцій різних видів, облігацій, готівкових засобів та інших активів, що є бажаними складовими їхнього портфеля. Теорія вибору портфеля дає змогу сформувати методики для визначення структури оптимального портфеля інвестора. Саме ця теорія і є основою планування інвестиційної діяльності банку в умовах ризику. Відповідно до положень цієї теорії, інвестор при здійсненні ризикових операцій на ринку цінних паперів приймає рішення про розподіл свого капіталу між ризиковими і безризиковими вкладеннями у цінні папери при відомій початковій ціні ризикових цінних паперів.

Розглянемо два основних підходи до формування і оцінки інвестиційного портфеля: – класичну постановку завдання, т. зв. портфель Марковіца, що складається тільки з ризикових активів, і, другий – портфель, що складається з ризикових і безризикових.

Вихідні положення класичної теорії вибору портфеля наступні [2]: - усі інвестиційні рішення приймаються тільки на один період; - є тільки ризикові папери; - кожен цінний папір має прогнозовану сподівану доходність, стандартне відхилення і коваріацію доходності будь-якої пари цих паперів; - стандартне відхилення кожного цінного паперу відображає ризик його покупки за умови існування нормального розподілу доходності; - інвестиції в певні ризикові активи або портфель таких активів оцінюють сподіваною доходністю і ризиком (мірою є стандартне відхилення); - податки і транзакційні витрати не враховують.

Інвестор має при встановлених цінах на акції в певних економічних умовах при суб'єктивних ймовірностях та при заданих розподілах майбутніх доходностей цінних паперів, що залежать від економічних умов, знайти найпріоритетнішу для себе структуру портфеля.

Основною перевагою класичної теорії вибору портфеля є те, що диверсифікація інвестицій і збільшення різноманіття фінансових інструментів у портфелі дають змогу забезпечити йому ризик, менший за ризик найменш ризикового цінного паперу з цього портфеля. Розв'язуючи завдання вибору портфеля припускають, що інвестор має розв'язати дві проблеми: максимізувати сподівану дохідність при фіксованому рівні ризику і мінімізувати ризик при заданому рівні сподіваної дохідності.

Як головні показники ефективності портфеля у портфельній теорії використано два показника: дохідність портфеля та дисперсія дохідності портфеля, що залежать від сподіваної дохідності та дисперсії кожного з активів портфеля [2]. Оскільки випадкові величини доходностей портфеля взаємозалежні, то кількість параметрів в цій моделі, зростала за квадратичним законом залежно від кількості активів, що входять у портфель.

Проблема вибору оптимального портфеля для інвестора потребує порівняльної оцінки всіх можливих альтернативних портфелів з точки зору їх сподіваних доходностей, стандартних відхилень, коваріації і кореляції. Сподівана дохідність є мірою потенційної винагороди, пов'язаної з портфелем, середньозваженою сподіваних доходностей цінних паперів портфеля.

Стандартне відхилення як міра ризику портфеля і є оцінкою ймовірного відхилення фактичної дохідності від сподіваної. Стандартне відхилення портфеля залежить від стандартних відхилень і часток цінних паперів у портфелі, від коваріацій їх один з одним. Коваріація є мірою того наскільки доходності двох цінних паперів залежать одна від одної, а кореляція є статистичною мірою близькою до коваріації. Але насправді коваріація двох випадкових змінних дорівнює добутку кореляції і стандартних відхилень. Коефіцієнт кореляції нормує коваріацію для полегшення порівняння з іншими випадковими змінними.

Очевидно, що ефективних портфелів може бути сформовано багато, а тому вводять поняття оптимального портфеля. За теорією Марковиця оптимальний портфель інвестор формує з набору кривих байдужості. При цьому беруть до уваги те, що чим вище розміщена крива тим вищий і рівень задоволення інвестора портфелем. Усі комбінації, що належать певній кривій байдужості однаково прийнятні для інвестора, тобто він байдужий до вибору конкретної комбінації з набору. Отже формують набір ефективних портфелів для конкретного інвестора, що повністю відповідає його критеріям прийняття рішень (а саме, якщо інвестор має на вибір два портфеля з однаковим ризиком, але з різною доходністю, то портфель, що має більшу доходність буде для нього ефективним). Оптимальним для інвестора буде портфель, що відповідає точці перетину множини ефективних портфелів і однією з кривих байдужості.

Суттєве спрощення моделі Г. Марковица запропоноване в роботах У. Шарпа [2], зокрема однофакторна модель (*single-factor model*). Завдяки ідеї системного ризику ринкового портфеля У. Шарпу вдалося зменшити кількість параметрів моделі і звести їх до лінійної залежності від кількості активів. Подальший розвиток цей напрям теорії фінансів отримав в 60-ті рр. XX ст. у роботах [3; 4; 5]. У. Шарпом, Дж. Линтнером і Дж. Моссіном була розроблена модель оцінки дохідності фінансових активів – Capital Asset Pricing Model (CAPM), яка пов'язує систематичний ризик і дохідність портфеля. Ця модель і на даний час залишається одним із ґрунтовних наукових досягнень в теорії фінансів. Однак, модель CAPM не є ідеальною і неодноразово підлягала як критиці, так і емпіричній перевірці. Особливо інтенсивно дослідження у цьому напрямку велись наприкінці 60-х років минулого століття, а їх результати знайшли відображення у сотнях статей. Існують різні точки зору з приводу моделі, тому наведемо деякі найтиповшії уявлення про сучасний стан цієї теорії з огляду, зробленого Ю. Брігхемом і Л. Гапенскі .

1. Концепція CAPM, в основі якої лежить пріоритет ринкового ризику перед загальним, є досить корисною і має фундаментальне значення у концептуальному плані. Модель логічно відображає поведінку інвестора, який прагне максимізувати свій доход при заданому рівні ризику і доступності даних.

2. Теоретично CAPM дає однозначне і добре інтерпретоване уявлення про взаємозв'язки між ризиком і необхідною доходністю, однак вона припускає, що для побудови зв'язку повинні використовуватися апріорні сподівані значення змінних, тоді як у розпорядженні аналітика є лише апостеріорні фактичні значення. Тому оцінки доходності, знайдені за допомогою моделі, потенційно містять помилки.

3. Деякі дослідження, присвячені емпіричній перевірці моделі вказали на значні відхилення між фактичними і розрахунковими даними, що дало змогу вченим серйозно критикувати цю теорію. До них належать Ю. Фама і К. Френч, що вивчали залежність між β-коефіцієнтами і доходністю кількох тисяч акцій за даними за 50 років . На думку Брігхема і Гапенскі, модель CAPM описує взаємозв'язки між сподіваними значеннями змінних, тому будь-які висновки, які базуються на емпіричній перевірці статистичних даних навряд чи правомірні і не можуть спростувати теорію.

Деякі дослідники прийшли до висновку, що CAPM не є досконалою, базуючись при цьому на результатах тестів, які показали, що залежність між коефіцієнтом β (β – це міра чутливості активу до впливу розглядуваного фактора) і середньою доходністю акцій відсутня. Результати тестування CAPM були поставлені під сумнів у роботах [3]. У даних дослідженнях встановлено, що середні доходності і коефіцієнти β мають позитивний лінійний зв'язок у випадку, якщо ринковий портфель включає людський капітал і коефіцієнти β можуть змінюватися в процесі бізнес-циклу.

У роботі [5] стверджується, що CAPM практично не можливо перевірити, оскільки: єдиною гіпотезою, яку можна перевірити, є та, що „дійсний" ринковий портфель належить ефективній множині (очікувані доходності цінних паперів і їх коефіцієнти β пов'язані додатною лінійною залежністю); "дійсний" ринковий портфель не може бути змінений допустимим способом.

Наявні емпіричні відомості підтверджують думку про те, що аналіз інвестиційного портфеля може бути ефективним способом обліку ризику, по крайній мірі при прийнятті рішень на фондовому ринку. Незважаючи на ці обнадійливі результати до теорії інвестиційного портфеля є серйозні зауваження [6], значна частина яких спрямована на обґрунтованість прийнятих у теорії припущень і можливість її практичного застосування.

Однією з головних труднощів, пов’язаних з цією теорією, є потреба у великому обсязі інформації. Інвестор повинен прогнозувати не тільки доход і дисперсію кожного цінного паперу, а й коваріацію доходу від цінного паперу з доходом від кожної акції на фондовому ринку, а це є слабо реалізоване і економічно недоцільне завдання для більшості інвесторів. Наприклад, якщо інвестор розглядає сто цінних паперів, то він повинен оцінити сто сподіваних доходів разом з коваріацією кожної пари цінних паперів. Він повинен зробити близько 5 тисяч окремих оцінок.

Серйозні зауваження висувають і щодо припущення про існування досконалого ринку капіталу. Неможливо вивести будь-яку реальну теорію вартості цінного паперу без цього припущення, оскільки у протилежному випадку дуже складно проаналізувати ефекти комбінування не пов’язаних з ризиком активів і ринковим портфелем. Загальним недоліком є відсутність у реальній економіці повністю безризикових цінних паперів. Державні облігації виключають невиконання зобов’язань по них, однак володіння ними не захищає від інфляції.

Як видно з проведеного аналізу літературних джерел окремі питання, пов’язані з моделями формуванням та управлінням інвестиційним портфелем залишилися або не дослідженими, або не доведеними до конкретних розрахункових методик, що дають змогу оптимізувати інвестиційний портфель за певними критеріями.

Ефективний портфель по Марковіцу – це допустимий портфель з найбільшою очікуваною дохідністю для заданого рівня ризику. Банки, формуючи інвестиційний портфель, прагнуть максимізувати очікувану дохідність своїх інвестицій при допустимому рівні ризику, тобто портфель, що задовольняє інвестора у відношенні дохідності і ризику. Розглянемо формування оптимального інвестиційного портфеля при заданому рівні ризику портфеля, тобто знайдемо частки w_i вкладення грошових коштів в *і*-ті активи, які максимізували сподіваний дохід портфеля. Отже, необхідно знайти пропорції розподілу інвестованих коштів між доступними активами w_1, w_2, w_3 для максимізації сподіваної дохідності портфеля банку.

$$\max R_p = \max(R_1 w_1 + R_2 w_2 + R_3 w_3)$$

Для портфеля з трьох активів ризик задається виразом:

$$d_p = \sigma_1^2 w_1^2 + \sigma_2^2 w_2^2 + \sigma_3^2 w_3^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 w_1 w_2 + 2\rho_{13}\sigma_1\sigma_3 w_1 w_3 + 2\rho_{23} w_2 w_3 \quad (1)$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1 \quad (2)$$

де d_p – заданий інвестором ризик портфеля, який лежить в межах $\min\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} < d_p < \max\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$;

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – середньоквадратичне відхилення кожного з активів;

$\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23}$ – коефіцієнт кореляції активів.

Для знаходження шуканих частин інвестованих коштів w_i підставимо в рівняння (1) формулу $w_1 = 1 - w_2 - w_3$ і отримаємо рівняння, з якого визначимо w_2:

$$\begin{aligned}&(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2) w_2^2 - 2(\rho_{23}\sigma_2\sigma_3 w_3 - \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 w_3 + \rho_{12}\sigma_1\sigma_2(1 - w_3) - \\ &- \sigma_1^2(1 - w_3)) w_2 + \sigma_1^2(1 - w_3)^2 + \sigma_3^2 w_3^2 + 2\rho_{13}\sigma_1\sigma_3(1 - w_3) w_3 - d_p = 0 \quad (3)\end{aligned}$$

Розв'яжемо дане рівняння. Так як коефіцієнт при w_2^2 додатній і виконується умова:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 > 0, \quad (4),$$

оскільки тільки у випадку рівності стандартних відхилень доходності першого та другого активів, та повній їх кореляційній залежності коефіцієнт при w_2^2 може бути рівний нулю і тоді задача формування з трьох активів зведена буде до задачі формування портфеля з двох активів. Додатній розв'язок рівняння (3) запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned}&w_2 = (\sigma_1^2(1 - w_3) - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2(1 - w_3) + \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 w_3 - \rho_{23}\sigma_1\sigma_3 w_3 + \\ &+ ((\sigma_1^2(1 - w_3) - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2(1 - w_3) + \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 w_3 - \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 w_3)^2 - \\ &- (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2)(\sigma_1^2(1 - w_3)^2 + \sigma_3^2 w_3^2 + 2\rho_{13}\sigma_1\sigma_3(1 - w_3) w_3 - \\ &- d_p))^{1/2} / (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2). \quad (5)\end{aligned}$$

Підставимо формулу (5) у $R_p = R_1 w_1 + R_2 w_2 + R_3 w_3$ і отримаємо сподівану дохідність портфеля:

$$\begin{aligned}&R_p = R_1 + (R_3 - R_1) w_3 + (R_2 - R_1)(\sigma_1^2(1 - w_3) - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2(1 - w_3) + \\ &\rho_{13}\sigma_1\sigma_3 w_3 - \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 w_3 + ((\sigma_1^2(1 - w_3) - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2(1 - w_3) + \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 x_3 - \\ &- \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 x_3)^2 - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2)(\sigma_1^2(1 - w_3)^2 + \sigma_3^2 w_3^2 + \\ &+ 2\rho_{13}\sigma_1\sigma_3(1 - w_3) w_3 - d_p))^{1/2}) / (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2). \quad (6)\end{aligned}$$

Для знаходження оптимального значення функції (6) продиференціюємо її за змінною w_3 і прирівнявши до нуля та ввівши позначення:

$$A_1 = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 - \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1^2,\ A_2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2,\ A_3 = \sigma_1^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2,$$

$$A_4 = \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 - \sigma_1^2,\ A_5 = d_1^2 + \sigma_3^2 - 2\rho_{13}\sigma_1\sigma_3.$$

отримаємо наступне рівняння:

$$\begin{aligned} &R_3 - R_1 + (R_2 - R_1)(A_1 + \tfrac{1}{2}((A_3 + A_1 w_3)^2 - \\ &- A_2(\sigma_1^2 - d_p - 2A_4 w_3 + A_5 w^2))^{1/2} - \\ &- ((2A_1(A_3 + A_1 w_3) - 2A_2(A_4 + A_5 w_3)))/A_2 = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Введемо додаткові позначення $B_1 = A_1 A_3 - A_2 A_4$, $B_2 = A_1^2 - A_2 A_3$ і розв'язавши дане рівняння отримаємо частку w_3 для випадку, якщо коефіцієнт біля w_3^2 додатній.

$$\begin{aligned} &w_3 = (B_1 B_2 (R_1 - R_2)^2 - LB_1 + ((B_1 B_2 (R_1 - R_2)^2 - LB_1)^2 - \\ &- (LB_2 - (R_1 - R_2)^2 B_2^2)(L(A_3^2 A_2(\sigma_1^2 - d_p)) - \\ &- B_1^2 (R_1 - R_2)^2))^{1/2})/(LB_2 - (R_1 - R_2)^2 B_2^2), \end{aligned} \tag{8}$$

де $L = ((R_3 - R_1)A_2 + (R_2 - R_1)A_1)^2$.

Підставивши отриману частку коштів w_3 у формулу (5) отримаємо шукану частку коштів w_2, яку доцільно вкласти в другий актив, решту коштів слід інвестувати в перший актив. Якщо ж коефіцієнт рівняння біля w_3^2 від'ємний, то w_3 матиме вигляд:

$$\begin{aligned} &w_3 = (B_1 B_2 (R_1 - R_2)^2 - LB_1 - ((B_1 B_2 (R_1 - R_2)^2 - LB_1)^2 - \\ &- (LB_2 - (R_1 - R_2)^2 B_2^2)(L(A_3^2 A_2(\sigma_1^2 - d_p)) - \\ &- B_2 (R_1 - R_2)^2))^{1/2})/(LB_2 - (R_1 - R_2)^2 B_2^2). \end{aligned} \tag{9}$$

Якщо доходності активів портфеля незалежні між собою, тобто коефіцієнти кореляції рівні нулю $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0$, то рівність (3) спрощується $(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)w_2^2 - 2\sigma_1^2(1 - w_3)^2 + \sigma_1^2(1 - w_3)^2 + \sigma_3^2 x_3^2 - d_p = 0$. Розв'язок даного рівняння відносно w_2 матиме наступний вигляд:

$$w_2 = (\sigma_1^2(1 - w_3) + ((d_p - \sigma_3^2 w_3^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_1^2\sigma_2^2(1 - w_3)^2)^{1/2}/(\sigma_1^2 + \sigma_2^2). \tag{10}$$

Відповідно формула сподіваної доходності має наступний вигляд:

$$R_p = R_1 + (R_3 - R_1)w_3 + (R_2 - R_1)(((d_p - \sigma_3^2 w_3^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) -$$
$$- \sigma_1^2\sigma_2^2(1-w_3)^2)^{1/2})/(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \sigma_1^2(1-w_3)/(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)). \qquad (11)$$

Щоб дослідити область допустимих значень формули (11) необхідно розв'язати нерівність $(d_p - \sigma_3^2 w_3^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_1^2\sigma_2^2(1-w_3)^2 \geq 0$. Запишемо дану нерівність у вигляді:

$$y = \sigma_3^2(\sigma_1^2 + \sigma_2)^2 w_3^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2(1-w_3)^2 - d_p(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \leq 0 \qquad (12)$$

Оскільки друга похідна функції y від w_3 додатна, то найбільшого значення дана функція набуває на кінцях проміжку, де вона визначена $w_3 = 0$, або ж $w_3 = 1$.

При $w_3 = 0$ $\quad y = \sigma_1^2\sigma_2^2 - d_p(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$,

а при $w_3 = 1$ $\quad y = (\sigma_3^2 - d_p)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$,

що в свою чергу, враховуючи (11), дозволяє визначити обмеження на дисперсію портфеля

$$d_p = \sigma_1^2\sigma_2^2/(\sigma_1^2 + \sigma_2^2), \qquad d_p \geq \sigma_3^2. \qquad (13)$$

Вважаючи, що умови виконуються, дослідимо функцію (11) на максимум для чого знайдемо похідну за змінною w_3 і прирівнявши до нуля за умови, що $(R_2 - R_1) > 0$; $(R_3 - R_1) > 0$; $(R_3 - R_2) > 0$ отримаємо рівняння:

$$(R_3 - R_1)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)((d_p - \sigma_3^2 w_3^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) -$$
$$- \sigma_1^2\sigma_2^2(1-w_3)^2)^{1/2}(R_1 - R_2) = \sigma_3^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)w_3 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2(1-w_3) \qquad (14)$$

Позначимо $r_3 = R_3 - ((R_2 - R_1\sigma_1^2)/(\sigma_1^2 + \sigma_2^2))^3$. Ліва частина має тільки додатні значення якщо виконується $(r_3 - R_1)/(R_1 - R_2) > 0$, що виконується у випадках якщо перший актив має найменшу сподівану дохідність, або найбільшу сподівану дохідність тобто $R_1 > r_3$, $R_1 < r_3$.

Для існування розв'язку рівняння (14) необхідно щоб і права частина була додатною, тобто:

$$w_3 < \sigma_1^2\sigma_2^2/(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2\sigma_3^2 + \sigma_2^2\sigma_3^2). \qquad (15)$$

Піднісши рівняння до квадрату, звівши до канонічного вигляду і позначивши $d_i = \sigma_i$ отримаємо його розв'язок за умови якщо:

$$(r_3 - R_1)/(R_1 - R_2) = (\sigma_1^2\sigma_2^2 + \sigma_1^2\sigma_3^2 + \sigma_2^2\sigma_3^2)^{1/2}/(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \qquad (16)$$

$$w_3 = (d_1^2 d_2^2 - (d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3)(d_1 d_p + \\ + d_2 d_p - d_1 d_p)) / 4 d_1 d_2 (d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3)). \quad (17)$$

Підставивши формулу (17) в нерівність (15) отримаємо таку умову:

$$d_p > d_1 d_2 (d_1 d_3 + d_2 d_3 - 2 d_1 d_2) / ((d_1 + d_2)(d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3)). \quad (18)$$

Крім умови (18) знайдемо умову на дисперсію портфеля за якої розв’язок (17) додатний:

$$d_p < d_1 d_2 (d_1 d_3 + d_2 d_3 + 2 d_1 d_2) / (d_1 + d_2)(d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3) \quad (19)$$

Отже, за умов (19), (18), (16) значення w_3 обчислене за формулою (17) є точкою екстремуму доходності портфеля R_p. Обчислимо похідну другого порядку, для того щоб вияснити чи дана точка екстремуму визначає мінімальний чи максимальний дохід портфеля.

$$\frac{d^2 R_p}{d w_3^2} = (R_2 - R_1)/(d_1 + d_2)(-(d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3)((d_p - d_3 w_3^2)(d_1 + d_2) - \\ - d_1 d_2 (1 - w_3)^2)^{1/2} - 1/2 ((d_p - d_3 w_3^2)(d_1 + d_2) - d_1 d_2 (1 - w_3)^2)^{2/3} + \\ + 2(-(d_3 (d_1 + d_2) w_3 + d_1 d_2 (1 - w_3))^2). \quad (20)$$

Як видно з формули (19) друга похідна від’ємна якщо $R_2 - R_1 > 0$, тобто сподівана дохідність другого активу перевищує дохідність першого активу. Отже, формулою (17) слід користуватись для визначення частки коштів, які доцільно вкласти в третій актив, якщо виконується умова $R_1 > r_3$ і $R_1 = \min\{R_1, R_2, R_3\}$. Якщо ж $R_2 < R_1$, то при значенні обчисленому за формулою (16) сподіваний дохід портфеля буде мінімально можливим при заданому значенні середньоквадратичного відхилення портфеля. Так, якщо дохідність першого активу становить $r_1 = 0{,}45$, його дисперсія $D_1 = 0{,}05$, а дохідність другого активу $r_2 = 0{,}9$ і відповідно дисперсія $D_2 = 0{,}1$, третього активу $r_3 = 0{,}36$, $D_3 = 0{,}02$, то виконується умова (15). При заданому рівні ризику портфеля $d_p = 0{,}03$ згідно формули (16) в третій актив слід спрямувати $w_3 = 0{,}181$ всіх коштів, в другий актив $w_2 = 0{,}489$ згідно (9), а решту в перший актив $w_1 = 0{,}330$. Якщо ж кошти розділити порівну між активами, то дохідність такого портфеля буде нижчою $r_p = 0{,}570$ (табл. 1).

Таблиця 1

Оптимальний інвестиційній портфель банку при заданому рівні ризику

Фінансові інструменти	дисперсії активів	дохідності активів	оптимальні частки	дохідність портфеля
Облігації	0,05	0,45	0,330	0,654
Акції	0,1	0,9	0,489	0,570
Векселі	0,02	0,36	0,181	
Заданий рівень ризику портфеля	0,03			

Якщо дохідність першого активу становить $r_1 = 0{,}65$, його дисперсія $D_1 = 0{,}06$, а дохідність другого активу $r_2 = 0{,}9$ і відповідно дисперсія $D_2 = 0{,}1$, третього активу $r_3 = 0{,}36$, $D_3 = 0{,}02$, то виконується умова (15). При заданому рівні ризику портфеля $d_p = 0{,}04$ згідно формули (16) в третій актив слід спрямувати $w_3 = 0{,}146$ всіх коштів, в другий актив $w_2 = 0{,}597$ згідно (9), а решту в перший актив $w_1 = 0{,}257$. Якщо ж кошти розділити порівну між активами, то дохідність такого портфеля буде нижчою $r_p = 0{,}637$ (табл. 2).

Таблиця 2

Оптимальний інвестиційній портфель банку при заданому рівні ризику портфеля

Фінансові інструменти	дисперсії активів	дохідності активів	оптимальні частки	дохідність портфеля
Облігації	0,06	0,65	0,257	0,757
Акції	0,1	0,9	0,597	0,637
Векселі	0,02	0,36	0,146	
	0,04			

Отже в даній статті сформовано оптимальний інвестиційний портфель при заданому рівні ризику портфеля, тобто знайдено частки вкладення грошових коштів у фінансові інструменти, які максимізували сподіваний дохід портфеля. Даний підхід враховує сподівані дохідності об’єктів портфеля і може бути впроваджений у практичне використання у банківських установах. Тому вважаємо за доцільне продемонструвати процес формування портфеля фінансових інструментів.

Враховуючи реалії сучасного ринку цінних паперів, підберемо довільні фінансові інструменти, із яких банк вправі формувати власний інвестиційний портфель. Одними із найнадійніших фінансових інструментів на сьогодні є різноманітні види облігацій, тому для прикладу візьмемо для аналізу портфель із трьох активів – виключно боргових фінансових інструментів. Одними із перших, які, на нашу думку, повинні обов’язково знаходитись у портфелі банку є ОВДП. В залежності від терміну розміщення цих облігацій їх дохідність коливається в межах від 14 до 18%, тому ми візьмемо середню дохідність по цих фінансових інструментах – 17%. Крім того, як видно із аналізу тенденцій розвитку ринку боргових зобов’язань, надзвичайно перспективними і дохідними вважаються корпоративні облігації. Рівень дохідності окремих емітентів оцінюється експертами у 50-80%, а іноді і до 100%. Ми візьмемо середній рівень дохідності перспективних емітентів 65%, і третім активом у нас виступатимуть муніципальні облігації із рівнем дохідності у 30%.

Підставивши у запропоновану модель рівні дохідності запропонованих активів, можемо стверджувати, що, для банку вигідніше розподілити активи порівну, оскільки це принесе для банку більший рівень дохідності 37,3%, аніж вкладати по запропонованих частках, а саме 14,6% ОВДП; 59,7% муніципальні облігації; 25,7% корпоративні облігації. В такому випадку дохідність буде складати 0,371 од., або 37,1%. (табл. 3)

Таблиця 3

Оптимальний портфель фінансових інструментів банку

Активи	дисперсії активів	доходності активів	оптимальні частки	дохідність портфеля
Корпоративні облігації	0,06	0,65	0,257	0,371
Муніципальні	0,1	0,3	0,597	0,373
ОВДП	0,02	0,17	0,146	
	0,04			

Висновки. Отже, використовуючи дану модель менеджмент банку має можливість формувати оптимальний інвестиційний портфель, включаючи до нього будь-які активи, що обертаються на фінансовому ринку. Порівнюючи комбінації із часток, інвестор має можливість здійснювати постійний моніторинг портфеля і змінювати його структуру відповідно до економічної ситуації. Перевагою такої моделі є нескладність проведення розрахунків та можливість застосування комп'ютерної техніки, що дозволить більшій кількості менеджерів ефективно управляти портфелями цінних паперів. Використання такої моделі у практичній діяльності банку дозволить оптимізувати структуру портфеля фінансових інструментів, що призведе до збільшення прибутковості банку і в подальшому до активізації діяльності банківських установ на фондовому та фінансовому ринках.

Література

1. Шарп У. Ф.,. Инвестиции: [Пер. с англ.] / У. Ф. Шарп, Г. Дж. Бэйли– М.: Инфра – М., 1997. – 1042 с.
2. Шарп У. Инвестиции: [Пер. с англ.]. / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бейли – М.: ИНФРА-М, 1999. – 1028 с.
3. Райс Т., Койли Б. Финансовие инвестиции и риск. / Т. Райс, Б. Койли. – Пер. с англ. — К.: Торгово-издат. бюро BHV, 1995. — 592 с.
4. Ван Хорн Дж. К. Основы управления финансами. / Дж. К. Ван Хорн. – Пер. с англ. / Гл. ред. серии Я.В.Соколов. — М.: Финансы и статистика, 1997.— 800с.: ил.— (Серия по бухгалтерскому учету и аудиту).
5. Самуельсон П. Економіка. / П. Самуельсон. — Львів: Світ, 1993. — 496 с.
6. Бланк И.А. Инвестиционный менеджмент. / И. А. Бланк. — К.: МП "ИТЕМ" ЛТД, "Юнайтед Лондон Трейд Лимитед", 1995. — 448 с.

Матеріал подається до публікації вперше і не був опублікований раніше.