МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ТИПОВІ ІНДИВІДУАЛЬНІ РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

За редакцією Шинкарика М.І.

видання четверте, доповнене

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
Лист №1/11-2331 від 24.07.03

Тернопіль 2008

УДК 517
ББК 22.11
Т 43

Рецензенти: **Микола Олександрович Недашковський**, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри автоматизованих систем і програмуваня Тернопільського державного економічного університету,
Дмитро Ількович Бондар, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри інтелектуальної власності, комп'ютерного та інформаційного права Тернопільського державного економічного університету.

Гриф надано Міністерством освіти і науки України
Лист №1/11-2331 від 24.07.03

Т 43 Типові індивідуальні розрахункові завдання з вищої математики: Навчальний посібник / **Домбровський І.В., Лесик О.Ф., Мигович Ф.М., Цебрій О. Р., Шинкарик М.І.;за редакцією Шинкарика М.І.** – Тернопіль: Видавництво "Збруч", 2008. –213 с.
ISBN 966-654-208-3

Навчальний посібник "Типові індивідуальні розрахункові завдання з вищої математики" містить орієнтовані плани лекційних та практичних занять з курсу "Вища математика", рекомендованих типовою навчальною програмою Міністерства освіти і науки України для економічних спеціальностей. Він включає дві індивідуально-розрахункові роботи, вказівки до їх виконання, зразки розв'язування задач економічного та математичного змісту, короткі теоретичні відомості, список рекомендованої літератури.

Посібник містить достатню кількість різнотипних задач і прикладів математичного та економічного змісту. Зразки розв'язаних задач і прикладів логічно продумані.

Навчальний посібник написаний для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

ББК 22.11
ISBN 966-654-208-3

ВСТУП

Зростаючі вимоги до економістів, як фахівців, здатних скласти економічний прогноз, прийняти оптимальне рішення у виборі правильної економічної політики, потребують глибокого вивчення математичних дисциплін. З метою якісного засвоєння курсу математики, ефективного її застосування в практичній діяльності, розроблено індивідуальні розрахункові роботи. Вони складаються з шести розділів:

плани лекційних занять з вищої математики;
плани практичних занять з вищої математики;
короткі теоретичні відомості;
деякі задачі економіки;
вказівки і зразки розв'язків типових завдань;
індивідуальне завдання №1 (I семестр);
індивідуальне завдання №2 (II семестр).

Індивідуальні розрахункові завдання охоплюють всю програму курсу вищої математики вищих навчальних закладів економічного профілю. Студент виконує завдання №1 під час I семестру, номер варіанту вибирається викладачем. Оформляє виконане завдання в зошиті з необхідними поясненнями. Здає виконане завдання, захищає його в останній тиждень семестру, як важливий компонент здачі заліку. Аналогічно виконується і здається завдання №2 в другому семестрі. При розв’язуванні економічних задач важливо пояснити економічний зміст отриманих результатів. Блок економічних завдань створює можливість творчої співпраці студента і викладача, перспективу науково-пошукової роботи студента-економіста із застосуванням математичного апарату.

Орієнтовні плани лекційних занять з курсу "ВИЩА МАТЕМАТИКА"

I СЕМЕСТР

Розділ I. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1. ВИЗНАЧНИКИ.

1. Вступ. Структура курсу вищої математики.
2. Методичні вказівки до вивчення курсу вищої математики.
3. Обчислення визначників II та III порядку та їх властивості.
4. Поняття про мінори та алгебраїчні доповнення.
5. Розклад визначника за елементами його стрічки (стовпчика).
6. Поняття про визначники вищих порядків та їх обчислення.

2. МАТРИЦІ.

1. Визначення матриці, їх види.
2. Дії над матрицями.
3. Обернена матриця та її знаходження.
4. Поняття про ранг матриці та його обчислення

3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ.

1. Системи лінійних рівнянь та їх розв'язки.
2. Правило Крамера.
3. Метод Гаусса та Жордана-Гаусса.
4. Матричний спосіб розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
5. Дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь на сумісність.
6. Теорема Кронекера-Капеллі. Однорідні системи лінійних рівнянь.

4-5. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ.

1. Види систем координат на площині І в просторі.
2. Поняття вектора. Дії над векторами в геометричній формі.
3. Проекція вектора на вісь та її властивості. Розклад вектора на компоненти.
4. Дії над векторами, заданими в координатній формі. Модуль вектора.
5. Віддаль між двома точками. Поділ відрізка в заданому відношенні.
6. Визначення скалярного добутку двох векторів та його властивості
7. Скалярний добуток векторів в координатній формі.
8. Кут між двома векторами. Умови паралельності і перпендикулярності векторів.
9. Лінійна залежність і незалежність векторів.
10. Базис. Розклад вектора по базису. Перехід від одного базису до іншого.
11. Поняття власних чисел та власних векторів матриці. Методи їх знаходження.

Розділ II. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

6. ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ

1. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
2. Кут між двома прямими. Умови паралельності 1 перпендикулярності прямих на площині.

3. Рівняння прямої, що проходить через задану точку.
4. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.
5. Рівняння прямої у відрізках.
6. Рівняння прямої, що проходить через задану точку, перпендикулярно до заданого вектора.
7. Загальне рівняння прямої та його дослідження.

7. ПЛОЩИНА І ПРЯМА ЛІНІЯ В ПРОСТОРІ.

1. Векторне рівняння площини.
2. Рівняння площини, що проходить через задану точку, перпендикулярно до вектора.
3. Загальне рівняння площини та його дослідження.
4. Кут між двома площинами. Умови паралельності і перпендикулярності площин.
5. Різні види рівнянь прямої в просторі.
6. Кут між двома прямими.

8. КАНОНІЧНІ РІВНЯННЯ ЛІНІЙ ДРУГОГО ПОРЯДКУ.

1. Коло. Виведення рівняння кола. Нормальне і загальне рівняння кола.
2. Канонічні рівняння еліпса, гіперболи і параболи.
3. Дослідження форми еліпса, гіперболи і параболи.
4. Застосування ліній другого порядку в економічних дослідженнях.

Розділ III. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ.

9. ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ГРАФІКИ. ЧИСЛОВА ПОСЛІДОВНІСТЬ.

1. Абсолютна величина числа та її властивість. Окіл точки.
2. Поняття функції. Область визначення і область значень функції.
3. Класифікація функцій. Основні елементарні функції та їх графіки.
4. Криві попиту і пропозиції.

10. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ ТА ЕЛЕМЕНТИ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ.

1. Числова послідовність.
2. Арифметична та геометрична прогресії. Обчислення простих і складних відсотків.
3. Задачі про розрахунки ренти та погашення боргу.
4. Границя числової послідовності. Основні теореми про границі числових послідовностей.

11. ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ.

1. Границя функції в точці. Односторонні границі.
2. Основні теореми про границі функцій.
3. Перша і друга визначна границі.
4. Використання показникової функції при обчисленні неперервних процентів.
5. Поняття про натуральний логарифм.
6. Визначення неперервної функції в точці та відрізку. Класифікація точок розриву.
7. Властивості неперервних функцій на відрізку.

12. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ ТА ОСНОВНІ ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ.

1. Визначення похідної функції в точці.
2. Геометричний, фізичний та економічний зміст похідної.
3. Правила диференціювання суми, добутку і частки функцій.
4. Похідні елементарних функцій.
5. Таблиця похідних.

13. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ПРО ДИФЕРЕНЦІЙОВАНІ ФУНКЦІЇ.

1. Похідна складної і оберненої функції.
2. Похідна неявно-заданої функції.
3. Похідні вищих порядків.
4. Теореми Ролля і Лагранжа.
5. Правило Лопіталя та його застосування.
6. Формули Тейлора.

14. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ.

1. Визначення диференціала та його геометричний зміст.
2. Диференціал суми, добутку і частки функцій
3. Диференціал складної функції.
4. Таблиця диференціалів основних елементарних функцій.
5. Застосування диференціалів для наближених обчислень.

І5. ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЙ.

1. Умови зростання і спадання функції.
2. Необхідні умови екстремуму.
3. Достатні умови екстремуму.
4. Найбільше і найменше значення функцій на відрізку.

16. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ.

1. Приклади задач оптимізації з економічним змістом.
2. Еластичність функції, її властивості.
3. Еластичність попиту відносно ціни.
4. Еластичність пропозиції відносно ціни.

17. ПОВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ. ПОБУДОВА ГРАФІКА.

1. Випуклість і вгнутість графіка функцій.
2. Необхідна і достатня умова існування точки перегину графіка функції.
3. Асимптоти плоских кривих та їх знаходження.
4. Повне дослідження функції та побудова графіка.

II семестр

Розділ IУ. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ.

18. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ПРО ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ.

1. Визначення функції багатьох змінних.
2. Визначення функції двох змінних та її графічне зображення.
3. Поняття про лінії та поверхні рівня.
4. Границя функції багатьох змінних. Неперервність функції.
5. Частинні похідні 1-го порядку. Повний диференціал. Градієнт функції.
6. Похідні вищих порядків.

19. ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ЕМПІРИЧНІ ФОРМУЛИ.

1. Екстремум функції багатьох змінних.
2. Необхідні умови екстремуму.
3. Достатні умови екстремуму.
4. Умовний екстремум функції багатьох змінних. Метод множників Лагранжа.

20. ПОБУДОВА ЕМПІРИЧНИХ ФОРМУЛ.

1. Побудова емпіричних формул методом найменших квадратів для лінійної залежності.
2. Параболічна та гіперболічна залежність.
3. Застосування емпіричних формул при розв'язуванні економічних задач.

Розділ V. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ.

21. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА МЕТОДИ ЙОГО ЗНАХОДЖЕННЯ.

1. Первісна функція та її властивість.
2. Невизначений інтеграл та його властивості.
3. Таблиця невизначених інтегралів.
4. Безпосереднє інтегрування.
5. Метод підстановки.
6. Інтегрування частинами.

22. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ.

1. Поняття раціонального дробу.
2. Інтегрування найпростіших раціональних дробів.
3. Інтегрування правильних раціональних дробів.
4. Інтегрування неправильних раціональних дробів.

23. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ТА ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

1. Інтегрування тригонометричних функцій вигляду:
$$\int sin\alpha x\, cos\beta x dx,\ \int sin\,\alpha x\, sin\,\beta x dx,\ \int cos\,\alpha x\, cos\,\beta x dx,\ \int sin^m x\, cos^n\, x dx.$$
2. Універсальна тригонометрична підстановка.
3. Інтегрування найпростіших ірраціональностей. Тригонометричні підстановки.
4. Поняття про невизначений інтеграл, що не має первісних в елементарних функціях.

24. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ.

1. Задача про площу криволінійної трапеції.
2. Задача про об'єм виробництва із змінною продуктивністю праці.
3. Поняття визначеного інтеграла та його властивості.
4. Теорема про середнє значення визначеного інтеграла.

25. ЗВ'ЯЗОК НЕВИЗНАЧЕНОГО І ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛІВ.

1. Властивості визначеного інтеграла із змінною верхньою межею.
2. Формула Ньютона-Лейбніца.
3. Способи обчислення визначеного інтеграла.

26. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ.

1. Застосування визначених інтегралів для обчислення площ плоских фігур.
2. Застосування визначеного інтеграла для обчислення об'ємів тіл обертання.
3. Невласні інтеграли та їх знаходження. Інтеграл Пуассона.

27. НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ.

1. Інтегрування з допомогою таблиць.
2. Чисельне інтегрування:
   а) метод прямокутників;
   б) метод трапецій;
   в) формула Сімпсона.

Розділ VI. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ.

28-29. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ 1-го ПОРЯДКУ.

1. Основні поняття про диференціальні рівняння та їх розв'язки.
2. Геометричний зміст диференціальних рівнянь 1-го порядку.
3. Задачі Коші для диференціальних рівнянь 1-го порядку.
4. Диференціальні рівняння з відокремленими змінними.
5. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку.
6. Однорідні диференціальні рівнянням
7. Економічні задачі, що приводять до диференціальних рівнянь 1-го порядку.

30. ЛІНІЙНІ ДИФРІВНЯННЯ ІІ-го ПОРЯДКУ.

1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння ІІ-го порядку.
2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння ІІ-го порядку.
3. Основні теореми про розв'язки диференціальні рівняння ІІ-го порядку.
4. Задача Коші для диференціальні рівняння ІІ-го порядку.
5. Поняття про комплексні числа.

31. ЛІНІЙНІ ДИФРІВНЯННЯ ІІ-го ПОРЯДКУ З ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ.

1. Розв'язування лінійних однорідних диференціальних рівнянь ІІ-го порядку з постійними коефіцієнтами.
2. Розв'язування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь ІІ- го порядку з постійними коефіцієнтами.

Розділ VII. РЯДИ.

32. ЧИСЛОВІ РЯДИ ТА ЇХ ЗБІЖНІСТЬ.

1. Поняття числових рядів.
2. Сума ряду. Збіжність числового ряду.
3. Необхідна умова збіжності.
4. Ряд геометричної прогресії,
5. Гармонічні ряди.
6. Ознака порівняння рядів.
7. Ознака Даламбера.
8. Інтегральна ознака Коші (без доведення).

33. ЗНАКОЗМІННІ РЯДИ. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ.

1. Поняття про знакозмінні і знакопереміжні ряди.
2. Ознака Лейбніца.
3. Абсолютна і умовна збіжність знакозмінних рядів.
4. Поняття про функціональні ряди та їх збіжність.
5. Степеневий ряд. Сума степеневого ряду. Радіус та інтервал збіжності степеневого ряду.
6. Теорема АБЕЛЯ.
7. Почленне диференціювання і інтегрування степеневого ряду.

34. ЗАСТОСУВАННЯ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ.

1. Ряди Тейлора і Маклорена.
2. Розклад елементарних функцій в степеневі ряди. Біном Ньютона.
3. Застосування степеневих рядів для наближеного обчислення значень функцій та визначених інтегралів.

35. ОГЛЯД КУРСУ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ.

Орієнтовні плани практичних занять з курсу "ВИЩА МАТЕМАТИКА"
I–ИЙ СЕМЕСТР

***Заняття** 1. Визначники.. Обчислення визначників.*

1. Визначники 2-го і 3-го порядків та їх властивості. Обчислення визначників.
2. Розклад визначників третього і вищого порядків за елементами його рядка.
3. Обчислення визначників довільного порядку.

***Заняття** 2. Матриці та дії над ними.*

1. Означення матриці.
2. Дії над матрицями.
3. Обернена матриця та її знаходження.
4. Ранг матриці та його знаходження.

***Заняття** 3. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь*.

1. Поняття про системи лінійних алгебраїчних рівнянь, та їх розв'язки.
2. Правило Крамера.
3. Матричний спосіб розв'язування систем.

***Заняття** 4. Розв'язування систем m рівнянь з n невідомими.*

1. Метод Гаусса. Метод Жордана-Гаусса.
2. Дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Теорема Кронекера-Капеллі.
3. Поняття про загальний і базисний розв'язки.
4. Самостійна робота.

***Заняття** 5. Елементи векторної алгебри.*

1. Координати точки, відстань між двома точками.
2. Вектори. Розклад вектора на компоненти. Дії над векторами.
3. Кут між векторами.
4. Задачі на використання умов перпендикулярності та паралельності векторів.

***Заняття** 6. Рівняння прямої лінії на площині.*

1. Типи рівнянь прямої лінії на площині.
2. Загальне рівняння прямої та його дослідження.
3. Знаходження кута між двома прямими.
4. Взаємне розміщення двох прямих на площині.
5. Віддаль від точки до прямої.
6. Комбіновані задачі на пряму.

***Заняття**7. Канонічні рівняння ліній другого порядку.*

1. Побудова ліній другого порядку.
2. Задачі на складання рівнянь кола, еліпса, гіперболи.

***Заняття8**. Лінії другого порядку.*

1. Задачі на складання рівнянь параболи.
2. Комбіновані задачі на лінії 2-го порядку.
3. Самостійна, (контрольна робота).

***Заняття** 9. Функції та їх графіки. Числова послідовність.*

1. Визначення, способи задання. Класифікація функцій. Основні елементарні функції.
2. Числова послідовність. Границя функції в точці.
3. Розкриття найпростіших типів невизначеностей.

***Заняття** 10. Неперервність функції. Границя і неперервність.*

1. Перша і друга визначні границі.
2. Визначення неперервності функції в точці. Умови неперервності.
3. Дослідження функції на розрив.

***Заняття** 11. Похідна функції в точці.*

1. Означення похідної функції в точці.
2. Геометричний, фізичний та економічний зміст похідної.
3. Основні правила диференціювання.
4. Знаходження похідних за означенням.
5. Похідні елементарних функцій.

Заняття *12. Диференціювання функцій.*

1. Похідна складної функції.
2. Похідна оберненої функції.
3. Похідна неявно заданої функції.
4. Похідні вищих порядків

Заняття *13. Застосування похідної.*

1. Дотична і нормаль до плоскої кривої.
2. Правило Лопіталя та його застосування.

3 . Формули Тейлора і Маклорена та їх застосування.

Заняття *14. Екстремум функції. Застосування похідної до розв'язування економічних задач.*

1. Умови зростання та спадання функції в точці.
2. Необхідні та достатні умови екстремуму.
3. Найбільше та найменше значення функції.
4. Задачі економіки з використанням похідних:
   а) еластичність попиту відносно ціни;
   б) еластичність пропозиції відносно ціни;
   в) еластичність повних і середніх затрат.

Заняття *15. Контрольна робота.*

Заняття *16. Повне дослідження функції та побудова її графіка.*

1. Випуклість та вгнутість графіка функції.
2. Знаходження точок перегину графіка функції.
3. Знаходження асимптот.
4. Загальна схема дослідження і побудови графіка функції.

Заняття *17. Диференціал функції.*

1. Визначення диференціала та його геометричний зміст.
2. Диференціал суми, добутку, частки функцій.
3. Диференціал складної функції.
4. Застосування диференціала до наближених обчислень

ІІ-ИЙ СЕМЕСТР

Заняття *1. Диференціювання функцій багатьох змінних.*

1. Частинні похідні першого та другого порядку функції двох змінних.
2. Частинні похідні вищих порядків.
3. Градієнт функції.

Заняття *2. Екстремум функції багатьох змінних. Емпіричні формули.*

1. Необхідні умови екстремуму функції двох змінних.
2. Достатні умови екстремуму функції двох змінних.
3. Умовний екстремум функції багатьох змінних. Функція Лагранжа

Заняття 3.*Побудова емпіричних формул.*

1. Побудова емпіричної лінійної залежності між двома величинами методом найменших квадратів.
2. Самостійна робота.

Заняття *4. Невизначений інтеграл та методи інтегрування.*

1. Первісна функція.
2. Невизначений інтеграл та його властивості.
3. Безпосереднє інтегрування.
4. Метод підстановки (заміна змінної).

Заняття *5. Метод інтегрування частинами.*

1. Інтегрування частинами.
2. Самостійна робота.

Заняття *6. Інтегрування раціональних дробів.*

1. Інтегрування найпростіших раціональних дробів.
2. Розклад правильних і неправильних раціональних дробів на прості.
3. Приклади інтегрування раціональних дробів.

Заняття *7. Інтегрування тригонометричних і ірраціональних функцій.*

1. Інтегрування тригонометричних функцій.
2. Універсальна підстановка.
3. Інтегрування найпростіших ірраціональностей.
4. Тригонометричні підстановки.

Заняття *8. Контрольна робота.*

Заняття *9. Визначений інтеграл.*

1. Інтегральна сума для неперервної функції на відрізку.
2. Визначений інтеграл як границя інтегральної суми.
3. Основні властивості визначеного інтеграла.
4. Формула Ньютона-Лейбніца.
5. Методи обчислення визначеного інтеграла

Заняття *10. Застосування визначеного інтеграла.*

1. Обчислення площ криволінійних плоских фігур.
2. Обчислення об'ємів тіл обертання.

Заняття *11. Невласні інтеграли.*

1. Типи невласних інтегралів.
2. Обчислення різних типів невласних інтегралів.
3. Інтеграл Пуассона.

Заняття *12.Розв'язування диференціальних рівнянь першого поряку.*

1. Означення диференціального рівняння 1-го порядку.
2. Задача Коші для диференціального рівняння 1-го порядку.
3. Розв'язування диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними.
4. Лінійні диференціальні рівняння, що приводять до диференціальних рівнянь 1-го порядку.

Заняття *13. Однорідні диференціальні рівняння першого та другого порядку з постійними коефіцієнтами.*

1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння першого порядку
2. Розв'язування лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами.

Заняття 14. *Неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку.*
1. Розв'язування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь 2-го порядку з постійними коефіцієнтами.
2. Задача Коші.

Заняття *15. Контрольна робота.*

Заняття *16. Числові ряди та їх збіжність.*
1. Поняття числового ряду.
2. Сума ряду. Збіжність числового ряду.
3. Необхідна умова збіжності числового ряду.
4. Ряд геометричної прогресії.
5. Гармонійні ряди.
6. Ознаки порівняння рядів.
7. Ознака Даламбера.
8. Інтегральна ознака Коші.

Заняття *17. Знакозмінні та степеневі ряди.*
1. Поняття про знакозмінні і знакочергувальні ряди.
2. Ознака Лейбніца.
3. Абсолютна та умовна збіжність.
4. Степеневий ряд. Сума степеневого ряду.
5. Радіус збіжності степеневого ряду.
6. Визначення області збіжності степеневого ряду.

Заняття 18. *Застосування степеневих рядів.*
1. Ряди Тейлора та Маклорена.
2. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень.
3. Обчислення визначених інтегралів з допомогою степеневих рядів.

Короткі теоретичні відомості.

1. Визначники. Обчислення визначників.

Визначником 2-го порядку називається число, яке знаходиться за формулою:
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Визначником 3-го порядку називається число, яке знаходиться за формулою:
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Визначник n-го порядку має вигляд:
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$
де a_{ij} – елемент визначника, i – вказує стрічку розміщення, j – стовпець.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається визначник (n-1)-го порядку, одержаний з попереднього викреслюванням i-го рядка і j-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається мінор цього елемента, взятий із знаком "+", якщо число (i+j) – парне і зі знаком "- ", якщо воно непарне. $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

***Визначник n-го порядку* це число, яке дорівнює сумі попарних добутків елементів довільного рядка (або стовпця) на їх відповідні алгебраїчні доповнення.**
$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, \qquad (i = 1,2,\ldots,n);$$
$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}, \qquad (j = 1,2,\ldots,n).$$

2. Матриці та дії над ними.

Прямокутна таблиця чисел, що містить m стрічок і n стовпців, взята в круглі або в квадратні дужки називається матрицею розмірності $m \times n$.
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Якщо $n = m$, то матриця називається *квадратною* $n - го$ порядку.

Сумою (різницею) матриць A і B однакової розмірності називається матриця C, для якої кожний елемент c_{ij} дорівнює сумі (різниці) відповідних елементів даних матриць: $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.

Добутком матриці A на число k називається матриця kA, всі елементи якої дорівнюють добуткам відповідних елементів матриці A на це число. Матричне множення AB можливе, якщо число стовпців матриці A співпадає з числом рядків матриці B.

Добутком матриці A розмірності $n \times k$ на матрицю B розмірності $k \times l$, називається матриця $C = A \cdot B$, розмірності $n \times l$, для якої кожний елемент c_{ij} знаходиться за формулою:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ik}b_{kj} \qquad (i = 1,2,...n;\ j = 1,2,...,l).$$

Для квадратної матриці існує *обернена* матриця відносно множення.

Схема знаходження оберненої матриці:

1) Обчислити визначник матриці A.

2) Транспонувати матрицю A.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

3) Знайти алгебраїчні доповнення кожного елемента транспонованої матриці A^T і записати їх у матрицю $A^{П}$ (приєднану):

$$A^{П} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

4) Поділити кожен елемент матриці $A^{П}$ на визначник матриці $|A|$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{П}$$

Рангом матриці A називається найвищий порядок відмінних від нуля мінорів. Його позначають буквою r (r (A)).

3. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Система лінійних алгебраїчних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Числа $a_{ij} (i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n)$ - коефіцієнти біля невідомих $x_j (j = 1,2,...,n)$, а $b_i (i = 1,2,...,m)$ - вільні члени.

Розв'язком системи (1) називається сукупність чисел $(\overline{x_1}, \overline{x_2},..., \overline{x_n})$, яка при підстановці її в систему перетворює всі рівняння в правильні рівності (тотожності).

Якщо число рівнянь m дорівнює числу невідомих n то для розв'язування системи рівнянь можна використати:

а) правило Крамера. Якщо основний визначник Δ системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (визначник складений із коефіцієнтів, що стоять біля невідомих) не дорівнює нулю, то ця система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, k = 1,2,....,n,$$

де Δ_k -допоміжний визначник, який одержується з основного визначника Δ шляхом заміни його $k - го$ стовпчика стовпчиком вільних членів системи.

б) матричний метод. У матричній формі систему лінійних рівнянь запишемо так $A \cdot X = B$. Звідси розв'язок: $X = A^{-1} \cdot B$.

Для довільних систем, лінійних алгебраїчних рівнянь використовують методи Гаусса, Жордана –Гаусса.

в) метод Гаусса полягає в послідовному виключенні невідомих з рівнянь системи і зведенні її до трикутного чи трапецевидного вигляду.

г) метод Жордана - Гаусса полягає в повному послідовному виключенні невідомих. При цьому коефіцієнти утворять при основних (базисних) невідомих одиничну матрицю.

4. Елементи аналітичної геометрії і векторної алгебри.

Дві взаємно перпендикулярні осі Ox і Oy з спільною точкою початку відліку O і однаковою масштабною одиницею утворюють декартову систему координат на площині.

Точка на площині задається впорядкованою парою чисел (x,y), які називають координатами.

Віддаль d між точками $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ обчислюється за формулою: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Координати точки **С** (x, y), яка ділить відрізок AB у відношенні **АС**:**СВ**=λ, знаходяться за формулами: $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$; $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$.

В просторі три взаємно перпендикулярні осі Ox,Oy,Oz з спільною точкою відліку O і однаковою масштабною одиницею утворюють декартову систему координат.Точка в просторі задається впорядкованою трійкою чисел – координатами (x,y,z).

Направлений відрізок $\overline{AB}$, де точка A точка початку,а B точка кінця називається вектором.

Вектор позначається або двома великими буквами з стрілкою над ними $\vec{AB}$,або одною малою буквою $\vec{a}$. Довжину вектора називають модулем і позначають $|\vec{AB}|$ або $|\vec{a}|$.

Вектор на площині задають двома числами його координатами: $\vec{AB} = \{x, y\}$,де $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$, які є проекціями вектора відповідно на осі Ox та Oy. Вектор в просторі задають трьома координатами:

$$\vec{AB} = \{x, y, z\}.$$

Сумою(різницею) двох векторів $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ і $\vec{в} = \{x_2, y_2, z_2\}$ називають вектор $\vec{c} = \{x_2 \pm x_1, y_2 \pm y_1, z_2 \pm z_1\}$.

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$, де φ - кут між векторами.

Якщо вектори задані своїми координатами, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Кут φ між векторами обчислюється за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Умова паралельності векторів: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

Умова перпендикулярності векторів: $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

5. Пряма на площині

1. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $y = kx + b$, де $k = tg\alpha$ (α - кут нахилу прямої до додатнього напряму осі $0x$) , b - довжина відрізка, який пряма відтинає на осі Oy.

2. Рівняння в'язки прямих, що проходять через точку $M(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

3. Рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

4. Рівняння прямої у відрізках на осях: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, де a, b - відрізки, які пряма відсікає на осях координат.

5.Загальне рівняння прямої: $Ax + By + C = 0$.

Кут φ, відрахований проти годинникової стрілки від прямої $y = k_1x + b_1$ до прямої $y = k_2x + b_2$ знаходиться за формулою:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Умова паралельності цих прямих : $k_1 = k_2$,

Умова перпендикулярності: $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

Віддаль d точки $M_0(x_0, y_0)$ від прямої $Ax + By + C = 0$ обчислюємо за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

6. Площина і пряма в просторі.

Рівняння площини, що проходить через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, де $\vec{N} = \{A, B, C\}$, - вектор нормалі до площини.

Загальне рівняння площини: $Ax + By + Cz + D = 0$. (1)

Кут φ між двома площинами, заданими рівняннями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ знаходимо за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Віддаль d точки $M(x_0, y_0, z_0)$ від площини (1):

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Рівняння прямої, що проходить через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ паралельно вектору $\vec{s}\{m, n, p\}$ має вигляд $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$. (2)

Кут між прямою (2) та площиною (1) шукаємо за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

7. Канонічні рівняння ліній другого порядку.

Рівняння кола з центром $C(a;b)$ і радіусом R:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Рівняння еліпса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, де a і b - півосі еліпса, $c=\sqrt{a^2-b^2}$ – відстань від центра до одного з фокусів, $\varepsilon=\frac{c}{a}$ - ексцентриситет еліпса.

Рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, де a - дійсна, b - уявна півосі, $c=\sqrt{a^2+b^2}$ - відстань від центра до одного з фокусів, $\varepsilon=\frac{c}{a}$ - ексцентриситет, $y=\pm\frac{b}{a}x$ - асимптоти гіперболи.

Рівняння параболи симетричної відносно осі $0x$: $y^2=2px$, її фокус $F(\frac{p}{2};0)$, директриса: $x=-\frac{p}{2}$.

Рівняння параболи симетричної відносно осі $0y$: $x^2=2py$, її фокус $F(0;\frac{p}{2})$, директриса: $y=-\frac{p}{2}$.

8. Вступ в математичний аналіз

Якщо кожному значенні змінної $x\in X$ поставлено у відповідність за певним правилом значення $y\in Y$, то говорять, що задана функція. Її позначають $y=f(x)$.

Множина X називається областю визначення функції, множина Y - областю значень функції.

Множина значень $x_1,x_2,...,x_n,...$, яка за певним правилом поставлена у відповідність натуральному ряду чисел $1,2,...,n,...$ називається числовою послідовністю.

Числа $x_1,x_2,...,x_n,...$ називають членами послідовності, при цьому x_n - загальним членом.

Число a називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для всякого як завгодно малого додатнього числа ε знайдеться такий номер N, що для всіх $n>N$ виконується нерівність $|x_n-a|<\varepsilon$. Це позначають $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

Якщо послідовність має скінчену границю, то її називають збіжною.

Важливим прикладом числової послідовності є геометрична прогресія.

Послідовність чисел називається геометричною прогресією, якщо кожний наступний її член дорівнює попередньому помноженому на деяке стале число q - знаменник прогресії: $b_n=b_{n-1}q=b_0q^{n-1}$.

Число A називається границею функції $y=f(x)$ в точці x_0, якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності значень аргументу $x_1,x_2,...,x_n...$ $(x_n\neq x_0)$, відповідна послідовність значень функції $f(x_1),f(x_2),...,f(x_n),...$ збіжна до A. Це записують $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

Основні теореми про границі функцій:

1. Границя сталої дорівнює цій сталій.
2. Границя алгебраїчної суми , добутку, частки двох функцій

дорівнює відповідно алгебраїчній сумі, добутку та частці їх границь при умові, що границя функції в знаменнику не дорівнює 0.

Випадки, коли не можна знайти границі безпосередньо за цими теоремами, це невизначеності: $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\infty-\infty,0\cdot\infty,1^\infty,0^\infty$. Для розкриття невизначеностей використовують визначні границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \quad (e\approx 2,71828)$.

В фінансових розрахунках використовують формули нагромадження капіталу за складними відсотками знайдені на основі геометричної прогресії: $K_t=K_0(1+i)^t$, де K_t - сума вкладу нагромадження через t років, K_0 - початкова сума вкладу, $t=\frac{p}{100}$ - коефіцієнт складних відсотків при p - щорічному відсотковому приросту.

Якщо відсотки нараховуються m разів за рік, то $K_t=K_0(1+\frac{i}{m})^{mt}$.

Якщо зростання за складними відсотками неперервне, то на основі другої визначної границі формула набуде вигляду $K_t=K_0e^{it}$.

9. Диференціальне числення функцій однієї змінної

Похідною функції $y=f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx в цій точці, коли $\Delta x\to 0$

Позначають похідну y', $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Якщо ця границя скінченна, то функція називається диференційованою в т. x. Основні правила і формули диференціювання поміщені в таблиці:

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ			
$y = C$	$y' = 0$	$y = x$	$y' = 1$
$y = Cu$	$y' = Cu'$	$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$
$y = uv$	$y' = u'v + v'u$	$y = u^n$	$y = nu^{n-1}u'$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y = a^u$	$y' = a^u \ln a u'$	$y = e^u$	$y' = e^u u'$
$y = \sin u$	$y' = \cos u\, u'$	$y = \cos u$	$y' = -\sin u\, u'$
$y = tgu$	$y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$	$y = ctgu$	$y' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$y = \arcsin u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \arccos u$	$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = arctgu$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$	$y = arcctgu$	$y' = -\frac{u'}{1+u^2}$
$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u \ln a}$	$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$
$y=f(u)$, $u=\varphi(x)$	$y' = f'_u u'_x$	$x=\varphi(y)$ *обернена до* $y=f(x)$	$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

Диференціал функції $y = f(x)$ обчислюється за формулою:

$$dy = f'(x)dx.$$

10. Застосування похідної.

Правило Лопіталя. Для “невизначеностей типу $\frac{0}{0}$ та $\frac{\infty}{\infty}$” границя відношення функцій дорівнює границі відношення їх похідних, якщо вона існує.

Достатні умови зростання та спадання функції. Якщо похідна неперервної на відрізку $[a,b]$ функції $y = f(x)$ додатна, то функція зростає, якщо похідна — від’ємна, то функція спадна.

Необхідні умови екстремуму функції. Якщо в точці x_0 функція $y = f(x)$ має екстремум, то її похідна $f'(x)$ в цій точці дорівнює нулю або не існує.

Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує називають критичними.

Достатні умови екстремуму (перше правило).

Якщо при переході через критичну точку x_0 зліва на право похідна $f'(x)$ змінює знак з “+” на “-”, то в цій точці функція має максимум., а при зміні знака з “–” на “+” — мінімум. Якщо знак не міняється, то екстремуму не має.

Друге правило.

Якщо в критичній точці x_0 друга похідна $f''(x_0) \neq 0$, то в цій точці функція $f(x)$ має екстремум: максимум при $f''(x_0) < 0$, мінімум при $f''(x_0) > 0$.

Графік функції $y = f(x)$ опуклий на проміжку (a,b), якщо в кожній точці його $f''(x_0) < 0$ і вгнутий, якщо $f''(x_0) > 0$.

Точка x_0, в якій $f''(x_0) = 0$ і при переході через яку $f''(x)$ змінює знак є точкою перегину.

В економічних дослідженнях використовують поняття еластичності функції $y = f(x)$, яке виражається через похідну

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

11. Повне дослідження функції

<u>Загальна схема дослідження функції і побудова її графіка.</u>

1. Знаходимо область визначення функції $y = f(x)$.

2. Знаходимо точки перетину кривої $y=f(x)$ з осями координат, відкладаємо їх на рисунку.

3. Визначаємо, чи симетрична крива $y = f(x)$ відносно осей координат і початку координат (парність і непарність).

4. Досліджуємо функцію на неперервність. Якщо функція має у точці x_0 розрив, то визначаємо, якого він роду.

5. Досліджуємо функцію на періодичність.

6. Знаходимо асимптоти кривої, якщо вони існують.

7. Визначаємо інтервали монотонності, максимум і мінімум функції і позначаємо на рисунку точки кривої з максимальною і мінімальною ординатами.

8. Знаходимо точки перегину, інтервали опуклості і увігнутості.

12. Функції багатьох змінних

Якщо кожній парі чисел (x,y), де $x \in X$, $y \in Y$ поставлено у відповідність за певним правилом значення $z \in Z$, то говорять, що задана функція двох змінних, яку позначають $z = f(x,y)$.

Змінні x і y називають аргументами.

Якщо x надати приросту Δx, а y - приросту, то z одержить приріст Δz. Частинний приріст $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$, частинний приріст $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$.

Частинні похідні першого порядку:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \quad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Їх знаходять як звичайні похідні, вважаючи при обчисленні z_x' змінну y сталою, а при обчисленні z_y' змінну x сталою. Оскільки частинні похідні першого порядку для функції двох змінних є функціями цих змінних, то можна знайти частинні похідні другого порядку: z_{xx}'', z_{xy}'', z_{yy}''.

Необхідні умови екстремуму функції двох змінних

Якщо в точці $M(x_0, y_0)$ функція $z = f(x,y)$ досягає екстремуму, то її частинні похідні перешого порядку в цій точці дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} z'_x(x_0, y_0) = 0, \\ z'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

Достатні умови екстремуму функції двох змінних

Нехай в точці $M_0(x_0, y_0)$ виконується умова $z'_x = z'_y = 0$ і існують частинні похідні другого порядку $z''_{xx}(x_0; y_0) = A$; $z''_{xy}(x_0; y_0) = B$; $z''_{yy}(x_0; y_0) = C$.

Визначимо: $D = AC - B^2$.

Якщо $D > 0$, то в точці $M_0(x_0, y_0)$ функція $z = f(x,y)$ має екстремум; якщо $D < 0$, то екстремуму немає.

Якщо $D > 0$ і $A > 0$ (або $D > 0$ і $C > 0$), то функція досягає мінімуму, якщо $D > 0$ і $A < 0$ (або $D > 0$ і $C < 0$), то функція досягає максимуму.

Градієнтом функції двох змінних називається вектор

$$g = grad\ z = z'_x \vec{i} + z'_y \vec{j}.$$

Для функції $u = f(x,y,z)$ градієнт має вид

$$g = grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \vec{k}.$$

13. Невизначений інтеграл.

Первісною функцією до заданої функції $f(x)$ називається функція $F(x)$, похідна якої дорівнює $f(x)$, а диференціал $f(x)dx$:

$$F'(x) = f(x) \text{ або } dF(x) = f(x)dx.$$

Множина всіх первісних $F(x) + C$ для даної функції $f(x)$, де C — довільна стала, називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ і позначається

$$\int f(x)dx.$$

Отже, $\int f(x)dx = F(x) + C$.

В формулі $f(x)$ називається підінтегральною функцією, $f(x)dx$ — підінтегральним виразом, а символ $\int$ — знаком невизначеного інтеграла.

Основні властивості невизначеного інтеграла.

1. Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, а диференціал — підінтегральному виразу:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції з точністю до сталої:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

3. Постійний множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від кожного з цих доданків:

$$\int (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx.$$

ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ	
$\int du = u + C$	$\int Cdx = C\int dx$
$\int \sin u du = -\cos u + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$
$\int tg(u)du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$	$\int ctg(u)du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$
$\int e^u du = e^u + C$	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$
$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C$	$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$
$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + C$	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$
$\int \frac{du}{\cos^2 u} = tg(u) + C$	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctg(u) + C$
$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq 1$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

14. Методи обчислення невизначених інтегралів

а) метод *беспосереднього інтегрування* полягає в прямому застосуванні властивостей інтегралів і таблиці основних інтегралів.

б) метод *заміни змінної* застосовується для зведення $\int f(x)dx$ до табличного, введенням підстановки $x = \varphi(t)$ і використонням формули $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

Інколи доцільно вводити заміну $t = \psi(x)$, щоб звести інтеграл до табличного.

в) метод *інтегрування частинами* грунтується на використанні формули: $\int udv = uv - \int vdu$. Підінтегральний вираз подають у вигляді добутку множників u і dv. Якщо він містить добуток многочлена на тригонометричну або показникову функцію, то за u слід взяти многочлен, а все решту за dv. Якщо підінтегральний вираз містить добуток многочлена на логарифмічну чи аркфункцію, то за u слід брати логарифмічну або аркфункцію, а решта – за dv.

Не всякий інтеграл можна виразити через відомі елементарні функції.

Завжди інтегруються раціональні функції, які мають вигляд

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$, $Q(x)$ — многочлени.

Якщо найвищий степінь многочлена $P(x)$ менший за найвищий степінь многочлена $Q(x)$, то дріб називають правильним, в іншому випадку неправильним.

З неправильного дробу виділяють цілу частину шляхом ділення двох многочленів і, таким чином, зводять інтегрування його до інтегрування цілої раціональної функції і правильного дробу.

Правильний дріб можна розкласти на суму найпростіших дробів чотирьох типів:

1) $\frac{A}{x-a}$; 2) $\frac{B}{(x-a)^n}, n > 1$; 3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$; 4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, кожен з яких інтегрується.

Інтеграли виду $\int \sin^m x \cos^n x$, якщо $m = 2k+1$ непарне число, обчислюється підстановкою $t = \cos x$, якщо n непарне число – підстановкою $t = \sin x$. Якщо обидва показники парні, то використовуючи формули пониження степеня тригонометричних функцій:

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, прийдемо до обчислення інтегралів, в яких хоч один із степенів буде непарним.

Інтеграли типу $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$ перетворюють з використанням формул перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.

$$\sin mx\cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x),$$

$$\sin mx\sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x),$$

$$\cos mx\cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x).$$

Інтеграли типу $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де $R(\sin x, \cos x)$ - раціональна функція від $\sin x, \cos x$ можна звести до інтегрування раціональних дробів за допомогою універсальної підстановки $t = tg\frac{x}{2}$, скориставшись формулами

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Інтеграли від ірраціональних функцій

1) $\int R(x, \sqrt[m]{ax+b}, \sqrt[n]{ax+b}, ...)dx$, де підінтегральна функція раціональна відносно $x, \sqrt[m]{ax+b}, \sqrt[n]{ax+b}, ...$ зводять до інтегралів від раціональних функцій підстановкою $ax+b = t^k$, де k - найменше спільне кратне чисел $m, n, ...$

2) Для $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx$ використовують підстановку $x = a\sin t$ ($x = a\cos t$); для $\int R(x, \sqrt{x^2+a^2})dx$ - $x = atgt$ ($x = actgt$).

14. Визначений інтеграл.

Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ - це число, яке знаходиться за формулою Ньютона-Лейбніца: $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, де $F(x)$ - первісна до функції $f(x)$.

Якщо при обчиленні визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ застосовують заміну змінної : $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ - неперервна функція, що має похідну $\varphi'(t)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$, то використовується формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt, \text{ де } a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta).$$

При обчисленні визначеного інтеграла не потрібно повертатись до попередньої змінної.

При методі інтегрування частинами формула має вигляд:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Площа S криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю Oy та прямими $x = a, x = b$, обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена зверху лінією $y = f_2(x)$, знизу лінією $y = f_1(x)$, та прямими $x = a, x = b$ обчислюється за формулою: $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx$.

Об'єм V тіла обертання фігури обмеженої лініями: $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$ навколо осі Ox знаходимо за формулою:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Якщо фігура, обмежена лініями: $x = g(y), x = 0, y = c, y = d$ обертається навколо осі Oy, то об'єм:

$$V = \pi\int_c^d g^2(y)\,dy$$

15. Невласні інтеграли.

За означенням невласні інтеграли з необмеженими межами:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx.$$

Якщо ці границі скінченні, то невласні інтеграли називаються збіжними, якщо нескінченні або не існують, то розбіжні.

Якщо підінтегральна функція $f(x)$ в точці $x = a$ необмежена і терпить розрив, то $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$;

Якщо $f(x)$ необмежена в точці $x = b$, то $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$.

Якщо $f(x)$ терпить розрив у внутрішній точці $x = c$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Інтеграл Пуассона: $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

16. Диференціальні рівняння першого порядку.

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду $F(x, y, y') = 0$, яке, коли його можна розв'язати відносно y' набуває вигляду $y' = f(x, y)$ або $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$.

Функція $y = \phi(x, C)$, де C - довільна стала, називається загальним розв'язком рівняння першого пороpядку, якщо при підстановці її в рівняння, вона перетворює його в правильну рівність. Якщо цей розв'язок задає функцію y неявно: $\Phi(x, y, C) = 0$, то знайдено загальний інтеграл. При довільному C_0 одержимо частковий розв'язок (частковий інтеграл).

Задача знаходження розв'язку , який задовільняє початкові умови $y = y_0$ при $x = x_0$, називається задачею Коші для рівняння першого порядку.

Розглянемо деякі класи диференціальних рівнянь, які розв’язуються в квадратурах (розв’язки виражаються через інтеграли від заданих функцій).

Диференціальне рівняння вигляду $f(x)dx + \phi(y)dy = 0$ називається рівнянням з відокремленими змінними . Його загальний інтеграл:

$$\int f(x)dx + \int \phi(y)dy = C.$$

Диференціальне рівняння вигляду $f_1(x)\phi_1(y)dx + f_2(x)\phi_2(y)dy = 0$ називається рівнянням з відокремлюваними змінними.

В ньому змінні можна розділити і знайти загальний інтеграл

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{\phi_2(y)}{\phi_1(y)}dy = C.$$

Зауваження. Часто для зручності спрощень C записують у вигляді $\ln C$.

Лінійним дифрінянням першого порядку називається рівняння, яке містить шукану функцію y , та її похідну y' в першому степені і не містить їх добутків: $y' + p(x)y = q(x)$.

Підстановкою $y = u \cdot v$, за методом Бернулі воно приводиться до інтегрування двох дифрівнянь з відокремлюваними змінними.

Однорідним дифрівнянням першого порядку називається рівняння вигляду $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, де $P(x,y), Q(x,y)$ - однорідні функції одного виміру. Функція $f(x,y)$ називається однорідною виміру m , якщо

$$f(tx,ty) = t^m f(x,y).$$

Однорідне дифрівняння зводиться до рівняння вигляду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Підстановкою $y = x \cdot u$ воно зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

17. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами.

Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами називається рівняння вигляду $y'' + p y' + q = 0$, де p, q - сталі числа.

Відповідним характеристичним рівнянням називається рівняння:

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Загальний розв’язок заданого дифрівняння залежить від коренів цього характеристичного рівняння.

1. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні та різні, $k_1 \neq k_2$, то загальний розв’язок дифрівняння має вигляд $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

2. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні і рівні, тобто $k_1 = k_2 = k$, то загальний розв’язок $y = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$.

3. Якщо корені характеристичного рівняння комплексно спряжені, тобто $k_1 = \alpha + i\beta, k_2 = \alpha - i\beta$,де $i = \sqrt{-1}$, $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, то загальний розв’язок $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$.

Неоднорідне лінійне дифрівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами має вигляд $y'' + p y' + q = f(x)$, де p, q — сталі числа.

Загальний розв’язок лінійного дифрівняння ($y_{з.н.}$) дорівнює сумі загального розв’язку відповідного однорідного рівняння ($y_{з.о.}$) і довільного часткового розв’язку ($y_{ч.н.}$) даного неоднорідного рівняння, тобто

$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$

Частковий розв’язок ($y_{ч.н.}$) підбирається для деяких функцій $f(x)$ подібним до неї.

1. Нехай $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, де многочлен

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Тоді частковий розв’язок шукаємо у вигляді

$y_{ч.н.} = e^{\alpha x} Q_n(x)$, якщо α — не корінь характеристичного рівняння ;

$y_{ч.н.} = e^{\alpha x} x Q_n(x)$, якщо α — простий корінь характеристичного рівняння ;

$y_{ч.н.} = e^{\alpha x} x^2 Q_n(x)$, якщо α — подвійний корінь характеристичного рівняння, де $Q_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$,($A_0, A_1, \ldots, A_n$ —невідомі сталі коефіцієнти, які знаходяться методом невизначених коефіцієнтів).

2. Нехай $f(x) = e^{\alpha x}(a \cos x + b \sin x)$, тоді частковий розв’язок

$y_{ч.н.} = e^{\alpha x}(A \cos x + B \sin x)$, якщо $\alpha + i\beta$ - не корінь характеристичного рівняння ;

$y_{ч.н.} = e^{\alpha x} x(A \cos x + B \sin x)$, якщо $\alpha + i\beta$ — корінь характеристичного рівняння ;

Для дифрівняння другого порядку загальний розв’язок містить дві довільні сталі. Задача Коші ставиться так:

Знайти такий розв’язок, який би задовільняє умови $y = y_0$, $y' = y'_0$, при $x = x_0$.

18. Числові ряди

Нехай задана нескінченна послідовність чисел $u_1, u_2, ..., u_n, ...$

Вираз $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ називають нескінченним числовим рядом (або просто рядом), числа $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ — членами ряду, u_n — загальним членом ряду.

Частковою сумою числового ряду називають суму S_n перших n членів числового ряду, тобто $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, ..., $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Сумою S числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називають границю його часткової суми S_n при $n \to \infty$, тобто $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.

Якщо границя часткової суми ряду є скінченним числом, то ряд називають збіжним і позначають $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Якщо границя часткової суми ряду не існує або дорівнює $\pm\infty$, то числовий ряд називають розбіжним.

Числовий ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1}$ називають рядом геометричної прогресії зі знаменником q.

При $|q| < 1$ ряд геометричної прогресії збігається і його сума дорівнює $S = \frac{a}{1-q}$. При $|q| \geq 1$ ряд розбігається.

Числовий ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$ називають гармонічним рядом. Цей ряд розбігається.

Необхідна ознака збіжності числового ряду.

Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то загальний член $u_n \to 0$ при $n \to \infty$, тобто $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Достатні ознаки збіжності числових рядів.

1. Ознака Даламбера.

Нехай усі члени числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ додатні і при необмеженому зростанні номера n, границя відношення $(n+1)$-го члена до n-го дорівнює числу d. Тобто $d = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Якщо $d < 1$, тоді числовий ряд збігається. При $d > 1$, цей ряд розбігається. При $d = 1$ потрібно застосовувати іншу ознаку.

2. Ознака порівняння.

Нехай треба дослідити збіжність заданого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$. Візьмемо другий додатний числовий ряд, збіжність чи розбіжність якого відома: $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $v_n > 0$. Тоді:

а) якщо $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ряд збігається і, починаючи з деякого номера n, виконується співвідношення $u_n \leq v_n$, тоді й ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ також збігається.

б) якщо $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ряд розбігається і, починаючи з деякого номера n, виконується співвідношення $u_n \geq v_n$, тоді й ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ також розбігається.

3. Інтегральна ознака Коші.

Нехай $y = f(x)$-неперервна, монотонно спадна і додатна в інтервалі $(0;\infty)$ функція, значення якої $f(1), f(2), f(3), ... f(n), ...$ дорівнюють відповідним додатним членам ряду $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$

Тоді для збіжності ряду необхідно і достатньо, щоб невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ мав скінченну величину.

Якщо члени числового ряду мають різні знаки, то ряд називають знакозмінним.

Ряд, члени якого почергово мають додатний та від'ємний знаки, називають знакопереміжним. Такий ряд можна записати у вигляді:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 ... + (-1)^{n-1} u_n + ...,\quad u_n > 0.$ Знакопереміжний ряд називають збіжним абсолютно, якщо збігається додатний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, складений з абсолютних величин цього знакопереміжного ряду.

Ознака Лейбніца. Якщо абсолютні величини знакопереміжного ряду монотонно спадають $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 ... > u_n > ...$ і границя загального члена дорівнює нулю при $n \to \infty$, тобто виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, тоді знакопереміжний ряд збігається, при чому його часткова сума S_n обов'язково менша від першого члена ряду.

Якщо знакопереміжний ряд збігається, а ряд, складений з абсолютних величин, розбігається, то знакопереміжний ряд називають неабсолютно збіжним (або умовно збіжним).

19. Степеневі ряди.

Степеневим рядом називають ряд такого вигляду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + ... + a_n x^n + ...$$ або

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_1 (x - x_0)^2 +$$
$$+ a_2 (x - x_0)^3 + ... + a_n (x - x_0)^n + ... ,$$

де a_n $(n = 1,2,3,...)$ - дійсні числа, які називають коефіцієнтами степеневого ряду; x_0 -деяке постійне число.

Число R називають радіусом збіжності степеневого ряду, якщо для $|x| < R$ ряд збігається, а для $|x| > R$ - розбігається.

Радіус збіжності знаходимо за формулою: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

Інтервал $(-R, R)$ називають інтервалом збіжності степеневого ряду.

Ряд Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + ... +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + ...$$

Ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$$

ДЕЯКІ ЕКОНОМІЧНІ ЗАДАЧІ І ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ.

Задача 1. Бюро економічного аналізу фабрики "Нова" встановило, що при виробництві x комплектів меблів щоквартальні витрати $V(x)$ виражаються формулою $V(x) = 2050 + 15x$ (гривень), а дохід $D(x)$, одержаний від продажу x комплектів меблів визначається формулою $D(x) = 25x - 0{,}1x^2$ (гривень).

Кожного кварталу фабрика виробляє ***80*** комплектів, але прагне збільшити випуск меблів до ***110*** одиниць. Обчислити приріст витрат, доходу та прибутку. Знайти середню величину приросту прибутку на одиницю приросту продукції.

Розв'язування. Запланований приріст продукції буде

$\Delta x = 110 - 80 = 30$ (одиниць продукції).

Приріст витрат:

$$\Delta V(x) = V(110) - V(80) = (2050 + 15 \cdot 110) - (2050 + 15 \cdot 80) =$$
$$= 3700 - 3250 = 450.$$

Приріст доходу:

$$\Delta D(x) = D(110) - D(80) = (25 \cdot 110 - 0{,}1 \cdot 110^2) - (25 \cdot 80 - 0{,}1 \cdot 80^2) =$$
$$= 1540 - 1360 = 180.$$

Позначимо прибуток $P(x)$.

Тоді

$$P(x) = D(x) - V(x) = 25x - 0{,}1x^2 - 2050 - 15x = -2050 + 10x - 0{,}1x^2.$$

Приріст прибутку буде:

$$\Delta P(x) = P(110) - P(80) = -2050 + 10 \cdot 110 - 0{,}1 \cdot 110^2 -$$
$$-(-2050 + 10 \cdot 80 - 0{,}1 \cdot 80^2) == 1100 - 1210 - 800 + 640 = -50,$$

тобто зменшиться на ***50*** гривень. Середня величина прибутку на одиницю приросту продукції буде $\frac{\Delta P(x)}{\Delta(x)} = \frac{-50}{30} = -1{,}67$.

Задача 2. В місті Тернополі в усіх вищих навчальних закладах навчається ***35*** тис. студентів. Щорічно кількість студентів збільшується на ***3***%. Яка кількість студентів буде в Тернополі через вісім років?

Розв'язування. Використаємо формулу зростання за складними відсотками: $K_8 = 35\left(1 + \frac{3}{100}\right)^8 = 35 \cdot (1 + 0{,}03)^8 \approx 44{,}34$.

Отже, через ***8*** років у місті буде ***44, 34*** тис. студентів.

Задача 3. Вкладник надає банку ***2000*** гривень під складні відсотки за умови їх неперервного зростання на ***12%*** річних. Обчислити нагромадження капіталу за ***4*** роки.

Розв'язування. Використаємо формулу неперервного зростання за складними відсотками: $K_4 = 2000 \cdot e^{4 \cdot 0{,}12} \approx 3{,}2322$ **тис. грн.**

Задача 4. Сума $K_0 = 200$ тис.грн. вкладена під складні відсотки з розрахунку ***12%*** річних терміном на ***4*** роки. Обчислити кінцеву суму, якщо відсотки нараховуються в кінці кожного місяця.

Розв'язування. Відомо, що $K_0 = 200$ тис. грн., $i = 0{,}12$, $m = 12$, $t = 4$.

Отже, $K_4 = 200\left(1 + \frac{0{,}12}{12}\right)^{12 \cdot 4} = 200 \cdot 1{,}01^{48} = 322{,}4$ **тис. грн.**

Задача 5. Закон Парето: Число y осіб, котрі мають прибуток не менш ніж x, можна визначити за формулою $y = \frac{a}{x^n}$ (***n***=**2, 3**, ……)

Даний закон достатньо точно описує розподіл великих прибутків і не справджується для низьких.

Нехай у деякому капіталістичному суспільстві розподіл прибутків серед особливо багатих осіб визначається так: $y = \frac{6{,}4 \cdot 10^{16}}{x^3}$, де y – число осіб, прибуток яких не менший x.

Визначити:

а) число осіб прибуток яких не менший від ***100000*** дол.

б) найменший прибуток серед ***1000*** особливо багатих осіб.

Розв'язування. Використовуючи дану формулу, знаходимо:

а) $y = \frac{6{,}4 \cdot 10^{16}}{10^{15}} = 64$.

Отже, ***64*** особи мають прибуток не менший $***100000***.

б) з формули закону Парето одержуємо: $x^3 = \frac{64 \cdot 10^{15}}{y}$. Якщо ***y=1000***, то маємо: $x^3 = \frac{64 \cdot 10^{15}}{10^3} = 64 \cdot 10^{12}$,

$x = 4\sqrt[3]{10^{12}} = 4 \cdot 10^4 = 4 \cdot 10000 = \$40000$.

Отже, найменший прибуток серед ***1000*** особливо багатих людей становить $***40000***.

Задача 6. Підприємство виготовляє x виробів, роздрібна вартість кожного з них дорівнює p, причому $p = 50 - 0{,}3x$, а функція витрат $V(x) = 1200 + 7x$ (у гривнях). Знайти маржинальний прибуток, якщо виготовлено і продано ***30*** і ***120*** виробів.

Розв'язування. У нашому випадку функцією доходу є:

$$D(x) = p \cdot x = (50 - 0{,}3x)x = 50x - 0{,}3x^2 \ .$$

Прибуток від виготовлення і продажу x виробів буде

$$P(x) = D(x) - V(x) = 50x - 0{,}3x^2 - (1200 + 7x) = -0{,}3x^2 + 43x - 1200.$$ Маржинальний прибуток для довільного x дорівнює

$$P'(x) = (-0{,}3x^2 + 43x - 1200)' = -0{,}6x + 43.$$

Звідси, при $x = 30$ і $x = 120$ маємо:

$$P'(30) = -0{,}6 \cdot 30 + 43 = -18 + 43 = 25 \ ,$$

$$P'(120) = -0{,}6 \cdot 120 + 43 = -72 + 43 = -29 \ .$$

Отже, при зростанні і продажу кількості виробів підприємство матиме збитки у розмірі ***29*** гривень за кожен виріб.

Задача 7. Знайти еластичність попиту $Q = 25 - 3p$ стосовно ціни $p = 8.$

Розв'язування. Знайдемо еластичність попиту:

$$Ep(Q) = \frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp} = \frac{p}{Q}(-3) = -\frac{3p}{Q} = -\frac{3p}{25 - 3p}.$$

При $p = 8$ маємо $E_8(Q) = -24.$ Це означає, що попит є еластичним. При ціні ***8*** грн. підвищення її на ***1***% приведе до зниження попиту на ***24***%.

Задача 8. Заданий граничний дохід підприємства $D'(x) = 100 - 4x,$ де x – кількість виробленої продукції. Знайти функцію сумарного доходу фірми, якщо нульовий випуск продукції дає нульовий дохід.

Розв'язування. Функцію сумарного доходу можна знайти так:

$$D(x) = \int (100 - 4x)dx = 100x - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + C = 100x - 2x^2 + C.$$

Якщо врахувати, що $D(0) = 0$, то $D(0) = C$. Звідси, $C = 0.$

Отже, сумарний дохід підприємства $D(x) = 100x - 2x^2.$

Задача 9. Маржинальний дохід фірми задається функцією $D'(x) = 15 - 0{,}02x.$

Знайти функцію доходу і визначити відношення між вартістю одиниці продукції та проданою її кількістю.

Розв'язування. Інтегруючи функцію маржинального доходу, знайдемо функцію доходу фірми:

$$D(x) = \int D'(x)dx = \int (15 - 0{,}02x)dx = 15\int dx - 0{,}02\int xdx =$$

$$= 15x - 0{,}02\frac{x^2}{2} + C = 15x - 0{,}01x^2 + C.$$

З умови, що непродаж жодної одиниці продукції дає нульовий дохід, маємо: $0 = 15 \cdot 0 - 0{,}01 \cdot 0^2 + C, \ C = 0.$

Отже, функція доходу має вигляд: $D(x) = 15x - 0{,}01x^2.$

Оскільки дохід дорівнює добутку вартості кожної одиниці продукції p проданої фірмою на кількість x одиниць продукції, то $D(x) = p \cdot x = 15x - 0{,}01x^2.$

Звідси, $p = 15 - 0{,}01x$.

ВКАЗІВКИ ТА ЗРАЗКИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ.

1. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

а) за допомогою елементарних перетворень:

б) розклавши за елементами рядка (або стовпця):

Розв'язування.

а) за допомогою елементарних перетворень:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \times(-2) \qquad \times(-5)$$

Другий рядок залишаємо без змін. Додамо до елементів першого рядка відповідні елементи другого. Додамо до елементів третього рядка відповідні елементи другого, помножені на ***(-2)***, додамо до елементів четвертого рядка відповідні елементи другого, помножені на ***(-5)***. Одержаний визначник, скориставшись теоремою розкладу, розкладемо визначник за елементами першого стовпця.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -7 & -4 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -3 & -7 & -4 \\ -7 & -14 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= -(4 \cdot (-7) \cdot (-7) + 3 \cdot (-4) \cdot (-7) + (-3) \cdot (-14) \cdot 3 - (-7) \cdot (-7) \cdot 3 -$$

$$- 4 \cdot (-14) \cdot (-4) - -(-3) \cdot 3 \cdot (-7)) =$$

$$= -(196 + 84 + 126 - 147 - 224 - 63) = -(406 - 434) = 28.$$

б) розклавши за елементами першого рядка , одержимо:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=(-1)\cdot(-3+0-2-4-0+9)-3\cdot(-3+0+4+10-0-18)$$

$$-1\cdot(-1-5-12+15-2-2)=(-1)\cdot 0-3\cdot(-7)-1\cdot(-7)=28.$$

2. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4, \\ -x_1+2x_2-5x_3=-2, \\ 2x_1-x_2+3x_3=3. \end{cases}$

а) методом Гаусса,
б) за правилом Крамера,
в) матричним методом.

Розв'язування.

а) за методом Гаусса, послідовно виключаємо невідомі.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4, \\ -x_1+2x_2-5x_3=-2, \\ 2x_1-x_2+3x_3=3; \end{cases} \quad + \qquad \times(-2) \quad +$$

Виключимо невідому x_1 з другого і третього рівнянь. Для цього додамо перше і друге рівняння, перше рівняння помножимо на (-2) і додамо до третього, одержимо: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4, \\ 3x_2-4x_3=2, \\ -3x_2+x_3=-5. \end{cases}$

Виключимо змінну x_2 з третього рівняння. Для цього додамо друге і третє рівняння, отримуємо: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4, \\ 3x_2-4x_3=2, \\ -3x_3=-3. \end{cases}$

З одержаної системи, послідовно, визначаємо x_3, x_2, x_1.

Отже множина точок $\{1;2;1\}$ є розв'язком вихідної системи лінійних рівнянь.

б) За правилом Крамера.

Знаходимо визначник системи (за правилом Саррюса):

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{matrix} = 1\cdot2\cdot3+1\cdot(-5)\cdot2+1\cdot(-1)\cdot(-1)-2\cdot2\cdot1- \text{Ос}$$

$$-(-1)\cdot(-5)\cdot1-3\cdot(-1)\cdot1=6-10+1-4-5+3=-9.$$

кільки визначник системи Δ відмінний від нуля, то вона завжди сумісна і має єдиний розв'язок, який знаходять за формулами Крамера:

$$x_i=\frac{\Delta i}{\Delta},\ (i=1,2,3),$$

де Δ_i одержуємо з визначника Δ заміною i-го стовпця стовпцем вільних членів.

Знаходимо:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}=24-15+2-6-20+6=-9;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}=-6-40-3+4+15+12=-18;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=6-4+4-16+3-2=-9;$$

Отже, $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{-9}{-9}=1$; $x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{-18}{-9}=2$; $x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=\dfrac{-9}{-9}=1$; $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \\ x_3=1 \end{cases}$

— єдиний розв'язок системи (ЄРС).

в) Матричним методом.

Введемо позначення: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

У матричній формі систему лінійних рівнянь запишемо так $A\cdot X=B$.

Звідси, одержимо розв'язок: $X=A^{-1}\cdot B$. Знайдемо обернену матрицю A^{-1}.

1) обчислимо визначник матриці $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -9$;

2) знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3-(-5)\cdot(-1)=1;$$

$$A_{12} = (-1)^{3}\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{13} = (-1)^{4}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{21} = (-1)^{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{22} = (-1)^{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = (-1)^{5}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{31} = (-1)^{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{32} = (-1)^{5}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -(-5+1) = 4;$$

$$A_{33} = (-1)^{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Запишемо матрицю із цих алгебраїчних доповнень:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \\ -7 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

3) Транспонуючи її, одержимо приєднану матрицю:

$$A^{T} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 \\ -7 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

4) Обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot A^{T} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 \\ -7 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

5) Знаходимо розв'язок системи:

$$X = A^{-1}\cdot B = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 \\ -7 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+8-21 \\ -28-2+12 \\ -12-6+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Отже, $x_1=1, x_2=2, x_3=1$ – розв'язок заданої системи лінійних рівнянь.

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	7	1	3	2	2
S_2	7	2	1	2	3
S_3	7	2	2	1	2

Визначити кількість продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо сировину буде повністю вичерпано. Вказати базовий розв'язок.

Розв'язування: Якщо вважати, що x_1, x_2, x_3, x_4 – це кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, то дану задачу можна записати в вигляді системи лінійних рівнянь:
$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+2x_4=7, \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=7, \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=7, \end{cases}$$
що представляє собою математичну модель даної економічної задачі.

Розв'яжемо її методом Жордана-Гаусса, використовуючи таблиці:

Табл. 1. В першому рядку за ключовий елемент вибираємо 1. Цей рядок називається ключовим рядком. Переписуємо його без змін першим рядком другої таблиці. До відповідних елементів другого і третього рядків додаємо елементи першого помножені на "-2". Результати записуємо другим і третім рядком таблиці 2.

	x_1	x_2	x_3	x_4	$в_i$
1	**<u>1</u>**	3	2	2	7
	2	1	2	3	7
	2	2	1	2	7
2	1	3	2	2	7
	0	**<u>-5</u>**	-2	-7	-7
	0	-4	-3	-2	-7
3	1	0	4/5	7/5	14/5
	0	1	2/5	1/5	7/5
	0	0	**<u>-7/5</u>**	-6/5	-7/5
4	**1**	0	0	5/7	2
	0	**1**	0	-1/7	1
	0	0	**1**	6/7	1

<u>Табл.. 2</u>. В якості ключового елемента вибираємо "-5". Результат ділення другого рядка на ключовий елемент, записуємо другим рядком третьої таблиці. Помноживши другий рядок таблиці 3 на "-3", а потім на "4", додаючи отримані рядки відповідно до першого і третього рядків другої таблиці, отримуємо перший і третій рядки третьої таблиці, в яких відбувся процес виключення невідомої x_2.

<u>Табл. 3.</u> В третьому рядку ключовий елемент (-7/5) є коефіцієнтом при невідомій x_3. Тому ділимо третій рядок третьої таблиці на ключовий елемент (-7/5) і записуємо отриманий рядок третім рядком четвертої таблиці. Нам залишається виключити невідому

x_3 з перших двох рядків третьої таблиці. Для цього третій рядок множимо спочатку на (-4/5) і додаємо до першого рядка третьої таблиці, а потім, множимо на (-2/5) і додаємо до другого рядка третьої таблиці. Результати дій записуємо першим і другим рядком четвертої таблиці. Таким чином ми отримали результуючу четверту таблицю, в якій кожний рядок має лише дві із чотирьох невідомих. Ця таблиця є розширеною матрицею системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 5/7x_4 = 2, \\ x_2 - 1/7x_4 = 1, \\ x_3 + 6/7x_4 = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 5/7x_4, \\ x_2 = 1 + 1/7x_4, \\ x_3 = 1 - 6/7x_4. \end{cases}$$

В останній системі рівнянь x_1, x_2, x_3 називаються базисними змінними, оскільки матриця, складена з коефіцієнтів при них є одиничною. Невідома x_4 називається вільною, тому що може приймати будь-які значення. Але в нашій задачі невідомі x_i $(i=1, 2, 3, 4)$ виражають кількість реалізованої продукції, тому вони повинні бути невід'ємними, тобто $x_i \geq 0$.

А значить

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 5/7x_4 \geq 0, \\ x_2 = 1 + 1/7x_4 \geq 0, \\ x_3 = 1 - 6/7x_4 \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 \leq 14/5, \\ x_4 \geq 0, \\ x_4 \leq 7/6; \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x_4 \leq \min\{14/5; 7/6\} = 7/6.$$

Будь-якому значенню $x_4 \in [0; 7/6]$ відповідає невід'ємний розв'язок, який задовольняє умові задачі. Отже, для $x_4=0$, $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=1$— базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види виробів A_1, A_2, A_3, A_4. Відповідно: 13 шт.; 12 шт.; 4 шт.; 11 шт.; ІІ –13; 7; 21; 15; ІІІ – 2; 10; 12; 8. Ціна 1 шт. продукції в місті B_1 відповідно: 5 грн., 4,3 грн., 2 грн., 1,5 грн., в B_2 – 1; 1, 4; 3, 2; 1, 3; в B_3 – 2; 3, 6; 2, 5;. 1. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

Розв'язування: Запишемо матрицю продукції A_n, стрічки якої утворюються з чисел — кількості виробленої продукції кожною фірмою. Запишемо матрицю цін $B_ц$, стовпці якої утворені цінами на вироби в кожному з міст.

$$A_n = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 4 & 11 \\ 13 & 7 & 21 & 15 \\ 2 & 10 & 12 & 8 \end{pmatrix}, \quad B_ц = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4,3 & 1,4 & 3,6 \\ 2 & 3,2 & 2,5 \\ 1,5 & 1,3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо добуток матриць A_n та $B_ц$:

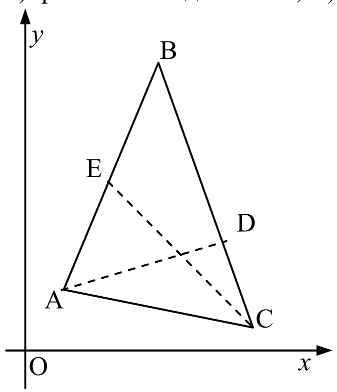
$$\begin{pmatrix} 13 & 12 & 4 & 11 \\ 13 & 7 & 21 & 15 \\ 2 & 10 & 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4,3 & 1,4 & 3,6 \\ 2 & 3,2 & 2,5 \\ 1,5 & 1,3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13\cdot 5+12\cdot 4,3+4\cdot 2+11\cdot 1,5 & 13\cdot 1+12\cdot 1,4+4\cdot 3,2+11\cdot 1,3 & 13\cdot 2+12\cdot 3,6+4\cdot 2,5+11\cdot 1 \\ 13\cdot 5+7\cdot 4,3+21\cdot 2+15\cdot 1,5 & 13\cdot 1+7\cdot 1,4+21\cdot 3,2+15\cdot 1,3 & 13\cdot 2+7\cdot 3,6+21\cdot 2,5+15\cdot 1 \\ 2\cdot 5+10\cdot 4,3+12\cdot 2+8\cdot 1,5 & 2\cdot 1+10\cdot 1,4+12\cdot 3,2+8\cdot 1,3 & 2\cdot 2+10\cdot 3,6+12\cdot 2,5+8\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 141,5 & 56,9 & 90,2 \\ 939,6 & 103,7 & 118,7 \\ 89 & 64,8 & 78 \end{pmatrix}.$$

Матриця-добуток дає можливість аналізувати і порівнювати очікуваний дохід від продажу виробленої продукції. Наприклад: ***141,5*** –дохід першої фірми в місті B_1, ***103,7*** – дохід другої фірми в місті B_2, ***118,7*** – дохід другої фірми в місті B_3. З матриці також видно, що перша фірма одержить дохід в першому місті ***141,5*** грн., в другому – ***56,9*** грн., в третьому –***90,2*** грн., друга, відповідно – ***939,6; 103,7; 118,7***; третя – ***89; 64,8; 78***.

5. Задані координати вершин $A(2; 2)$, $B(5; 8)$, $C(7; 1)$ трикутника ABC. Знайти**: а)** рівняння висоти AD; **б)** довжину висоти AD; в) рівняння медіани CE; г) значення кута B; д) площу трикутника ABC. Зробити малюнок.



Розв'язування.

а) Запишемо рівняння в'язки прямих, які проходять через точку A за формулою

$$y - y_A = k(x - x_A).$$

У нашому випадку: $y-2=k_{AD}(x-2)$. З умови перпендикулярності AD і BC одержуємо, що $k_{AD} = -\dfrac{1}{k_{BC}}$. Для знаходження кутового коефіцієнта k_{BC} запишемо рівняння сторони BC як прямої, яка проходить через дві точки:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \text{ тобто } \frac{y-y_B}{y_C-y_B} = \frac{x-x_B}{x_C-x_B};$$

$$\frac{y-8}{1-8} = \frac{x-5}{7-5}; \quad \frac{y-8}{-7} = \frac{x-5}{2};$$

$2(y-8)=-7(x-5)$, $2y-16=-7x+35$, $7x+2y-51=0$ — рівняння сторони BC.

Якщо змінну y виразити через x, то одержимо: $2y = -7x+51$,

$y=-\frac{7}{2}x+\frac{51}{2}$. Звідси, $k_{BC}=-\frac{7}{2}$, а отже, $k_{AD}=\frac{2}{7}$.

Рівняння висоти має вигляд $y-2=\frac{2}{7}(x-2)$, $7y-14=2(x-2)$, або $7y-2x-10=0$.

б) Довжину висоти ***AD*** знайдемо як відстань від точки ***A***(2; 2) до прямої ***BC*** (***7x+2y–51=0***) за формулою $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. У нашому випадку ***A=7; B=2; C=–51,*** і тоді $d=\frac{|7\cdot 2+2\cdot 2-51|}{\sqrt{7^2+2^2}}=\frac{|-33|}{\sqrt{53}}=\frac{33}{\sqrt{53}}$.

в) Медіана ***CE*** ділить сторону ***AB*** трикутника ***ABC*** навпіл, тому

$$x_E=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2+5}{2}=3{,}5;\quad y_E=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2+8}{2}=5.$$

Отже, точка ***E***(***3,5; 5***) — середина відрізка ***AB***. Запишемо рівняння медіани ***CE***, як рівняння прямої, яка проходить через дві точки ***C***(***7; 1***) і ***E***(***3,5; 5***).

$$\frac{y-5}{1-5}=\frac{x-3{,}5}{7-3{,}5};\quad \frac{y-1}{-4}=\frac{x-3{,}5}{3{,}5};$$

$3{,}5(y-1)=-4(x-3{,}5);\ 3{,}5y+4x-17{,}5=0$ або $7y-8x-35=0$ (***CE***).

г) значення кута ***B*** знаходимо за формулою $tg\beta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$, рахуючи кут від прямої з кутовим коефіцієнтом k_1 до прямої з кутовим коефіцієнтом k_2 проти годинникової стрілки . Обчислюємо кутові коефіцієнти сторін:

$$k_1=k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{8-2}{5-2}=\frac{6}{3}=2,\quad k_2=k_{BC}=\frac{1-8}{7-5}=-\frac{7}{2}=-3{,}5.$$

$tgB=\frac{-3{,}5-2}{1+(-3{,}5)\cdot 2}\approx 0{,}916$. Звідси $\angle B=arctg\,0{,}916$.

д) площу трикутника ***ABC*** знаходимо за формулою:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|BC|\cdot|AD|.$$

Довжину сторони ***BC*** знаходимо як відстань між двома точками

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$;

$|BC|=\sqrt{(7-5)^2+(1-8)^2}=\sqrt{4+49}=\sqrt{53}$.

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{53}\cdot\frac{33}{\sqrt{53}}=\frac{33}{2}=16{,}5$ (кв. од).

6. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точки ***M***(–5; –4) і ***N***$\left(5\sqrt{\frac{2}{3}};\frac{8}{\sqrt{3}}\right)$. Знайти фокуси еліпса. Зробити малюнок.

Розв'язування. Нехай шукане рівняння еліпса буде $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Цьому рівнянню повинні задовольняти координати точок ***M*** і ***N***. Оскільки точка ***M*** належить еліпсу, то виконується рівність $\frac{25}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1$. Аналогічне рівняння отримуємо з того, що точка ***N*** належить еліпсу $\frac{50}{3a^2}+\frac{64}{3b^2}=1$.

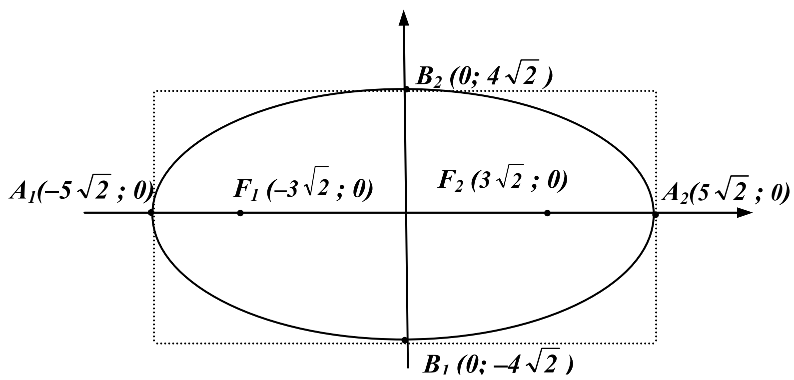
Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases}\frac{25}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1,\\ \frac{50}{3a^2}+\frac{64}{3b^2}=1,\end{cases}$ знайдемо величини ***a*** і ***b***. Отримуємо $a^2=50$; $b^2=32$.

Значить, рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{32}=1$. Звідси, $a=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$, $b=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$. Тоді координати вершин еліпса:

$A_1(-5\sqrt{2};0)$, $A_2(5\sqrt{2};0)$, $B_1(0;-4\sqrt{2})$, $B_2(0;4\sqrt{2})$.

Знайдемо величину с=$\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{50-32}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

Отже, фокуси мають координати: $F_1(-3\sqrt{2};0)$, $F_2(3\sqrt{2};0)$.



7. Знайти границі функцій: **а)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3+3x-2}{12x^3-3x+2}$; **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$; **д)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{3x-2}$.

Розв'язування.

а) Функція $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}$ в граничній точці x=1 не визначена, тому що при x=1 чисельник і знаменник дробу перетворюються в нуль, тобто маємо невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$. Розкладемо чисельник і знаменник на прості множники, знайшовши їх корені. Перетворимо дріб, розділивши чисельник і знаменник на вираз (x-1). Одержимо

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x-3)}{(x-1)\cdot(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x+2}=\frac{2+3}{x-1}=-\frac{2}{3}.$$

б) У цьому випадку теж одержимо невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$. Перетворення функції $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x-3}$ зводиться до знищення ірраціональності в чисельнику. Для цього помножимо чисельник і знаменник на спряжений вираз до чисельника, тобто на ($\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$), а потім скоротимо дріб на (x–3)

$$\lim_{x\to 3}=\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x})\cdot(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x})}{(x-3)\cdot(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x-2}\right)^2-(\sqrt{4-x})^2}{(x-3)\cdot(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x})}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2-4+x}{(x-3)\cdot(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{(x-3)(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x})}=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2}{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}}=\frac{2}{2}=1$$

в) У цьому випадку має місце невизначеність виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Розділимо чисельник і знаменник на найвищий степінь $\boldsymbol{x}$, тобто на $\boldsymbol{x}^3$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{16x^3+5x-3}{2x^3-3x+21}=\lim_{x\to\infty}\frac{16+\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{2-\frac{3}{x^2}+\frac{21}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(16+\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{21}{x^3}\right)}=$$

$$=\frac{16+\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x^2}\right)-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}}{2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{21}{x^3}}=\frac{16}{2}=8.$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2\cdot 1\cdot 1=2.$

Тут використано формулу: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$ — першої "визначної" границі.

д) у цьому прикладі маємо невизначеність виду $\left(1^\infty\right)$. Зробимо деякі перетворення функції при знаходженні границі

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{3x-2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}\right)^{3x}\cdot\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}\right)^{-2}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-2}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{3x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{-2}}=\frac{\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^3\cdot 1}{\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}\right)^3\cdot 1}=\frac{e^3}{\left(e^3\right)^3}=\frac{e^3}{e^9}=\frac{1}{e^6}.$$

При цьому використано формулу: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\approx 2{,}72$ — другої "визначної" границі.

8. Знайти похідні функції:

а) $y=\frac{4}{\sqrt[5]{x^2+3}}+e^{5x}$; **б)** $y=\left(\frac{tg5x}{x^2}\right)$; ***в)*** $y=\ln\sqrt[3]{\frac{x^3-5}{x^3+1}}$.

Розв'язування.

а) $y=\frac{4}{\sqrt[5]{x^2+3}}+e^{5x}$.

Використаємо правило диференціювання для суми двох диференційованих функцій, а пізніше знайдемо похідні складних функцій:

$$y'=\left(\frac{4}{\sqrt[5]{x^2+3}}+e^{5x}\right)'=\left(\frac{4}{\sqrt[5]{x^2+3}}\right)'+\left(e^{5x}\right)'=\left(4\left(x^2+3\right)^{-\frac{1}{5}}\right)'+$$

$$+e^{5x}\cdot(5x)'=4\left(-\frac{1}{5}\right)\left(x^2+3\right)^{-\frac{1}{5}-1}\left(x^2+3\right)'+e^{5x}\cdot 5=-\frac{4}{5}\left(x^2+3\right)^{-\frac{6}{5}}\cdot 2x+$$

$$+5e^{5x}=-\frac{8x}{5}\left(x^2+3\right)^{-\frac{6}{5}}+5e^{5x}.$$

б) $y=\left(\dfrac{tg5x}{x^2}\right)$. Скористаємося правилом диференціювання частки двох диференційованих функцій, а потім знаходимо похідні складних функцій:

$$y'=\left(\frac{tg5x}{x^2}\right)'=\frac{(tg5x)'\cdot x^2-\left(x^2\right)'\cdot tg5x}{\left(x^2\right)^2}=\frac{\frac{(5x)'}{cos^2 5x}\cdot x^2-2x\cdot tg5x}{x^4}=$$

$$=\frac{\frac{5x^2}{cos^2 5x}-2x\cdot tg5x}{x^4}=\frac{5x^2-2x\cdot tg5x\cdot cos^2 5x}{x^4\cdot cos^2 5x}=\frac{x\left(5x-2tg5x\cdot cos^2 5x\right)}{x^4\cdot cos^2 5x}=$$

$$=\frac{5x-2tg5x\cdot cos^2 5x}{x^3\cdot cos^2 5x}=\frac{5}{x^2 cos^2 5x}-\frac{2tg5x}{x^3}.$$

в) $y=ln\sqrt{\dfrac{x^3-5}{x^3+1}}$.

Задану функцію прологарифмуємо, а пізніше знаходимо, як похідну складної функції.

$$y'=\left(ln\sqrt[3]{\frac{x^3-5}{x^3+1}}\right)'=\left(ln\left(\frac{x^3-5}{x^3+1}\right)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}\left(ln(x^3-5)-ln(x^3+1)\right)'=$$

$$=\frac{1}{3}(ln(x^3-5))'-\frac{1}{3}\left(ln(x^3+1)\right)'=\frac{1}{3}\frac{(x^3-5)'}{x^3-5}-\frac{1}{3}\frac{(x^3+1)'}{x^3+1}=$$

$$=\frac{3x^2}{3(x^3-5)}-\frac{3x^2}{3(x^3+1)}=$$

$$=\frac{x^2}{x^3-5}-\frac{x^2}{x^3+1}=\frac{6x^2}{(x^3-5)(x^2+1)}.$$

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{30}x^2+8x+300$,

$p=40-\dfrac{1}{10}x$ — залежність між питомою ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати, за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, прибуток при цих умовах.

Розв'язування. Прибуток P визначається як різниця між доходами і сумарними витратами виробництва $P=D-V$.

В нас дохід - $D=p\cdot x=(40-\dfrac{1}{10}x)\cdot x=40x-\dfrac{1}{10}x^2$,

сумарні витрати - $V=\dfrac{1}{30}x^2+8x+300$,

прибуток - $P=40x-\dfrac{1}{10}x^2-\dfrac{1}{30}x^2-8x-300=-\dfrac{2}{15}x^2+32x-300.$

Знайдемо маржинальний прибуток — $P'=-4/15\cdot x+32$.

Максимальним прибуток буде тоді, коли $P'=0$, оскільки $P''=-4/15<0.$

При цьому $-4/15\cdot x+32=0$; $-4x+480=0$; $x=120$.

Отже, щоб прибуток був максимальним, треба випускати 120 од. продукції.

Маржинальні витрати - $V'(120)=\dfrac{1}{15}\cdot 120+8=16$,

сумарні витрати

$$V(120)=\frac{1}{30}\cdot 120^2+8\cdot 120+300=480+960+300=1740.$$

Максимальний прибуток

$$P(120)=-\frac{2}{15}\cdot 120^2+32\cdot 120-300=1620.$$

10. Знайти розміри відкритого басейну з квадратним дном об'ємом 32 м^3, за яких на облицювання його стін і дна пішла б найменша кількість матеріалу.

Розв'язування. Нехай дно басейну - квадрат $ABCD$ з стороною x, а висота басейну y. Площа дна басейну: $S_{ABCD}=x^2$. Об'єм басейну: $V=x^2\cdot y=32м^3$. Площа, яка необхідна для облицювання відкритого басейну $S=x^2+4xy.$ Оскільки $y=\dfrac{32}{x^2}$, то $S=x^2+4x\cdot\dfrac{32}{x^2}=x^2+\dfrac{128}{x}.$

Дослідимо функцію $S(x)$.

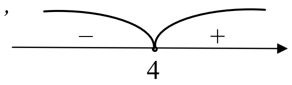
Знайдемо її похідну $S'(x)=2x-\frac{128}{x^2}=\frac{2x^3-128}{x^2}$.

Знаходимо критичні точки: $\frac{2x^3-128}{x^2}=0$, $x^2\neq 0$, $2x^3-128=0, x=4$.

Вияснимо, як поводить себе функція при переході через критичну точку

$x=4$.

Обчислимо: $S'(3)=\frac{2\cdot 27-128}{9}=-\frac{20}{9}<0$,



$S'(5)=\frac{2\cdot 125-128}{25}=\frac{122}{25}>0.$

Оскільки, похідна функції змінює знак з “-” на “+” при переході через цю критичну точку, то точка $x=4$ є точкою мінімуму.

При ширині дна квадратної форми ***4***м, площа облицювання відкритого басейну буде найменша.

Знайдемо висоту басейну $y=\frac{32}{16}=2.$

Отже, розміри відкритого басейну будуть такі: дно квадратної форми має сторону квадрата 4м, висота басейну 2м.

11. При відомій функції попиту $Q=Q(p)=7-p$ і пропозиції $S=S(p)=p+1$, де Q і S — кількість товару; p — ціна товару.

Знайти:

а) рівноважну ціну, тобто ціну, при якій попит і пропозиція врівноважуються;

б) еластичність попиту і пропозиції для рівноважної ціни;

в) зміну доходу при підвищенні ціни на 5% від рівноважної.

Розв'язування.

а) рівноважна ціна – ціна, при якій попит і пропозиція врівноважуються. Тому, рівноважна ціна визначається з рівняння $Q(p)=S(p);\ 7-p=p+1;$

$p=3$ *грн.*

б) знаходимо еластичність попиту і пропозиції за формулами:

$$E_p(Q)=\frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp},\ \ E_p(S)=\frac{p}{S}\frac{dS}{dp}.$$

В даному випадку

$$E_p(Q)=\frac{p}{7-p}\cdot(-1)=-\frac{p}{7-p};\ E_p(S)=\frac{p}{S}\cdot 1=\frac{p}{p+1}.$$

Для рівноважної ціни $p=3$ маємо $E_{p=3}(Q)=-0{,}75;\ E_{p=3}(S)=0{,}75.$

Знайдені значення еластичності за абсолютною величиною менші за ***1***, тоді і попит, і пропозиція даного товару при рівноважній ціні нееластичні

відносно ціни, тобто зміна ціни не призведе до різкої зміни попиту і пропозиції. Так, при підвищенні ціни на 1%, попит зменшиться на ***0,75%***, а пропозиція підвищиться на ***0,75%.***

б) при підвищенні ціни p на 5% від рівноважної, попит зменшиться на $5\cdot 0{,}75=3{,}75\%$, а дохід зросте на ***3,75%***.

12. Дослідити та побудувати ескіз графіка функції $y=\frac{x^2}{x-2}$.

Розв'язування.

1. Знаходимо область визначення функції: $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.
2. Знаходимо точки перетину прямої з осями координат.

Якщо $y=f(x)$ перетинає вісь Ox, то $y=0$. Якщо $y=0$, то $x=0$.

3. Досліджуємо функцію на парність.

$f(-x)=\frac{(-x)^2}{-x-2}=\frac{x^2}{-x-2}=-\frac{x^2}{x+2}$. Функція є ні парна, ні непарна.

4. Досліджуємо функцію на неперервність.

В т. $x=2$ функція має розрив (знаменник рівний нулю, функція невизначена).

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2}{x-2}=\infty$. Це є розрив II роду.

5. Знаходимо асимптоти кривої. Вертикальна асимптота $x=2$, тому що

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2}{x-2}=\infty$.

Похилу асимптоту шукаємо у вигляді $y=kx+b$, де $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$,

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{2}{x}}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x^2+2x}{x-2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1-\frac{2}{x}}=2.$$

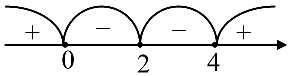
Отже, рівняння похилої асимптоти має вигляд: $y=x+2$.

6. Досліджуємо функцію на екстремум:

$$y'=\left(\frac{x^2}{x-2}\right)'=\frac{(x^2)'(x-2)-(x-2)'x^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

Критичні точки: $x=0, x=2, x=4$.

Зобразимо числову пряму і проміжки монотонності:

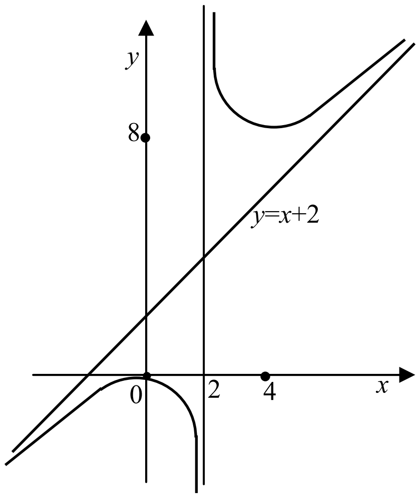


т. $x=0$ — точка максимуму, $f(0)=0$;

т. $x=4$ — точка мінімуму,

$$f(4)=\frac{16}{2}=8.$$

Зробимо малюнок.



13. Мале підприємство виробляє товари А і В. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару А та y одиниць товару В відомі: $V=320-14x-10y+0,2x^2+0,1y^2$. 1)Визначити кількість одиниць товарів А і В, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

Розв'язування. Загальна функція витрат відома: $V=320-14x-10y+0,2x^2+0,1y^2$. Щоб знайти кількість одиниць товарів x товару А і y товару В, необхідно дослідити цю функцію на екстремум.

Знайдемо частинні похідні І-го порядку $\begin{cases} V'_x=-14+0,4x, \\ V'_y=-10+0,2y. \end{cases}$

Прирівнюючи їх до нуля, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} -14+0,4x=0, \\ -10+0,2y=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=35, \\ y=50. \end{cases}$$

Знайдемо частинні похідні ІІ порядку:

$$A=V''_{xx}=0,4, \quad B=V''_{xy}=0, \quad C=V''_{yy}=0,2.$$

Обчислимо $D=AC-B^2=0,4\cdot 0,2-0=0,08>0$ і $A=0,4>0$

Отже, функція витрат при $x=35$, $y=50$ досягає мінімуму. Це означає, що для того, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними, необхідно виробити 35 одиниць товару A і 50 одиниць товару B.

14. Нехай виробнича функція визначається функцією Кобба-Дугласа. Щоб збільшити випуск продукції на 5%, треба збільшити фонди на 10% або чисельність робітників на 15%. В 2001 році один робітник за місяць виготовляв продукції на 2000 грн., а всього робітників було 1000. Основні фонди оцінювались в 4 млн. грн. Записати виробничу функцію, величину середньої фондовіддачі і середньої продуктивності праці, еластичність випуску по праці і по фондах.

Розв'язування. Еластичність випуску по праці $\beta=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$, а по фондах $\alpha=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$. Отже, функція Кобба-Дугласа має вигляд: $y=A\cdot K^{1/2}\cdot L^{1/3}$,

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}<1$. Підставляючи інші величини, одержимо:

$2000\cdot 1000=A\cdot(4\cdot 10^6)^{1/2}(1000)^{1/3}$, тобто

$$2000\cdot 1000=A\cdot 2\cdot 10^3\cdot 10; \quad A=\frac{2000\cdot 1000}{2000\cdot 10}=100.$$

Отже, шукана виробнича функція $y=100\cdot K^{1/2}\cdot L^{1/3}$. Середня фондовіддача дорівнює $k=\frac{y}{K}=\frac{2000\cdot 1000}{4000000}=\frac{1}{2}$, а середня продуктивність

$$l=\frac{y}{L}=\frac{2000\cdot 1000}{1000}=2000, \qquad E_L(y)=\beta=1/3, \; E_K(y)=\alpha=1/2.$$

15. Маючи ціну X(грн./од.)на товар і попит на цей товар Y (од.)

X	**200**	**205**	**210**	**220**	**225**	**250**	**260**	**275**
Y	**402**	**400**	**390**	**388**	**380**	**360**	**350**	**300**

Знайти емпіричну формулу цієї залежності.

Розв'язування. Вважаючи залежність лінійною, шукаємо її у вигляді $y=kx+b$, де k і b знаходяться з системи нормальних рівнянь

$$\begin{cases} (\sum x_i^2)k+(\sum x_i)b=\sum x_i y_i, \\ (\sum x_i)k \quad + \quad nb=\sum y_i. \end{cases}$$

Для обчислення потрібних сум побудуємо таблицю:

n_i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	**200**	**402**	**80400**	**40000**
2	**205**	**400**	**82000**	**42025**
3	**210**	**390**	**81900**	**44100**
4	**220**	**388**	**85360**	**48400**
5	**225**	**380**	**85500**	**50625**
6	**250**	**360**	**90000**	**62500**
7	**260**	**350**	**91000**	**67600**
8	**275**	**300**	**82500**	**75625**
$\sum$	**1845**	**2970**	**678660**	**430875**

Підставивши одержані суми в систему нормальних рівнянь, одержимо:

$$\begin{cases} 430875k + 1845b = 678660, \\ \quad 1845k + 8b = 2970. \end{cases}$$

Звідси $k = \dfrac{\begin{vmatrix} 678660 & 1845 \\ 2970 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 430875 & 1845 \\ 1845 & 8 \end{vmatrix}} = \dfrac{678660 \cdot 8 - 2970 \cdot 1845}{430875 - (1845)^2} = -1{,}172$

$8b = 2970 - 1845k;$

$$b = \frac{2970 - 1845k}{8} = \frac{2970 - 1845 \cdot (-1{,}172)}{8} = 641{,}54.$$

Отже, дана залежність виражається формулою $y = -1{,}172x + 645{,}54$.

16. Знайти невизначені інтеграли: **а)** $\int x^2(2x^3+4)dx$,

б) $\int \frac{x^3}{3x^4-2}dx$, **в)** $\int x\sin 3x dx$, **г)** $\int e^{3x}\sin x dx$, **д)** $\int \frac{x^3-1}{x^2-x-2}dx$,

е) $\int \frac{x^2+2x-3}{x^2(x^2+2)}dx$, **є)** $\int \cos^3 x \sin^4 x dx$, **ж)** $\int \frac{dx}{1+\sin x-\cos x}$.

Розв'язування.

а) $\int x^2(2x^3+4)dx$.

Зробимо підстановку: $2x^3+4=t$.

Продиференціюємо: $6x^2dx = dt,\ x^2dx = \frac{dt}{6}$. Тому

$$\int x^2(2x^3+4)dx = \int t\frac{dt}{6} = \frac{1}{6}\frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{12}(2x^3+4)^2 + C$$

б) $\int \frac{x^3}{3x^4-2}dx = \frac{1}{12}\int \frac{12x^3}{3x^4-2}dx = \frac{1}{12}\int \frac{d(3x^4-2)}{3x^4-2}dx = \frac{1}{12}\ln\left|3x^4-2\right| + C.$

в) $\int x\sin 3x dx$.

Застосовуємо метод інтегрування за частинами: $\int udv = uv - \int vdu$.

Вибираємо: $u=x,\ dv=\sin 3x dx$. Тоді $du=dx,\ v=-\frac{1}{3}\cos 3x$.

Тобто:

$$\int x\sin 3x dx = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x dx = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C .$$

г) $\int e^{3x}\sin x dx.$

Знову інтегруємо методом інтегрування за частинами.

Підінтегральний вираз є добутком показникової функції на тригонометричну. Виберемо $u=e^{3x}$, а $dv=\sin x dx$. Тоді $du=3e^{3x}dx$, $v=-\cos x.$ Застосуємо двічі цю формулу. Два рази за u беремо e^{3x} . Одержуємо $\int e^{3x}\sin x dx = -e^{3x}\cos x + 3e^{3x}\sin x - 9\int e^{3x}\sin x dx$.

Знаходимо шуканий інтеграл:

$$10\int e^{3x}\sin x dx = -e^{3x}\cos x + 3e^{3x}\sin x,$$

$$\int e^{3x}\sin x dx = \frac{-e^{3x}\cos x + 3e^{3x}\sin x}{10} + C.$$

г) $\int \frac{x^3+3x^2+3x-16}{x^2+x-6}dx$.

Підінтегральний раціональний дріб неправильний.

Виділяємо цілу частину:

$$\begin{array}{l|l} x^3+3x^2+3x-16 & x^2+x-6 \\ \hline -\;x^3+x^2-6x & x+2+\dfrac{7x-4}{x^2+x-6} \\ \hline \quad 2x^2+9x-16 & \\ -\;2x^2+2x-12 & \\ \hline \quad\quad 7x-4 & \end{array}$$

Ділення многочлена на многочлен. Виділення цілої і дробової частин неправильного раціонального

$$\int \frac{x^3+3x^2+3x-16}{x^2+x-6}dx = \int (x+2)dx + \int \frac{7x-4}{(x-2)(x+3)}dx .$$

Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, розкладаємо дріб на суму простих: $\dfrac{7x-4}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x+3}$;

$7x-4=Ax+3A+Bx-2B;\quad 7x-4=(A+B)x+(3A-2B)$;

$\begin{cases}A+B=7,\\ 3A-2B=-4.\end{cases}$ $\begin{cases}A=7-B,\\ -5B=-25.\end{cases}$ $B=5;\ A=2.$ Одержимо:

$$\int\frac{7x-4}{(x-2)(x+3)}dx=\int\frac{2}{x-2}dx+\int\frac{5}{x+3}dx=2\ln|x-2|+5\ln|x+3|+C.$$

Тобто $\int\dfrac{x^3+3x^2+3x-16}{x^2+x-6}dx=\dfrac{x^2}{2}+2x+2\ln|x-2|+5\ln|x+3|+C$.

е) $\int\dfrac{x^2+2x-3}{x^2(x^2+2)}dx.$

Розкладемо підінтегральну функцію, яка є правильним раціональним дробом, на суму найпростіших дробів за допомогою неозначених коефіцієнтів

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2(x^2+2)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+2}=\frac{A(x^2+2)+Bx(x^2+2)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+2)}=$$

$$=\frac{Ax^2+2A+Bx^3+2Bx+Cx^3+Dx^2}{x^2(x^2+2)}=\frac{x^3(B+C)+x^2(A+D)+2Bx+2A}{x^2(x^2+2)}.$$

Звідси, $x^2+2x-3=x^3(B+C)+x^2(A+D)+2Bx+2A.$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{cases}B+C=0,\\ A+D=1,\\ 2B=2,\\ 2A=-3;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\frac{3}{2},\\ B=1,\\ C=-1,\\ D=\frac{5}{2}.\end{cases}.$$

Тоді $\int\dfrac{x^2+2x-3}{x^2(x^2+2)}dx=\int\Big(-\dfrac{3}{2x^2}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{-x+\frac{5}{2}}{x^2+2}\Big)dx=$

$$-\frac{3}{2}\int x^{-2}dx+\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{2x-5}{x^2+2}dx=\frac{3}{2x}+\ln|x|-\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+2}+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{x^2+2}=$$

$$=\frac{3}{2x}+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+2|+\frac{5}{2\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

є) $\int\cos^3x\sin^4xdx$.

Враховуємо, що $cos^3x=cos^2xcosx$, та $cosxdx=dsinx$. Тоді

$$\int\cos^3x\sin^4xdx=\int\cos^2x\sin^4x\cos xdx=\int\cos^2x\sin^4xd\sin x=$$

$$=\int(1-\sin^2x)\sin^4xd\sin x=\int\sin^4xd\sin x-\int\sin^6xd\sin x=$$

$$=\frac{\sin^5x}{5}-\frac{\sin^7x}{7}+C.$$

ж) $\int\dfrac{dx}{1+\sin x-\cos x}$.

За допомогою універсальної підстановки $tg\dfrac{x}{2}=t$, даний інтеграл зводимо до інтегралу від раціонального дробу. Використавши формули

$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2};\quad \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2};\qquad dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$, отримаємо:

$$\int\frac{dx}{1+\sin x-\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{2t^2+2t}=\int\frac{dt}{t^2+t}=\int\frac{dt}{t(t+1)}.$$

Одержимо інтеграл від правильного дробу. Розкладемо підінтегральну функцію на прості дроби: $\dfrac{1}{t(t+1)}=\dfrac{A}{t}+\dfrac{B}{t+1}=\dfrac{A(t+1)+Bt}{t(t+1)}=\dfrac{t(A+B)+A}{t(t+1)}$.

Звідси: $t(A+B)+A=1$. Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях t і складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}A+B=0,\\ A=1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=-1,\\ A=1.\end{cases}$$

Тоді,

$$\int\frac{dx}{1+\sin x-\cos x}=\int\frac{dt}{t(t+1)}=\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{t+1}=\ln|t|-\ln|t+1|+C=$$

$$\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|-\ln\left|tg\frac{x}{2}+1\right|+C=\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}}{tg\frac{x}{2}+1}\right|+C.$$

17. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^4\dfrac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

Розв'язування. Зробимо підстановку $\sqrt{2x+1}=t;\quad x=\dfrac{t^2-1}{2}$.

Продиференціюємо цю рівність $dx = tdt$.

Встановимо нові межі інтегрування.

x	0	4
t	1	3

При $x = 0, t = \sqrt{2 \cdot 0 + 1} = 1$, при $x = 4, t = \sqrt{2 \cdot 4 + 1} = 3$. Тоді

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}} = \int_1^3 \frac{tdt}{1+t} = \int_1^3 \frac{1+t-1}{1+t}dt = \int_1^3 (1-\frac{1}{1+t})dt = \int_1^3 dt - \int_1^3 \frac{dt}{1+t} =$$

$$= t\Big|_1^3 - \ln|1+t|\Big|_1^3 = (3-1)-(\ln 4 - \ln 2) = 2 - \ln 2.$$

18. Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = \frac{2}{x}$, $y = -x^2 + 4x + 1$.

Розв'язування. Для знаходження меж інтегрування знайдемо точки перетину ліній, розв'язавши систему рівнянь .

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{x} \\ y = -x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \; -x^2 + 4x + 1 = \frac{2}{x} \;\Leftrightarrow\; -x^3 + 2x^2 + x = 2 \;\Leftrightarrow$$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2(x-2) - (x-2) = 0 \;\Leftrightarrow$$

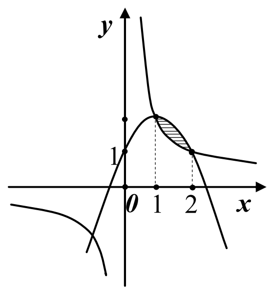
$$(x-2)(x^2-1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 2;\; x_2 = -1;\; x_3 = 1.$$

Отже, площа фігури, яку треба знайти, обмежена заданими кривими, що перетинаються у точках з абсцисами $x = 1$, $x = 2$.

$$S = \int_1^2 \left[(-x^2 + 2x + 1 - \frac{2}{x}\right]dx =$$

$$\left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + x - 2\ln|x|\right)\Big|_1^2 = \quad .$$

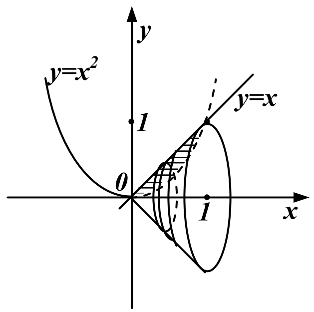
$$= 4 - \frac{7}{3} - 2\ln 2 = 1\frac{2}{3} - 2\ln 2 \quad \text{(кв. од.)}$$



19. Обчислити об'єм тіла обертання утвореного обертанням навколо осі **Ох** фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = x$.

Розв'язування. Щоб знайти межі інтегрування розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow\; x^2 = x \;\Leftrightarrow\; x(x-1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 - 0,\; x_2 = 1.$$



Об'єм тіла обертання знаходиться за формулою

$$V = \pi\int_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right]dx.$$

Отже, на основі цього маємо

$$V = \pi\int_0^1 \left(x^2 - x^4\right)dx = \pi\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{15}\pi \quad \text{(куб. од.).}$$

20. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами:

$$V'(t) = 6 + 4\sqrt[4]{t^3},\; D'(t) = 13 - 3\sqrt[4]{t^3}.$$

V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t — у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

Розв'язування. Оптимальний час t_1 для прибутку підприємства одержимо з умови $D'(t) = V'(t)$: $6 + 4\sqrt[3]{t^2} = 13 - 3\sqrt[3]{t^2}$, $7\sqrt[4]{t^3} = 7$, $\sqrt[4]{t^3} = 1$, $t_1 = 1$

Отже, підприємство було прибутковим 1 рік. За цей час одержано прибутку:

$$P = \int_0^1 [D'(t) - V'(t)]dt = \int_0^1 \left(13 - 3\sqrt[4]{t^3} - 6 - 4\sqrt[4]{t^3}\right)dt = \int_0^1 \left(7 - 7t^{3/4}\right)dt =$$

$$= \left(7t - 7\cdot\frac{t^{7/4}}{7/4}\right)\Bigg|_0^1 = 7 - 4 = 3\,(\text{млн. грн.}).$$

21. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціальних рівнянь та розв'язати задачу Коші для тих рівнянь, де вказані початкові умови.

а) $xydy - (y^2 + 1)dx = 0$, **б)** $y' + \cos^2\frac{y}{x} = \frac{y}{x}$; $y = \frac{\pi}{4}$ при $x = 1$,

в) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, **г)** $y'' - 4y' + 3y = 0$, **д)** $y'' + 6y' + 9y = 0$,

е) $y'' + 2y' + 5y = 2x \cdot e^{2ч}$, **є)** $y'' - 7y' + 6y = \sin x$, **ж)** $y'' - 3y' = x^2 + 1$.

Розв'язування.

а) $xydy - (y^2 + 1)dx = 0$. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Розділимо змінні, поділивши обидві частини рівняння на $x(y^2 + 1)$.

Одержимо $\frac{ydy}{y^2+1}=\frac{dx}{x}$. Проінтегруємо одержане рівняння $\int\frac{ydy}{y^2+1}=\int\frac{dx}{x}$; $\frac{1}{2}\int\frac{d(y^2+1)}{y^2+1}=\int\frac{dx}{x}$, $\frac{1}{2}ln(y^2+1)=ln|x|+ln\,c$.

Сталу записали у вигляді $ln\,c$ для зручності спрощень. Далі маємо $ln(y^2+1)^{\frac{1}{2}}=ln\,cx$; $\sqrt{y^2+1}=cx$; $y^2+1=c^2x^2$. Одержали загальний інтеграл рівняння.

б) $y'+cos^2\frac{y}{x}=\frac{y}{x}$; $y=\frac{\pi}{4}$ при $x=1$. Дане дифрівняння однорідне, оскільки $y'=\frac{y}{x}-cos^2\frac{y}{x}$ є функція від $\frac{y}{x}$. Використаємо заміну $y=ux$. Тоді $y'=u'x+u$. Підставивши в дане рівняння, маємо $u'x+u=u-cos^2u$; $\frac{du}{dx}x=-cos^2u$. Розділивши змінні, одержимо $-\frac{du}{cos^2u}=\frac{dx}{x}$.

Проінтегрувавши, дістанемо $-\int\frac{du}{cos^2u}=\int\frac{dx}{x}$; $-tgu=ln|x|+ln\,C$; $-tg\frac{y}{x}=ln\,Cx$ або $Cx=e^{-tg\frac{y}{x}}$. Це загальний інтеграл даного рівняння.

Підставивши початкові умови, знайдемо C: $C=e^{-tg\frac{\pi}{4}}=e^{-1}$.

При такому C маємо розв'язок задачі Коші, що задовольняє даній умові: $xe^{-1}=e^{-tg\frac{y}{x}}$ або $x=e^{1-tg\frac{y}{x}}$.

в) $y'+2xy=xe^{-x^2}$. Розв'яжемо це рівняння методом Бернуллі. Це є лінійне неоднорідне рівняння першого порядку.

Робимо заміну $y=uv$, (1) $\frac{dy}{dx}=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}$; $v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}+2xuv=xe^{-x^2}$;

$$v\left[\frac{du}{dx}+2xu\right]+u\frac{dv}{dx}=xe^{-x^2} \qquad (2).$$

Прирівнюємо до нуля вираз в дужках $\frac{du}{dx}+2xu=0$;

Розв'язуємо диференціальне рівняння: $\frac{du}{dx}=-2xu$; $\frac{du}{u}=-2xdx$;

$$\int\frac{du}{u}=-\int 2xdx,\ ln\,u=-x^2;\ u=e^{-x^2}; \qquad (3)$$

Розв'язок підставимо в рівняння (2): $e^{-x^2}\frac{dv}{dx}=xe^{-x^2}$.

Розв'язуємо одержане рівняння: $dv=xdx$; $v=\int xdx$, $v=\frac{x^2}{2}+C$ **(4)**.

Підставивши (3) і (4) в (1), одержимо загальний розв'язок рівняння: $y=(\frac{x^2}{2}+C)e^{-x^2}$.

г) $y''-4y'+3y=0$. Складаємо характеристичне рівняння

$k^2-4k+3=0,\ D=16-12=4,\ k_1=\frac{4-2}{2}=1, k_2=\frac{4+2}{2}=3$,

Корені дійсні різні.

Частинні незалежні розв'язки $y=e^x$ і $y=e^{3x}$.

Загальний розв'язок $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$.

д) $y''+6y'+9y=0$.

Характеристичне рівняння: $k^2+6k+9=0, D=36-36=0, k=-3.$

Рівняння має кратний корінь.

Незалежні частинні розв'язки - $y=e^{-3x}$ і $y=xe^{-3x}$

Загальний розв'язок даного рівняння $y=(C_1+C_2x)e^{-3x}$.

Для знаходження частинного розв'язку знайдемо похідну $y'=(C_1+C_2x)\cdot(-3)e^{-3x}+C_2e^{-3x}$.

Підставивши початкові умови, знайдемо C_1, C_2:

$$\begin{cases} 2=(C_1+C_2\cdot 0)e^{-3\cdot 0}, \\ -1=-3(C_1+C_2\cdot 0)e^{-3\cdot 0}+C_2\cdot e^{-3\cdot 0}; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1=2, \\ C_2=5. \end{cases}$$

Підставляємо знайдені значення C_1, C_2 в загальний розв'язок рівняння: $y=(2+5x)e^{-3x}$ - це є шуканий розв'язок задачі Коші.

е) $y''+2y'+5y=2x\cdot e^{2x}$.

1. Шукаємо $y_{з.о.}$, який є загальним розв'язком однорідного рівняння $y''+2y'+5y=0.$

Характеристичне рівняння: $k^2+2k+5=0,\ D=4-20=-16$

Корені комплексно спряжені: $k_1 = \dfrac{-2-\sqrt{-16}}{2} = \dfrac{-2-4\sqrt{-1}}{2} = -1-2i;$

$k_2 = \dfrac{-2+\sqrt{-16}}{2} = -1+2i.$

Частинні незалежні дійсні розв'язки: $y = e^{-x}\sin 2x$ і $y = e^{-x}\cos 2x$.

Загальний розв'язок: $y_{з.о.} = e^{-x}(C_1\sin 2x + C_2\cos 2x)$.

2. Шукаємо $y_{ч.н.}$, який є частковим розв'язком неоднорідного рівняння $y''+2y'+5y = 2x\cdot e^{2x}$ у вигляді $y_{ч.н.} = (Ax+B)e^{2x}$.
Разом з першою похідною
$y'_{ч.н.} = (Ax+B)\cdot 2e^{2x} + Ae^{2x} = (2Ax+2B+A)e^{2x}$ і другою похідною $y''_{ч.н.} = (2Ax+2B+A)\cdot 2e^{2x} + 2Ae^{2x} = (4Ax+4B+4A)e^{2x}$ підставимо їх значення в задане неоднорідне рівняння

$$(4Ax+4B+4A)e^{2x} + +2(2Ax+2B+A)e^{2x} + 5(Ax+B)e^{2x} = 2xe^{2x}.$$

Оскільки $e^{2x} \neq 0,$ то скоротивши, отримаємо
$(4Ax+4B+4A)+2(2Ax+2B+A)+5(Ax+B) = 2x,$ і згрупувавши коефіцієнти біля степенів x, отримаємо $13Ax+6A+13B = 2x$.

Прирівнявши коефіцієнти біля однакових степенів x, маємо систему:

$$\begin{cases} 13A = 2, \\ 6A+13B = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} A = 2/13, \\ B = -12/169. \end{cases}$$

Частковий розв'язок $y_{ч.н.} = (\dfrac{2}{13}x - \dfrac{12}{169})e^{2x}$, тоді загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння такий:

$$y = y_{з.о.} + y_{ч.н.} = e^{-x}(C_1\sin 2x + C_2\cos 2x) + \left(\frac{2}{13}x - \frac{12}{169}\right)e^{2x}.$$

є) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

1. Шукаємо $y_{з.о.}$, який є загальним розв'язком однорідного рівняння $y''-7y'+6y = 0.$

Характеристичне рівняння - $k^2 - 7k + 6 = 0,\ \ D = 49 - 4\cdot 6 = 25$,

$k_1 = \dfrac{7-\sqrt{25}}{2} = \dfrac{7-5}{2} = 1,\ \ k_2 = \dfrac{7+\sqrt{25}}{2} = \dfrac{7+5}{2} = 6.$

Частинні незалежні розв'язки: $y = C_1e^{x}$ і $y = C_2e^{6x}$.

Загальний розв'язок: $y_{з.о.} = C_1e^{x} + C_2\ e^{6x}$.

2. Шукаємо $y_{ч.н.}$, який є частковим розв'язком неоднорідного рівняння $y''-7y'+6y = \sin x$ у вигляді $y_{ч.н.} = A\cos x + B\sin x$. Разом з першою похідною $y'_{ч.н.} = -A\sin x + B\cos x$ і другою похідною $y''_{ч.н.} = -A\cos x - B\sin x$ підставимо їх значення в задане неоднорідне рівняння

$-A\cos x - B\sin x - 7(-A\sin x + B\cos x) + 6(A\cos x + B\sin x) = \sin x$ або

$5A\cos x + 5B\sin x + 7A\sin x - 7B\cos x = \sin x$. Згрупувавши коефіцієнти біля $\sin x$ і $\cos x$, отримаємо систему:

$$\begin{cases} 5A - 7B = 0, \\ 7A + 5B = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} A = 7/74, \\ B = 5/74. \end{cases}$$

Отже, частковий розв'язок $y_{ч.н.} = \dfrac{7}{24}\cos x + \dfrac{5}{74}\sin x$, тоді загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння такий:

$$y = y_{з.о.} + y_{ч.н.} = C_1e^{x} + C_2\ e^{6x} + \frac{7}{74}\cos x + \frac{5}{74}\sin x\ .$$

ж) $y''-3y' = x^2 + 1$.

1. Шукаємо $y_{з.о.}$, який є загальним розв'язком однорідного рівняння $y''-3y' = 0.$

Характеристичне рівняння - $k^2 - 3k = 0$, $k_1 = 0, k_2 = 3.$

Частинні незалежні дійсні розв'язки: $y = C_1e^{0\cdot x} = C_1$ і $y = C_2e^{3x}$.

Загальний розв'язок - $y_{з.о.} = C_1\ {}^{x} + C_2\ e^{3x}$.

2. Шукаємо $y_{ч.н.}$, який є частковим розв'язком неоднорідного рівняння $y''-3y' = x^2 + 1$ у вигляді
$y_{ч.н.} = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$,оскільки $k_1 = 0$ є простим коренем характеристичного рівняння. Разом з першою похідною $y'_{ч.н.} = 3Ax^2 + 2Bx + C$ і другою похідною $y''_{ч.н.} = 6Ax + 2B$ підставимо їх значення в задане неоднорідне рівняння

$6Ax + 2B - 6Ax^2 - 4Bx - 2C = x^2 + 1$ або

$-6Ax^2 + (6A - 4B)x + 2B - 2C - 2C = x^2 + 1$. Згрупувавши коефіцієнти біля степенів x, отримаємо систему:

$$\begin{cases} -6A = 1, \\ 6A - 4B = 0, \\ 2B - 2C = 1; \end{cases} \begin{cases} A = -\frac{1}{6}, \\ B = -\frac{1}{4}, \\ C = -\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Отже, частковий розв'язок $y_{ч.н.} = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x$, тоді, загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння такий:

$$y = y_{з.о.} + y_{ч.н.} = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x.$$

22. Дослідити на збіжність ряди:

а) за ознакою Даламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$;

б) за ознакою Коші ряди 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+2}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+2}}$;

в) за ознакою порівняння ряди 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n+3)\ 5^{3n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3\sqrt{n}}$;

г) на умовну та абсолютну збіжність 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^n}{(n+1)3^n}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$.

Розв'язування.

а) застосуємо ознаку Даламбера до ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$. В нас

$$u_n = \frac{1}{n2^n},\ u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}.$$

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Оскільки $l\langle 1$, то даний ряд збіжний.

б) застосуємо інтегральну ознаку Коші до рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+2}}$. Обчислимо інтеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+2}}dx = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_1^{A}\frac{3x}{\sqrt{x^2+2}}dx =$

{ заміна: $x^2+2 = t;\ dt = 2x\,dx$ }

$$= \lim_{A\to\infty}\int\limits_3^{A^2+2}\frac{3/2}{\sqrt{t}}dt = \lim_{A\to\infty}\frac{3}{2}\int\limits_3^{A^2+2}\frac{1}{\sqrt{t}}dt = \frac{3}{2}\lim_{A\to\infty}2\sqrt{t}\,\Big|_3^{A^2+2} = 3\lim_{A\to\infty}(2\sqrt{A^2+2}-\sqrt{3}) = \infty.$$

Інтеграл розбіжний, значить даний ряд теж розбіжний.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+2}}$.

Обчислимо інтеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{x+2}}dx = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_1^{A}\frac{1}{x\sqrt{x+2}}dx =$

{ заміна: $x+2 = t^2;\ dx = 2t\,dt; t = \sqrt{x+2}; t(1) = \sqrt{3}; t(A) = \sqrt{A+2}$ }

$$= \lim_{A\to\infty}\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{A+2}}\frac{2t\,dt}{(t^2-2)t} = 2\lim_{A\to\infty}\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{A+2}}\frac{dt}{(t^2-2)} = 2\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|\right)\Bigg|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{A+2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{A\to\infty}\left(ln\left|\frac{\sqrt{A+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{A+2}+\sqrt{2}}\right| - ln\left|\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right|\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{A\to\infty}\left(ln\left|\frac{\sqrt{1+2/A}-\sqrt{2}/\sqrt{A}}{\sqrt{1+2/A}+\sqrt{2}/\sqrt{A}}\right|\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}ln\left|\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}ln\frac{\sqrt{1+0}-0}{\sqrt{1+0}+0} + \frac{1}{\sqrt{2}}ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right| = \sqrt{2}\,ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$$

Інтеграл збіжний, отже, і ряд теж збіжний.

в) для рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n+3)\ 5^{3n}}$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3\sqrt{n}}$ використаємо ознаку порівняння:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n+3)\ 5^{3n}}$. Оскільки для всіх $n \ge 1$: $\frac{n+2}{n+3} < 1$, то $\frac{n+2}{(n+3)\ 5^{3n}} < \frac{1}{5^{3n}} = \frac{1}{125^n}$, при $n \ge 1$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{125^n}$ є збіжний тому, що це є ряд геометричної прогресії зі знаменником $q = \frac{1}{125} < 1$. Тоді за ознакою порівняння збіжний і даний ряд.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3\sqrt{n}}$. Оскільки для всіх $n\geq 1$: $\sqrt{n}\leq n$, то $\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\frac{1}{n}$. Гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбіжний (за інтегральною ознакою Коші), і отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ - теж розбіжний. А даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3\sqrt{n}}=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ також розбіжний.

1) Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2^n}{(n+1)3^n}$ знакопереміжний. За ознакою Даламбера дослідимо ряд, складений з абсолютних величин. Визначаємо:

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+2)3^{n+1}}}{\frac{2^n}{(n+1)3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2^n(n+1)3^n}{3\cdot 3^n(n+2)2^n}=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=\frac{2}{3}<1$$

Значить, даний ряд збіжний. Отже, заданий знакопереміжний ряд є абсолютно збіжним.

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$.

За інтегральною ознакою Коші дослідимо ряд, складений з абсолютних величин. Обчислимо інтеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}=\lim_{A\to\infty}\int_1^A(x+1)^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{2}\lim_{x\to\infty}(x+1)^{\frac{2}{3}}\Big|_1^A=\frac{3}{2}\lim_{A\to\infty}((A+1)^{\frac{2}{3}}-(1+1)^{\frac{2}{3}})=\infty.$$

Отже, даний ряд розбіжний.

Заданий знакопереміжний ряд дослідимо за ознакою Лейбніца:.

1) $1>\frac{1}{\sqrt[3]{2}}>\frac{1}{\sqrt[3]{3}}>\frac{1}{\sqrt[3]{4}}>\ldots$ — члени ряду за абсолютною величиною утворюють спадну числову послідовність;

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}=0$.

Значить, заданий знакопереміжний ряд є умовно збіжний..

23. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду $\sum\frac{x^n}{2^n\sqrt{n}}$ і дослідити збіжність на кінцях інтервалу.

Розв'язування. В даному випадку $a_n=\frac{1}{2^n\sqrt{n}}$, $a_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{n+1}}$.

Знаходимо радіус збіжності ряду

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^n\sqrt{n}}:\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{n+1}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\sqrt{n+1}}{2^n\sqrt{n}}=2\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}=2\sqrt{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})}=2.$$

В інтервалі $(-2;2)$ ряд збігається абсолютно.

Дослідимо збіжність степеневого ряду в точці $x=2$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ дослідимо за ознакою Коші.

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{A\to\infty}\int_1^A\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\lim_{A\to\infty}(\sqrt{x})\Big|_1^A=2\lim_{A\to\infty}(\sqrt{A}-1)=\infty.$$

Значить, даний ряд розбіжний.

При $x=-2$ одержимо знакопереміжний ряд

$-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\ldots;$ який дослідимо за ознакою Лейбніца:

1). $1>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{4}}>\ldots$ — спадна числова послідовність;

2). $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$.

Отже, за ознакою Лейбніца даний знакозмінний ряд збігається.

Таким чином, степеневий ряд збігається в півінтервалі $[-2;2)$; на лівому кінці збігається умовно, а на правому розбігається.

ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ РОБІТ.

Індивідуальна розрахункова робота №1 має на меті закріпити засвоєння студентами таких розділів курсу “Вищої математики”

- ЛІНІЙНА АЛГЕБРА
- АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
- ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ
- ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання складається з 50 варіантів по дванадцять задач.

При розв’язуванні задач врахувати, що параметр *k* задається викладачем.

Умова до першої задачі така. Обчислити визначник двома способами: а) за допомогою елементарних перетворень;

б) розклавши за елементами рядка (стовпця).

В другій задачі систему необхідно розв’язати трьома методами: за правилом Крамера, методом Гаусса, матричним способом.

В третій задачі система розв’язується методом Жордана-Гаусса.

Умова до п’ятої задачі така:

Задані координати вершин A, B, C трикутника ABC. Знайти: а) рівняння висоти AD; б) довжину висоти AD; в) рівняння медіани CE;
г) значення кута B; д) площу трикутника ABC. Зробити малюнок.

Умова одинадцятої задачі така:

Відомі функції попиту $Q = Q(p)$ і пропозиції $S = S(p)$, де Q і S — кількість товару; p — ціна товару.

Знайти:

1) рівноважну ціну, тобто ціну, при якій попит і пропозиція врівноважуються;
2) еластичність попиту і пропозиції для рівноважної ціни;
3) зміну доходу при підвищенні ціни на 7% від рівноважної.

$Q(p) = \dfrac{Np+k}{Np-k}$, $S(p) = Np + 2k$, де N— номер варіанту,

Рекомендується виконувати завдання після проходження відповідних тем на практичних заняттях.

Індивідуальна робота №2 охоплює такі розділи курсу вищої математики
- ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ
- ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ
- ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ
- РЯДИ.

Завдання складається з 50 варіантів однотипних завдань.

При розв’язуванні задач врахувати, що параметр *k* задається викладачем.

До задач з економічним змістом є пояснення в зразках розв’язування задач. Студент може користуватися вказаною літературою, звертатися за консультацією до викладача.

Умова до другої задачі така:
Нехай виробнича функція визначається функцією Кобба-Дугласа.

З метою збільшення випуску продукції на $a = \dfrac{N}{2}\%$, необхідно збільшити фонди на $b = N\%$ або чисельність працівників на $c = \dfrac{3N}{2}\%$.

В 2002 році один працівник протягом місяця виготовляв продукції на $M = 3000\,грн$, а всього робітників $L = 125 \cdot k$. Основні фонди оцінюються в $K = 5\,млн.грн.$ Записати виробничу функцію y, величину середньої фондовіддачі і середньої продуктивності праці, еластичність випуску по праці $E_L(y)$ і по фондах $E_K(y)$.

Умова третьої задачі така:
Маючи ціну X (грн../од.) на товар і попит на цей товар Y (од.)

X	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
Y	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8

знайти емпіричну формулу цієї залежності.

Умова до восьмої задачі така:
Дослідити на збіжність ряди:
а) за ознакою Даламбера;
б) за інтегральною ознакою Коші;
в) за ознакою порівняння;
г) на умовну та абсолютну.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ №1

ВАРІАНТ №1

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} 1 & k+1 & k+2 & 1 \\ 2 & -4 & -6 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -k-1 & -k-2 & k+3 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} 2x_1+(k+1)x_2+x_3=3, \\ 2x_1-kx_2-x_3=0, \\ x_1+x_2-3x_3=-5. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат на одиницю продукції наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	70	1	3	2	k
S_2	70	2	1	2	3
S_3	80	2	2	1	2

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: $8+k$ шт.; 0 шт.; 5 шт.; 14 шт.; друга – 5; $4+k$; 3; 50; третя – 2; 0; $2+k$; 80. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: 7 грн., 3 грн., 2 грн., $2,1$ грн., в B_2 – 3; $0,4$; $2,3$; $1,3$; в B_3 – 3; 7; $3,5$; 7. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. $A(k+3;\ k+1)$, $B(k+7;\ k+2)$, $C(k+4;\ k+4)$.

6. Побудувати коло $2x^2+2y^2-8x+5y-4=0$.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{x^2+(1-k)x-k}{x^2-x(k+3)+3k}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{\sqrt{x-k+3}-2}{\sqrt{x-k+15}-4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+1)x^2+kx}{3x^2-(k-2)x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,3x}{\sin 2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^x$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=(x^4-2kx^2+3)^{k+1}$; б) $y=\ln\sqrt{1-\sin\dfrac{x}{k+1}}$; в) $y=x\arccos\dfrac{x}{2k}$; г) $y=arctg\left(e^{kx}\right)+arcctg\left(e^{-kx}\right)$; д) $y=\left(\dfrac{k-2x}{3kx}\right)^2$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{15}x^2+13x+400$, а $p=44-\dfrac{1}{16}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Довести, що з усіх прямокутних брусків, які можна випиляти із деревини, найбільший об'єм має брус квадратного перерізу.

11. $Q(p)=\dfrac{p+k}{p-k}$, $S(p)=p+2k$.

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y=\dfrac{x}{x^2-4}$.

ВАРІАНТ №2.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & k \\ k+1 & k+2 & k+3 & k-1 \\ 3 & 1 & k+4 & k-1 \\ -1 & 0 & -3 & k+3 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} (k-2)x_1+2x_2+x_3=3, \\ (k+1)x_1+x_2-x_3=3, \\ x_1+3x_2-4x_3=10. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат на одиницю продукції наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	***95***	***2***	***3***	***2***	***3***
S_2	***110***	***1***	***4***	***3***	***k***
S_3	***110***	***3***	***3***	***2***	***4***

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4,, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: ***6+k*** шт.; ***8*** шт.; ***8*** шт.; ***2*** шт.; друга – ***9***; ***3+k***; ***8***; ***21***; третя – ***12***; ***6***; ***28***; ***23+k***. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: ***4*** грн., ***8*** грн., ***26*** грн., ***2,7*** грн., в B_2 – ***7***; ***0,5***; ***2,4***; ***5,3***; в B_3 – ***9***; ***4***; ***2,6***; ***6***. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. ***A(k; k+1), B(k+3; k+2), C(k+3;k+4).***

6. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точки

M(-5; -4) і $N\left(5\sqrt{0,5};\ 2\sqrt{6}\right)$.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{x^2+(2-k)x-3(k+1)}{x^2-(k-1)x-2(k+1)}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+2}\dfrac{\sqrt{x-k+34}-6}{\sqrt{x-k+47}-7}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+5)x^2+kx+3}{2+(k+2)x^2+kx}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x ctg\, 4x}{\cos 5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^x$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x+k}}$; б) $y=\ln\left(\dfrac{2x-3k}{kx^2}\right)$;

в) $y=\left(\dfrac{1}{4}x^{3k}+7x^2\right)^2$; г) $y=arctg x^{2k}$; д) $y=e^{x+k}\left(2\sin kx+3\right)$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{40}x^2+8x+300$, а

$p=30-\dfrac{1}{10}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x,

яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Потрібно виготовити бак об'ємом V. Якими мають бути його розміри, щоб на виготовлення пішла найменша кількість матеріалу?

11. $Q(p)=\dfrac{2p+k}{2p-k},\ S(p)=2p+2k$.

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y=\dfrac{x^2}{x-2}$.

ВАРІАНТ №3.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k & k+1 & k+2 & k+3 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ -k & k-1 & k-2 & 1 \\ 3 & -k-1 & -k-2 & -k-3 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} x_1-3x_2+kx_3=4, \\ x_1+x_2-(k-3)x_3=0, \\ 2x_1-x_2+x_3=3. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат на одиницю продукції наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	***160***	***1***	***4***	***3***	***3***
S_2	***125***	***2***	***3***	***2***	***4***
S_3	***85***	***4***	***1***	***1***	k

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: ***7+k*** шт.; ***8*** шт.; ***4*** шт.; ***12*** шт.; друга – ***8***; ***9+k***; ***3***; ***25***; третя – ***7***; ***7***; ***9+k***; ***21***. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: ***7*** грн., ***9*** грн., ***4*** грн., ***4,1*** грн., в B_2 – ***8***;

2,4; ***4,5***; ***1,6***; в B_3 – ***2***; ***5***; ***7,5***; ***2***. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. ***A(k; k+2), B(k+5; k+1), C(k+6; k+1).***

6. Ексцентриситет гіперболи дорівнює $\frac{\sqrt{17}}{3}$. Скласти рівняння гіперболи, яка проходить через точку $A\left(3\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to -k}\frac{x^2+(k-1)x-k}{x^2+(k+2)x+2k}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+3}\frac{\sqrt{x-k+13}-4}{\sqrt{x-k+6}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(k+3)x^4+(k+2)x^2-(k+1)x+6}{(k+1)x^3+kx^2+kx-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x}{x\operatorname{ctg} 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+2x}{2x-1}\right)^{3x}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=\sqrt{\frac{x^2+k}{\sin kx}}$; б) $y=\ln\sqrt{\frac{x^3-k}{3kx}}$;

в) $y=x\operatorname{tg}kx+3k^x$; г) $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{k}+\operatorname{arcctg}kx$; д) $y=(kx^3-6x+5)^4$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\frac{1}{40}x^2+25x+200$, а

$p=50-\frac{1}{10}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Довести, що із усіх прямокутних земельних ділянок заданої площі a^2, квадратна має найменший периметр.

11. $Q(p)=\frac{3p+k}{3p-k}, S(p)=3p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка:

$$y=\frac{x^2-6x+13}{x-3}.$$

ВАРІАНТ № 4.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} -1 & k & k+4 & k-1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ k+1 & 1 & 0 & 2 \\ 7 & -k & -k-4 & -k+1 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} 3x_1+kx_2+(k-2)x_3=3, \\ 4x_1-kx_2+(k+1)x_3=4, \\ x_1-\ \ x_2+\ \ x_3=1. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат на одиницю продукції наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	72	1	3	2	k
S_2	67	2	1	1	3
S_3	100	3	1	2	4

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: *6*шт.; *1* шт.; *4+k* шт.; *12* шт.; друга – *3*; *4*; *2+k*; *25*; третя – *5*; *2+k*; *3*; *23*. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: *8* грн., *5* грн., *2,3* грн., *2,4* грн., в B_2 – *6*; *1,4*; *5,7*; *2,3*; в B_3 – *2*; *6*; *3,5*; *9*. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. $A(k+4;\ k+3)$, $B(k+2;\ k+7)$, $C(k;\ k+2)$.

6. Знайти рівняння кола, симетричного з колом $x^2+y^2=2x+4y-4$ відносно прямої $x-y-3=0$.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+1}\frac{x^2+(1-k)x-2(k+1)}{x^2-kx-k-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+4}\frac{\sqrt{x-k+32}-6}{\sqrt{x-k+21}-5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{kx^2-(k+3)x-(k+10)}{(k+1)x^2-(k+4)x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 5x}{3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{3x}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=(3x^5-kx^3+5)^3$; б) $y=\left(\frac{x}{k-5x}\right)^2$; в) $y=\frac{1}{3k}\sin kx$; г) $y=e^{kx}\,arctg\frac{x^2}{k}$; д) $y=(\cos kx+1)^2$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\frac{1}{48}x^2+24x+100$, а $p=38-\frac{1}{8}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Бак для перевезення рідини має форму циліндра об'ємом V . Якими мають бути розміри циліндра, щоб кількість матеріалу, використаного для його виготовлення, була найменшою?

11. $Q(p)=\frac{4p+k}{4p-k}, S(p)=4p+2k$.

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка:

$$y=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+7$$

ВАРІАНТ 5.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} -k & k & 2 & 2 \\ k+1 & 4 & -1 & -3 \\ k & -k & 2+k & -2 \\ 6 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} x_1+x_2+kx_3=2, \\ 3x_1-2x_2+(k+1)x_3=1, \\ 5x_1-3x_2+kx_3=2. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат на одиницю продукції наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	85	1	2	1.5	3
S_2	150	2	4	1	k
S_3	120	2	2	3	3

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: ***8+k*** шт.; ***6***шт.; ***4*** шт.; ***12*** шт.; друга – ***6***; ***7***; ***2+k***; ***30***; третя – ***1***; ***2+k***; ***5***; ***7,6***. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: ***7,1*** грн., ***3,5*** грн., ***3*** грн., ***2,4*** грн., в B_2 – ***8***; ***2,4***; ***3,8***; ***2,3***; в B_3 – ***4***; ***8***; ***2,5***; ***6***. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. ***A(k+2; k), B(k+3; k+5), C(k+1; k+1).***

6. Скласти рівняння кола, яке проходить через точки ***A(5; 0), B(1; 4),*** якщо його центр лежить на прямій ***x+y-3=0.***

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+2}\frac{x^2-(k+4)x+2(k+2)}{x^2+(1-k)x-3(k+2)}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+5}\frac{\sqrt{x-k+11}-4}{\sqrt{x-k+20}-5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(k+5)x^3+(k+2)x+k}{(k+6)x^3+(k+1)x^2+2k}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 5x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{2+n}\right)^{3n}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=(kx^4-5x^2+3k)^6$; б) $y=\ln\left(\frac{e^{kx}}{5x-k}\right)$;

в) $y=\sqrt{tg^k 3x}$; г) $y=arctg^k(\sin x)$; д) $y=\cos kx\cdot e^{kx}$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\frac{1}{24}x^2+12x+200$, а

$p=38-\frac{1}{15}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Потрібно виготовити бляшану посудину циліндричної форми місткістю *3* л, відкриту зверху. Які повинні бути розміри посудини, щоб на її виготовлення пішла найменша кількість матеріалу?

11. $Q(p)=\frac{5p+k}{5p-k},S(p)=5p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y=\frac{5}{x^2-9}$.

ВАРІАНТ № 6.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k-1 & k+2 & 0 & -k \\ -2 & 3 & k+1 & k-1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -k+1 & -k-2 & 5 & k \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} (k+1)x_1-x_2-x_3=0, \\ 3x_1-2x_2+3x_3=5, \\ kx_1+x_2-5x_3=-6. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат на одиницю продукції наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*98*	*1*	*3*	*2*	*2*
S_2	*116*	*2*	*1*	*4*	*3*
S_3	*98*	*3*	*3*	*2*	*k*

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: *8* шт.; *k* шт.; *5* шт.; *14* шт.; друга – *5*; *4*; *3+k*; *50*; третя – *2*; *0*; *2+k*; *80*. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1, відповідно: - *7* грн., *3* грн., *2* грн., *2,1* грн., в B_2 – *3*; *0,4*; *2,3*; *1,3*; в B_3 – *3*; *7*; *3,5*; *7*. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. ***A(k; k), B(k+5; k+5), C(k+7; k+1).***

6. Скласти рівняння прямих, які проходять через фокуси гіперболи $7x^2-5y^2=35$ і утворюють з віссю OX кут 60^0. Зробити малюнок.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+3}\frac{x^2-(k+6)x+3(k+3)}{x^2-(k+2)x-k-3}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+6}\frac{\sqrt{x-k+19}-5}{\sqrt{x-k+30}-6}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(k+6)x^2-(k+5)x+k+2}{(k+3)x^2+(k+4)x+k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 5x}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n}$.

8. Знайти похідні функцій а) $y=(x^6-kx^3+2kx+3)^5$; б) $y=\ln\left(1+e^{\frac{kx}{3}}\right)$;

в) $y=\sqrt{x+k}\left(\frac{1}{\sqrt{kx}}+1\right)$; г) $y=arctg(\frac{k}{kx+3})^2$; д) $y=\cos^k(x-2)tgkx$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\frac{1}{50}x^2+15x+400$, а

$p=51-\frac{1}{10}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Із квадратного бляшаного листа 60×60 см^2 потрібно зробити прямокутну коробку без кришки, вирізаючи по кутах однакові квадратики і загинаючи полоски, що залишились. Які повинні бути розміри вирізаних квадратиків, щоб вийшла коробка найбільшого об'єму?

11. $Q(p)=\frac{6p+k}{6p-k},S(p)=6p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y=x+e^{-x}$.

ВАРІАНТ №7.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k+2 & 3 & 1 & -k-2 \\ k+3 & -1 & 0 & -k-3 \\ -k & 2 & 1 & k \\ 4 & -4 & 5 & 5 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+(k-2)x_3=6, \\ -x_1-x_2+kx_3=-3, \\ 3x_1+x_2+(k+1)x_3=5. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат на одиницю продукції наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*108*	*2*	*2*	*3*	*k*
S_2	*90*	*1*	*4*	*1*	*2*
S_3	*102*	*3*	*2*	*2*	*3*

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: *87*шт.; *k* шт.; *8* шт.; *9* шт.; друга – *7*; *3*; *5+k*; *55*; третя – *3*; *2+k*; *6*; *89*. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: *6,5* грн., *3,2* грн., *5* грн., *2,3* грн., в B_2 – *5*; *1,4*; *2,5*; *3,3*; в B_3 – *5*; *3*; *2,5*; *6*. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. $A(k+4;\ k+2)$, $B(k;\ k+1)$, $C(k+7;\ k)$.

6. Знайти ексцентриситет еліпса, якщо його осі відносяться як *13*: *5*.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+4}\dfrac{x^2-(k+8)x+4k+16}{x^2-(k+2)x-2(k+4)}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+7}\dfrac{\sqrt{x-k+9}-4}{\sqrt{x-k+18}-5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+4)x^2+k-3}{(k+5)x^2+kx-6k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{-3n}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=\sqrt{k+\sin(4x-k)}$; б) $y=\arccos\frac{kx}{3}$; в) $y=e^{k\sin x}$;

г) $y=(kx^5-3x+5)^{2k}$; д) $y=(x+2)\ln kx$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\frac{1}{44}x^2+14x+200$, а

$p=42-\frac{1}{12}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Переріз тунелю має форму прямокутника з насадженим півкругом. Периметр перерізу *18* м. За якого радіуса півкруга площа перерізу буде найбільшою?

11. $Q(p)=\dfrac{7p+k}{7p-k}$, $S(p)=7p+2k$.

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y=\dfrac{1}{2x-x^2}$.

ВАРІАНТ №8

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ k-1 & k-2 & -k-1 & 5 \\ 4 & 1 & k & 0 \\ 1-k & 2-k & k+1 & 7 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2, \\ kx_1+2x_2-x_3=-5, \\ (k-1)x_1+x_2-x_3=-4. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат на одиницю продукції наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S	70	1	3	2	2
S_2	90	2	1	4	k
S_3	80	2	3	2	4

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: $4+k$ шт.; 7 шт.; 3 шт.; 24 шт.; друга – 5; $3+k$; 3; 30; третя – 1; 3; $3+k$; 120. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: $8,5$ грн., $33,1$ грн., $3,1$ грн., $23,5$ грн., в B_2 – 35; $26,1$; $2,3$; $8,3$; в B_3 – 5; 98; $6,5$; 21. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. $A(k+3;\ k+3)$, $B(k+5;\ k+2)$, $C(k+7;\ k+1)$.

6. Через фокус параболи $y^2=8x$ і через її точку, абсциса якої дорівнює $0,5$; а ордината додатна, проведена пряма. Знайти відстань від центра кола $x^2+y^2+6x+4y-3=0$ до цієї прямої. Зробити малюнок.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+2}\dfrac{x^2-(1+k)x-k-2}{x^2+(1-k)x-3k-6}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3k-(k+7)x^3}{4k+(k+5)x^4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+1}-1}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{2n}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=\left(9x^2+k\right)arctgkx$; б) $y=2^{kx}+x^{2k}$;

в) $y=\cos\sqrt{2x+k}$; г) $y=(x^7-kx^2+3)^4$; д) $y=tg^2\left(\sqrt{x+k}\right)$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{54}x^2+15x+800$, а

$p=47-\dfrac{1}{10}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде

максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Із квадратного бляшаного листа, сторона якого a треба зробити відкриту зверху скриньку найбільшої місткості, вирізавши рівні квадрати по кутах і відкидаючи їх, а потім згинаючи бляху так, щоб утворити боки скриньки. Яка повинна бути сторона вирізаного квадрата?

11. $Q(p)=\dfrac{8p+k}{8p-k}$, $S(p)=8p+2k$.

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка:

$$y=\frac{3x^4}{4}-x^3-9x^2+7.$$

ВАРІАНТ №9.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ k-4 & 0 & k+7 & k-1 \\ -k & 1 & 2 & k \\ 4-k & 3 & -k-7 & 1-k \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} x_1+kx_2+x_3=5, \\ 3x_1+x_2+2x_3=11, \\ -x_1+(k-2)x_2+3x_3=11. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат на одиницю продукції наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	77	1	3	2	4
S_2	109	2	1	4	2
S_3	117	3	3	2	k

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: 555 шт.; $58+k$ шт.; 89 шт.; 140 шт. друга – 567; 48; $21+k$; 500; третя - 98; 54; $20+k$; 810. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: 78 грн., $3,4$ грн., $2,4$ грн., $2,5$ грн., в B_2 – $3,6$; $1,4$; $6,3$; $3,3$; в B_3 – 8; 9; $9,5$; 7. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. $A(k+5;\ k+2),\ B(k+9;\ k+3),\ C(k+8;\ k+2).$

6. Еліпс проходить через точку $M(1;\ 1)$ і має ексцентриситет $\varepsilon = 0,6$. Скласти рівняння еліпса.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x \to k+3} \dfrac{x^2 + x(1-k) - 4(k+3)}{x^2 - x(2+k) - k - 3}$;

б) $\lim\limits_{x \to k+9} \dfrac{\sqrt{x-k+16} - 5}{\sqrt{x-k+27} - 6}$; в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(k+3)x^4 + (k+5)x^2 + 2k}{1 + (k+6)x^3}$; г) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arctgx}{x}$;

д) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{3x+4}{3x-7} \right)^{2x-5}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y = (k + ln\cos x)^k$; б) $y = ln\sqrt{k + \sin x}$;

в) $y = \dfrac{\cos kx}{x^{2k}}$; г) $y = arctg^2(3x^k)$; д) $y = (x^5 - 3kx^4 + 2k)^6$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V = \dfrac{1}{30}x^2 + 8x + 300$, а $p = 40 - \dfrac{1}{10}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Квітник прямокутної форми, який прилягає до будинку, потрібно огородити плитами (є ***200*** плит довжиною ***0,5*** м). Якими мають бути розміри квітника, щоб його площа була найбільшою?

11. $Q(p) = \dfrac{9p+k}{9p-k},\ S(p) = 9p + 2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y = \dfrac{x}{4} + \dfrac{4}{x}$.

ВАРІАНТ №10.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k-1 & k+2 & k-4 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & k \\ k+2 & -1 & 3 & k+4 \\ 1-k & -k-2 & 4-k & 7 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + (k-3)x_3 = -1, \\ -x_1 + x_2 + kx_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат на одиницю продукції наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	***90***	***2***	***1***	***2***	k
S_2	***134***	***3***	***2***	***2***	***4***
S_3	***136***	***1***	***3***	***2***	***2***

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: ***8*** шт.; k шт.; ***5*** шт.; ***14*** шт.; друга – ***5+k***; ***4***; ***3***; ***50***; третя – ***2***; ***0***; ***2+k***; ***80***. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: ***7*** грн., ***3*** грн., ***2*** грн., ***2,1*** грн., в B_2 – ***3***; ***0,4***; ***2,3***; ***1,3***; в B_3 – ***3***; ***7***; ***3,5***; ***7***. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. $A(k+2;\ k+1),\ B(k+1;\ k+6),\ C(k+2;\ k+3).$

6. Скласти рівняння кола, яке проходить через точки $A(3;\ 1)$, $B(5;\ 3)$, якщо його центр лежить на прямій $x=y$.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x \to -(k+1)} \dfrac{x^2 + x(k-4) - 5(k+1)}{x^2 + (k-1)x - 2(k+1)}$;

б) $\lim\limits_{x \to k+10} \dfrac{\sqrt{x-k+15} - 5}{\sqrt{x-k+26} - 6}$; в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(k+2)x^2 + (k+4)x - 6k}{(k+1)x^2 - 9k}$; г) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin\frac{x}{5}}{x}$;

д) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{5x}{1+5x} \right)^x$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y = \sqrt{arctgkx}$; б) $y = \left(1 - \dfrac{x^2}{3k}\right)^k$;

в) $y = k^{\sin x} - \sqrt[3]{3kx}$; г) $y = ln(x^3 - kx^2 + k)$; д) $y = \sin^k(7x+3)$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V = \frac{1}{48}x^2 + 10x + 200$, а

$p = 39 - \frac{1}{10}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Знайти такі розміри відкритого басейну з квадратним дном об'ємом ***50*** м^3, щоб на облицювання його стін і дна пішла найменша кількість матеріалу.

11. $Q(p) = \frac{10p + k}{10p - k}$, $S(p) = 10p + 2k$.

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y = \frac{7}{x^2 - 5x + 4}$.

ВАРІАНТ 11.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} 0 & k+6 & k-3 & k-1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ k+1 & -k-6 & 3-k & 1-k \\ 2 & 2 & k-1 & -1 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -8, \\ kx_1 + 3x_2 + x_3 = -2, \\ (k-3)x_1 - x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат на одиницю продукції наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	***56***	***1***	***2***	***3***	***k***
S_2	***62***	***2***	***4***	***1***	***3***
S_3	***66***	***3***	***2***	***2***	***3***

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: ***6+k*** шт.; ***555*** шт.; ***25*** шт.; ***114*** шт.; друга – ***55***; ***48+k***; ***37***; ***50***; третя – ***42***; ***80***; ***32+k***; ***81***. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: ***7*** грн., ***3*** грн., ***2*** грн., ***2,1*** грн., в B_2 – ***67***; ***4,4***; ***7,6***; ***7,3***; в B_3 – ***6***; ***7,1***; ***7,5***; ***71***. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст.
(Використати добуток матриць).

5. ***A(k+4; k+1); B(k+1, k+6); C(k+2, k+3).***

6. Побудувати коло $x^2+y^2-2\sqrt{2}\,x-2y-6=0$.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to-(k+2)}\dfrac{x^2+kx-2(k+2)}{x^2+(1+k)x-k-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{\sqrt{x-k+24}-5}{\sqrt{x-k+48}-7}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{kx^5+(k+4)x^4+7k}{(k+3)x^6+kx^4+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sin 3x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n-1}\right)^{-2n}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=\ln tg\dfrac{x}{k}$; б) $y=(x^4-kx^3+2)^{k+1}$;

в) $y=(3+k)tgkx$; г) $y=arctg\sqrt{x-3k}$; д) $y=\sqrt{\sin 3x}\,\ln(kx)$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{50}x^2+20x+400$, а $p=50-\dfrac{1}{10}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Переріз тунелю має форму прямокутника з насадженим півкругом. Периметр перерізу дорівнює ***40*** м. За яких розмірів його сторін площа перерізу буде найбільшою?

11. $Q(p)=\dfrac{11p+k}{11p-k},\ S(p)=11p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка:

$$y=x+\frac{1}{x}.$$

ВАРІАНТ 12.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k+2 & 4 & -k-2 & 3 \\ k-2 & 0 & 2-k & k \\ k & 2 & -k & 0 \\ 4 & k-1 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Розв’язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=7, \\ (k+2)x_1-3x_2-4x_3=-24, \\ (k+1)x_1+x_2-x_3=1. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат на одиницю продукції наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	***67***	***1***	***2***	***2***	***1***
S_2	***81***	***3***	***2***	***2***	***k***
S_3	***124***	***2***	***4***	***3***	***1***

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв’язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: ***91*** шт.; ***13+k*** шт.; ***23*** шт.; ***16*** шт.; друга – ***8+k***; ***34***; ***3***; ***59***; третя – ***53***; ***k***; ***45***; ***70***. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: ***8***, ***1*** грн., ***4***, ***6*** грн., ***2***, ***7*** грн., ***4***, ***1*** грн., в B_2 – ***4***; ***9***, ***4***; ***6***, ***3***; ***2***, ***3***; в B_3 – ***3***, ***7***; ***7***, ***1***; ***7***, ***5***; ***6***, ***5***. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. ***A(k; k+1), B(k; k+3); C(k+1; k+2).***

6. Написати рівняння кола, яке має центр у точці ***S(8, 6)*** і дотикається до прямої ***5x-12y-46=0***. Зробити малюнок.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to-(k+3)}\dfrac{x^2+(2+k)x-k-3}{x^2+(k-1)x-4(k+3)}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+2}\dfrac{\sqrt{x-k+2}-2}{\sqrt{x-k+14}-4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+2)x^2-(k+5)x+4k}{(k+7)x^6+k}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{tg\ 3(x-\pi)}{sin\ 2(\pi-x)}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x-2}\right)^x$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=arc\ tg\sqrt{5+kx}$; б) $y=ln\dfrac{sin\,x}{cos\,kx}$;

в) $y=\sqrt[5]{(x+cos\,kx)^k}$;г) $y=(kx^5-3x^2+2k)^6$; д) $y=7^{kx}+ln\,7x$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{48}x^2+22x+300$,

а $p=50-\dfrac{1}{10}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Знайти найбільший об'єм циліндричної посудини, в якої повна поверхня дорівнює 30 м^2.

11. $Q(p)=\dfrac{12p+k}{12p-k}, S(p)=12p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y=\dfrac{x}{(x+2)^2}$.

ВАРІАНТ 13.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k+3 & k-1 & k+2 & 7 \\ k-2 & k & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \\ 2-k & -k & 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} -x_1-kx_2-x_3=0, \\ 2x_1+(k+1)x_2+x_3=3, \\ x_1+2kx_2-2x_3=9. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат на одиницю продукції наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	76	2	2	1	k
S_2	107	1	4	2	2
S_3	97	3	2	2	1

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: $9+k$ шт.; 6; шт.; 4; шт.; 24 шт.; друга – $7+k$; 78; 54; 55; третя – 54; $21+k$; 63; 75. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: $9,7$ грн., $7,2$ грн., $2,1$ грн., $2,5$ грн., в B_2 – $3,6$; $3,4$; $5,3$; $6,3$; в B_3 – $3,9$; 21; $3,3$, 9; 7. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст.
(Використати добуток матриць).

5. $A(k+5;\ k+2);\ B(k+1;\ k+1);\ C(k+2;\ k+3)$.

6. Скласти рівняння і знайти довжину спільної хорди параболи $y^2=36x$ і кола $(x+12)^2+y^2=400$.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to 2k+1}\dfrac{x^2-2kx-2k-1}{x^2+(1-2k)x-2(2k+1)}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+3}\dfrac{\sqrt{x-k+22}-5}{\sqrt{x-k+46}-7}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+2)x^3-3k}{(k+5)x^3+(k+2)x^2+5k}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} sin\,3x\cdot ctg5x$; д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+cos\,x)^{\frac{3}{cos\,x}}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=ln\sqrt{k+tgx}$; б) $y=\dfrac{sin\,kx}{cos^2\,x}$;

в) $y=(x^6-2kx^2+5)^{2k}$; г) $y=(x^k+1)arctgkx$;

д) $y=(x+k)^3\,tg(2x+k)$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{50}x^2+12x+400$,

а $p=33-\dfrac{1}{12}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Знайти найбільший об'єм конуса, який має твірну l.

11. $Q(p)=\dfrac{13p+k}{13p-k}, S(p)=13p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y=\dfrac{x}{(x-1)(x+2)}$.

ВАРІАНТ 14.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} 3 & k+3 & k-2 & -1 \\ k+3 & -k-2 & -4 & k+4 \\ 2 & -k & 0 & 3 \\ -3 & k+1 & 2-k & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} 3x_1-(k-5)x_2-2x_3=10, \\ -x_1+x_2+x_3=-4, \\ x_1-kx_2-3x_3=8. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	78	1	2	2	1
S_2	96	2	2	3	2
S_3	134	3	4	1	k

Визначити кількість продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: *79* шт.; *10+k* шт.; *25* шт.; *24* шт.; друга –*25*; *46+k*; *89*; *50*; третя – *8*; *50*; *12+k*; *80*. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: *7,8* грн., *3,5* грн., *22* грн., *2,1* грн., в B_2 – *4*; *0,4*; *2,3*; *1,3*; в B_3 – *3*; *71*; *3,9*; *7*. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст.
(Використати добуток матриць).

5. ***A(k+3; k+3); B(k+1; k+2); C(k+4; k+4).***

6. Точка D ділить відрізок між фокусами гіперболи $9x^2-16y^2=144$, який має початок у фокусі з від'ємною абсцисою, у відношенні *1:4*. Написати рівняння перпендикулярів, опущених із точки D на асимптоти гіперболи. Зробити малюнок.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to 2k+3}\dfrac{x^2-2x(1+k)-2k-3}{x^2+(1-2k)x-4(2k+3)}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+4}\dfrac{\sqrt{x-k+5}-3}{\sqrt{x-k+12}-4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{kx^2+(k+5)x+k+1}{(k+3)x^5-k-4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 ctg\, 2x^2}{\cos 3x}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{5n}\right)^n$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=\ln^2\left(\dfrac{x+k}{x-1}\right)$; б) $y=5^{x^2+\sin kx}$; в) $y=\sqrt{\dfrac{x+k}{2x}}$;

г) $y=arctg(2x+k)$; д) $y=\sin^k(x+2)$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{40}x^2+10x+200$, а

$p=32-\dfrac{1}{15}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Знайти найбільший об'єм циліндра, у якого повна поверхня дорівнює S.

11. $Q(p)=\dfrac{14p+k}{14p-k}, S(p)=14p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.

ВАРІАНТ 15.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k+4 & k & k-3 & k+2 \\ -1 & 2 & 2+k & k-1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ -k-4 & k+1 & 3-k & -k-2 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} 5x_1-(k-1)x_2-2x_3=7, \\ 3x_1+x_2-x_3=4, \\ x_1-kx_2-4x_3=5. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат на одиницю продукції наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	60	1	2	1	3
S_2	108	2	4	1	1
S_3	140	3	2	3	k

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: ***85*** шт.; ***30*** шт.; ***15+k*** шт.; ***114*** шт.; друга – ***75***; ***34+k***; ***13***; ***150***; третя – ***3+k***; ***10***; ***12***; ***280***. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: ***7,6*** грн., ***5*** грн., ***9*** грн., ***5,2*** грн., в B_2 – ***4,2***; ***5,4***; ***9,3***; ***6,3***; в B_3 – ***4,5***; ***9***; ***4,5***; ***7***. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст.

(Використати добуток матриць).

5. ***A(k+5; k+1); B(k+2; k+6), C(k+4; k+5).***

6. Скласти рівняння кола, описаного навколо трикутника, сторони якого задані рівняннями: ***9x-2y-41=0, 7x+4y+7=0, x-3y+1=0.***

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to 2k-1}\dfrac{x^2+2(1-k)x-2k+1}{x^2+(3-2k)x-2(2k-1)}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+5}\dfrac{\sqrt{x-k+44}-7}{\sqrt{x-k+20}-5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+3)x^2+(k+1)x-k+3}{(k+5)x^2+(k+10)x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\ 2x^2}{\sin\ 3x^2}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^n$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=\dfrac{2^{4x}}{kx^3+5x^2-1}$; б) $y=\dfrac{\arcsin 3x}{kx-2}$;

в) $y=arctg^{k+1}(x+3)$; г) $y=\ln(\sqrt{2x+k})$; д) $y=e^{\sin kx}tg(5x+k)$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{43}x^2+16x+400$, а $p=45-\dfrac{1}{15}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Шнур, довжиною l зігнутий в прямокутник. Які розміри цього прямокутника, якщо площа його найбільша?

11. $Q(p)=\dfrac{15p+k}{15p-k}, S(p)=15p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y=e^{-x^2}$.

ВАРІАНТ 16.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k & k+1 & k+1 & k-9 \\ 2 & 3 & 0 & k+2 \\ -k & k+2 & -k-1 & 9-k \\ -1 & 2 & k+4 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} x_1+x_2-kx_3=5, \\ 2x_1+2x_2-x_3=10, \\ -2x_1+3x_2-3kx_3=0. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат на одиницю продукції наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	90	2	1	2	k
S_2	140	1	3	4	2
S_3	114	3	2	2	1

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: ***68*** шт.; ***91*** шт.; ***95*** шт.; ***10+k*** шт.; друга – ***25***; ***14+k***; ***53***; ***150***; третя – ***52***; ***80***; ***32***; ***10+k***. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: ***3,5*** грн., ***1,3*** грн., ***2,1*** грн., ***3, 1*** грн., в B_2 – ***2,3***; ***2,4***; ***1,3***; ***1,9***; в B_3 – ***6***; ***7***; ***6,5***; ***6,5***. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. ***A(k; k+1); B(k+2; k+7), C(k+4; k+4)***.

6. Еліпс проходить через точку $M(\sqrt{8}; \frac{3}{\sqrt{2}})$ і має ексцентриситет $e = \frac{4}{\sqrt{7}}$. Скласти рівняння еліпса. Зробити малюнок.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to 2k} \frac{x^2 + x(3-2k) - 6k}{x^2 + 2(1-k)x - 4k}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+7} \frac{\sqrt{x-k+29} - 6}{\sqrt{x-k+42} - 7}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(k+1)x^2 - (k+2)x}{(k+2)x^2 - (k+2)x + 4k}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{\arcsin 6x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^{3x}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y = (x^5 + k)^{5k+1}$;

б) $y = \sqrt{arctg(x^k - 1)}$; в) $y = \sqrt{x^3 - 2x + 3k}$; г) $y = e^{k - tg\,3x}$;

д) $y = \sin^3(kx-3)\cos 2x$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V = \frac{1}{50}x^2 + 15x + 200$, а $p = 50 - \frac{1}{20}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Канал, ширина якого ***27*** м, під прямим кутом впадає в другий канал, шириною ***64*** м. Якої найбільшої довжини стовбур можна сплавити цією системою каналів?

11. $Q(p) = \frac{16p + k}{16p - k}, S(p) = 16p + 2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y = \frac{x^2 + 9}{x^2 - 9}$.

ВАРІАНТ 17.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k+2 & 1 & 0 & k+3 \\ k-3 & k & 3 & 3-k \\ k+3 & k-2 & 4 & -k-3 \\ k-1 & 2 & k+2 & 1-k \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - kx_3 = 10, \\ -x_1 - 2x_2 + (k+1)x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	***110***	***1***	***2***	***1***	***1***
S_2	***150***	***3***	***2***	***1***	***k***
S_3	***230***	***2***	***4***	***3***	***2***

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: ***65*** шт.; ***30*** шт.; ***35*** шт.; ***12+k*** шт.; друга – ***9***; ***4***; ***8+k***; ***58***; третя – ***9+k***; ***30***; ***12***; ***39***. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: ***7,9*** грн., ***3,5*** грн., ***2,8*** грн., ***3,1*** грн., в B_2 – ***2,3***; ***3,4***; ***6,3***; ***8,3***; в B_3 – ***5***; ***7,9***; ***3,5***; ***7,3***. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст.
(Використати добуток матриць).

5. ***A(k+5; k+2); B(k+3; k+6); C(k+1; k+1).***

6. Скласти рівняння гіперболи, яка проходить через т. $M(8\sqrt{2};6)$, якщо асимптоти гіперболи задані рівняннями $y=\pm\frac{3}{4}x$.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+5}\frac{x^2-(k+6)x+k+5}{x^2-(k-1)x-6(k+5)}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+8}\frac{\sqrt{x-k+17}-5}{\sqrt{x-k+41}-7}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(k+7)x^3-kx^2+k-2}{(k+5)x^3+(k+1)x^2+9k}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg3x}{5x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-5}{x}\right)^{x/2}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=sin\frac{x}{2}+cos\frac{x}{k}$; б) $y=\frac{x^k}{x+5k}$;

в) $y=\sqrt{x+k}\cdot sinkx$; г) $y=3arctg\left(\frac{x}{5}-k\right)$; д) $y=\left(x^2-k\right)cos(kx-1)$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\frac{1}{40}x^2+20x+400$, а

$p=50-\frac{1}{20}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Знайти сторони прямокутника найбільшої площі, який можна вписати в еліпс $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

11. $Q(p)=\frac{17p+k}{17p-k}, S(p)=17p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка:

$$y=\frac{x^3}{3}-2x^2-5x+12.$$

ВАРІАНТ 18.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k-2 & 4 & -k & k-1 \\ k & k+2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & -1 & k-2 \\ 2-k & -6 & k & 1-k \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} x_1+x_2-(k+4)x_3=0, \\ 2x_1-x_2+kx_3=9, \\ -x_1+x_2+(k+1)x_3=-6. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*70*	*2*	*2*	*1*	*3*
S_2	*131*	*1*	*4*	*3*	*k*
S_3	*94*	*3*	*2*	*2*	*1*

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: *98* шт.; *71* шт.; *13+k* шт.; *74* шт.; друга – *63+k*; *89*; *32*; *50*; третя – *7*; *30+k*; *72*; *89*. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: *7,6* грн., *3,9* грн., *7,2* грн., *2,1* грн., в B_2 – *3,5*; *7,4*; *9,3*; *7,3*; в B_3 – *3*; *7*; *9*; *7,1*. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст.

(Використати добуток матриць).

5. *A(k+9; k+2); B(k+3; k+3); C(k+6; k+1).*

6. Скласти рівняння кола, яке проходить через точки *A(2; 2), B(-4; 2),* якщо його центр лежить на прямій *y+x+2=0.*

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+6}\frac{x^2-(4+k)x-2(k+6)}{x^2-(3+k)x-3(k+6)}$;

б) $\lim\limits_{n\to k+10}\frac{\sqrt{x-k+15}-5}{\sqrt{x-k+26}-6}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(k+2)x^3-(k+3)x+k}{2k+(k+4)x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{sin\ \pi x}{sin\ 5\pi x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-2}{5x+1}\right)^{5x}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y = ln\dfrac{x^5+k}{x^{5k}+1}$; б) $y = \dfrac{x}{k}e^{x^2+k}$;

в) $y = arctg^2\sqrt{3kx}$; г) $y = cos^5\dfrac{x}{3k} + \dfrac{x}{2}\sqrt{x^{2k}-9}$; д) $y = sin^k\left(3x^2+1\right)x$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V = \dfrac{1}{50}x^2 + 15x + 300$, а

$p = 50 - \dfrac{1}{20}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Якими мають бути розміри ящика з кришкою місткістю $V = 1764$ $см^3$, якщо сторони основи відносяться, як 3: 4, щоб на його виготовлення пішло найменше матеріалу?

11. $Q(p) = \dfrac{18p+k}{18p-k}, S(p) = 18p + 2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^2}{2} + 7$.

ВАРІАНТ 19.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k+2 & k & 0 & k+2 \\ k & k+4 & -1 & 4 \\ 5-k & 0 & -3 & 5-k \\ k+3 & 3 & -k & k+3 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + kx_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + (k+10x_3 = 6, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 = -12. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	***80***	***1***	***2***	***2***	***3***
S_2	***70***	***2***	***1***	***1***	***k***
S_3	***11 5***	***2***	***2***	***3***	***2***

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: ***56***шт.; ***10*** шт.; ***9+k*** шт.; ***16*** шт.; друга – ***15***; ***10***; ***13+k***; ***57***; третя – ***12***; ***10***; ***12+k***; ***85***. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: ***6,5*** грн., ***3,7*** грн., ***3,5*** грн., ***2,8*** грн., в B_2 – ***3,7***; ***4,4***; ***6,3***; ***2,3***; в B_3 – ***2,5***; ***7,1***; ***4,5***; ***6,5***. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. $A(k+6; k+5); B(k; k); C(k+9; k+4).$

6. Використовуючи означення еліпса, скласти його рівняння, знаючи, що точки F_1 $(0; 0)$ і F_2 $(3; 3)$ є фокусами, а довжина великої осі дорівнює 5.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+4}\dfrac{x^2-(10+k)x+6(k+4)}{x^2-x(3+k)-k-4}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+11}\dfrac{\sqrt{x-k+38}-7}{\sqrt{x-k+14}-5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2k-(k+7)x^2}{k+(k+1)x-(k+2)x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{arctg\,4x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-2}\right)^{3x}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y = (sin^2(x+k) + x^2)^k$; б) $y = \dfrac{ctg\,x}{\sqrt{kx}}$;

в) $y = sin^3 kx + cos^{3k} 3x$; г) $y = arctg^3\left(x^k + x^2\right)$; д) $y = ln(e^{2x} + e^{-kx})$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V = \dfrac{1}{50}x^2 + 19x + 200$,

а $p = 50 - \dfrac{1}{12}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Об'єм правильної шестикутної призми дорівнює V. Якою має бути сторона основи, щоб повна поверхня призми була найменшою?

11. $Q(p)=\dfrac{19p+k}{19p-k},S(p)=19p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка:

$$y=\frac{3-x^2}{2+x}.$$

ВАРІАНТ 20.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k-1 & 1 & k & k+2 \\ k-1 & 4 & k+1 & -3 \\ k+2 & -1 & -k & -k-2 \\ 5 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} (k-4)x_1+x_2-3x_3=0, \\ kx_1+x_2+2x_3=5, \\ x_1+x_2+x_3=4. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*72*	*2*	*3*	*1*	*3*
S_2	*50*	*1*	*1*	*2*	*k*
S_3	*106*	*3*	*2*	*3*	*1*

Визначити кількість продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: ***78*** шт.; ***20*** шт.; ***5+k*** шт.; ***24*** шт.; друга – ***15+k***; ***14***; ***13***; ***55***; третя – ***12***; ***10+k***; ***12***; ***70***. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: *7*, ***5*** грн., ***3,8*** грн., ***2,9*** грн., ***2,1*** грн., в B_2 – ***3***; ***2,4***; ***3,3***; ***3,3***; в B_3 – ***3,8***; *7*; ***3,5***; ***7,8***. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. ***A(k+6; k+5); B(k+2; k+3); C(k; k+1).***

6. Скласти рівняння гіперболи, вершини і фокуси якої знаходяться у відповідних фокусах і вершинах еліпса $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+5}\dfrac{x^2-x(4+k)-k-5}{x^2-(2+k)x-3(k+5)}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+12}\dfrac{\sqrt{x-k+24}-6}{\sqrt{x-k+13}-5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+5)x^2+3k}{4k+(k+1)x-(k+4)x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,6x}{tg\,3x}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n-6}\right)^{2n}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{9x^4+kx}}$; б) $y=\dfrac{1}{2kx}sin^2(x+2)$;

в) $y=ln(tg\,kx)$; г) $y=arctg^2\left(x^{k+1}+sin\,2x\right)$; д) $y=arcsin^2\sqrt{x+k}$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{40}x^2+20x+400$, а

$p=50-\dfrac{1}{20}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Довжина відкритого басейну об'ємом ***288*** м^2 вдвічі більша за ширину. Якими мають бути розміри басейну, щоб на його облицювання пішло найменше матеріалу?

11. $Q(p)=\dfrac{20p+k}{20p-k},S(p)=20p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y=\dfrac{x+3}{x^2-2}$.

ВАРІАНТ 21.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k+2 & k-2 & k & 3 \\ k+1 & 4 & 0 & 1+k \\ 0 & 2-k & -k & -3 \\ k & 3+k & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Розв’язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ -x_1 + (k-1)x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*65*	*1*	*1*	*2*	*3*
S_2	*90*	*2*	*1*	*3*	*2*
S_3	*140*	*2*	*3*	*4*	*k*

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: *18+k* шт.; *20* шт.; *5* шт.; *24* шт.; друга – *15*; *24*; *3+k*; *30*; третя – *12*; *20+k*; *2*; *88*. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: *7,7* грн., *3,6* грн., *2,2* грн., *2,6* грн., в B_2 – *3,5*; *3,4*; *3,3*; *5*; в B_3 – *3,6*; *7,3*; *7*; *7*. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. ***A(k; k+1); B(k+1; k+2); C(k+3; k+4).***

6. Знайти рівняння кола, симетричного з колом $x^2+y^2+6x+4y+9=0$ відносно прямої $y=2-x$.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+6}\dfrac{x^2-(5+k)x-k-6}{x^2+(3-k)x-9(k+6)}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{\sqrt{x-k+3}-2}{\sqrt{x-k+80}-9}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+6)x^4+kx+2k}{(k+2)x^2+kx^5}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{8x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x+3}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=\sqrt{k+\sin 2x}$; б) $y=\ln\sqrt{3kx+1}$;

в) $y=\dfrac{\sqrt{x-k+3}-2}{\sqrt{x-k+80}-9}$; г) $y=(3k-2x)\cdot 3^{ktgx}$; д) $y=\sqrt{arctg(x+k)}$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{30}x^2+15x+200$, а

$p=50-\dfrac{1}{5}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. На сторінці книжки друкований текст повинен займати S *см²*. Верхнє і нижнє поля мають бути по *a см,* права і ліва – по *b см*. При яких розмірах сторінки на текст піде найменше паперу?

11. $Q(p)=\dfrac{21p+k}{21p-k}$, $S(p)=21p+2k$.

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка:

$$y=\frac{1}{3}x^3-\frac{x^2}{2}-6x\ .$$

ВАРІАНТ 22.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ k+1 & k+2 & k-2 & k+1 \\ -k-1 & 0 & 2-k & -1-k \\ k+1 & k & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} -3x_1+(k+1)x_2+x_3=10, \\ 2x_1+kx_2-x_3=-7, \\ -x_1-x_2-x_3=2. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*75*	*1*	*3*	*2*	*k*
S_2	*90*	*2*	*1*	*4*	*3*
S_3	*81*	*3*	*2*	*2*	*3*

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: *9+k* шт.; *10* шт.; *15* шт.; *24* шт.; друга – *15*; *14+k*; *13*; *54*; третя – *12+k*; *10*; *12*; *80*. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: *7*, *5* грн., *3,5* грн., *2,7* грн., *2,6* грн., в B_2 – *3*; *0,4*; *2,3*; *1,3*; в B_3 – *3,7*; *7,3*; *3,7*; *7*. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. ***A(k+8; k+4); B(k+4; k+1); C(k+7; k+3).***

6. Скласти рівняння геометричного місця точок, відстань яких від заданої т.очки $A(0;\ 2)$ в два рази менша відстані до прямої $y=8$.

7. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{x^2-(2+k)x+k+1}{x^2+(7-k)x-8(k+1)}$; б) $\lim\limits_{x\to k+2}\dfrac{\sqrt{x-k+14}-4}{\sqrt{x-k+34}-6}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+4)x^2+(k+2)x}{(k+3)x+10k}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{tg2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+5}\right)^{-5x}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=\dfrac{(k+3)x^2+(k+2)x}{(k+3)x+2k}$;

б) $y=\ln(\,tg(3x+k))$; в) $y=\dfrac{\cos(5x+k)}{kx}$; г) $y=\dfrac{3}{x}\ln 3kx$;

д) $y=\sin 3kx\cdot\cos(x+2)$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{50}x^2+20x+600$, а

$p=50-\dfrac{1}{10}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Із трьох дощок однакової ширини збивають жолоб. При якому куті нахилу бічних стінок площа поперечного перерізу буде найбільшою?

11. $Q(p)=\dfrac{22p+k}{22p-k}$, $S(p)=22p+2k$.

12. Дослідити і побудувати ескіз графіка функцій:

$$y=x^5-x^3-x^2+1.$$

ВАРІАНТ 23.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k+2 & k-1 & 3 & 0 \\ -2 & k+1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 4 \\ -2-k & 1-k & -3 & k \end{vmatrix}.$$

2. Розв’язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} -4x_1+(k+2)x_2-x_3=17, \\ x_1-kx_2+x_3=-5, \\ -x_1+x_2+3x_3=1. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	61	1	1	3	2
S_2	88	2	3	2	1
S_3	71	3	1	2	k

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв’язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: *18* шт.; *15+k* шт.; *15* шт.; *24* шт.; друга –*15*; *14*; *13+k*; *60*; третя– *12+k*; *10*; *12*; *85*. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: *7* грн., *3* грн., *2* грн., *2*, *1* грн., в B_2 – *3*, *5*; *1*, *4*; *3*, *3*; *2*, *3*; в B_3 – *3*, *6*; *7*, *3*; *4*, *5*; *7*, *9*. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. $A(k+1;\ k+2);\ B(k+7;\ k+2);\ C(k+4;\ k+5).$

6. Скласти рівняння гіперболи, якщо її ексцентриситет дорівнює *3* і фокуси співпадають з фокусами еліпса $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+2}\dfrac{x^2-(1+k)x-k-2}{x^2+(5-k)x-7(k+2)}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+3}\dfrac{\sqrt{x-k+6}-3}{\sqrt{x-k+46}-7}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+2)x^4+(k+3)x^3+2k}{kx^4+(k+1)x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} tg\,2x\,ctg3x$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\ln(1+x)}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=tgkx\cdot ctg2kx$; б) $y=\sqrt{tg6x+k}$;

в) $y=(x+k)e^{7+kx}$; г) $y=\sqrt{\sin kx}\cdot e^{3x}$; д) $y=arctg^{2x}(3x+2)$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{40}x^2+15x+300$, а

$p = 45 - \frac{1}{20}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Треба зробити конічну лійку з твірною, що дорівнює $20\ см^2$. Якою має бути висота лійки, щоб її об'єм був найбільшим ?

11. $Q(p) = \frac{23p + k}{23p - k}, S(p) = 23p + 2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y = \frac{x^3}{x-1}$.

ВАРІАНТ 24.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k-1 & k+2 & 1 & k-2 \\ k & 3 & 0 & 4 \\ 1-k & -k-2 & k+1 & 2-k \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} 2x_1 + (k+1)x_2 + x_3 = 4, \\ -3x_1 + kx_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запас сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	76	1	2	3	1
S_2	68	3	2	1	k
S_3	107	2	4	3	2

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4 , яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: $16+k$ шт.; 21 шт.; 25 шт.; 34 шт.; друга –25; 34; $23+k$; 57; третя – 32; $20+k$; 22; 88. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: $7{,}9$ грн., 5 грн., $2{,}7$ грн., $2{,}9$ грн., в B_2 – $4{;}1$, 4; $4{,}3$; $2{,}3$; в B_3 – $3{,}6$; $7{,}6$; $4{,}5$; $7{,}3$. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. $A(k+7; k+4); B(k+3; k+7); C(k+2; k+5).$

6. Скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі OX, з вершиною в початку координат, якщо довжина деякої хорди цієї параболи, перпендикулярної до осі OX, дорівнює 12, а відстань цієї хорди до вершини дорівнює 3.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x \to k+3} \frac{x^2 - (2+k)x - k - 3}{x^2 + (3-k)x - 6(k+3)}$;

б) $\lim\limits_{x \to k+4} \frac{\sqrt{x-k+12} - 4}{\sqrt{x-k+21} - 5}$; в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(k+7)x^2 - (k+2)x + 5k}{(k+3)x^3 + (k+1)x} - k$;

г) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg\ 3x}{sin\ 2x}$; д) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{2n-5}{2n+6}\right)^{n+4}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y = arctg\sqrt{4kx^2 + 1}$; б) $y = ln sin(kx+2)$;

в) $y = e^{kx} \cdot tg\ 5x$; г) $y = arcsin\sqrt{x^2 + kx}$; д) $y = cos^3 \frac{x}{3k}$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V = \frac{1}{36}x^2 + 16x + 300$,

а $p = 50 - \frac{1}{22}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. З круга вирізано сектор з центральним кутом α. З цього сектора згорнута конічна поверхня. При якому значенні α об'єм конуса буде найбільшим?

11. $Q(p) = \frac{24p + k}{24p - k}, S(p) = 24p + 2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y = (x-1)\sqrt{x}$.

ВАРІАНТ 25.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k & 1 & k-7 & -k \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ k-1 & -1 & 7-k & k \\ 3 & k & k+1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -6, \\ 5x_1 + (k-2)x_2 + 2x_3 = -23, \\ 2x_1 + kx_2 + 4x_3 = -6. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	79	1	3	2	1
S_2	73	3	1	2	k
S_3	100	3	2	4	2

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: $9+k$ шт.; 10 шт.; 15 шт.; 24 шт.; друга –15; 24; $13+k$; 58; третя – 12; $20+k$; 12; 70. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: $7{,}4$ грн., $3{,}4$ грн., 3 грн., $3{,}1$ грн., в B_2 – $4{,}7$; $5{,}4$; $3{,}3$; $2{,}3$; в B_3 – 4 ;$7{,}7$; $6{,}5$; $7{,}7$. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. $A(k+7; k+3)$; $B(k+5; k+2)$; $C(k+8; k+1)$.

6. Знайти рівняння кола, симетричного з колом $x^2+y^2+2x-10y+17=0$ відносно прямої $x-2y+2=0$.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+4} \dfrac{x^2-(3+k)x-k-4}{x^2+(1-k)x-5(k+4)}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+5} \dfrac{\sqrt{x-k+44}-7}{\sqrt{x-k+31}-6}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-(k+2)x+3k}{(k+1)x^5+k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5tg\, 2x}{\sin 2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^{3x+4}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y = \ln^k (x^3 - k)$; б) $y = \dfrac{x+k}{kx-4}$;

в) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+k}}$; г) $y = \arcsin^k(3x+k)$; д) $y = \left(\sin^2 5x + \cos^2 x\right)^{2k}$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V = \dfrac{1}{22}x^2 + 14x + 200$,

а $p = 30 - \dfrac{1}{10}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Одна сторона і дві вершини прямокутника лежать на осі Ox, а дві інші – на параболі $y = 12 - x^2$. Знайти розміри прямокутника найбільшої площі.

11. $Q(p) = \dfrac{25p+k}{25p-k}, S(p) = 25p + 2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x^4}$.

ВАРІАНТ 26.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} 1 & k+3 & 4 & 1 \\ k & k-2 & 0 & k+5 \\ 1 & k-1 & 4 & 3 \\ -1 & k & -4 & -1 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} -x_1 + (k-1)x_2 + x_3 = -4, \\ 2x_1 + kx_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}.$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*135*	*2*	*3*	*2*	*1*
S_2	*150*	*3*	*2*	*2*	*3*
S_3	*105*	*1*	*1*	*4*	*k*

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: ***81*** шт.; ***10*** шт.; ***75*** шт.; ***18+k*** шт.; друга –***75***; ***14+k***; ***73***; ***59***; третя – ***92***; ***19***; ***25+k***; ***80***. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: ***12,1*** грн., ***5,3*** грн., ***6,2*** грн., ***2,1*** грн., в B_2 – ***3,5***; ***2,4***; ***3,3***; ***2,3***; в B_3 – ***3,3***; ***7,5***; ***3,5***; ***7,6***. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. ***A(k+2; k+3); B(k+1; k+6); C(k; k+1).***

6. Скласти найпростіше рівняння параболи, якщо відомо, що її фокус знаходиться в точці перетину прямої ***8x-5y-2=0*** з віссю ***Ox.***

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{x^2-(2+k)x+2k}{x^2+(3-k)x-3k}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+6}\dfrac{\sqrt{x-k+10}-4}{\sqrt{x-k+43}-7}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+1)x^4-(k+2)x^2+3k}{(k+2)x^3-(k+3)x^2-2k}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,7x}{3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+3}{5x-7}\right)^{2x+1}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=(x^6-kx^2-5)^k$; б) $y=ln(e^{2kx}-e^{-kx})$;

в) $y=arccos\sqrt[k]{x}$; г) $y=x^{2k+3}\,tg^5(kx+4)$; д) $y=\dfrac{1}{kx}arctg\,\left(x^{2k}+1\right)$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{12}x^2+5x+400$, а $p=25-\dfrac{1}{8}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Знайти висоту h у рівнобічній трапеції площею $16см^2$ і кутом 60° між бічною стороною і більшою основою, при якій сума бічних сторін і меншої основи була б найменшою.

11. $Q(p)=\dfrac{26p+k}{26p-k},S(p)=26p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y=16x(x-1)^2$.

ВАРІАНТ 27.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} 1 & k+2 & k+3 & -1 \\ -k-2 & 0 & -1 & k+4 \\ k & 1 & k+3 & -2 \\ k+2 & 7 & 1 & -k-4 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} -x_1-(k-2)x_2+2x_3=-5, \\ x_1+(k+1)x_2+x_3=2, \\ 3x_1-x_2+4x_3=5. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*105*	*1*	*4*	*2*	*1*
S_2	*125*	*3*	*2*	*4*	*k*
S_3	*80*	*2*	*1*	*3*	*1*

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: ***18+k*** шт.; ***10*** шт.; ***15*** шт.; ***24*** шт.; друга –***15***; ***14+k***; ***13***; ***50***; третя – ***12+k***; ***10***; ***12***; ***80***. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: *7,7* грн., ***3,6*** грн., ***2*** грн., ***2,1*** грн., в B_2 – ***3,7***; ***2,4***; ***2,9***; ***1,3***; в B_3 – *3*; *7*; ***3,5***; *7*. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. ***A***(***k+3***; ***k+8***); ***B***(***k+6***; ***k 0***); ***C***(***k+4***; ***k+2***).

6. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі ***Oy*** симетрично початку координат, якщо уявна вісь дорівнює $4\sqrt{3}$ і гіпербола проходить через точку (***6***; ***-4***).

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{x^2+(2-k)x-3(k+1)}{x^2-kx-k-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+7}\dfrac{\sqrt{x-k+29}-6}{\sqrt{x-k+9}-4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+3)x^2-(k+2)x+k}{(k+4)x^2+(k+5)x+3k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctg\ 2x}{ctg\ 4x}$;

д) $\left(\dfrac{n+4}{n-1}\right)^{2n-5}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=\dfrac{x^2+(2-k)x-3(k+1)}{x^2-kx}$;

б) $y=\dfrac{\cos 3x}{x^{2k}}$; в) $y=x^k\ln(k+\sqrt{x})$; г) $y=\dfrac{1}{k}arctg(x+4k)^3$;

д) $y=\sin(e^{kx}+4x)\sin x$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{20}x^2+8x+200$, а $p=24-\dfrac{1}{12}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Стовбур завдовжки *10* м має форму зрізаного конуса з діаметрами основ *1,5* і *0,5* м. Треба вирубати з цього стовбура балку з прямокутним поперечним перерізом, сторони якого відносяться, як *2:1*, а вісь збігається з віссю стовбура. Які мають бути розміри балки, щоб її об'єм був найбільшим?

11. $Q(p)=\dfrac{27p+k}{27p-k}, S(p)=27p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка:

$$y=\frac{x}{(x-2)(x-3)}.$$

ВАРІАНТ 28.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & k & k-4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & k+1 & 4-k \\ k & k+1 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} x_1-kx_2+x_3=7, \\ 4x_1+3x_2+2x_3=24, \\ 2x_1-(k-1)x_2-3x_3=4. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*65*	*1*	*3*	*1*	*2*
S_2	*98*	*2*	*1*	*3*	*1*
S_3	*110*	*3*	*1*	*2*	*k*

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: *18* шт.; *12+k* шт.; *16* шт.; *14* шт.; друга –*15*; *14*; *13+k*; *50*; третя – *12+k*; *10*; *12*; *80*. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: *8* грн., *3,7* грн., *2,7* грн., *2,8* грн., в B_2 – *3,2*; *1,4*; *3,3*; *2,3*; в B_3 – *3,2*; *7,4*; *3,5*; *7,2*. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст.

(Використати добуток матриць).

5. $A(k+4;\ k+2)$; $B(k+1;\ k+6)$; $C(k+1;\ k+5)$.

6. Еліпс, симетричний відносно осей координат, проходить через точки М($2\sqrt{3};\sqrt{6}$) і $A(6;\ 0)$. Написати його рівняння, знайти ексцентриситет і відстань від точки M до фокусів.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to -k}\dfrac{x^2+(k+2)x+2k}{x^2+(k-1)x-k}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+8}\dfrac{\sqrt{x-k+17}-5}{\sqrt{x-k+41}-7}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+4)x^5+(k+7)x+2k}{(k+1)x^7-(k+3)x^5}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{3x^2}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{3n}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=(5k-2x)tg^5(x+k)$;

б) $y=e^{-\sin kx}$; в) $y=\ln(kx^3+2)$; г) $y=(kx^4-2x^2+5)^7$;

д) $y=k\arccos\sqrt{2-6x^2}$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{22}x^2+6x+300$, а

$p=23-\dfrac{1}{12}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Знайти сторони прямокутника найбільшого периметра, вписаного в півколо радіуса r.

11. $Q(p)=\dfrac{28p+k}{28p-k}$, $S(p)=28p+2k$.

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка:

$$y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2-14x+4.$$

ВАРІАНТ 29.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} -k & -k-1 & -1 & k+2 \\ 3 & -4 & -1 & k-2 \\ k & k+1 & k & -k-2 \\ -k-1 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} x_1+(k-2)x_2+x_3=5, \\ x_1+kx_2+2x_3=6, \\ 3x_1+x_2+x_3=13. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	90	1	2	4	2
S_2	82	3	2	2	1
S_3	72	1	4	1	k

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: $18+k$ шт.; 10 шт.; 15 шт.; 14 шт.; друга – 15; $14+k$; 13; 50; третя - $12+k$; 10; 12; 80. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: 7 грн., 3 грн., 2 грн., $2{,}1$ грн., в B_2 – $3{,}6$; $1{,}4$; $2{,}7$; $2{,}3$; в B_3 – 4; $7{,}2$; $3{,}9$; $7{,}4$. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст.

(Використати добуток матриць).

5. $A(k+2;\ k+4)$; $B(k+4;\ k+2)$; $C(k;\ k+8)$.

6. Знайти координати центра і радіус кола $x^2+y^2+6x-y+37/4=0$. Зробити малюнок.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{x^2-kx-k-1}{x^2+(1-k)x-2(k+1)}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+9}\dfrac{\sqrt{x-k+7}-4}{\sqrt{x-k+16}-5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+7)x^3+(k+2)x-k}{(k+4)x^4+kx+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x\cdot ctg\,2x$; д)

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n-6}\right)^{2n-4}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=x\cdot\sin^{2k}3x$; б) $y=\ln\sqrt[k]{1-x^5}$;

в) $y=\dfrac{x^{3k}}{tg(4x+k)}$; г) $y=\dfrac{2}{x+3k}arctg(2x+k)$; д) $y=\cos kx\cdot e^{x^2+4}$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{16}x^2+12x+150$, а

$p=43-\dfrac{1}{15}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Число ***48*** розкласти на ***2*** доданки так, щоб їхній добуток був найбільшим.

11. $Q(p)=\frac{29p+k}{29p-k}, S(p)=29p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y=x\sqrt{1-x^2}$.

ВАРІАНТ 30.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k & k+1 & 1 & k-2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & k \\ -k & -k-1 & k-1 & 2-k \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-1, \\ -x_1+(k+2)x_2+4x_3=16, \\ 2x_1-kx_2-x_3=-11. \end{cases}$$

2. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*100*	*1*	*3*	*2*	*k*
S_2	*90*	*3*	*1*	*1*	*3*
S_3	*110*	*2*	*2*	*3*	*2*

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4 , яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: ***28+k*** шт.; ***20*** шт.; ***25*** шт.; ***34*** шт.;

друга –***25***; ***24+k***; ***33***; ***50***; третя – ***32***; ***40***; ***12+k***; ***80***. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: ***7,9*** грн., ***3,9*** грн., ***2,9*** грн., ***2,1*** грн., в B_2 – ***3,5***; ***2,4***; ***3,3***; ***3,3***; в B_3 – ***4***; ***8***; ***4,5***; ***7***. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст.

(Використати добуток матриць).

5. ***A***(***k+1***; ***k+1***); ***B***(***k+1***; ***k+2***); C(***k+5***; ***k+4***).

6. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, симетричної відносно осі ***Oy*** і відсікаючої на бісектрисі I і III координатних кутів хорду довжиною $4\sqrt{6}$.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+2}\frac{x^2+(1-k)x-3(k+2)}{x^2-(4+k)x+2(k+2)}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+10}\frac{\sqrt{x-k+26}-6}{\sqrt{x-k+39}-7}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(k+8)x^3+(k+2)x-3k}{(k+2)x^4+(k+9)x+k}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{5x}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=\frac{x^2+k^2}{\sin kx}$; б) $y=arctg\frac{2kx}{x+3k}$;

в) $y=2^{kx}$; г) $y=\ln(\sin kx+kx)$; д) $y=tg\,3x\,e^{\sin kx}$.

9. Підприємство за місяць виготовляє ***x*** одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\frac{1}{14}x^2+18x+400$, а

$p=32-\frac{1}{10}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції ***x***, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Якою має бути висота конуса, вписаного в кулю радіуса R, щоб його бічна поверхня була найбільшою?

11. $Q(p)=\dfrac{30p+k}{30p-k}, S(p)=30p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка:

$$y=(1/3)\cdot x^3-2x^2+3x+1.$$

Варіант №31

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k+1 & 3 & 4 & -k-1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -k-1 & -3 & 7 & k+1 \\ 4 & 1 & 4 & k \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} 2x_1-(k+1)x_2+3x_3=9, \\ x_1-x_2-2x_3=8, \\ 3x_1+kx_2+x_3=17. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	87	2	1	3	1
S_2	91	3	2	2	k
S_3	55	1	1	2	2

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: 28 шт.; k шт.; 5 шт.; 34 шт.; друга – 35; $49+k$; 37; 50; третя – $12+k$; 20; 22; 80. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: 7 грн., 3, 6 грн., 2, 9 грн.,

2, 5 грн., в B_2 – 3; 3, 4; 4, 3; 3, 3; в B_3 – 5; 7, 6; 3, 5; 7. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. $A(k+6;\ k+2)$; $B(k+2;\ k+5)$; $C(k+3;\ k+1)$.

6. Дано еліпс $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{16}=1$. Скласти рівняння гіперболи, вершини якої містяться в фокусах, а фокуси - у вершинах даного еліпса.

7.Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+3}\dfrac{x^2-(2+k)x-k-3}{x^2-(6+k)x+3(k+3)}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+11}\dfrac{\sqrt{x-k+53}-8}{\sqrt{x-k+14}-5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+3)x^3+(k+2)x}{(k+9)x^3+8k}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 9x\cdot ctg\,5x$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-5}{2n+6}\right)^{n+4}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=\dfrac{\sin 3x}{k\sqrt{x}}$; б) $y=\sqrt[3]{x^k}\cos(x+k)$; в)

$y=\dfrac{2}{k}tg^2\dfrac{x}{2k}$; г) $y=\ln\sqrt[3]{x}\cdot 2^{kx^2}$; д) $y=\ln\sqrt[3]{x}\,e^{2kx}$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. **С**умарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{12}x^2+12x+200$, а

$p=32-\dfrac{1}{8}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Число 16 розкласти на два доданки так, щоб сума їх квадратів була найменшою.

11. $Q(p)=\dfrac{31p+k}{31p-k}, S(p)=31p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка:

$$y=(x+1)/(x+5).$$

ВАРІАНТ 32.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & k \\ -3 & k+1 & -2 & k-1 \\ -1 & -2 & 2 & k+1 \\ -1 & -1 & 1 & k+2 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} kx_1 - 2x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ (k+2)x_1 + 3x_2 + x_3 = -9. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	73	1	1	2	1
S_2	161	2	3	4	k
S_3	113	3	1	2	2

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: ***45*** шт.; ***30*** шт.; ***45*** шт.; ***24+k*** шт.; друга –***45***; ***46***; ***32***; ***50***; третя – ***32+k***; ***60***; ***2+k***; ***0***. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: ***8,9*** грн., ***3,7*** грн., ***2,8*** грн., ***2,5*** грн., в B_2 – ***3***; ***7,4***; ***5,3***; ***1,3***; в B_3 – ***3,9***; ***7,8***; ***3,5***; ***7***. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. $A(k+1;\ k+1)$; $B(k+4;\ k+4)$; $C(k+3;\ k+3)$.

6. Знайти траєкторію точки М, яка під час руху залишається вдвічі ближчою до точки **A**(***-1***; ***0***), ніж до прямої $x=-3$.

7. Знайти границі функцій:а) $\lim\limits_{x\to k+4} \dfrac{x^2-(2+k)x-2(k+4)}{x^2+(1-k)x-5(k+4)}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+12} \dfrac{\sqrt{x-k+37}-7}{\sqrt{x-k+52}-8}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(k+5)x^3-(k+1)x^2+4k}{(k+7)x^4-(k+8)x^2+16k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x+\sin 2x}{6x}$

; д) $\lim\limits_{x\to 0} (1+3x)^{\frac{10}{x}}$.

8. Знайти похідну функцій: а) $y=(x^2+k)\cdot 2x$; б) $y = \ln\dfrac{x-3}{x+4k}$;

в) $y = \dfrac{\operatorname{ctg} kx}{kx^3}$; г) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x^3}{2k}$; д) $y = x\ln\left(x^4+k\right)$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. **С**умарні витрати виробництва описуються функцією $V = \dfrac{1}{18}x^2 + 14x + 400$, а

$p = 24 - \dfrac{1}{12}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Знайти висоту циліндра найбільшого об'єму, який можна вписати в кулю радіуса *R*.

11. $Q(p) = \dfrac{32p+k}{32p-k}$, $S(p) = 32p + 2k$.

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка:

$$y = 2x^2 - \ln x .$$

ВАРІАНТ 33.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & k+2 & 4-k \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ k-1 & k+1 & 3 & -1 \\ k & -1 & 1 & k-4 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} (k+2)x_1 - x_2 - 3x_3 = -6, \\ kx_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -15. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	***80***	***3***	***2***	***2***	***3***
S_2	***89***	***2***	***1***	***4***	***1***
S_3	***107***	***1***	***3***	***4***	***k***

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Першафірма виробила цих видів продукції відповідно: ***81*** шт.; ***80*** шт.; ***65+k*** шт.; ***114*** шт.; друга –***95***; ***44+k***; ***93***; ***50***; третя –***222***; ***90***; ***32+k***; ***88***. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: ***27*** грн., ***13*** грн., ***12,1*** грн., ***3,1*** грн., в B_2 – ***3***; ***7,8***; ***2,3***; ***1,3***; в B_3 – ***7***; ***7,8***; ***3,9***; ***7,6***. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. ***A***(***k***; ***k+2***); ***B***(***k+4***; ***k+8***); ***C***(***k+4***; ***k***).

6. Знайти координати центра і радіус кола $x^2+y^2-4x+2y-76=0$. Зробити малюнок.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+2}\dfrac{x^2+(1-k)x-3(k+2)}{x^2-(1+k)x-k-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+13}\dfrac{\sqrt{x-k+23}-6}{\sqrt{x-k+12}-5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+3)x^2-(k+2)x+2k}{3k+(k+3)x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,6x}{5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{5x+4}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=2ktg\sqrt{x}-kx^3$; б) $y=ln\dfrac{k+3x}{k-2x}$;

в) $y=(kx^4-3x+4)^{k+2}$; г) $y=arctg\dfrac{k}{x}$; д) $y=e^{2x}\cos\dfrac{2x}{3k}$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. ***С***умарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{12}x^2+24x+300$, а

$p=48-\dfrac{1}{24}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Під яким кутом α потрібно збити три однакових дошки, щоб одержати водонапірний жолоб найбільшої місткості.

11. $Q(p)=\dfrac{33p+k}{33p-k}$, $S(p)=33p+2k$.

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y=\dfrac{4-x^2}{x+3}$.

ВАРІАНТ 34.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & k+3 & -k \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ k+1 & k-1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -k-3 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} (k+3)x_1+3x_2+2x_3=14, \\ (k+1)x_1+2x_2-8x_3=0, \\ x_1-x+3x_3=-1. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	***80***	***2***	***3***	***2***	***k***
S_2	***80***	***1***	***4***	***2***	***3***
S_3	***120***	***3***	***2***	***4***	***2***

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірмавиробила цих видів продукції відповідно: ***8+k*** шт.; ***10*** шт.; ***35*** шт.; ***64*** шт.; друга –***54***; ***46+k***; ***35***; ***510***; третя – ***222***; ***40***; ***52+k***; ***80***. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: ***7,8*** грн., ***3,9*** грн., ***2,7*** грн., ***2,1*** грн., в B_2 – ***3,9***; ***5,4***; ***6,3***; ***2,3***; в B_3 – ***3,8***; ***7,8***; ***3,5***; ***7,9***. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. ***A***(***k+3***; ***k***); ***B***(***2+k***; ***k+3***); ***C***(***k+1***; ***k+3***).

6. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точки $M(5/2; \sqrt{6}/4)$ і $N(-2;\ \sqrt{15}/5)$. Зробити малюнок.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+3}\dfrac{x^2-(2+k)x-k-3}{x^2+(1-k)x-4(k+3)}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+14}\dfrac{\sqrt{x-k+35}-7}{\sqrt{x-k+22}-6}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+3)x^2-(k+6)x}{2k+(k+5)x-2k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=\arcsin e^{3xk}$; б) $y=\ln\dfrac{ktgx+1}{tgx-2}$; в) $y=x^{2k}e^{x^3}$;

г) $y=(x^5-kx^3+3)^{k+3}$; д) $y=\sin\dfrac{x}{k}e^{kx^2}$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. *С*умарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{14}x^2+5x+200$, а

$p=37-\dfrac{1}{18}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Знайти розміри відкритого басейну з квадратним дном об'ємом $32м^3$, за яких на облицювання його стін і дна пішла б найменша кількість матеріалу.

11. $Q(p)=\dfrac{34p+k}{34p-k}$, $S(p)=34p+2k$.

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y=x^3/(x^2-4)$.

ВАРІАНТ 35.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k+2 & -k-1 & 1 & -k-2 \\ -k+3 & 3 & -1 & -2 \\ -4 & 0 & 1 & k \\ -k-2 & k & -1 & k+2 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} x_1-5x_2+3x_3=-32, \\ (k+2)x_1-3x_2+x_3=-16, \\ (k+3)x_1-x_2-2x_3=4. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*110*	*1*	*4*	*2*	*1*
S_2	*80*	*2*	*1*	*3*	*2*
S_3	*94*	*3*	*2*	*2*	k

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: *8* шт.; *2+k* шт.; *6* шт.; *4* шт.; друга – *15*; *24*; *k*; *40*; третя – *5+k*; *6*; *7*; *80*. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: *7* грн., *1,8* грн., *5,8* грн., *3,1* грн., в B_2 – *2*; *0,9*; *2,7*; *1,9*; в B_3 – *3,8*; *7,1*; *3,5*; *7,1*. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. $A(k+1; k)$; $B(k+4; k+6)$; $C(k+2; k+2)$.

6. Точка M (*6*; *-2*) лежить на гіперболі, рівняння асимптот якої $y=\pm\dfrac{2}{3}x$.

Скласти рівняння гіперболи. Зробити малюнок.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to -(k+1)}\dfrac{x^2+(k-1)x-2(k+1)}{x^2+(k-4)x-5(k+1)}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{\sqrt{x-k+80}-9}{\sqrt{x-k+3}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+4)x^3+(k+3)x^2+(k+2)x+2k}{(k+2)x^4+(k+1)x^2-2k}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=tgx\cdot\cos 3kx$; б) $y=\ln\dfrac{k+x^2}{x^{2k}-1}$;

в) $y=(x^6-kx^4+3x+5)^{2k}$; г) $y=\dfrac{1}{x}arctgkx^5$; д) $y=\sin\sqrt[3]{x+2k}$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. ***С***умарні витрати виробництва описуються функцією $V=\frac{1}{12}x^2+8x+100$, а

$p=30-\frac{1}{10}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Довести, що з усіх прямокутних земельних ділянок, які мають заданий периметр ***2***р, найбільшу площу має квадратна

11. $Q(p)=\frac{35p+k}{35p-k}, S(p)=35p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка:

$$y=12x^5-15x^4-20x^3+30x^2.$$

ВАРІАНТ 36.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k+1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ -k-1 & 1 & -1 & 3 \\ -12-1 & -2 & -3 & k \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} kx_1+4x_2+x_3=17, \\ (k+3)x_1-x_2+2x_3=-11, \\ 3x_1+2x_2+4x_3=-2. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*105*	*1*	*2*	*1*	*3*
S_2	*100*	*3*	*1*	*2*	*k*
S_3	*170*	*2*	*3*	*2*	*1*

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: ***7+k*** шт.; ***19*** шт.; ***5*** шт.; ***18*** шт.; друга –***7***; ***4+k***; ***9***; ***53***; третя – ***23***; ***10***; ***22+k***; ***80***. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: ***7,6*** грн., ***3,7*** грн., ***2,7*** грн., ***2,1***грн., в B_2 – ***3***; ***7,4***; ***2,3***; ***2,3***; в B_3 – ***3,8***; ***7***; ***3,8***; ***7***. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. ***A***(***k+2***; ***k+2***); ***B***(***k+3***; ***k+4***); ***C***(***k***; ***k+6***).

6. Написати рівняння параболи і її директриси, якщо парабола проходить через точку перетину прямої $x+y=0$ і кола $x^2+y^2+4y=0$ і симетрична відносно осі ***Oy***. Побудувати коло, пряму і параболу.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to-(k+2)}\frac{x^2+(1+k)x-k-2}{x^2+kx-2(k+2)}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+2}\frac{\sqrt{x-k+62}-8}{\sqrt{x-k+23}-5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(k+5)x^3-(k+1)x^2+2k-3}{2k+(k+7)x^3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-2}{5x+1}\right)^{3x}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=\frac{\cos^2 x}{k+\cos x}$; б) $y=(kx^5-4x^2+3)^{3k}$;

в) $y=\sqrt{x+k}\cdot tg2kx$; г) $y=arctg\,\frac{5x+2}{k+3}$; д) $y=3^{kx}\cdot\ln\frac{4x+k}{4x-k}$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. ***С***умарні витрати виробництва описуються функцією $V=\frac{1}{40}x^2+14x+200$, а

$p=27-\frac{1}{12}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Знайти розміри такого циліндричного бака, який би мав найбільший об'єм при заданій повній поверхні ***S***.

11. $Q(p)=\frac{36p+k}{36p-k}, S(p)=36p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$.

ВАРІАНТ 37.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} 2 & -k-1 & -k & -k-1 \\ -1 & k+2 & -k-3 & 2 \\ -2 & k+1 & k+1 & k+1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} -x_1-(k+1)x_2-2x_3=-9, \\ 2x_1+(k+2)x_2-4x_3=2, \\ 3x_1-x_2+x_3=17. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	130	2	3	3	1
S_2	85	1	2	2	3
S_3	115	3	1	3	k

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: ***78***шт.; ***10+k*** шт.; ***25*** шт.; ***27*** шт.; друга –***5+k***; ***4***; ***3***; ***50***; третя – ***8***; ***50***; ***32+k***; ***80***. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: ***7,9*** грн., ***3,9*** грн., ***2,5*** грн., ***2,6*** грн., в B_2 – ***3,6***; ***1,4***; ***2,6***; ***2,3***; в B_3 – ***3,8***; ***7,1***; ***4,5***; ***7***. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. $A(k+3;\ k+3)$; $B(k;\ k+6)$; $C(k+6;\ k+-6)$.

6. Скласти рівняння геометричного місця точок, однаково віддалених від початку координат і прямої $y=5$.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to-(k+3)} \dfrac{x^2+(k-1)x-4(k+3)}{x^2+(2+k)x-k-3}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+3} \dfrac{\sqrt{x-k+78}-9}{\sqrt{x-k+33}-6}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(k+3)x^6+(k+2)x-k-5}{(k+2)x+x^3-(k+1)x^5}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-3}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=(2+kx)tg2x$; б) $y=arctg\dfrac{x+2k}{3x-k}$;

в) $y=ln\dfrac{x^2+3kx}{x+k}$; г) $y=(kx^4-2kx^3+5)^3$; д) $y=e^{2x}(\sin kx+2k\cos x)$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{12}x^2+6x+100$, а

$p=42-\dfrac{1}{12}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Які розміри повинна мати циліндрична водонапірна башта з поверхнею S, щоб її об'єм був найбільшим?

11. $Q(p)=\dfrac{37p+k}{37p-k}$, $S(p)=37p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка:

$$y=\frac{x}{(x-1)(x+2)}.$$

ВАРІАНТ 38.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k & 1 & k+2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -2k \\ -k & k & -k-2 & -3 \\ -1 & k+1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} 2x_1-kx_2-x_3=9, \\ x_1+(k+6)x_2+2x_3=12, \\ 4x_1-x_2+3x_3=33. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	***67***	***1***	***1***	***3***	***k***
S_2	***82***	***2***	***3***	***1***	***3***
S_3	***74***	***2***	***1***	***3***	***1***

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: ***8+k*** шт.; ***10*** шт.; ***15*** шт.; ***14*** шт.; друга –***15***; ***14***; ***13+k***; ***50***; третя – ***12***; ***10+k***; ***12***; ***80***. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: ***7,3*** грн., ***3,8*** грн., ***2,1*** грн., ***2,3*** грн., в B_2 – ***3,9***; ***3,4***; ***2,3***; ***2,3***; в B_3 – ***3,4***; ***7,3***; ***3,5***; ***7,8***. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст.
(Використати добуток матриць).

5. $A(k+5;\ k)$; $B(k+1;\ k+2)$; $C(k+4;\ k+5)$.

6. Знайти координати центра і радіус кола $x^2+y^2+10x-4y+29=0$.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to 2k+1}\dfrac{x^2+(1-2k)x-2(2k+1)}{x^2-2kx-2k-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+4}\dfrac{\sqrt{x-k+12}-4}{\sqrt{x-k+60}-8}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+9)x-7k}{3k+(k+7)x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2}{1-\cos 4x}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{3n}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=e^{2kx}\cos\sqrt[k]{x}$; б) $y=\ln\dfrac{2+k\sin x}{1-\sin 3x}$; в) $y=(x+k)^2\,3^{kx}$; г) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{3x+k}{2x-1}$;

д) $y=x^3\sin^{2k}3x$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{14}x^2+18x+100$, а $p=41-\dfrac{1}{8}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Із прямокутного листа заліза шириною ***60*** см і довжиною ***90*** см виготовляють ящик: по кутах вирізають квадрати і загинають краї, що залишились. Знайти розмір квадратів, які вирізають, щоб зробити ящик найбільшої місткості.

11. $Q(p)=\dfrac{38p+k}{38p-k},\ S(p)=38p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка:

$$y=x^3-3x^2-9x+11.$$

ВАРІАНТ 39.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k-1 & k & -5 & k+1 \\ k+6 & -1 & 2 & -6 \\ -k & k & 3 & 2 \\ 1-k & -k & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-4x_3=17, \\ 5x_1+kx_2-x_3=34, \\ x_1-(k-4)x_2+3x_3=10. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	***50***	***1***	***1***	***2***	***1***
S_2	***80***	***3***	***2***	***2***	***3***
S_3	***100***	***1***	***3***	***4***	***k***

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: ***8*** шт.; ***k*** шт.; ***5*** шт.; ***14*** шт.; друга –***5***; ***4+k***; ***3***; ***50***; третя – ***2***; ***0***; ***2+k***; ***80***. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1

відповідно: *7* грн., *3* грн., *2* грн., *2,1* грн., в $B_2 - 3$; *0,4*; *2,3*; *1,3*; в $B_3 - 3$; *7*; *3,5*; *7*. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. $A(k+1;\ k)$; $B(k+7;\ k+3)$; $C(k+4;\ k+4)$.

6. Скласти рівняння лінії, для кожної точки якої сума відстаней від точок $F_1(2;\ 0)$ і $F_2(-2;\ 0)$ дорівнює $2\sqrt{5}$.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to 2k+3} \dfrac{x^2+(1-2k)x-4(2k+3)}{x^2-2(1+k)x-2k-3}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+5} \dfrac{\sqrt{x-k+4}-3}{\sqrt{x-k+76}-9}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(k+1)x^2-(k+2)x-2k}{(k+3)x^2+(k+4)x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \sin 4x\ ctg\ 2x$; д) $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{4}{x}}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y = \ln(1+5kx)^2$; б) $y = \dfrac{\cos\ 3x}{k^2+2kx^2}$;

в) $y = 3x\,tg(2kx-3)$; г) $y = \dfrac{x}{3k} arctg\sqrt{x+k}$; д) $y = \sin(2x+k)\cos kx^2$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V = \dfrac{1}{12}x^2 + 5x + 300$, а $p = 26 - \dfrac{1}{16}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, прибуток при цих умовах

10. Бак об'ємом *4* м^2, який має форму паралелепіпеда з квадратною основою і відкритий зверху, потрібно покрити оловом. Якими мають бути розміри бака, щоб на його покриття пішла найменша кількість матеріалу?

11. $Q(p) = \dfrac{39p+k}{39p-k},\ S(p) = 39p + 2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка:

$$y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 1 .$$

ВАРІАНТ 40.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k & -k & -k & 5 \\ k+6 & -4 & k-5 & k+1 \\ -k & k & 4 & -5 \\ 3 & -k-3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} 6x_1 - kx_2 + 2x_3 = 30, \\ 2x_1 - (k+2)x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*60*	*2*	*2*	*1*	*3*
S_2	*80*	*1*	*3*	*2*	*1*
S_3	*100*	*3*	*1*	*3*	*k*

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: *8+k* шт.; *0* шт.; *15* шт.; *14* шт.; друга *–5*; *4+k*; *23*; *50*; третя *–12*; *k*; *2*; *80*. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: *7* грн., *3* грн., *2* грн., *2,1* грн., в $B_2 - 3$; *0,4*; *2,3*; *1,3*; в $B_3 - 3$; *7*; *3,5*; *7*. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. $A(k+5;\ k+2)$; $B(k+3;\ k+7)$; $C(k+2;\ k+3)$.

6. Знайти ексцентриситет гіперболи, асимптота якої утворює з віссю OX кут $60°$.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to 2k-1} \dfrac{x^2+(3-2k)x-4k+2}{x^2+2(1-k)x-2k+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+6} \dfrac{\sqrt{x-k+19}-5}{\sqrt{x-k+43}-7}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(k+6)x^4+(k+2)x}{(k+1)x^2+(k+5)x-3k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\ 2x}{\sin\ x}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5n+1}{5n-2}\right)^{5n+1}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y = x^{2k}\cos\sqrt[3]{kx}$; б) $y = (kx^4 - 3x + 7)^{2x}$;
в) $y = \ln tg\dfrac{2kx}{3}$; г) $y = 4^{kx}\sin\dfrac{x+k}{2^{kx}}$; д) $y = \arcsin(3x^2 + k)$.

9. Підприємство за місяць виготовляє х одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V = \dfrac{1}{16}x^2 + 61x + 500$, а $p = 34 - \dfrac{1}{12}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції х, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Залізний стержень довжиною 1 м зігнутий в прямокутник. Які розміри цього прямокутника, якщо його площа найбільша?

11. $Q(p) = \dfrac{40p + k}{40p - k}, S(p) = 40p + 2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y = 3x^3 - 6x^2$.

ВАРІАНТ 41.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k & k+1 & k+2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -k & k+2 & -k-2 & 0 \\ 4 & 4 & k & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 22, \\ 2x_1 + kx_2 + x_3 = 17, \\ -3x_1(k+3)x_2 + 2x_3 = -15. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*60*	*1*	*2*	*2*	*1*
S_2	*100*	*3*	*1*	*3*	*2*
S_3	*70*	*2*	*2*	*1*	*k*

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: ***8*** шт.; ***0*** шт.; ***5+k*** шт.; ***14*** шт.; друга ***–5***; ***4+k***; ***3***; ***50***; третя – ***2***; ***k***; ***2***; ***80***. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: *7* грн., ***3*** грн., ***2*** грн., ***2,1*** грн., в $B_2 - 3$; ***0,4***; ***2***, ***3***; ***1***,***3***; в $B_3 - 3$; *7*; ***3***,***5***; *7*. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. ***A***(***k+9***; ***k+2***); ***B***(***k+3***; ***k+3***); ***C***(***k+6***; ***k+1***).

6. Написати рівняння прямих, які проходять через точку ***M***(**-5; 2**) і паралельні асимптотам гіперболи $9x^2 - 4y^2 = 36.$

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to 2k}\dfrac{x^2 + 2(1-k)x - 4k}{x^2 + (3-2k)x - 6k}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+7}\dfrac{\sqrt{x-k+2} - 3}{\sqrt{x-k+74} - 9}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+2)x^3 + (k+3)x^5}{(k+7)x^3 - (k+1)x + 5k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,2x}{10x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + 2\sin x)^{\frac{5}{\sin x}}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y = \ln^{2k}(1-2x)$; б) $y = x^5 ctg\,3kx$;

в) $y = \dfrac{x - e^{2kx}}{kx + e^{2x}}$; г) $y = \sin\left(2x^k\right)\cos\left(k - x^2\right)$; д) $y = tg\dfrac{2x}{k}arc\,ctg(3kx + 1)$.

9. Підприємство за місяць виготовляє ***x*** одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V = \dfrac{1}{14}x^2 + 9x + 600$, а $p = 36 - \dfrac{1}{13}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції ***x***, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Сіткою довжиною ***200 м*** потрібно огородити прилягаючу до будинку прямокутну ділянку найбільшої площі. Знайти її розміри.

11. $Q(p) = \dfrac{41p + k}{41p - k}, S(p) = 41p + 2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y = \sqrt{3 - x} + x$.

ВАРІАНТ 42.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & k \\ k+1 & k+2 & -k & -k \\ 1 & 2 & k+1 & -k \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} 5x_1+(k+3)x_2-4x_3=-8, \\ -x_1+(k+1)x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2+2x_3=-14. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*120*	*2*	*3*	*2*	*1*
S_2	*105*	*1*	*2*	*3*	k
S_3	*55*	*2*	*1*	*1*	*3*

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: *8* шт.; k шт.; *5* шт.; *14* шт.; друга –*5*; *4*; *3+k*; *50*; третя – *2*; k; *2*; *80*. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: *7* грн., *3* грн., *2* грн., *2,1* грн., в B_2 – *3*; *0,4; 2,3; 1,3*; в B_3 – *3*; *7*; *3,5*; *7*. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. $A(k+1; k+7)$; $B(k+2; k)$; $C(k+2; k+1)$.

6. Знайти траєкторію т. $M(x; y)$, яка рухається так, що сума квадратів її віддалей від т. $A(-a; 0)$, $B(0; a)$ і $C(a; 0)$ залишається рівною $3a^2$.

7.Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+6}\dfrac{x^2-(3+k)x-3(k+6)}{x^2-(4+k)x-2(k+6)}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+8}\dfrac{\sqrt{x-k+56}-8}{\sqrt{x-k+28}-6}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+3)x^2-(k+5)x+10k}{k-kx+(k+7)x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 ctg\, 3x^2-3}{\cos 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{8+x}{x}}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin kx}$; б) $y=\ln\sqrt[5]{5kx-1}$;

в) $y=arctg\sqrt{kx-1}$; г) $y=tg\dfrac{2x+k}{x^2-2}$; д) $y=\ln\sin(kx^2-4)$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{12}x^2+5x+500$, а

$p=38-\dfrac{1}{15}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Знайти найбільший об'єм циліндричної посудини, у якої повна поверхня дорівнює S.

11. $Q(p)=\dfrac{42p+k}{42p-k}, S(p)=42p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка:

$$y=\frac{x^4}{4}+\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x.$$

ВАРІАНТ 43.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k & k+1 & k+1 & -k-1 \\ 2 & -2 & 3 & k \\ -k & -k-1 & 4 & k+1 \\ -1 & 0 & 2 & k+2 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+(k+1)x_3=7, \\ x_1-3x_2+kx_3=14, \\ 5x_1+x_2+x_3=22. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*70*	*2*	*3*	*1*	*1*
S_2	*100*	*2*	*2*	*3*	*k*
S_3	*100*	*1*	*3*	*3*	*1*

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: *8* шт.; *0* шт.; *5* шт.; *14+k* шт.; друга – *5*; *4+k*; *3*; *50*; третя – *2*; *k*; *2*; *80*. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: *7* грн., *3* грн., *2* грн., *2,1* грн., в B_2 – *3*; *0,4*; *2,3*; *1,3*; в B_3 – *3*; *7*; *3,5*; *7*. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. $A(k+3;\ k+2)$; $B(k+3;\ k+4)$; $C(k+1;\ k+3)$.

6. На гіперболі $x^2-4y^2=16$ взята т. M з ординатою, яка дорівнює *1*. Знайти відстань від неї до фокусів.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+5}\dfrac{x^2+(1-k)x-6(k+5)}{x^2-(3+k)x-2(k+5)}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+9}\dfrac{\sqrt{x-k+72}-9}{\sqrt{x-k+7}-4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{kx^2-(k+2)x-3k}{5k+(k+1)x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,tg\,3x}{1-\cos 6x}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+1}{4n-1}\right)^{-3n}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=5^x\ln 3kx$; б) $y=\ln 2kx\cdot e^{2\sin x}$;

в) $y=tg^{3k}x$; $y=arctg\,(k-3x^2)$; д) $y=xe^{2k\,tgx^4}$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{14}x^2+8x+300$, а $p=40-\dfrac{1}{18}x$ -залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Основа трикутного залізного листа дорівнює l, а його периметр - $2p$. Знайти такі дві інші сторони, щоб площа була найбільшою.

11. $Q(p)=\dfrac{43p+k}{43p-k},S(p)=43p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y=(x-2)\sqrt{x}$.

ВАРІАНТ 44.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k+3 & k+2 & k+1 & k \\ 2+k & -k-1 & k & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ -k-3 & 5 & -k-1 & -k \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3=10, \\ -x_1+5x_2+kx_3=-16, \\ 2x_1+x_2+(k+1)x_3=10. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*100*	*1*	*2*	*3*	*1*
S_2	*80*	*3*	*2*	*1*	*2*
S_3	*100*	*2*	*4*	*1*	*k*

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: *8* шт.; *k* шт.; *5* шт.; *14* шт.; друга – *5+k*; *4*; *3*; *50*; третя – *2*; *0*; *2+k*; *80*. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: *7* грн., *3* грн., *2* грн., *2,1* грн., в B_2 – *3*; *0,4*; *2,3*; *1,3*; в B_3 – *3*; *7*; *3,5*; *7*. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст.
(Використати добуток матриць).

5. $A(k+5;\ k+1)$; $B(k;\ k+3)$; $C(k+1;\ k+4)$.

6. Знайти точки еліпса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$, відстань яких від правого фокуса дорівнює 1.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+4}\frac{x^2-(k+3)x-k-4}{x^2+(2-k)x-6(k+4)}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+10}\frac{\sqrt{x-k+15}-5}{\sqrt{x-k+71}-9}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(k+1)x^3+(k+5)x-2k}{2k+(k+1)x^2-(k+3)x^4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin5x}{tg5x}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n-2}\right)^{3n+1}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=e^{k\sin 2x}\sqrt{\cos kx}$; б) $y=\frac{e^{kx}}{(x+1)^3}$;

в) $y=ln\sqrt{(x+4k)^3}$; г) $y=2x\,arctg\left(3x+x^k\right)$; д) $y=(x^2+1)^{3k}\cdot 4^{2x}$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\frac{1}{14}x^2+12x+700$, а $p=36-\frac{1}{10}x$ -залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Сіткою довжиною 140 м потрібно огородити прилягаючу до будинку прямокутну ділянку найбільшої площі. Знайти розміри прямокутної ділянки.

11. $Q(p)=\frac{44p+k}{44p-k}, S(p)=44p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка:

$$y=x^4-4x^3+6x^2-4x.$$

ВАРІАНТ 45.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} -6 & -k-5 & -3 & -k-8 \\ -k-1 & -3 & -2 & -5 \\ 6 & k+5 & 5 & k+8 \\ k+1 & k-1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} x_1-3x_2+kx_3=4, \\ 4x_1+x_2-(k-2)x_3=29, \\ 3x_1+2x_2+(k+4)x_3=23. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	70	2	1	3	1
S_2	90	3	2	2	k
S_3	80	1	3	1	2

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: *8* шт.; *10* шт.; *5+k* шт.; *14* шт.; друга – *5*; *4+k*; *3*; *50*; третя – *2*; *k*; *2*; *80*. Ціна *1* шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: *7* грн., *3* грн., *2* грн., *2,1* грн., в B_2 – *3*; *0,4*; *2,3*; *1,3*; в B_3 – *3*; *7*; *3,5*; *7*. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. $A(k+3;\ k+3)$; $B(k+1;\ k+1)$; $C(k+2;\ k+5)$.

6. Задана рівностороння гіпербола $x^2-y^2=8$. Знайти рівняння еліпса,фокуси якого знаходяться у фокусах гіперболи, якщо відомо, що еліпс проходить через точку $A(4;\ 6)$.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+1}\frac{x^2+(4-k)x-5(k+1)}{x^2+(2-k)x-3(k+1)}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+11}\frac{\sqrt{x-k+25}-6}{\sqrt{x-k+53}-8}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(k+2)x^4-(k+3)x^3+3k}{(k+7)x^4+x-8k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{7x}$; д). $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{5}{x}}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=x^6\cos 5kx$; б) $y=arctg(5-x^k)$;

в) $y=ln\left(1-\frac{k}{x}\right)$; г) $y=e^{x^2+1}\left(x^{3k}+2^x\right)$; д) $y=sin\left(\frac{x-2k}{kx^2-1}\right)$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\frac{1}{16}x^2+11x+300$, а

$p=28-\frac{1}{12}x$ -залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Потрібно виготовити закритий циліндричний бак, об'єм якого дорівнює $8\ м^3$. Якими мають бути його розміри, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу?

11. $Q(p)=\frac{45p+k}{45p-k},S(p)=45p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y=(x+3)\sqrt{x}$.

ВАРІАНТ №46.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 & k-2 \\ -k & 5 & 3 & 4 \\ k+1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -k & k & 2-k \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+kx_3=18, \\ 3x_1+5x_2-3x_3=25, \\ x_1+x_2-(k-2)x_3=7. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	80	2	3	1	k
S_2	70	1	2	3	4
S_3	260	7	10	2	1

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: $7+k$ шт.; 8 шт.; 4 шт.; 12 шт.; друга – 8; $9+k$; 3; 25; третя – 7; 7; $9+k$; 21. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: 7 грн., 9 грн., 4 грн., $4,1$ грн., в B_2 – 8; $2,4$; $4,5$; $1,6$; в B_3 – 2; 5; $7,5$; 2. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. $A(k+1;\ k+1)$, B($k+2$; $k+5$), C($k+4$; $k+4$).

6. Скласти рівняння кола, яке проходить через точки $A(5;\ 0)$, $B(1;4)$, якщо центр лежить на прямій $x+y-3=0$.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+2}\frac{x^2+(5-k)x-7(k+2)}{x^2-(1+k)x-k-2}$; б)

$\lim\limits_{x\to k+12}\frac{\sqrt{x-k+37}-7}{\sqrt{x-k+13}-5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+(k+2)x^2-(k+5)x+k}{(k+2)x^3+x^2+(k+2)x-k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos 4x^2}{x^2 ctg\ 3x}$; д)

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{4+x}\right)^x$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=\sin 2x\sqrt{4-3kx^2}$; б) $y=xtg5kx+3^{kx}$; в)

$y=\ln\sqrt{x^{3k}-1}$; г) $y=arctg\frac{k}{2x+3}$; д) $y=\frac{2x-2}{3x+k}\cos\frac{x-k}{2}$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\frac{1}{10}x^2+7x+200$,

а $p=39-\frac{1}{22}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Бічні сторони і менша сторона земельної ділянки трапецеїдальної форми становлять $16\ м$ кожна. Знайти таку її більшу основу, щоб площа була найбільшою.

11. $Q(p)=\frac{46p+k}{46p-k},S(p)=46p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y=\frac{x^3}{x^2-4}$.

ВАРІАНТ 47.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k+3 & k+1 & 1 & k+3 \\ k+1 & 0 & k & 1 \\ -k-3 & 3 & -1 & -k-3 \\ 2 & 1 & 0 & -k \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} x_1+3x_2+(k+4)x_3=18, \\ 7x_1-x_2+kx_3=16, \\ 3x_1-3x_2+2x_3=-6. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	140	2	4	3	2
S_2	70	2	1	1	1
S_3	190	4	5	3	k

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: **65** шт.; **30** шт.; **35** шт.; **12+k** шт.; друга –**9**; **4+k**; **8**; **58**; третя – **9+k**; **30**; **12**; **39**. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: **7,9** грн., **3,5** грн., **2,8** грн., **3,1** грн., в B_2 – **2,3**; **3**, **4**; **6,3**; **8,3**; в B_3 – **5**; **7,9**; **3,5**; **7,3**. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. $A(k+1;\ k+2)$; $B(k+5;\ k+3)$; $C(k+6;\ k+4)$.

6. Скласти рівняння гіперболи, яка проходить через точку $M(8\sqrt{2};6)$, якщо асимптоти гіперболи задані рівняннями $y=\pm\frac{3}{4}x$.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+3}\frac{x^2+(3-k)x-6(k+3)}{x^2-(2+k)x-k-3}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+13}\frac{\sqrt{x-k+68}-9}{\sqrt{x-k+51}-8}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(k+3)x^3+x-2k}{(k+2)x^4+kx^3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2arctg2x}{3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x}\right)^{x/2}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=\sin\frac{x}{2k}-\cos\frac{kx}{2}$; б) $y=\ln\frac{x+5}{\sqrt[k]{x^2+1}}$;

в) $y=\sqrt{x}\cdot\sin 5kx$; г) $y=arctg\ln(2x+1)$; д) $y=\sin^3(x+2k)+\sin^2(3kx)$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\frac{1}{12}x^2+5x+300$, а $p=38-\frac{1}{10}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Які повинні бути висота H, радіус основи R, твірна прямого кругового конуса, щоб при заданій бічній поверхні S він мав найбільший об'єм?

11. $Q(p)=\frac{47p+k}{47p-k}, S(p)=47p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка:

$$y=\frac{x^3}{3+2x^2-21x+5}.$$

ВАРІАНТ 48

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 2+k \\ -k-1 & -k-2 & 1 & -1 \\ k & k+1 & k & 1 \\ k+1 & k+2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} kx_1+3x_2-2x_3=13, \\ 3x_1-2x_2+x_3=-9, \\ (k+4)x_1+x_2+3x_3=8. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид си-	Запаси си-	Витрати сировини на одиницю продукції

ровини	ровини	P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*420*	*5*	*3*	*4*	*2*
S_2	*250*	*4*	*1*	*2*	*3*
S_3	*490*	*7*	*4*	*2*	*k*

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: ***18*** шт.; ***10+k*** шт.; ***15*** шт.; ***24*** шт.; друга –***15+k***; ***14***; ***13***; ***50***; третя – ***12+k***; ***10***; ***12***; ***80***. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: *7*, *7* грн., ***3***, ***6*** грн., ***2*** грн., ***2***, ***1*** грн., в B_2 – ***3***, *7*; ***2***, ***4***; ***2***, ***9***; ***1***, ***3***; в B_3 – ***3***; *7*; ***3***, ***5***; *7*. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. $A(k+2;\ k+2)$; $B(k+3;\ k+5)$; $C(k+4;\ k+1)$.

6. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі Oy, симетрично початку координат, якщо уявна вісь дорівнює $4\sqrt{3}$ і гіпербола проходить через точку (6; -4).

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+4}\dfrac{x^2-(3+k)x-k-4}{x^2+(1-k)x-5(k+4)}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+14}\dfrac{\sqrt{x-k+11}-5}{\sqrt{x-k+22}-6}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+8)x^2-kx-12k}{9k-(k+1)x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2ctg\ 3x}{ctg\ x}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+3}{3n-2}\right)^{3n-5}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=\dfrac{\cos 3x}{x^{2k}}$; б) $y=\sin\dfrac{2x-1}{kx+3}e^{-3x}$;

в) $y=\arcsin(2kx^3)$; г) $y=arctg\left(3x+\sqrt[k]{2x+4}\right)$; д) $y=x\ln(1+\sqrt[k]{x})$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{14}x^2+5x+300$, а $p=30-\dfrac{1}{11}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Потрібно виготовити циліндричну посудину заданого об'єму V, відкриту зверху. Знайти такі її радіус і висоту, щоб поверхня була найменшою.

11. $Q(p)=\dfrac{48p+k}{48p-k},\ S(p)=48p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка:

$$y=\frac{x}{(x-1)(x+2)}.$$

ВАРІАНТ 49.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k+1 & 0 & k & -k \\ 4 & 3 & 2 & 1+k \\ 3 & 2 & 1 & 1-k \\ -k-1 & k & -k & k \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=5, \\ kx_1+2x_2-2x_3=2, \\ (k+1)x_1+3x_2+5x_3=19. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*330*	*2*	*5*	*3*	*4*
S_2	*200*	*1*	*3*	*2*	*k*
S_3	*280*	*2*	*4*	*3*	*5*

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: ***81*** шт.; ***80*** шт.; ***65+k*** шт.; ***114*** шт.; друга –***95***; ***44+k***; ***93***; ***50***; третя –***222***; ***90***; ***32***; ***88+k***. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: ***27*** грн., ***13*** грн., ***12,1*** грн., ***3,1*** грн., в B_2 – ***3***; *7,8*; ***2,3***; ***1,3***; в B_3 – *7*; *7,8*; ***3,9***; *7,6*. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. $A(k;\ k)$; $B(k+2;\ k+2)$; $C(k+4;\ k+4)$.

6. Знайти координати центра і радіус кола $x^2+y^2-4x+2y-76=0$. Зробити малюнок.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to k+6}\dfrac{x^2-(7+k)x+k+6}{x^2-(5+k)x-k-6}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+15}\dfrac{\sqrt{x-k+49}-8}{\sqrt{x-k+34}-7}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+2)x^2+(k+3)x-2k}{3k+(k+2)x-(k+5)x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2tg5x}{3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+2}{2x-2}\right)^{3x-2}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=2ktg\sqrt{x}-\sqrt{x}$; б) $y=ln\sqrt[3]{(k-3x)^2}$;

в) $y=arcsin(3-kx)$; г) $y=cos\dfrac{x^5}{5k}$; д) $y=arctg\sqrt{kx+1}$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V=\dfrac{1}{11}x^2+12x+124$, а

$p=33-\dfrac{1}{10}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Переріз тунелю має форму прямокутника з насадженим півкругом. Периметр перерізу ***а м***. За яких розмірів його сторін площа перерізу буде найбільшою?

11. $Q(p)=\dfrac{49p+k}{49p-k}, S(p)=49p+2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка:

$$y=x^5-5x^4+5x^3+2.$$

ВАРІАНТ 50.

1. Обчислити визначник (двома способами):

$$\begin{vmatrix} k & -2 & -1 & -k \\ -k-1 & k+1 & k & k+1 \\ 2 & -k-3 & -2 & k+3 \\ k+1 & -k-1 & 5 & -k-1 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь (трьома методами):

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3=8, \\ (k+1)x_1+x_2-3x_3=11, \\ kx_1+2x_2+5x_3=-11. \end{cases}$$

3. Для виготовлення чотирьох видів продукції P_1, P_2, P_3, P_4 використовують три види сировини S_1, S_2, і S_3. Запаси сировини та норми витрат наведені в таблиці:

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	*210*	*3*	*5*	*5*	*1*
S_2	*160*	*4*	*2*	*3*	*1*
S_3	*250*	*2*	*7*	*7*	*k*

Визначити кількість одиниць продукції P_1, P_2, P_3, P_4, яку можна виготовити, якщо при цьому вся сировина буде повністю використана. Вказати базовий розв'язок.

4. Три фірми виробили чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4. Перша фірма виробила цих видів продукції відповідно: *8* шт.; *0* шт.; *15+k* шт.; *14* шт.; друга –*5*; *4+k*; *33*; *50*; третя – *2+k*; *0*; *2*; *80*. Ціна 1 шт. продукції (в гривнях) в місті B_1 відповідно: *1,7* грн., *3* грн., *2* грн., *2, 1* грн., в B_2 – *3*; *2,4*; *2,3*; *1,3*; в B_3 – *3*; *7*; *3,5*; *7*. Визначити дохід, який одержать фірми від продажу даної продукції в кожному з міст. (Використати добуток матриць).

5. $A(k+2;\ k)$; $B(k+4;\ k+5)$; $C(k+5;\ k+3)$.

6. Написати канонічне рівняння гіперболи, якщо відстані однієї з вершин до фокусів дорівнюють *9* і *1*.

7. Знайти границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to-(k+5)}\dfrac{x^2+(3+k)x-2k-10}{x^2+(12+k)x+7(k+5)}$;

б) $\lim\limits_{x\to k+16}\dfrac{\sqrt{x-k+48}-8}{\sqrt{x-k+65}-9}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(k+2)x^5+2k}{(k+3)x^3+3kx^2-5k}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3tg5x}{2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+sin\,x)^{\frac{3}{sin\,x}}$.

8. Знайти похідні функцій: а) $y=\dfrac{x-e^{2kx}}{e^{2x}}$; б) $y=x^5ctg3kx$;

в) $y=ln^2(1-2kx)$; г) $y=\sqrt{arctg\left(3\sqrt{x}+x^2\right)}$; д) $y=sin^k(x+3)$.

9. Підприємство за місяць виготовляє x одиниць продукції. Сумарні витрати виробництва описуються функцією $V = \frac{1}{15}x^2 + 7x + 300$, а $p = 22 - \frac{1}{10}x$ - залежність між ціною і кількістю одиниць продукції x, яку можна продати по цій ціні. Розрахувати за яких умов прибуток буде максимальним. Визначити маржинальні і сумарні витрати, а також прибуток при цих умовах.

10. Бічні сторони і менша сторона земельної ділянки трапецеїдальної форми дорівнюють ***10 м*** кожна. Знайти її більшу основу так, щоб площа була найбільшою.

11. $Q(p) = \frac{50p + k}{50p - k}, S(p) = 50p + 2k.$

12. Дослідити функцію і побудувати ескіз графіка: $y = \frac{-x^2 + 3}{x + 2}$.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ №2

ВАРІАНТ №1.

1. Мале підприємство виробляє товари ***A*** і ***B***. Загальні щоденні витрати ***V*** (у гривнях) на виробництво ***x*** одиниць товару ***A*** та ***y*** одиниць товару ***B*** відомі: $V=250-4x-7y+0{,}2x^2+0{,}1y^2$. Визначити кількість одиниць товарів ***A*** і ***B***, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a=\frac{1}{2}\%, b=1\%, c=\frac{3}{2}\%, M=(3000+k)\,грн, L=125\cdot k, K=9\,млн.грн.$

3.

X	**505**	**515**	**520**	**530**	**535**	**540**	**550**	**555**
Y	**220**	**215**	**206**	**204**	**200**	**199**	**191**	**190**

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int e^{\sin kx}\cos kx\,dx$;

б) $\int (3k+x)^2\sin kx\,dx$; в) $\int \frac{x^3+(2-k)x^2+kx-10}{x^2-x(3+k)-k-4}dx$;

г) $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$; д) $\int \sin^3 x\cos^3 x\,dx$; е) $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданою лінією: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{k^2}=1$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y^2=2px$, $x=h$ навколо осі ***Oy***.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=4+\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t)=16-2\sqrt[3]{t^2}$.

Тут ***V*** і ***D*** вимірювали у мільйонах гривень, а ***t*** – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $x^{k+1}\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0$; б) $y'=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x};\ y=\frac{\pi}{2}$ при $x=1$;

в) $(x+k)y'+y=k(x+k)^{k-1}$; г) $y''-5y'k+4yk^2=0$, $y|_{x=0}=5$, $y'|_{x=0}=8$;

д) $y''-(2k+1)y'+2ky=(kx^2+3)e^{kx}$.

9. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+k)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n+k)^3}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+k^2}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{k^n}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3x^n}{k^n}$.

ВАРІАНТ №2.

1. Мале підприємство виробляє товари ***A*** і ***B***. Загальні щоденні витрати ***V*** (у гривнях) на виробництво ***x*** одиниць товару ***A*** та ***y*** одиниць товару ***B*** відомі: $V=360-6x-8y+0{,}3x^2+0{,}4y^2$. Визначити кількість одиниць товарів ***A*** і ***B***, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a=1\%, b=2\%, c=3\%, M=3000\,грн, L=125\cdot k, K=9\,млн.грн.$

3.

X	**100**	**115**	**120**	**125**	**140**	**145**	**150**	**160**
Y	**300**	**290**	**270**	**260**	**230**	**225**	**220**	**200**

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int \frac{x^{2k+1}dx}{1+x^{2k+2}}$; б) $\int (2kx+k+2)\,arctg\,x\,dx$;

в) $\int \frac{x^3-(k+1)x^2+(k+4)x}{x^2-(1+k)x-k-2}dx$;

г) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt[3]{x^2}}dx$; д) $\int \sin 3x\cos 5x\,dx$; е) $\int \frac{3dx}{1+\cos x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $xy=k$; $x=1$; $x=4$; $y=0$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$ навколо осі ***Oy***.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=1+2\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=17-2\sqrt[3]{t^2}$ Тут ***V*** і ***D*** вимірювали у мільйонах гривень, а ***t*** – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $y'+y^{-k}tgx=0$; б) $y'=\frac{y}{x}(1+\ln y-\ln x)$; $y=e$ при $x=1$;

в) $y'+2xy=2xe^{-x^2}$; г) $y''+3y'k+2yk^2=0$, $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=-1$;

д) $y''+(1-k)y'-2(k+1)y=(x+k)e^{-2x}$.

9. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{(2k+1)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{(2n-1)^2}}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n(k+1)^n}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2k}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{\sqrt{kn+4}}$.

ВАРІАНТ №3.

1. Мале підприємство виробляє товари ***A*** і ***B***. Загальні щоденні витрати ***V*** (у гривнях) на виробництво ***x*** одиниць товару ***A*** та ***y*** одиниць товару ***B*** відомі: $V=450-5x-6y+0,1x^2+0,3y^2$. Визначити кількість одиниць товарів ***A*** і ***B***, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a=\frac{3}{2}\%, b=3\%, c=\frac{9}{2}\%, M=3000\,грн, L=125\cdot k, K=9\,млн.грн.$

3.

X	150	160	165	168	170	180	190	200
Y	80	75	74	60	58	50	40	30

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int\frac{\sin(k+3)xdx}{\sqrt{5-2\cos(k+3)x}}$;

б) $\int\frac{k+2}{k+3}x^2e^{\frac{x}{k+1}}dx$; в) $\int\frac{x^3-kx^2-(k+3)x+2}{x^2-x(2+k)+k+1}dx$;

г) $\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$; д) $\int\cos^3x\sin^2xdx$; е) $\int\frac{dx}{2+\sin x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями:

$y^2=x+\frac{k+1}{k+2}$; $x=\frac{3}{k+1}$; $y=0$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y^2=4-x$, $x=0$ навколо осі ***Oy***.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=2+2\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=10-2\sqrt[3]{t^2}$.

Тут ***V*** і ***D*** вимірювали у мільйонах гривень, а ***t*** – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $\sqrt[k+1]{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0$;

б) $(x\cos\frac{y}{x}+y\sin\frac{y}{x})ydx-(y\sin\frac{y}{x}-x\cos\frac{y}{x})xdy=0$; $y=\frac{\pi}{3}$ при $x=1$;

в) $k(x^2+1)y'-2xy=kx(x^2+1)$; г) $y''+4yk^2=0$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=2$; д) $y''+(3-k)y'-3ky=(k+3)\sin kx$.

9. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(k+3)^n}{(2n+3)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k(n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2k}}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{kn+1}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{kn}{n+2k}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^n$.

ВАРІАНТ №4.

1. Мале підприємство виробляє товари ***A*** і ***B***. Загальні щоденні витрати ***V***(у гривнях) на виробництво ***x*** одиниць товару ***A*** та ***y*** одиниць товару ***B*** відомі: $V=306-7x-4y+0,1x^2+0,2y^2$. Визначити кількість одиниць товарів ***A*** і ***B***, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a=2\%, b=2\%, c=6\%, M=3000\,грн, L=125\cdot k, K=9\,млн.грн.$

3.

X	400	405	410	420	425	440	445	450
Y	120	118	110	105	102	90	95	80

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int\frac{\cos(k+1)xdx}{\sqrt[5]{\sin^2(k+1)x}}$;

б) $\int(k+3)arctg(2k+1)xdx$; в) $\int\frac{x^3-2kx^2-9x-27}{x^2+(3-2k)x-6k}dx$;

г) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$; д) $\int\sin^5x\cos^2xdx$; е) $\int\frac{dx}{\sin x+1}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y=x^2+4kx-5k^2$, $y=0$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y=\sin x$ (однією півхвилею), $y=0$ навколо осі ***Ox***.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=3+3\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=23-2\sqrt[3]{t^2}$.

Тут ***V*** і ***D*** вимірювали у мільйонах гривень, а ***t*** – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $tgx\,sin^2 ydx + cos^2 xctg^{k-1} ydy = 0$; б) $y' = \dfrac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2}$; $y=2$ при $x=-1$; в) $(x^2+1)y' + 4xy = k$; г) $y'' + 2y'(k+1) = 0$, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$;

д) $y'' + (k-4)y' - 4ky = (k+1)x^2 + (k+2)x + k + 5$.

9. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{k+1}}{2^{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+k}{n^2+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{k+2}{3n}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2+\dfrac{k}{n+1}}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^n}{\left(k/7\right)^n}$.

ВАРІАНТ №5.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=386-3x-5y+0{,}1x^2+0{,}1y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a = \frac{5}{2}\%, b = 5\%, c = \frac{15}{2}\%, M = 3000\,грн, L = 125 \cdot k, K = 9\,млн.грн.$

3.

X	300	305	315	325	340	345	350	360
Y	150	140	140	130	120	116	100	80

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int \dfrac{cos(k+2)xdx}{7-sin(k+2)x}$;

б) $\int x^{3k}\, ln(2k+3)xdx$; в) $\int \dfrac{x^3+3x^2-2}{x^2+(3k-1)x-3k}dx$;

г) $\int \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+2}dx$; д) $\int cos^3 x\, sin^5 xdx$; е) $\int \dfrac{dx}{1+2\cos x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями:
$y = (k+1)x$, $y = k$, $x = 10$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $x^2 - y^2 = 4$, $y = \pm 2$ навколо осі Oy.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t) = 4 + 3\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 24 - 2\sqrt[3]{t^2}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy + y^k dx = 0$;

б) $(x-y)dx + xdy = 0$; $y = 0$ при $x = 1$; в) $xy' + 2y = cos\,kx$;

г) $y'' = \dfrac{y}{k^2}$, $y|_{x=0} = k$, $y'|_{x=0} = 0$;

д) $y'' - (k+5)y' + 3(k+2)y = ((k+5)x + 3k)e^{3x}$.

9. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{ln\,(n+1)}{(3+k)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(kn+2)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+|sin\,kn|}{n}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n kn^2}{n^3+1}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n x^n}{(2k+1)n}$.

ВАРІАНТ №6.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=412-4x-6y+0{,}2x^2+0{,}3y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a = 3\%, b = 6\%, c = 9\%, M = 3000\,грн, L = 125 \cdot k, K = 9\,млн.грн.$

3.

X	240	245	250	260	275	285	290	310
Y	160	150	130	128	120	110	100	70

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int x^k \sqrt{(k+4) + 3x^{k+1}}dx$;

б) $\int \dfrac{(k+6)xdx}{(k+5)cos^2 kx}$; в) $\int \dfrac{3x^3 + 3kx^2 - 48k - 2}{x^2 + x(k-4) - 4k}dx$;

г) $\int \dfrac{\sqrt{x}dx}{x + \sqrt[3]{x^2}}$; д) $\int cos^6 2xdx$; е) $\int \dfrac{dx}{4 + 6\cos x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями:
$y = 3k^2 - 2kx - x^2$, $y = 0$.

6. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y = \frac{1}{2+x}$, $x = \pm 1$, $y = 0$ навколо осі Ox.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t) = 2 + 2\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 22 - 3\sqrt[3]{t^2}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння та розв’язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $(1+x)y^k dx + (1-y)x^k dy = 0$; б) $y - xy' = x + yy'$; $y = 0$ при $x = 1$;

в) $xy' + ky = x^{2-k}\cos x$; г) $y'' + 3y'(k+2) = 0$,

$y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 3$;

д) $y'' + (1-3k)y' - 3ky = (2k+1)\cos x + (3k-1)\sin x$.

9. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(k+1)^n}{n^4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{kn^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{kn}(n+1)}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+k}}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n(kn+3)}x^n$.

ВАРІАНТ №7.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=501-5x-7y+0,1x^2+0,5y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a = \frac{7}{2}\%, b = 7\%, c = \frac{21}{2}\%, M = 3000 грн, L = 125\cdot k, K = 9 млн.грн.$

3.

X	350	355	360	365	375	380	400	410
Y	85	80	80	75	70	60	40	38

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int\frac{dx}{(k+2)x\ln^2 kx}$;

б) $\int e^{(k+2)x}\cos(3k-1)x\,dx$; в) $\int\frac{4x^3-4kx^2+5x+6k+22}{x^2+x(2-k)-2k}dx$;

г) $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}\,dx}{1+\sqrt{x}}$; д) $\int\sin^3 x\cos^4 x\,dx$; е) $\int\frac{dx}{e^{2x}+e^x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y = x^3$, $y = k$, $x = 0$.

6. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$ навколо осі Oy.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t) = 5 + 2\sqrt[3]{t^2}$, $D(t) = 10 - 3\sqrt[3]{t^2}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння та розв’язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $xy' = 2y^k$; б) $xy' = y\ln\frac{y}{x}$; $y = 1$ при $x = 1$;

в) $y' - ky\sin x = e^{-k\cos x}\sin kx$;

г) $y'' - 5ky' + 6yk^2 = 0$, $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 1$;

д) $y'' + 2(k+2)y' + 8ky = (5k-3)x^2 + (k+1)x + k - 1$.

9. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+k)^3}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-k}{3n^4}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n+3)k^{3n}}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{k^{n+1}}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{kn+2}{n+k}\right)x^n$.

ВАРІАНТ №8.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=370-8x-6y+0,2x^2+0,3y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2.
$a = 4\%, b = 8\%, c = 12\%, M = 3000 грн, L = 125\cdot k, K = 9 млн.грн.$

3.

X	110	120	125	135	140	150	160	170
Y	240	220	212	200	190	160	150	120

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int \frac{(k+1)dx}{x(1+ln(k+2)x)}$;

б) $\int (x^2+k)\sin kxdx$; в) $\int \frac{2x^3+(2-6k)x^2+3kx-3}{x^2+x(1-3k)-3k}dx;$

г) $\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$; д) $\int \sin^4 x\cos^3 xdx$; е) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y=e^{kx}$, $x=0$, $x=5$, $y=0$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y=ax-x^2\,(a>0)$, $y=0$ навколо осі ***Ox.***

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=6+2\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=11-3\sqrt[3]{t^2}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках**.** Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $y'\sin^2 x=y\ln^k y$; б) $y=x(y'-e^{\frac{y}{x}});$ $y=0$ при $x=1$;

в) $xy'+ky=\frac{k}{x}$; г) $y''+2ky'+yk^2=0$, $y|_{x=1}=1$, $y'|_{x=1}=2$;

д) $y''+(1-k)y'+k-2=((7k-1)x+3)e^x$.

9. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{k\ln(n+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k+1}{n^2+k}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3k}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{k\,3^{2n}}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(3+k)^n\cdot(n+2)}$.

ВАРІАНТ № 9.

1. Мале підприємство виробляє товари ***A*** і ***B***. Загальні щоденні витрати ***V*** (у гривнях) на виробництво ***x*** одиниць товару ***A*** та ***y*** одиниць товару ***B*** відомі: $V=390-2x-9y+0{,}1x^2+0{,}3y^2$. Визначити кількість одиниць товарів ***A*** і ***B***, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними**.**

2. $a=\frac{9}{2}\%, b=9\%, c=\frac{27}{2}\%, M=3000\,грн, L=125\cdot k, K=9\,млн.грн.$

3.

X	200	205	210	240	245	250	270	280
Y	140	130	128	110	106	104	90	70

4. Знайти невизначені інтеграли:а) $\int e^{\cos(k+3)x}\sin(k+3)xdx$;

б) $\int x^{k+3}\ln(5k-1)xdx$; в) $\int \frac{2x^3+2kx^2-k^3}{x^2+kx-2k^2}dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x^2}-1)}$; д) $\int \cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx$; е) $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y=\ln(k+1)x$, $x=7$, $y=0$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y=e^x$, $x=0$, $x=2$, $y=0$ навколо осі ***Ox.***

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=7+\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=12-4\sqrt[3]{t^2}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках**.** Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $ctg^k x\cos^2 ydx+\sin^2 xtg^k ydy=0$; б) $x^2-y^2+2xyy'=0;$ $y=2$ при $x=2$;

в) $ky'-4xy=kx$; г) $y''-9yk^2=0$, $y|_{x=0}=3$, $y'|_{x=0}=2$;

д) $y''+(1-5k)y'-5ky=(k+2)x^2+kx+5.$

9. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+k)^3}{(k+1)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^2}{3(k+1)n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k+2}{n^3+4}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+k}}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\sqrt{n(k+1)}}$.

ВАРІАНТ №10.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=368-9x-7y+0,3x^2+0,1y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a=5\%, b=10\%, c=15\%, M=3000\,грн, L=125\cdot k, K=9\,млн.грн.$

3.

X	95	100	102	110	120	125	130	140
Y	202	200	190	180	170	150	142	120

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int \frac{k\sin(k+1)x\,dx}{3k-(k+2)\cos(k+1)x}$;

б) $\int (kx^2+3k-1)\cos x\,dx$; в) $\int \frac{3x^3+(3k-14)x^2-(13k+3)x-8k}{x^2+(k-5)x-5k}dx$;

г) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}$; д) $\int \sin^3 x\cos^{14} x\,dx$; е) $\int \frac{dx}{4+5\sin x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y^2=x^3$, $x=k$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y=e^x$, $x=0$, $y=e$ навколо осі Oy.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=8+3\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=13-2\sqrt[3]{t^2}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $y'\cos^2 x - y\ln^k y=0$; б) $y'=\frac{(x-y)y}{x^2}$; $y=2$ при $x=1$;

в) $y'+\frac{y}{\sqrt{x^2+k}}=3x$; г) $y''-4y'k+3yk^2=0$, $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=-1$;

д) $y''+2(3k+1)y'+12ky=k\sin x$.

9. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(k+2)\frac{(n+1)!}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{kn^2+k^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+2k}}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+3)^k}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2k)x^n}{5^n}$.

ВАРІАНТ №11.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=505-10x-3y+0,2x^2+0,1y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a=\frac{11}{2}\%, b=11\%, c=\frac{33}{2}\%, M=3000\,грн, L=125\cdot k, K=9\,млн.грн.$

3.

X	70	75	80	82	85	90	95	100
Y	210	205	195	190	180	170	150	130

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int \frac{\sqrt{1+\ln((k+5)x}}{(4k-1)x}dx$;

б) $\int k\arccos kx\,dx$; в) $\int \frac{2x^3+2x^2(4k+1)+x(8k-2)-12k+1}{x^2+x(4k+1)+4k}dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt[3]{x^2}}$; д) $\int \cos 6x\sin x\,dx$; е) $\int \frac{e^{3x}dx}{e^{2x}-1}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y=k^2x^2+4kx-3$, $y=kx+1$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y=4ax$, $x=0, y=4a$ навколо осі Oy.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=9+4\sqrt[3]{t^2}, D'(t)=14-\sqrt[3]{t^2}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $\frac{e^{-y^2}}{(x^2+4)^k}dy+\frac{x}{y}dx=0$; б) $xyy'=2y^2-x^2$; $y=2$ при $x=2$;

в) $xy'-ky=x^k+1$; г) $y''-y'(k+1)=0$, $y|_{x=2}=1$, $y'|_{x=2}=\frac{1}{2}$;

д) $y'' + (3k-4)y' - 12ky = (3k+1)\cos 4x$.

9. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)}{(n+1)^k}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{kn}{\sqrt{n^2+2}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, 3^{n+k}}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3k+1)^n}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{3^n \sqrt[3k]{n}}$.

ВАРІАНТ №12.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=499-11x-2y+0{,}2x^2+0{,}1y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a = 6\%, b = 12\%, c = 18\%, M = 3000\,грн, L = 125 \cdot k, K = 9\,млн.грн.$

3.

X	410	415	425	440	450	450	455	470
Y	180	175	170	160	158	155	140	120

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int \frac{3kx^{4k-1}}{\sqrt[6]{1-x^{4k}}}dx$;

б) $\int \frac{\ln(k+2)x}{(6k-1)x}dx$; в) $\int \frac{x^3-(4k+2)x^2+(8k+3)x-4(k+1)}{x^2-2x(2k+1)+8k}dx$;

г) $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$; д) $\int \sin^3 2x \cos^2 2x dx$; е) $\int \frac{e^x+1}{e^x-1}dx$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями:

$y = \ln\frac{x}{k+1}$, $x = k+2$, $y = 0$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y = \sin x$ (однією півхвилею) і відрізком $0 \le x \le \pi$ осі Ox навколо осі Ox.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t) = 2 + 2\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 18 - 2\sqrt[3]{t^2}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $(1+y^3)^k x dx - (1+x^2)^k y^2 dy = 0$;

б) $y' = -\frac{x+y}{x}$; $y = 1$ при $x = 2$; в) $y' \cos x - ky \sin x = \frac{2}{\cos^{k-2} x}$;

г) $y'' - y(k+2)^2 = 0$, $y|_{x=1} = 2$, $y'|_{x=1} = 3$;

д) $y'' + (5-4k)y' - 20ky = (k+5)x^2 + 3kx - 2$.

9. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{kn+1}{n!}$;б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+k)^2}$;в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\sqrt{n+k}}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{kn+1}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2k)^n (n+1)}$.

ВАРІАНТ №13.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=398-12x-3y+0{,}5x^2+0{,}1y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a = \frac{13}{2}\%, b = 13\%, c = \frac{39}{2}\%, M = 3000\,грн, L = 125 \cdot k, K = 9\,млн.грн.$

3.

X	220	225	230	240	250	255	260	280
Y	302	300	290	280	270	264	260	240

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int \frac{e^{tg(k+3)x}}{\cos^2(k+3)x}dx$;

б) $\int (3k-2)x \sin(2k+3)x dx$; в) $\int \frac{x^3+(5k+3)x^2+15kx-10k+6}{x^2+x(5k+3)+15k}dx$; г)

$\int \frac{\sqrt{x+1}+x}{\sqrt{x+1}-1}dx$;

д) $\int \cos^{10} x \sin^3 x dx$; е) $\int \frac{e^{2x}}{e^x-1}dx$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y=\dfrac{\sqrt{x}}{2k}$, $y=0$, $x=k^2$.

6. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y=x^2$, $y=3$ навколо осі Ox.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=13+2\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t)=18-3\sqrt[3]{t^2}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння та розв’язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $y' tgx=k^2 y$; б) $(x^2+y^2)dx-2xydy=0;$ $y=1$ при $x=2$;

в) $xy'+ky=\dfrac{2x^k}{1+x^2}$; г) $y''+y(k+1)^2=0$, $y|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$, $y'|_{x=0}=5$;

д) $y''-(7+k)y'+7ky=(k+3)xe^{7x}$.

9. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!(2n+1)^2}{k^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+k)ln^2(n+k)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{k+2}{5n^2}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+3k}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n(nk+4)}x^n$.

ВАРІАНТ №14.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=441-14x-4y+0,7x+0,1y$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a=7\%, b=14\%, c=21\%, M=3000грн, L=125\cdot k, K=9млн.грн.$

3.

X	**80**	**84**	**90**	**95**	**100**	**110**	**120**	**140**
Y	**300**	**290**	**288**	**280**	**260**	**255**	**230**	**200**

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int\sqrt[3]{6k-sin(k+5)x}\,cos(k+5)xdx$;

б) $\int\sqrt[k+1]{x^{k+2}}\,ln(7k-2)xdx$; в) $\int\dfrac{2x^3+(12k-2)x^2+4(1-3k)x+6k-3}{x^2+x(6k-1)-6k}dx$;

г) $\int\dfrac{xdx}{\sqrt[3]{5x-1}}$; д) $\int tg^3 2xdx$; е) $\int\dfrac{dx}{5+3cos\,x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y=k\,sin\,x$, $y=k\,cos\,x$, $x=0$.

6. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ навколо осі Ox.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=9+2\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t)=29-3\sqrt[3]{t^2}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння та розв’язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $x^k yy'=1-x^2$; б) $ydx+(2\sqrt{xy}-x)dy=0;$ $y=1$ при $x=1$;

в) $xy'+ky=x^{3-k}\,cos\,x$; г) $2k^2y=y''+ky'$, $y|_{x=1}=0$, $y'|_{x=1}=1$;

д) $y''-(k-6)y'-6ky=k^2\,cos\,6x$.

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(k+1)^n\,ln(n+2)}{n^2}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{k}{(n+2)ln^3(n+2)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{k+1}{n\,5^{n+1}}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{ln\,(kn+3)}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{kn+1}{n+2k}\right)x^n$.

ВАРІАНТ №15.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=299-2x-11y+0,1x^2+0,2y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a=\dfrac{15}{2}\%, b=15\%, c=\dfrac{45}{2}\%, M=3000грн, L=125\cdot k, K=9млн.грн.$

3.

X	**90**	**92**	**95**	**100**	**110**	**112**	**120**	**125**
Y	**150**	**145**	**142**	**130**	**120**	**115**	**100**	**90**

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int \sqrt[5]{k+\cos kx}\, \sin kx dx$;

б $\int (x^2+4k+1)e^{-\frac{x}{k+2}}dx$; в) $\int \frac{2x^3-2(5k-2)x^2-20k(x-1)+8}{x^2-x(5k-2)-10k}dx$;

г) $\int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}dx$; д) $\int \sin x \sin 3x dx$; е) $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y = ktgx$, $y = k, x = 0$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y = 4x - x^2$, $y = 0$ навколо осі Ox.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t) = 8 + 3\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 28 - 2\sqrt[3]{t^2}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $y - xy' = k(1 + x^2 y')$; б) $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx;$ $y = 0$ при $x = 1$;

в) $y' + ky = e^{-2kx}$; г) $y'' - 2ky' + 2yk^2 = 0$, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = -1$;

д) $y'' + (2 - 7k)y' - 14ky = (8k - 3)x^2 + k$.

9. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n)!}{n^{2k+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3k}{n^3 + k}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 2k}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\left(1+\frac{n}{2}\right)}{n+\frac{k}{2}}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n x^n}{6^{(k+1)n}\sqrt[3]{n}}$.

ВАРІАНТ №16.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: V=331-3x -12y+0, 1x ^{2}+0, 5y^2. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a = 8\%, b = 16\%, c = 24\%, M = 3000грн, L = 125 \cdot k, K = 9млн.грн.$

3.

X	500	505	510	520	525	540	545	550
Y	220	218	205	200	200	180	170	150

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int \frac{\ln(k+5)x}{kx}dx$;

б) $\int k \arcsin kx dx$; в) $\int \frac{x^3-(6k-1)x^2+6k(x+1)}{x^2-3(2k+1)x+18k}dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{2x-1}}$; д) $\int \sin^3 x dx$; е) $\int \frac{dx}{3-5\cos x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y = \frac{1}{x+1}$, $x = k + 1$, $y = 2k$.

6. Знайти об'єм тіла обертання, обмеженого заданими лініями $y = 2x - x^2$, $y = 2 - x$ навколо осі Ox.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t) = 10 + \sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 12 - \sqrt[4]{t^3}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $(1+e^x)^k yy' = e^x$; б) $(x - y\cos\frac{y}{x})dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0;$ $y = 0$ при $x = 1$; в) $y'(1+x^2) - 2kxy = (1+x^2)^{k+1}$; г) $2ky' + k^2 y = 3y''$, $y|_{x=0} = -1$, $y'|_{x=0} = 2$;

д) $y'' - (k+6)y' - (k+7)y = (k+6)xe^{-x}$.

9. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{2k+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3k}{n^2+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+2k}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\left(1+\frac{n}{2}\right)}{n+\frac{k}{2}}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n x^n}{6^{(k+1)n}\sqrt[3]{n}}$.

ВАРІАНТ №17.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: ***V=432-4x -14y+0,2x²+0,7y²***. Визначити кількість одиниць товарів ***A*** і ***B***, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a=\frac{17}{2}\%, b=17\%, c=51\%, M=3000 грн, L=125\cdot k, K=9 млн.грн.$

3.

X	**450**	**455**	**460**	**470**	**480**	**485**	**490**	**500**
Y	**300**	**295**	**294**	**280**	**250**	**240**	**220**	**200**

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int \sqrt[7]{\sin(k+1)x-2k}\cdot \cos(k+1)x dx$; б) $\int (x^2+6k-5)e^{(3k+1)x}dx$;

в) $\int \frac{kx^3-4kx^2+5kx+1}{x^2-3x+2}dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{x+3}}$;

д) $\int \sin 5x\cos 6x dx$; е) $\int \frac{dx}{5-4\cos x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями:

$y=\ln\frac{x}{k+2}$, $x=(k+2)e$, $y=0$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y=3-2x$, $y=x^2$ навколо осі ***Ox***.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=12+\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t)=14-\sqrt[4]{t^3}$.

Тут ***V*** і ***D*** вимірювали у мільйонах гривень, а ***t*** – у роках**.** Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $x(1+y^2)^k dx+y(1-x^2)^k dy=0$; б) $y'=\frac{y}{x}+tg\frac{y}{x}$; $y=\frac{\pi}{6}$ при $x=1$;

в) $xy'+ky=x^{4-k}$; г) $y''+4y'k+13yk^2=0$, $y|_{x=0}=\frac{1}{2}$, $y'|_{x=0}=1$;

д) $y''+(5k-6)y'-30ky=k\sin 6x+\cos 6x$.

9. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k+2n}{(n+1)^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+4nk}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+k}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot(2kn+1)}$.

ВАРІАНТ №18.

1. Мале підприємство виробляє товари ***A*** і ***B***. Загальні щоденні витрати ***V*** (у гривнях) на виробництво ***x*** одиниць товару ***A*** та ***y*** одиниць товару ***B*** відомі: ***V=543-15x -5y+0,3x²+0,1y²***. Визначити кількість одиниць товарів ***A*** і ***B***, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a=9\%, b=18\%, c=27\%, M=3000 грн, L=125\cdot k, K=9 млн.грн.$

3.

X	**180**	**182**	**190**	**195**	**200**	**220**	**230**	**240**
Y	**410**	**405**	**390**	**384**	**380**	**350**	**320**	**300**

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int\frac{\sqrt{\ln kx}}{3kx}dx$;

б) $\int (2k+5)x^2\cos(7k-3)x dx$; в) $\int\frac{5x^2+(35k-10)x+20}{x^2+(7k-2)x-14k}dx$;

г) $\int\frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$; д) $\int \sin^3 x\cos^5 x dx$; е) $\int\frac{dx}{5+4\sin 3x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y=\frac{\sqrt{x}}{k}$, $y=0$, $x=k^2$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y=\frac{x^2}{3}$, $y=4-\frac{2}{3}x^2$ навколо осі ***Ox***.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=10+2\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t)=14-2\sqrt[4]{t^3}$.

Тут ***V*** і ***D*** вимірювали у мільйонах гривень, а ***t*** – у роках**.** Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $ky'tgx=y^k$; б) $x\ln\frac{x}{y}dy-ydx=0$; $y=1$ при $x=e$;

в) $xy'-ky=x^{k+1}e^x$; г) $y''-5y'k+4yk^2=0$, $y|_{x=0}=5$, $y'|_{x=0}=8$;

д) $y''+(3-4k)y'-12ky=(4k+1)x^2+3kx.$

9. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!+(n+1)!}{k^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+k}}$; в); $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k+2}{n^3+3n}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{k^3}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(k+2)x^n}{(4+k)^n\sqrt{n}}$.

ВАРІАНТ №19.

1. Мале підприємство виробляє товари ***A*** і ***B***. Загальні щоденні витрати ***V*** (у гривнях) на виробництво ***x*** одиниць товару ***A*** та ***y*** одиниць товару ***B*** відомі: $V=654-16x-7y+0,4x^2+0,1y^2$. Визначити кількість одиниць товарів ***A*** і ***B***, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a=\frac{19}{2}\%, b=19\%, c=\frac{57}{2}\%, M=3000\,грн, L=125\cdot k, K=9\,млн.грн.$

3.

X	420	425	430	450	455	470	480	500
Y	190	180	175	160	162	150	142	110

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int\frac{kdx}{x\sqrt{1-\ln kx}}$;

б) $\int kx\,arctgx\,dx$; в) $\int\frac{2kx^3-3kx^2-29kx-30k+7}{x^2-3x-10}dx$;

г) $\int\frac{dx}{3\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}$; д) $\int\cos^{10}x\sin^3 x\,dx$; е) $\int\frac{dx}{1+5\sin x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями:
$y=\ln x$, $x=e$, $x=(k+1)e$, $y=0$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y=e^x$, $y=e^{-x}$ $x=1$ навколо осі ***Ox***.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=6+\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t)=22-\sqrt[4]{t^3}$.

Тут ***V*** і ***D*** вимірювали у мільйонах гривень, а ***t*** – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $xy'-ky=y^2$; б) $(x^2-3y^2)dx+2xydy=0;$ $y=1$ при $x=2$;

в) $xy'+ky=x^{3-2k}$; г) $y''+3y'k+2yk^2=0$, $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=-1$;

д) $y''+(2-k)y'-(k-1)y=kx^2e^{-x}$.

9. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(k+1)^n}{(n)!+(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3k}{\sqrt[3]{n+4}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+k}{n(n+1)}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(n+1)3^k}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{5^n(n+4k)}$.

ВАРІАНТ №20.

1. Мале підприємство виробляє товари ***A*** і ***B***. Загальні щоденні витрати ***V*** (у гривнях) на виробництво ***x*** одиниць товару ***A*** та ***y*** одиниць товару ***B*** відомі: $V=499-5x-15y+0,1x^2+0,3y^2$. Визначити кількість одиниць товарів ***A*** і ***B***, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a=10\%, b=20\%, c=30\%, M=3000\,грн, L=125\cdot k, K=9\,млн.грн.$

3.

X	50	52	55	60	62	70	75	80
Y	202	200	190	180	178	170	160	140

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int x^{4k}\sqrt{x^{4k+1}+8k}\,dx$;

б) $\int\sqrt[k+3]{x^{3k+1}}\ln(6k-1)x\,dx$; в) $\int\frac{x^3+(2-9k)x^2-27kx+4}{x^2+(2-9k)x-18k}dx$;

г) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$; д) $\int\cos^2 x\cos^3 x\,dx$; е) $\int\frac{dx}{5-4\cos x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $x=2k^2-y^2$, $x=-ky$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $x^2-y^2=a^2$, $x=2a$ навколо осі ***Ox***.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=5+\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t)=21-\sqrt[4]{t^3}$.

Тут ***V*** і ***D*** вимірювали у мільйонах гривень, а ***t*** – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $x^k y' - y^2 = y$; б) $(3x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - 3y^2)dy = 0;$ $y = 2$ при $x = 2$; в) $y' + ky = \frac{e^{-kx}}{1+x^2}$; г) $y'' + 4y(k+1)^2 = 0$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 2$;

д) $y'' - (k+7)y' + 2(k+5)y = (7k-3)\sin 2x.$

9. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^k}{n!\,3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+k^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)\sqrt{n}}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{k+1}}{2^n}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{k^2 n}$.

ВАРІАНТ №21.

1. Мале підприємство виробляє товари ***A*** і ***B***. Загальні щоденні витрати ***V*** (у гривнях) на виробництво ***x*** одиниць товару ***A*** та ***y*** одиниць товару ***B*** відомі: ***V=401-7x -16y+0,1x²+0,4y²***. Визначити кількість одиниць товарів ***A*** і ***B***, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a = \frac{21}{2}\%, b = 21\%, c = \frac{63}{2}\%, M = 3000\,грн, L = 125 \cdot k, K = 9\,млн.грн.$

3.

X	**210**	**215**	**218**	**230**	**232**	**235**	**245**	**260**
Y	**305**	**300**	**290**	**270**	**265**	**264**	**250**	**230**

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int \sin 3kx \sqrt[3]{k + \cos 3kx}\,dx$;

б) $\int (k+3)x \sin(2k+3)x\,dx$;

в) $\int \frac{2x^3 - 2(k+6)x^2 + 2(6k+1)x + 3(k-10)}{x^2 - (k+6)x + 6k}dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}\,(1+\sqrt[3]{x-2})}$; д) $\int \cos^4 x\,dx$; е) $\int \frac{e^{3x}dx}{e^x+2}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y = e^x$, $x = 0$, $y = 2k$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $x^2 - y^2 = 9$, $y = \pm 3$ навколо осі ***Oy***.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t) = 3 + \sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 57 - \sqrt[4]{t^3}$.

Тут ***V*** і ***D*** вимірювали у мільйонах гривень, а ***t*** – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $\sqrt{(1+y^2)^k}\,x dx + y(9+x^2)dy = 0$;

б) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0;$ $y = 1$ при $x = 2$; в) $y' + kytgx = \cos^k x$;

г) $y'' + 2y'(k+1) = 0$, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$;

д) $y'' - (k+4)y' - 3(k+7)y = (k+2)x^2 + 1.$

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k+1}}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^6+k^2}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + |k \sin 3n|}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{k^3(n+1)}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{kn}(n+k)}$.

ВАРІАНТ №22.

1. Мале підприємство виробляє товари ***A*** і ***B***. Загальні щоденні витрати ***V*** (у гривнях) на виробництво ***x*** одиниць товару ***A*** та ***y*** одиниць товару ***B*** відомі: ***V=670-17x -8y+0,5x²+0,2y²***. Визначити кількість одиниць товарів ***A*** і ***B***, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a = 11\%, b = 22\%, c = 33\%, M = 3000\,грн, L = 125 \cdot k, K = 9\,млн.грн.$

3.

X	**320**	**325**	**330**	**332**	**340**	**350**	**360**	**370**
Y	**202**	**200**	**195**	**185**	**180**	**170**	**165**	**150**

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int \frac{x^{3k}dx}{x^{3k+1}+k}$;

б) $\int (5kx + 3k + 1)e^{(k+1)x}dx$; в) $\int \frac{x^3 + (1-k)x^2 + (k+3)x - 2k + 1}{x^2 + (1-k)x + k - 2}dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+5)^2} - \sqrt{x+5}}$; д) $\int \cos 4x \cos 2x\,dx$; е) $\int \frac{dx}{3 + \cos x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y = kx^2$, $kx + y = 2k$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y^2 = 1 - x$, $x = -3$ навколо осі Ox.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t) = 1 + 4\sqrt[4]{t^3}, D'(t) = 57 - 3\sqrt[4]{t^3}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках**.** Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $(1+e^{kx})yy' = (k-1)e^{kx}$; б) $2xyy' + x^2 - y^2 = 0;\ y = 1$ при $x = 1$;

в) $y'\cos x - ky\sin x = x\cos^{1-k}x$; г) $y'' = \dfrac{y}{(k+1)^2}$, $y|_{x=0} = k$, $y'|_{x=0} = 0$;

д) $y'' + 8(1-k)y' - 64ky = (3k+2)xe^{-8x}$.

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^{2k}}{(n+1)!\,n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^4+9k^2}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{k+2}{2^n+e^{k/n}}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)!}{5+kn^2}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n\cdot\sqrt[7k]{n}}x^n$.

ВАРІАНТ №23.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=597-13x-3y+0,5x^2+0,1y^2$**.** Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними**.**

2. $a = \dfrac{23}{2}\%, b = 23\%, c = \dfrac{69}{2}\%, M = 3000\,грн, L = 125\cdot k, K = 9\,млн.грн.$

3.

X	130	132	140	150	155	170	180	190
Y	230	220	210	205	200	180	160	150

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int\dfrac{\sin(2k+1)xdx}{\sqrt[3]{2k+3\cos(2k+1)x}}$;

б) $\int(kx+3k-1)\sin(k+3)xdx$;

в) $\int\dfrac{3x^3+(12-6k)x^2+8(1-3k)x+4-14k}{x^2+(4-2k)x-8k}dx$; г) $\int\dfrac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt[4]{x-2}}dx$;

д) $\int\sin^2 2xdx$; е) $\int\dfrac{dx}{4\cos x-3\sin x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y = e^{k-x}$, $y = e^{x-k}$, $y = e$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$ навколо осі Ox.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t) = 1 + 3\sqrt[4]{t^3}, D'(t) = 57 - 4\sqrt[4]{t^3}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках**.** Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $e^{x-ky}y' = 1$; б) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x};\ y = 1$ при $x = -1$;

в) $(2x+1)y' + 2ky = k$; г) $y'' + 3y'(k+2) = 0$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 3$;

д) $y'' + (2-9k)y' - 18ky = (9k-5)e^{-2x}$.

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{(3k)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{k}{3n^3}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+\left|\cos\dfrac{k}{n}\right|}{\sqrt{n}}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k}}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{5^n(kn+2)}$.

ВАРІАНТ №24.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=743-14x\ -5y+0,7x^2+0,1y^2$**.** Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними**.**

2. $a = 12\%, b = 24\%, c = 36\%, M = 3000\,грн, L = 125\cdot k, K = 9\,млн.грн.$

3.

X	520	525	530	540	550	560	580	600
Y	350	340	335	300	290	280	260	255

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int \frac{\ln^2(3k-1)x}{kx}dx$;

б) $\int (x+5k-2)\,arctgx\,dx$; в) $\int \frac{4x^2-4(k+9)x+35k+10}{x^2+(1+10k)x+10k}dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{x+3}}$; д) $\int \cos 9x \cos 2x dx$; е) $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями:

$y=\cos\frac{x}{k}$, $y=\sin\frac{x}{k}$ (в межах одного періоду).

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $4y=x^2$, $y^2=4x$ навколо осі Ox.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=2+3\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t)=58-4\sqrt[4]{t^3}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами

а) $y'=\frac{ky+k+1}{x}$; б) $xy+y^2=(2x^2+xy)y'$; $y=1$ при $x=1$;

в) $y'\cos x+ky\sin x=\cos^{k+1}x$; г) $y''+9y(k+1)^2=0$, $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=0$;

д) $y''+(7-2k)y'-14ky=(2k+3)x^2+kx+k-3$.

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{k+3}}{(k+3)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2k+n}{n^2+9}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(k+2)(1+\frac{1}{n})}{3(n+k)}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[k]{n+1}}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{(2+k)^n}$.

ВАРІАНТ №25.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=637-8x-17y+0{,}2x^2+0{,}5y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a=\frac{25}{2}\%, b=25\%, c=\frac{75}{2}\%, M=3000\,грн, L=125\cdot k, K=9\,млн.грн.$

3.

X	150	152	155	170	175	180	190	200
Y	315	310	300	280	272	263	250	240

4. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \sqrt[5]{4k-(k+2)\cos(k+4)x}\,\sin(k+4)x dx$;

б) $\int ((k+3)x^2+4k)e^{kx}dx$; в) $\int \frac{(x^3-kx^2+(2k-4)x-3k+7}{x^2+(2-k)x+k-3}dx$;

г) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$; д) $\int \sin^5 x dx$; е) $\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1}dx$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y=\sqrt{-kx}$, $x=-3$, $y=0$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y=\frac{x+2}{x+1}$, $x=0$, $x=2$ навколо осі Ox.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=2+4\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t)=58-3\sqrt[4]{t^3}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $e^{ky}(y'+1)=1$; б) $xy'\cos\frac{y}{x}=y\cos\frac{y}{x}-x$; $y=0$ при $x=1$;

в) $y'+kytgx=ctg^{k+1}x$; г) $y''-4y'k+4yk^2=0$, $y|_{x=0}=2$, $y'|_{x=0}=1$;

д) $y''+(k+8)y'+8ky=(k+8)e^{-8x}$.

9. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{3k}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k+1}{\sqrt{3n-1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7\,(1+\frac{k}{e^n})}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2(n+k)}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+3k)}{3^n}x^n$.

ВАРІАНТ №26.

1.Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=547-3x-13y+0,1x^2+0,5y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a = 13\%, b = 26\%, c = 39\%, M = 3000\text{грн.}, L = 125\cdot k, K = 9\text{млн.грн.}$

3.

X	60	63	67	72	75	80	82	87
Y	120	118	110	108	105	100	97	95

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int\frac{dx}{(k+3)x\sqrt{4-\ln(k+1)x}}$;

б) $\int\frac{(k+7)x}{\cos^2(2k+5)x}dx$; в) $\int\frac{3x^2+(9-3k)x+2(k-1)}{x^2+(3-k)x+2(k-5)}dx$;

г) $\int\frac{1+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}}dx$; д) $\int\sin^5 3x\cos^4 3x dx$; е) $\int\frac{dx}{5-3\cos x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $x^2 = 2ky$, $y^2 = 2kx$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$, $x=0$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{3}$ навколо осі Ox.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=1+2\sqrt{t}$, $D'(t)=7-\sqrt{t}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загаль- ний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $(1+y)x^k dy+(1-x)y^k dx=0;$ $y=1$ при $x=1$;

б) $x^2y'=(k+2)y^2+(2k+5)xy+(2k+4)x^2$; в) $y'+yk=\sin 2kx$;

г) $y''-2y'k+5yk^2=0$, $y|_{x=0}=2$, $y'|_{x=0}=3$;

д) $y''+(6-k)y'-5(k-1)y=(k+1)\cos(k-1)x$.

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{k!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k+3}{(2n+1)^3}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{(\ln n+2)(kn)^3}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{2n}+3k}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{kn}(n+1)}x^n$.

ВАРІАНТ №27.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=699-5x-14y+0,1x^2+0,7y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a=\frac{27}{2}\%, b=27\%, c=\frac{81}{2}\%, M=3000\text{грн.}, L=125\cdot k, K=9\text{млн.грн.}$

3.

X	40	42	47	50	55	58	62	65
Y	150	147	140	138	135	132	130	128

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int\sqrt[3]{k-\cos 2kx}\,\sin 2kx dx$;

б) $\int(x+1)x\cdot\cos(k+3)x dx$; в) $\int\frac{x^3+(2-k)x^2+4(k-3)x-7k+37}{x^2+(5-k)x+k-6}dx$;

г) $\int\frac{1+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-1}dx$; д) $\int\sin^3 x dx$; е) $\int\frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $\frac{x^2}{k^2}-\frac{y^2}{4}=1$, $x=2k$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y=\sqrt{x-1}$, $x=5$, $y=0$ навколо осі Ox.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=4+3\sqrt{t}$, $D'(t)=9-2\sqrt{t}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $xy' = \sqrt{kx^2 + y^2} + y;\ \ y = 0$ при $x = 1$; б) $y' + kctgkx = 0$;

в) $y'\frac{ky}{(kx + k + 2} = ln(kx + k + 2)$; г) $y'' - 2y'k + yk^2 = 0$, $y|_{x=1} = 2$,

$y'|_{x=1} = 1$; д) $y'' + 5(1 - k)y' - 25ky = (5k + 1)x^2 + 3kx + 3.$

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n}{(n+1)^{2k+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln^k(n+2)}{n+2}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+k)}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(k+4)^{2n}}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k)x^n}{(kn+3)3^n}$.

ВАРІАНТ №28.

1. Мале підприємство виробляє товари ***A*** і ***B***. Загальні щоденні витрати ***V*** (у гривнях) на виробництво ***x*** одиниць товару ***A*** та ***y*** одиниць товару ***B*** відомі: $V=591-15x-6y+0,5x^2+0,3y^2$. Визначити кількість одиниць товарів ***A*** і ***B***, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a = 14\%, b = 28\%, c = 42\%, M = 3000 грн., L = 125 \cdot k, K = 9 млн.грн.$

3.

X	70	72	75	76	79	80	83	85
Y	200	197	195	193	190	187	185	183

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int\frac{ln(3k-1)x-1}{kx\sqrt{ln(3k-1)x}}dx$;

б) $\int\sqrt[k]{x^{3k-1}}\,ln(2k+1)xdx$; в) $\int\frac{2x^2+(8-2k)x+k+3}{x^2+(5-k)x+k-6}dx$;

г) $\int\frac{(x-1)dx}{\sqrt[3]{2x+1}}$; д) $\int cos^6 xdx$; е) $\int\frac{dx}{2+e^x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y = x^2$, $y = (x-k)^2 - 9$, $y = 0$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y = tg2x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{8}$ навколо осі ***Ox***.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t) = 3 + 2\sqrt{t}$, $D'(t) = 8 - 3\sqrt{t}$.

Тут ***V*** і ***D*** вимірювали у мільйонах гривень, а ***t*** – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $e^{x-ky}y' = k;\ \ y = 0$ при $x = 0$;

б) $x^2y' = (k+1)y^2 + (2k+3)xy - 3(k+1)x^2$;

в) $y' + (k+1)y = 2kx + k + 3$; г) $y'' - 6y'k + 9yk^2 = 0$, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 2$;

д) $y'' - 3(1+2k)y' + 18ky = (4k+1)xe^{3x}$.

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{(k+2)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+k^2}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+k}{n}(\sqrt{n+2})$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+k+1}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{3^n(n+2k)}$.

ВАРІАНТ №29.

1. Мале підприємство виробляє товари ***A*** і ***B***. Загальні щоденні витрати ***V*** (у гривнях) на виробництво ***x*** одиниць товару ***A*** та ***y*** одиниць товару ***B*** відомі: $V=679-16x-8y+0,2x^2+0,\ 2y^2$. Визначити кількість одиниць товарів ***A*** і ***B***, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a = \frac{29}{2}\%, b = 29\%, c = \frac{87}{2}\%, M = 3000 грн., L = 125 \cdot k, K = 9 млн.грн.$

3.

X	33	35	37	40	46	50	52	55
Y	73	70	67	65	60	57	55	50

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int\frac{x^{2k}dx}{\sqrt{1-x^{2k+1}}}$; б) $\int(k+2)arcsin\,xdx$;

в) $\int\frac{2x^3-(3+2k)x^2+kx-4k+1}{x^2-(2+k)x+k+1}dx$; г) $\int\frac{(\sqrt{x}-1)dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)}$;

д) $\int cos4x\,cos2xdx$; е) $\int\frac{xdx}{e^x+1}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y = kx^2$, $y = 10$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = x - x^2$ навколо осі Oy.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t) = 4 + \sqrt{t}$, $D'(t) = 7 - 2\sqrt{t}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $ke^x tgydx + \frac{1+e^x}{\cos^2 y}dy = 0$; б) $xy' = \sqrt{3x^2 + y^2} + y;$ $y = 1$ при $x = 1$;

в) $y' + \frac{y}{x+k} = k(x+k)^{k-2}$; г) $y'' + 2y'k + yk^2 = 0$, $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 1$;

д) $y'' + (1 - 10k)y' - 10ky = (k-3)\sin x$.

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!}{n!\,n^k}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 3k}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n + 2k}}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(3n+1)}{3kn+1}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kn+1)x^n}{2n+3}$.

ВАРІАНТ №30.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V = 704 - 6x - 15y + 0,\ 3x^2 + 0,\ 5y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a = 15\%, b = 30\%, c = 45\%, M = 3000$ грн., $L = 125 \cdot k, K = 9$ млн.грн.

3.

X	82	80	74	70	66	60	58	55
Y	25	27	30	33	35	38	40	42

4. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\cos(3k+1)xdx}{2\sin(3k+1)x - 4k}$; б) $\int (3k+5)x \cdot \sin kxdx$;

в) $\int \frac{2x^3 + (6-2k)x^2 - 18(k+5)x - 8k + 42}{x^2 + x(3-k) - 9(k+6)}dx$; г) $\int \frac{4\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}}dx$;

д) $\int \sin x \cos 3xdx$; е) $\int \frac{dx}{3x^2 + 75}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y = 2x^2$, $y = 2(x-k)^2$, $y = 0$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y = \ln 2x$, $y = e$, $y = e^5$ навколо осі Ox.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t) = 3 + 2\sqrt{t}$, $D'(t) = 11 - 2\sqrt{t}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $\frac{e^{-y^2}}{x}dy + \frac{(x^2+9)^k}{y}dx = 0$; б) $xy' - ky = kx^{k-1};$ $y = 0$ при $x = 1$;

в) $x^2y' = (k+3)y^2 + (2k+7)xy + 10(k+3)x^2$;

г) $y'' - 4y'k + 4yk^2 = 0$, $y|_{x=1} = 1$, $y'|_{x=1} = 1$;

д) $y'' - (1+9k)y' + 9ky = (9k+1)x^2 + 3k$.

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k+3)^n}{3kn^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3k+1}{(2n+3)^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{\sqrt[3]{3n-1}}$;

г) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{kn+4}}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+k)x^{n-1}}{2^{n-1}3^n}$.

ВАРІАНТ №31.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі:

V=800-8x-16y+0,2x²+0,2y². Визначити кількість одиниць товарів ***A*** і ***B***, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a = \frac{31}{2}\%, b = 31\%, c = \frac{93}{2}\%, M = 3000 грн., L = 125 \cdot k, K = 9 млн.грн.$

3.

X	**97**	**100**	**103**	**107**	**109**	**113**	**115**	**120**
Y	**303**	**300**	**297**	**293**	**290**	**288**	**285**	**280**

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int \frac{5kx^{2k-1}dx}{\sqrt{1-x^{2k}}}$;

б) $\int (x+k)^2 \ln(k+1)x dx$; в) $\int \frac{4x^2-4kx-15(k+4)}{x^2-x(2+k)-3(k+5)}dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; д) $\int \cos^5 x \sin^2 x dx$; е) $\int e^x ctg e^x dx$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y = x^3$, $y = k^2 x$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $xy = 3$, $x = 1$, $x = \frac{3}{2}$, $y = 0$ навколо осі ***Ox***.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t) = 4 + 2\sqrt{t}$, $D'(t) = 19 - 3\sqrt{t}$.

Тут ***V*** і ***D*** вимірювали у мільйонах гривень, а ***t*** – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $x^k dy + y dx = y^2 dx$;

б) $xy' = \sqrt{(k+1)x^2 + y^2} + y$; $y = 2$ при $x = 1$;

в) $y' \sin x - ky \cos x = x \sin^{k+1} x$;

г) $y'' - 2ky' + k^2 y = (2k+3)xe^{kx}$.;

д) $y'' + y'k + 2{,}5k^2 = 0$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = -1$.

9. Дослідити на збіжність ряди:а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+k)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(kn)^3}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[k]{n+2}}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2k+1)n^3}{n^4+1}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(5k)^n(n+1)}$.

ВАРІАНТ №32.

1. Мале підприємство виробляє товари ***A*** і ***B***. Загальні щоденні витрати ***V*** (у гривнях) на виробництво ***x*** одиниць товару ***A*** та ***y*** одиниць товару ***B*** відомі: ***V=1600-7, 5x-15y-0,3xy+0,3x²+0,2y²***. Визначити кількість одиниць товарів ***A*** і ***B***, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a = 16\%, b = 32\%, c = 48\%, M = 3000 грн., L = 125 \cdot k, K = 9 млн.грн.$

3.

X	**115**	**117**	**120**	**123**	**125**	**127**	**130**	**133**
Y	**437**	**435**	**430**	**427**	**425**	**421**	**418**	**410**

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int \frac{\cos(k-2)dx}{\sqrt[3]{\sin^5(k+2)x}}$;

б) $\int ((k+3)x^2 + k)\sin(2k+1)x dx$; в) $\int \frac{x^3-(k+4)x^2-kx-2k-7}{x^2-x(4+k)-k-5}dx$;

г) $\int \frac{5dx}{(x+1)+\sqrt{x+1}}$; д) $\int \sin^5 x \cos^3 x dx$; е) $\int \frac{dx}{2\sin x + 2}$.

5.Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y^2 = kx$, $x^2 = ky$.

6.Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y = 2x^3$, $x = 0$, $y = 2$ навколо осі ***Oy***.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t) = 3 + 2\sqrt{t}$, $D'(t) = 21 - 4\sqrt{t}$.

Тут ***V*** і ***D*** вимірювали у мільйонах гривень, а ***t*** – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами

а) $(1-x^2)^{\frac{k}{2}} dy + x\sqrt{1-y^2}dx = 0$; $y = 0$ при $x = 0$;

б) $x^2 y' = (k+3)y^2 + (2k+7)xy - 35(k+3)$; в) $xy' + 2y = \sin kx$;

г) $y'' - 8y'k + 16yk^2 = 0$, $y|_{x=1} = 2$, $y'|_{x=1} = 1$;

д) $y'' - 4ky' + 4k^2 y = (4k+1)\sin 2kx$.

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k^{n+1}}{\ln(n+2)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(k+2)\sqrt{n+1}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k+1}{n^k(n^2+3n)}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[2k]{n+4}}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(kn+1)}$.

ВАРІАНТ №33.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=987-17x-9y+0,5x^2+0,3y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a = \frac{33}{2}\%, b = 33\%, c = \frac{99}{2}\%, M = 3000\,грн., L = 125\cdot k, K = 9\,млн.грн.$

3.

X	112	115	120	123	126	128	130	135
Y	351	350	345	343	340	335	332	330

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int e^{\cos kx}\sin kx dx$;

б) $\int (kx+3)^2 e^{(k+2)x}dx$; в) $\int\frac{x^3+(k-1)x^2+(6k^2+k-5)x+6k^2}{x^2+kx-6k^2}dx$;

г) $\int\frac{(2x-5)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$; д) $\int \sin^3 x\cos^4 x dx$; е) $\int\frac{dx}{4-5\sin x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y = \ln x$, $x = 0$, $x = \frac{k+2}{2}$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y^2 = 2x$, $y = 0$, $y = 2$ навколо осі Ox.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t) = 8+2\sqrt{t}$, $D'(t) = 20-4\sqrt{t}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $xy' - ky = x^{k+1}\cos kx$; $y = \frac{\pi}{2}$ при $x = \frac{\pi}{2}$;

б) $xy' = \sqrt{(k+4)x^2+y^2} + y$; в) $y(1-x^2)^{\frac{k}{2}}dy + x(1-y^2)^{\frac{k}{2}}dx = 0$;

г) $y'' + 4y'k + 4yk^2 = 0$, $y|_{x=0} = -1$, $y'|_{x=0} = 3$;

д) $y'' + 2ky' + k^2 y = (k+1)x^2 + (3k-1)x + k - 5$.

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{k\,n^k}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2kn+1)^3}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+|\sin n|}{(k+1)n}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(k+4)^{2n}}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{k+3}{2^n}(n+2k)^2 x^n$.

ВАРІАНТ №34.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=941-18x-10y+0,3x^2+0,5y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a = 17\%, b = 34\%, c = 51\%, M = 3000\,грн., L = 125\cdot k, K = 9\,млн.грн.$

3.

X	150	153	156	160	163	166	169	170
Y	60	58	55	53	50	48	45	43

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int x^{3k}\sqrt{5+x^{3k+1}}dx$;

б) $\int (x+2k+3)^2\sin 2x dx$; в) $\int\frac{2x^3+4(1-k)x^2-(6k^2+8k-4)x-12k^2}{x^2-2kx-3k^2}dx$;

г) $\int\frac{dx}{(\sqrt[5]{x}+4)\sqrt{x}}$; д) $\int\cos^3 3x\sin^3 3x dx$; е) $\int\frac{5dx}{1+\cos x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y = x^3$, $y = k^3$, $x = 0$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лінією: $x^2 + y^2 = 25$ навколо осі Oy.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=5+\sqrt{t}$, $D'(t)=17-3\sqrt{t}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $y'=y\sin kx\ln^k y;\ \ y=e$ при $x=0$; б) $xy'+ky=(k+1)x^{2-k}$;

в) $x^2y'=ky^2+(2k+1)xy+170kx^2$; г) $3y''-2y'k-8k^2y=0$, $y|_{x=1}=2$, $y'|_{x=1}=3$; д) $y''+4ky'+4k^2y=(2k+3)xe^{-2kx}$.

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln\ (n+2)}{(k+1)n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(k+3)n}{n^4+1}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{e^{kn}}}{k+n}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2k\,5^{n+1}}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}3^{(k+1)n}\cdot x^n$.

ВАРІАНТ №35.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=1121-19x-11y+0,5x^2+0,5y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a=\dfrac{35}{2}\%, b=35\%, c=\dfrac{105}{2}\%, M=3000$ грн.$, L=125\cdot k, K=9$ млн.грн.

3.

X	13	17	20	23	25	27	29	30
Y	70	65	62	57	55	51	50	45

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int\dfrac{\sin(5k-1)xdx}{\sqrt{k-(k+2)\cos(5k-1)x}}$;

б) $\int\dfrac{x^{k+2}}{k+1}\ln(k+3)xdx$; в) $\int\dfrac{3x^3+5(1-3k)x^2+(12k^2-25x-3)x+20k^2}{x^2-5kx+4k^2}dx$;

г) $\int\dfrac{3\sqrt{x}dx}{4x+\sqrt[3]{x^2}}$;

д) $\int\cos^5 2xdx$; е) $\int\dfrac{3dx}{1+6\cos 2x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y=x^2$, $y=k^2-2kx$, $y=0$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $x^2-y^2=16$, $y=4$, $y=-4$ навколо осі Ox.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=6+2\sqrt{t}$, $D'(t)=16-3\sqrt{t}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $(1+x^2)^{\frac{k}{2}}ydy+x(4+y^2)dx=0$; б) $(kx+1)y'+ky=k+2;\ \ y=2$ при $x=0$;

в) $x^2y'=(k+1)y^2+(2k+3)xy+226(k+1)$; г) $4y''+4y'k+yk^2=0$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$; д) $y''-6ky'+9k^2y=(9k-3)\cos 3kx$.

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2k)^n}{n^{2k-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{k}{2n+2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{(3k+2)n}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{3n+k}}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{4^n}5^n\sqrt[2k]{n}\,x^n$.

ВАРІАНТ №36.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=1500-18x-7y+0,2x^2+0,1y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a=18\%, b=36\%, c=54\%, M=3000$ грн.$, L=125\cdot k, K=9$ млн.грн.

3.

X	5	7	9	13	16	17	19	20
Y	31	29	27	25	21	17	15	10

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int \frac{dx}{(k+1)x(1+\ln kx)}$;

б) $\int x^2 e^{(k+1)x} dx$; в); $\int \frac{5x^2+(26-5k)x+5k-27}{x^2+(4-k)x+2(k-6)}dx$;

г) $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{x^2-2x+6}}$; д) $\int \sin^4 3x \cos^3 3x dx$; е) $\int \frac{2dx}{\sin 3x+\cos 3x}$.

5.Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=3x-\frac{2}{k}x^2$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y=-x^2+9$, $y=0$ навколо осі Ox.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=12+2\sqrt{t}$, $D'(t)=17-3\sqrt{t}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $x\ln x y' + ky = (k+1)\ln x$; б) $y' tgx + y = k;$ $y=\frac{1}{2}$ при $x=\frac{\pi}{6}$;

в) $xy' = \sqrt{(k+5)x^2+y^2}+y$; г) $5y''-6y'k+5yk^2=0$, $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=2$;

д) $y''+8ky'+16k^2y=8kx^2+3.$

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{k^{n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k+3}{(3n+3)^3}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k+1}{n5^{n+1}}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{5+k}}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{(4+k)^n}$.

ВАРІАНТ №37.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі:

$V=2100-20x-4y+0{,}5x^2+0{,}2y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a=\frac{37}{2}\%, b=37\%, c=\frac{111}{2}\%, M=3000\text{грн.}, L=125\cdot k, K=9\text{млн.грн.}$

3.

X	110	115	120	130	145	150	160	180
Y	78	75	70	60	58	55	50	40

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int\frac{(k+4)x^{3k-1}dx}{\sqrt{2k+x^{3k}}}$;

б) $\int(kx+1)^2\cos 3x dx$; в) $\int\frac{x^3-(10+k)x^2+6(k+5)x-2k-16}{x^2-x(10+k)+6k+24}dx$;

г) $\int\frac{\sqrt[4]{x^3}dx}{4+\sqrt{x}}$; д) $\int \sin^3 3x\cos^4 3x dx$; е) $\int\frac{dx}{e^{4x}+e^{2x}}$;

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y=\frac{x^3}{k}$, $y=kx$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y=x^2$, $y=0$, $x=1$, $x=2$ навколо осі Oy.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=2+\sqrt{t}$, $D'(t)=23-6\sqrt{t}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $(x+k+1)y'+y=-(x+k+1)e^{-x}$; б) $e^{kx-y}y'=k;$ $y=0$ при $x=0$;

в) $x^2y'=(k+5)y^2+(2k+11)xy+50(k+5)$; г) $y''-4y'k+3yk^2=0$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=1}=1$;д) $y''+6ky'+9k^2y=(3k+2)xe^x$.

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2kn^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+k)^{-1}}{\ln^3(n+k)}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+|tgkn|)}{\sqrt[3]{n}}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4+kn+1}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3k)^n \cdot x^n}{\sqrt{n}}$.

ВАРІАНТ №38.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=1001-9x-17y+0{,}3x^2+0{,}5\,y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a = 19\%, b = 38\%, c = 57\%, M = 3000\,грн., L = 125 \cdot k, K = 9\,млн.грн.$

3.

X	200	205	210	220	230	240	250	260
Y	145	140	132	110	100	90	70	60

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int \frac{dx}{kx\ln^3(k+1)x}$;

б) $\int x^{k+3}\sqrt{x^{k+1}}\,\ln(5k-2)x\,dx$; в) $\int \frac{2x^2-2(k-9)x+8}{x^2-(k-6)x-k+5}dx$;

г) $\int \frac{2\sqrt{x}dx}{(\sqrt{x}\ -1)}$; д) $\int \cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{5}dx$; е) $\int \frac{3dx}{\sin 2x+\cos 2x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $x^2-y^2=k^2$, $y=\pm k$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y^2-2x=0$, $x-y=0$ навколо осі Ox.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=13+2\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t)=17-2\sqrt[3]{t^2}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

в) $e^y tgx dy-\frac{k+e^y}{\cos^2 x}dx=0$; г) $y''-9y'k+20yk^2=0$, $y|_{x=0}=2$, $y'|_{x=0}=1$;

д) $y''-8ky'+16k^2y=(4k+1)\cos 2x$.

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3k)^n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k+2}{(n+2)^4}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(0.5)^n}{(n+k)}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n kn}{n+3}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n\cdot\sqrt[4k]{n}}$.

ВАРІАНТ №39.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=1312-10x-18y+0{,}5x^2+0{,}3y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a=\frac{39}{2}\%, b=39\%, c=\frac{117}{2}\%, M=3000\,грн., L=125\cdot k, K=9\,млн.грн.$

3.

X	30	35	40	50	52	55	60	70
Y	20	18	17	15	12	10	8	5

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int \frac{\sin(2k+3)}{1-5k\cos(2k+3)x}dx$;

б) $\int (x-2k)^2 e^{(k+3)x}dx$; в) $\int \frac{2x^3-2(1+k)x^2+12(k-4)x-2k+50}{x^2-x(1+k)+6(k-5)}dx$;

г) $\int \frac{\sqrt{x^3}dx}{4-\sqrt[3]{x}}$; д) $\int \sin^2 x\cos^5 x dx$; е) $\int \frac{3dx}{4+\sin x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y^2=2kx+k^2$, $x-y-k=0$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y=\frac{5}{x}$, $x=1$, $x=5$, $y=0$ навколо осі Ox.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=15+3\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t)=20-2\sqrt[3]{t^2}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $y'\sin x-(k+1)y\cos x=x\sin^{k+2}x$; б) $(\sqrt{xy}-\sqrt{x})dx=kxdy$; $y=4$ при $x=1$; в) $x^2y'=(k+1)y^2+(2k+3)xy+82(k+1)$;

г) $y''-16y(k+1)^2=0$, $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=2$;

д) $y'' + 2y' + 5y = (5k+1)x^2 + 4kx.$

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(k+2)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2k}{1+n^2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3)^{2n}+k^2n}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(k+1)n^2+3}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{7^{kn}x^n}{\sqrt{n+1}}$.

ВАРІАНТ №40.

1. Мале підприємство виробляє товари ***A*** і ***B***. Загальні щоденні витрати ***V*** (у гривнях) на виробництво ***x*** одиниць товару ***A*** та ***y*** одиниць товару ***B*** відомі: $V=3100-11x-19y+0{,}5x^2+0{,}5y^2$. Визначити кількість одиниць товарів ***A*** і ***B***, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a = 20\%, b = 40\%, c = 60\%, M = 3000$ *грн.*, $L = 125\cdot k, K = 9$ *млн.грн.*

3.

X	**60**	**62**	**65**	**70**	**72**	**80**	**85**	**90**
Y	**100**	**95**	**90**	**86**	**85**	**80**	**70**	**60**

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int\frac{x^{k+4}}{1+x^{k+5}}dx$; б) $\int (x+k)^2\sin x dx$;

в) $\int\frac{3x^2+6x(1-k)-2k+10}{x^2+2x(1-k)-4k}dx;$ г) $\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+4}}$;

д) $\int\cos^2 x\sin^2 x dx$; е) $\int\frac{dx}{1+\sin x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданою лінією: $x^2+y^2=k^2$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y=x^2$, $y=6-x$, $y=0$ навколо осі ***Ox***.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t) = 4+3\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 28-3\sqrt[3]{t^2}$.

Тут ***V*** і ***D*** вимірювали у мільйонах гривень, а ***t*** – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $y'ctgx - y = k$; б) $x^2y' = y^2 + xy;$ $y=1$ при $x=1$;

в) $(x+k+1)y' + y = k(x+k+1)x^{k-1}$;

г) $4y'' - 8y'k + 5yk^2 = 0$, $y|_{x=0} = 3$, $y'|_{x=0} = 1$;

д) $y'' + 2y' + 5y = (5k+1)x^2 + 4kx.$

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(k+2)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2k}{9+n^2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1.3)^{2n}+k^2n}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+3n^2)}{(k+1)n^2+3}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{7^{kn}x^n}{\sqrt{n+1}}$.

ВАРІАНТ №41.

1. Мале підприємство виробляє товари ***A*** і ***B***. Загальні щоденні витрати ***V*** (у гривнях) на виробництво ***x*** одиниць товару ***A*** та ***y*** одиниць товару ***B*** відомі: $V=2211-7x-18y+0{,}1x^2+0{,}2y^2$. Визначити кількість одиниць товарів ***A*** і ***B***, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a = \frac{41}{2}\%, b = 41\%, c = \frac{123}{2}\%, M = 3000$ *грн.*, $L = 125\cdot k, K = 9$ *млн.грн.*

3.

X	**50**	**53**	**55**	**60**	**62**	**70**	**75**	**80**
Y	**120**	**118**	**100**	**90**	**88**	**70**	**65**	**50**

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int\sqrt[5]{\sin 4kx}\cos 4kx dx$;

б) $\int\frac{k+2}{k+5}x^{\frac{k+1}{k+2}}\ln kx dx$; в) $\int\frac{4x^3+4(3-2k)x^2-24kx-6k-9}{x^2+x(3-2k)-6k}dx$;

г) $\int\frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt[3]{x+2}}dx$; д) $\int\sin 2x\sin 4x dx$; е) $\int\frac{dx}{5+3\cos x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданою лінією: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{k^2}=1$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y=x^3$, $y=5$, $x=0$ навколо осі ***Oy***.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t) = 3+\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 35-\sqrt[3]{t^2}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $tgydx - x\ln^k xdy$; б) $y' + ky = e^{-kx}$; $y = 2$ при $x = 0$;

в) $xy' = \sqrt{(2-3k)x^2 + y^2} + y$; г) $4y'' + 16y'k + 15yk^2 = 0$, $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 1$; д) $y'' + 4y' + 29y = (4k+3)e^{5x}$.

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{n+k}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(k+2)n}{\sqrt{4n^2-3}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2k+3}{\sqrt{k\ n+1}}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+4k)^{1/3}}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n(2kn+1)}x^n$.

ВАРІАНТ №42.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=1998-4x-20y+0,2x^2+0,5y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a = 21\%, b = 42\%, c = 63\%, M = 3000$ *грн.*, $L = 125 \cdot k$, $K = 9$ *млн.грн.*

3.

X	**40**	**42**	**45**	**50**	**55**	**58**	**60**	**65**
Y	**80**	**75**	**72**	**70**	**60**	**55**	**50**	**40**

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int(\cos x)^{3k-1}\sin xdx$;

б) $\int(x+3k)^2 e^{(2k+1)x}dx$; в) $\int\frac{2x^2-4kx-6(k+1)}{x^2-2x(1+k)-2k-3}dx$;

г) $\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}}$; д) $\int\cos^4 x\sin^2 xdx$; е) $\int e^{2x}ctge^{2x}dx$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданою лінією: $4k^2x^2 + y^2 = k^2$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y = -4x^2 + 1$, $y = 0$ навколо осі Ox.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його

діяльності визначались формулами: $V'(t) = 11 + 3\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 18 - 4\sqrt[3]{t^2}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $y'tgx - y = k$; б) $y' = \frac{x+y}{x}$; $y = 2$ при $x = 1$;

в) $(kx+2)y' + ky = x$; г) $y'' + 4y'k + 29yk^2 = 0$, $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 1$;

д) $y'' + k^2y = (k^2+1)x^2 + (2k+1)x + k - 3$.

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(k+1)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(kn^3-3)^2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{3n+2k}}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3k+\sqrt[3]{n+1}}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{(3k-1)n}$.

ВАРІАНТ №43.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=1530-20x-21y+0,2x^2+0,7y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a = \frac{43}{2}\%, b = 43\%, c = \frac{129}{2}\%, M = 3000$ *грн.*, $L = 125 \cdot k$, $K = 9$ *млн.грн.*

3.

X	**300**	**302**	**305**	**310**	**340**	**350**	**360**	**380**
Y	**180**	**175**	**170**	**150**	**140**	**110**	**105**	**100**

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int\frac{dx}{x\sqrt{k^2-\ln^2(k+3)x}}$;

б) $\int(kx^2+3k-1)\cos 2xdx$; в) $\int\frac{4x^2+4(2k+1)x-2k-23}{x^2-x(1-2k)-4(2k+3)}dx$;

г) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; д) $\int\cos 9x\cos 2xdx$; е) $\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $xy = k$; $x = 2$; $x = 6$; $y = 0$.

6. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y = \cos x$ (однією півхвилею), $y = 0$ навколо осі Ox.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t) = 2 + 2\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 18 - 2\sqrt[3]{t^2}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння та розв’язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $y' + (k+1)x^k y = x^k$; б) $xy' - ky = x^{k+1}e^x$; $y = e$ при $x = 1$;

в) $xy' = \sqrt{2kx^2 + y^2} + y$; г) $2y'' + y'k - yk^2 = 0$, $y|_{x=1} = 0$, $y'|_{x=1} = 1$;

д) $y'' - 4y' + 8y = (k+3)\sin 3x$.

9. Дослідити на збіжність ряди:а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(k+3)n!}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{\sqrt{n^8+k^4}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k+2}{n(2k)^{n+1}}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+kn^2}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{5^{kn}\cdot(n+2)}$.

ВАРІАНТ №44.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=2100-12x-15y+0{,}6x^2+0{,}1y$.. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a = 22\%, b = 44\%, c = 66\%, M = 3000$ грн., $L = 125 \cdot k$, $K = 9$ млн.грн.

3.

X	**210**	**215**	**218**	**220**	**230**	**240**	**250**	**280**
Y	**140**	**130**	**125**	**110**	**105**	**100**	**95**	**70**

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int\frac{5kx^{5k-1}dx}{\sqrt[3]{1-x^{5k}}}$;

б) $\int\sqrt[5]{x^{k+1}}\,\ln(3k+1)x\,dx$; в) $\int\frac{x^3+(k-1)x^2-4kx++6(k-1)}{x^2+x(k-1)-4(k+3)}dx$;

г) $\int\frac{1+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-1}dx$; д) $\int\sin^2 x\cos^7 x\,dx$; е) $\int\frac{3dx}{4+\sin x}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y = kx^3$, $y = \pm 5$.

6. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y = x$, $y = -x^2 + 2$, $y = 0$ навколо осі Ox.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t) = 7 + 5\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 31 - 1\sqrt[3]{t^2}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння та розв’язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $xy' + (k+1)y = x^{1-k}\cos x$; б) $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$; $y = 4$ при $x = 1$;

в) $xy^k dx + k(x+1)dy = 0$; г) $4y'' - 20y'k + 25k^2 = 0$, $y|_{x=0} = 3$, $y'|_{x=0} = 1$;

д) $y'' + 4y = (5k-3)xe^{4x}$.

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(n+k)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(kn^2+1)^{3/2}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n^3+k^2)}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln^3(2n+3k)}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3k)^n x^n}{n}$.

ВАРІАНТ №45.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=2500-18x-10y+0{,}3x^2+0{,}5y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a = \frac{45}{2}\%, b = 45\%, c = \frac{135}{2}\%, M = 3000$ грн., $L = 125 \cdot k$, $K = 9$ млн.грн.

3.

X	**200**	**210**	**220**	**222**	**225**	**240**	**250**	**270**

Y	400	380	370	368	350	330	310	300

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int (\sin x)^{2k+1}\cos x dx$;

б) $\int \frac{(k+2)xdx}{\cos^2(3k+2)x}$; в) $\int \frac{5x^2+5(k+2)x-k+1}{x^2+x(2+k)-k-3}dx$;

г) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$; д) $\int \sin^5 xdx$; е) $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $x^2+y^2=k^2$, $x=\frac{k}{2}$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y=\sqrt{x}$, $y=-x+2$, $y=0$ навколо осі Ox.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=5+2\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t)=45-3\sqrt[4]{t^3}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $y'ctgx+ky=k+1$; б) $y'=\frac{2xy+y^2}{x^2}$; $y=2$ при $x=2$;

в) $(k+1)xy^k(1+x^2)=(1+y^{k+1})y'$; г) $y''-6y'k+34yk^2=0$, $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=2$;

д) $y''+2y'+10y=(2k+3)\cos kx$.

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n^2+k^2)^{3/4}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^2}{n^5+kn^3}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(kn^3+6)^{1/2}}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kn+1)x^n}{(n+3k)4^n}$.

ВАРІАНТ №46.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B

відомі: $V=1999-20x-4y+0{,}5x^2+0{,}2y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a=23\%, b=46\%, c=69\%, M=3000$ грн., $L=125\cdot k$, $K=5$ млн.грн.

3.

X	65	70	72	75	85	90	95	100
Y	230	210	205	200	180	170	150	140

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int \frac{\cos(5k-2)xdx}{\sqrt[7]{2+\sin(5k-2)x}}$;

б) $\int e^{(k+3)x}\sin(7k-2)xdx$; в) $\int \frac{4x^3+4(k+1)x^2-4kx+2k-2}{x^2+(1+k)x-k-2}dx$;

г) $\int \frac{dx}{3\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}$; д) $\int \sin^5 xdx$; е) $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y=\pm\sqrt{-kx}$, $x=-3$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=0$, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ навколо осі Oy.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=22+2\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t)=27-3\sqrt[4]{t^3}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $y'tgx-ky=k+2$; б) $y'=10^{kx-y}$; $y=1$ при $x=0$; в) $y'=\frac{y}{x}-ktg\frac{y}{x}$;

г) $y''+6y'k+13yk^2=0$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=2$;

д) $y''+y=(3k+2)x^2+(k+1)x+k$.

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(k+1)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(k+1)(n+1)}{\sqrt{n^2+2n+5}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k+n}{n\sqrt{n^2+2^k}}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[k]{n+2k}}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2nx^n}{(n+6)5^{kn}}$.

ВАРІАНТ №47.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=2321-18x-7y+0,2x^2+0,1y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a=\frac{47}{2}\%, b=47\%, c=\frac{141}{2}\%, M=3000\,грн., L=125\cdot k, K=9\,млн.грн.$

3.

X	**150**	**140**	**143**	**150**	**160**	**165**	**170**	**180**
Y	**200**	**180**	**175**	**160**	**150**	**142**	**120**	**100**

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int\frac{e^{ctg(k+2)x}dx}{\sin^2(k+2)x}$;

б) $\int(x+k)\arccos x\,dx$; в) $\int\frac{x^2+(k+2)x--2}{x^2+x(k-1)-2(k+1)}dx$;

г) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$; д) $\int\sin^5 x\,dx$; е) $\int\frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y=x^2-k^2$, $y=0$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $yx=5$, $y=-x+6$ навколо осі Ox.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=14+\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t)=38-2\sqrt[4]{t^3}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $x\ln xy'+(k+1)y=k\ln x$; б) $y'=\frac{kx+y}{x}$; $y=4$ при $x=1$;

в) $x^k y dy+k(y+1)dx=0$; г) $y''-5y'k+6yk^2=0$, $y|_{x=1}=2$, $y'|_{x=1}=1$;

д) $y''+9y=(4k-1)x^3+2x$.

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(k+3)^n n!}{n^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k+4}{n^2+9}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1+|\sin kn|}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{(n+3k)^{4/3}}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{(k+1)n}x^n}{\sqrt{n+5}}$.

ВАРІАНТ №48.

1. Мале підприємство виробляє товари A і B. Загальні щоденні витрати V (у гривнях) на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B відомі: $V=2454-21x-20y+0,7x^2+0,2y^2$. Визначити кількість одиниць товарів A і B, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a=24\%, b=48\%, c=72\%, M=3000\,грн., L=125\cdot k, K=9\,млн.грн.$

3.

X	**75**	**78**	**80**	**85**	**100**	**105**	**110**	**130**
Y	**115**	**112**	**110**	**105**	**80**	**75**	**70**	**50**

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int\sqrt[7]{3k+\sin(k+1)x}\cos(k+1)x\,dx$;

б) $\int x^{7k-3}\ln(3k+2)x\,dx$; в) $\int\frac{2x^3+(2k+4)x^2-2kx-k+14}{x^2+(k+2)x-k-3}dx$

г) $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x-2}}$; д) $\int\sin^6 x\,dx$; е) $\int\frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $x^2+y^2=k^2$, $y=\frac{k}{2}$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y=tgx$, $x=\frac{\pi}{4}$, $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ навколо осі Ox.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=3+4\sqrt{t}$, $D'(t)=13-\sqrt{t}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $y' = \frac{(k+1)xy + y^2}{x^2}$; б) $(kx+2)y' + ky = k+2;\ \ y = 1$ при $x = 1$;

в) $ke^x ctgy dx + \frac{1-e^x}{\sin^2 y}dy = 0$; г) $y'' - 5ky' + 6yk^2 = 0$, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 1$;

д) $y'' + 2y' + 2y = (2k+3)e^{2x}$.

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+k)^4}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k+1}{(n+2)(n+k)}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{e^{3n+k}}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2k^n\cdot\sqrt[5]{2n+1}}x^n$.

ВАРІАНТ №49.

1. Мале підприємство виробляє товари ***A*** і ***B***. Загальні щоденні витрати ***V*** (у гривнях) на виробництво ***x*** одиниць товару ***A*** та ***y*** одиниць товару ***B*** відомі: $V=3000-15x-12y+0,3x^2+0,6y^2$. Визначити кількість одиниць товарів ***A*** і ***B***, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a = \frac{49}{2}\%, b = 49\%, c = \frac{147}{2}\%, M = 3000 грн., L = 125\cdot k, K = 9 млн.грн.$

3.

X	**180**	**182**	**185**	**200**	**205**	**207**	**220**	**240**
Y	**55**	**50**	**48**	**40**	**38**	**35**	**30**	**20**

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int(\cos x)^{3k+2}\sin x dx$;

б) $\int e^{3kx}(2k+1)xdx$; в) $\int\frac{x^2+(k+1)x+k+4}{x^2+(1+k)x-k-2}dx$;

г) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)}-\sqrt{x+1}}$; д) $\int\sin^5 2xdx$; е) $\int\frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями: $y = x$, $x = k$, $y = 0$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y = -x^2 + 25$, $y = 0$ навколо осі ***Ox***.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t) = 6 + 2\sqrt{t}$, $D'(t) = 21 - 3\sqrt{t}$.

Тут ***V*** і ***D*** вимірювали у мільйонах гривень, а ***t*** – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $xy' + ky = (k+2)x^{1-k}$; б) $y' = \frac{kx}{y} + \frac{y}{x}$; $y = 2$ при $x = 1$;

в) $ctg^k x\cos^2 ydx + \sin^2 xtg^k ydy = 0$; г) $y'' + 2ky' + yk^2 = 0$, $y|_{x=1} = 2$, $y'|_{x=1} = 1$; д) $y'' - 2y' + 5y = (5k-3)\cos 5x$.

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)^k\frac{1}{(k+1)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+2k}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k+n}{n^{3k}}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n k}{n^2+1}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{(4+kn)^3}$.

ВАРІАНТ №50.

1. Мале підприємство виробляє товари ***A*** і ***B***. Загальні щоденні витрати ***V*** (у гривнях) на виробництво ***x*** одиниць товару ***A*** та ***y*** одиниць товару ***B*** відомі: $V=1500-25x-3y+0,5x^2+0,1y^2$. Визначити кількість одиниць товарів ***A*** і ***B***, яку потрібно виробляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2. $a = 25\%, b = 50\%, c = 75\%, M = 3000 грн., L = 125\cdot k, K = 9 млн.грн.$

3.

X	**550**	**540**	**567**	**570**	**580**	**582**	**590**	**600**
Y	**45**	**42**	**40**	**35**	**30**	**30**	**25**	**20**

4. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int\frac{\ln^3(3k+2)xdx}{(k+1)x}$;

б) $\int(kx+3)^2\cos kxdx$; в) $\int\frac{x^3+(1-k)x^2-3kx+3(1-k)}{x^2+(1-k)x-3(k+2)}dx$;

г) $\int\frac{7+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}}dx$; д) $\int\sin^7 x\cos^3 xdx$; е) $\int\frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями:

$y = -kx^2 + 1$, $y = kx^2 - 1$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y = x^2$, $y = 4$ навколо осі Ox.

7. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами:

$V'(t) = 7 + \sqrt{t}$, $D'(t) = 27 - 3\sqrt{t}$.

Тут V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші для рівнянь з вказаними початковими умовами:

а) $(x^2 + 4)y' - 2kxy = x(x^2 + 4)^{k-1}$; б) $y^k y' + x = k;$ $y = 1$ при $x = 0$;

в) $y' = \dfrac{(k-1)xy + y^2}{x^2}$; г) $y'' - 4k^2 y = 0$, $y|_{x=-1} = 2$, $y'|_{x=-1} = 2$;

д) $y'' - 4y' + 8y = (4k-1)x^2 + 31.$

9. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \dfrac{2k}{3^{n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[k]{2n+2}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 + \frac{2}{n}}{\sqrt{n+4}}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{1 + e^{kn}}$.

10. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{5^{2n+1}(n+4k)} x^n$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бараненков Г.С., Демидович Б.П., и др. Задачи и упражнения по математическому анализу. Под ред. Демидовича Б. П. - М. Наука.: 1970.– 472 с.
2. Барковський В. В., Барковська Н. В. Математика для економістів: Вища математика. – К.: Національна академія управління, 1997. – 397 с.
3. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Вища математика: Навчальний посібник: У 2-х ч. – К.: КНЕУ, 2001. – Ч.1,2.
4. Вища математика: Збірник задач: Навчальний посібник / В.П.Дубовик, І.І.Юрик, І.П.Вовкодав та ін.; за редакцією В.П.Дубовика, І.І.Юрика.-К.: АСК. 2001.– 648 с.
5. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самостійного вивчення дисципліни / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. – К.: КНЕУ, 1999. – 396 с.
6. Вища математика. Підручник / Домбровський В.А., Крижанівський І.М., Мацьків Р.С. та ін.; за редакцією Шинкарика М.І. – Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003.– 480 с.
7. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учеб.- 2-е изд., испр.-М.: Дело, 2001. – 688 с.
8. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике: Учеб. пособие. – ч.V– Харьков: Изд-во ХГУ, 1968. – Ч. І, І. – 412 с.
9. Карасев А. И., Аксютина З. М., Савельева Т. И. Курс высшей математики для економических вузов. – Ч. II. Теория вероятностей и математическая статистика. Линейное программирование: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1982. – 320 с.
10. Крыньский Х. Э. Математика для економистов: Пер. с польск. Меникера В. Д. Под ред. Баренгольца М. И. – М.: Статистика, 1970. – 584 с.
11. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Математический анализ в примерах и задачах.ч.1 Введение в анализ, производная, интеграл. «Вища школа»,1974. – 680 с.
12. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: Учебн. пособие. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
13. Неміш В.М., Процик А.І., Березька К.М. Вища математика (практикум): Навчальний посібник.- Тернопіль: Економічна думка, 2001.-266с.
14. Неміш В.М., Шинкарик М.І., Шелестовська М.Я.. Методичні вказівки до виконання індивідуальних домашніх завдань з вищої математики. Тернопіль, ТІНГ, 1992. – 64 с.
15. Beckmann M.,I.,Künzi H.P. Mathematik für Ökonomen I, II. – Berlin Heidelverg: Springer Verlag.-New York? 1969.
16. R.G.D. Allen. Mathematical Economics. Macmillan. ST MARTINS PRESS, 1970, 812 p.

Зміст

Навчальне видання

Домбровський Ігор Васильович,
Лесик Оксана Федорівна,
Мигович Федір Михайлович,
Цебрій Олексій Романович,
Шинкарик Микола Іванович.

ТИПОВІ ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

За редакцією Шинкарика М.І.