МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ОЛЕСЯ МАРТИНЮК

МАТЕРІАЛИ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИВЧЕННЯ КУРСУ «МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ»

Тернопіль — 2007

УДК 336
М 29

Рецензент *В. З. Чорний* — доцент кафедри математичного аналізу Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка

Затверджено на засіданні кафедри економіко-математичних методів
протокол №9 від 25.05.2007 р.

Мартинюк Олеся

М 29 Матеріали для самостійного вивчення курсу «Математичне програмування». — Тернопіль, 2007. — 88 с.

У посібнику наведені матеріали для самостійного вивчення курсу «Математичне програмування» для студентів економічних спеціальностей.

УДК 336

Відповідальний за випуск: О. Т. Іващук, кандидат економічних наук, доцент кафедри ЕММ ТНЕУ

«Мало є речей, які не піддаються математичному обґрунтуванню; і коли вони не піддаються, це ознака того, що наші знання про них дуже малі і нечіткі. А маючи змогу вдатись до математичного обґрунтування, великою дурістю було б шукати якесь інше, — це все одно, що йти навпомацки в темряві, коли поряд стоїть свічка».

Дж. Арбатнот

Мета: Розвиток математичного програмування почався трохи більше шести десятиліть тому. 1939 року академік Л. В. Канторович, досліджуючи деякі задачі економічного змісту, розробив методи чисельного розв'язування екстремальних задач. Цей науковий напрямок розвивається досить бурхливо. Ряд вчених за розроблення методів оптимізації отримали Нобелівські премії, серед них — і академік Л. В. Канторович. Опанувати математичне моделювання і методи оптимізації студенти мають неодмінно, щоб стати в інформаційному суспільстві фахівцями високого рівня.

З проблемами дослідження процесів на найкращий чи найгірший, найменший чи найбільший результат ми зустрічаємось у різних сферах людської діяльності від особистісного рівня (розподіл бюджету сім'ї, місячної зарплати та ін.) до завдань загальнодержавного рівня. Задачі такого характеру називають задачами оптимізації.

Їх вирішення як проблем удосконалення економічних відносин на сучасному етапі тісно пов'язане з використанням передових наукових технологій, серед яких важливе місце займають математичні методи, алгоритмізація розв'язку таких задач та їх розв'язування засобами обчислювальної техніки.

Метою вивчення предмету "Математичне програмування" є оволодіння студентами знаннями, уміннями та навичками розв'язування задач оптимізації, дослідження функції на максимальні (наприклад, прибуток) та мінімальні (розхід матеріалу) значення тощо.

Лекція 1.
Постановка задач математичного програмування.

План

1. Історична довідка
2. Предмет математичного програмування.
3. Математичне моделювання задач .
4. Класифікація задач МП.
5. Стандартні форми ЗЛП.

1. В суто математичному плані деякі оптимізаційні задачі були відомі ще в стародавній Греції. Однак, сучасне математичне програмування передусім розглядає властивості та розв'язки математичних моделей економічних процесів. Тому початком його розвитку як самостійного наукового напрямку слід вважати перші спроби застосування методів математичного програмування в прикладних дослідженнях, насамперед в економіці. Справжнім початком математичного програмування в сучасному розумінні вважають праці радянського вченого Л. В. Канторовича. Наприкінці 30-х років у Ленінградському університеті ним уперше були сформульовані та досліджувались основні задачі, критерії оптимальності, економічна інтерпретація, методи розв'язання та геометрична інтерпретація результатів розв'язання задач лінійного програмування (1939 року Л. В. Канторович оприлюднив монографію «Математичні методи організації і планування виробництва»). Сам термін «лінійне програмування» був введений дещо пізніше, 1951 року, у працях американських вчених Дж. Данцига та Г. Кумпанса. Однак у своїй монографії Дж. Данциг зазначає, що Л. В. Канторовича слід визнати першим, хто виявив, що широке коло важливих виробничих задач може бути подане у чіткому математичному формулюванні, яке уможливлює підхід до таких задач з кількісного боку та розв'язання їх чисельними методами.

1947 року Дж. Данцигом також був розроблений основний метод розв'язування задач лінійного програмування — симплексний метод, що вважається початком формування лінійного програмування як самостійного напрямку в математичному програмуванні. Наступним кроком стали праці Дж. Неймана (1947 р.) щодо розвитку концепції двоїстості, що уможливило розширення практичної сфери застосування методів лінійного програмування.

Періодом найінтенсивнішого розвитку математичного програмування є п'ятдесяті роки. У цей час з'являються розробки нових алгоритмів, теоретичні дослідження з різних напрямків математичного програмування: 1951 року — праця Г. Куна і А. Таккера, в якій наведено необхідні та достатні умови оптимальності нелінійних задач; 1954 року — Чарнес і Лемке розглянули наближений метод розв'язання задач з сепарабельним опуклим функціоналом та лінійними обмеженнями; 1955 року — ряд робіт, присвячених квадратичному програмуванню. У п'ятдесятих роках сформувався новий напрямок математичного програмування — динамічне програмування, значний вклад у розвиток якого вніс американський математик Р. Белман.

На жаль, у період найбурхливішого розвитку математичного програмування за кордоном у Радянському Союзі не спостерігалося значних досягнень через штучні ідеологічні обмеження. Відродження досліджень з математичного моделювання економіки почалося в 60-80-тих роках і стосувалося опису «системи оптимального функціонування соціалістичної економіки». Серед радянських вчених того періоду слід виокремити праці В. С. Немчинова, В. В. Новожилова, Н. П. Федоренка, С. С. Шаталіна, В. М. Глушкова, В. С. Михалевича, Ю. М. Єрмольєва та ін.

На сучасному етапі математичне програмування включає широке коло задач з відповідними методами розв'язання, що охоплюють різноманітні проблеми розвитку та функціонування реальних економічних систем. Розробляються банки економіко-математичних моделей, які в поєднанні з потужною, швидкодіючою обчислювальною технікою та сучасними програмними продуктами утворюватимуть системи ефективної підтримки прийняття рішень у різних галузях економіки.

2. Назва дисципліни «Математичне програмування» асоціюється передусім з програмуванням як процесом створення програм для ПЕОМ за допомогою спеціальної мови. Проте насправді це лише не дуже вдалий переклад англійського терміну *mathematical programming,* що означає розроблення на основі математичних розрахунків програми дій для досягнення обраної мети. В економічних, виробничих, технологічних процесах різних галузей народного господарства виникають задачі, подібні за постановкою, що мають ряд спільних ознак та розв'язуються подібними методами. Типова постановка задачі математичного програмування така: деякий процес може розвиватися за різними варіантами, кожен з яких має свої переваги та недоліки, причому, як правило, таких варіантів може бути безліч. Необхідно із усіх можливих варіантів вибрати найкращий. З цією метою використовуються математичні методи.

Реальні економічні задачі є достатньо складними, в яких, наприклад, кількість ресурсів та видів продукції може сягати сотень найменувань, і тоді простий перебір всієї множини варіантів абсолютно неможливий. Отже, постає необхідність розроблення спеціальних математичних методів розв'язання таких задач, тобто математичного обґрунтування найефективніших виробничих програм. Саме зі словом «програма» і пов'язана назва предмета — «математичне програмування».

Пошук реального оптимального плану є, як правило, складним завданням і належить до екстремальних задач, в яких необхідно визначити максимум чи мінімум (екстремум) функції за визначених обмежень.

Математичне програмування — один із напрямків прикладної математики, *предметом* якого є задачі на знаходження екстремуму деякої функції за певних заданих умов.

Об'єктами математичного програмування є різноманітні галузі людської діяльності, де в певних ситуаціях необхідно здійснити вибір найкращого з можливих варіантів дій. Основою такого вибору **є** знаходження розв'язку екстремальної задачі методами математичного програмування.

Розв'язання екстремальної економічної задачі складається з побудови економіко-математичної моделі, підготовки інформації, відшукання оптимального плану, економічного аналізу отриманих результатів і визначення можливостей їх практичного застосування.

Математична модель економічного об'єкта (системи) — це його спрощений образ, поданий у вигляді сукупності математичних співвідношень (рівнянь, нерівностей, логічних співвідношень, графіків тощо).

3. Математизація різноманітних галузей знань на сьогоднішні час не є чимось новим та несподіваним. Математичні методи широко застосовуються в сфері соціально – економічних, екологічних, технічних, міжнародних відносин. Найрізноманітніші прикладні науки, такі як менеджмент, прийняття управлінських рішень, соціально – економічне прогнозування використовують математичний апарат для вирішення своїх проблем і навіть стимулюють розвиток прикладних галузей математики.

Використання сучасних методів моделювання зумовлено:

- загальною тенденцією розширення та поглиблення дослідження процесів в реальному фізичному світі;
- значною тривалістю ряду процесів (екологічних, хіміко - технологічних);
- практичною неможливістю отримувати необхідну інформацію, досліджуючи об’єкт – оригінал (об’єкти макро- та мікросвіту);

- неповними достовірними данними про фізичний об'єкт, що реально існує;

- складністю протікання реальних процесів;

- відсутністю належних умов чи кваліфікації персоналу для проведення досліджень;

- необхідністю проведення великої кількості експериментів, коли тривале дослідження стає економічно недоцільним;

- відсутністю самого об'єкту, що знаходиться на стадії проектування.

Терміни “модель”, “моделювання” ми часто використовуємо в реальному житті, вкладаючи подекуди в них зовсім різні поняття. При розгляді моделювання як універсального методу наукового пізнання доцільно ввести наступне означення моделі.

Модель – це матеріальна або розумово – уявна система чи фізичний об'єкт, яка в процесі дослідження замінює об'єкт – оригінал так, що його безпосереднє вивчення дає нові знання про цей об'єкт.

Під *моделюванням* розуміють процес формалізації фізичного об'єкта метою якого є створення певного його аналога – моделі, що адекватна об'єктові. Моделювання – це триєдиний процес побудови, вивчення та застосування моделей.

Всі моделі можуть бути умовно поділені на декілька видів.

I) Фізичні моделі є об'єктами, що існують реально і створюються з реальних матеріалів. Це дійсне відтворення реально існуючого об'єкту. Сюди відносять:

А) *Геометрично подібні* моделі (макети різних установок, приладів, будов). Вони використовуються у зменшеному масштабі для того, щоб мати просторову уяву про об'єкт, компоновку його елементів, взаємне розміщення їх в просторі.

Б) *Фізично подібні* моделі (дослідження процесів продування моделі крила літака в аеродинамічній трубі). Вони створюються для того, щоб краще зрозуміти фізичні процеси, що вивчаються, їх кінетику та динаміку, виявлення найважливіших закономірностей та функціональних залежностей.

В) *Математично подібні* моделі (аналогові моделі руху рідин та газів, що описуються однаковими диференціальними рівняннями як плинність електричного струму). Створені для вивчення складних процесів (наприклад, транспонування рідини чи газу) за допомогою їх простіших аналогів (електричної моделі).

II) Уявні моделі існують в голові дослідника, на папері, магнітних носіях у вигляді певних уявних образів: формул, таблиць, знаків, схем тощо. Вони поділяються на:

А) *Образні моделі* побудовані з чуттєво – наглядних ідеальних елементів, що використовуються для наближеного опису реальних явищ (абсолютно чорне тіло, пружні кульки, ідеальний газ і т.д.).

Б) *Знакові моделі* відзначаються повною відсутністю подібності між досліджуваним об’єктом та його моделлю. Наприклад, заміна міста – точки відправлення поїзда буквою (Задача «З міста А в місто В йде поїзд…»).

В) *Образно – знакові* є поєднанням попередніх двох видів.

Одним з підвидів знакових моделей є математичні моделі. **Математична модель** фізичного об'єкта – це сукупність математичних співвідношень (рівнянь, формул, графіків), що пов’язують вихідні характеристики стану об’єкта з вхідною інформацією, геометричними та іншими обмеженнями іншою інформацією, шо накладається на функціонування об’єкту. Математична модель знаходиться у відповідності з об’єктом і здатна замінити його з метою отримання нової інформації про його поведінку.

Особливостями математичних моделей є:

- наближеність опису;
- врахування тільки основних чинників;
- компроміс між простотою та повнотою опису;
- обмеженність застосування;
- відмінність математичних моделей від закону (неабсолютність математичної моделі);
- адекватність.

Математичне моделювання – це комплексне дослідження властивостей фізичного об’єкту з допомогою створеної його математичної моделі (найчастіше з використанням ЕОМ).

В різних сферах застосування етапи процесу моделювання мають свої специфічні риси, але в усіх випадках можна виділити декілька етапів, що присутні завжди. Визначимо одну з пропонованих на сьогоднішній день класифікацій:

1. *Постановка проблеми та її якісний аналіз*. Тут виділяють найважливіші риси та властивості модельованого об’єкту та абстрагують другорядні, вивчають структуру та взаємозв’язок елементів, формулюють основні гіпотези (хоча би попередні).

2. *Побудова математичної моделі*. Це етап формалізації проблеми, вираження її у вигліді конкретнихматематичних залежностей та відношень. Як правило, спочатку визначається основна конструкція задачі (тип моделі), а потім відбувається уточнення окремих деталей.

3. *Математичний аналіз моделі.* Виясняються загальні властивості моделі, доводиться теорема існування розв'язку задачі (інакше наступні дослідження не проводяться), виясняють чи єдиний роозв'язок, які змінні в ходитимуть в розв'язок та в якому співвідношенні, в яких межах та з якою тенденцією вони змінюватииуться.

4. *Підготовка вихідної інформації.* Тут використовують методи теорії ймовірностей та математичної статистики.

5. *Чисельний розв'язок*. Розробляються алгоритми для розв'язування задачі, складаються програми для ПК. Завдяки швидкодії ЕОМ можна провести багаточислені експерименти з різними вихідними умовами та параметрами.

6. *Аналіз чисельних результатів та їх застосування*. Повністю вивчається питання про правильність та повноту результатів моделювання, адекватність моделі та її практичне застосування.

Змінні величини бувають незалежними чи залежними, дискретними чи неперервними, детермінованими або випадковими. Наприклад, залежною змінною є собівартість продукції, незалежною від процесу функціонування підприємства величиною є початковий розмір статутного фонду, дискретною — кількість видів продукції, неперервною —час, площа посіву тощо, детермінованою — норма висіву насіння кукурудзи на гектар, норма витрати сировини на одиницю продукції, випадковою — величина прибутку, кількість телят, які народяться у плановому періоді тощо.

Вхідні змінні економічної системи бувають двох видів: керовані x_j*(j= 1, 2, ..., n),* значення яких можна змінювати в деякому інтервалі; і некеровані змінні y_r *(r = I 2, ...,s),* значення яких не залежать від волі людей і визначаються зовнішнім середовищем. Наприклад, обсяг придбаного пального — керована, а температура повітря — некерована змінна. Залежно від реальної ситуації керовані змінні можуть переходити у групу некерованих і навпаки. Наприклад, у разі насиченого ринку обсяги придбання дизельного палива є керованою змінною величиною, а за умов дефіциту цього ресурсу — некерованою.

Кожна економічна система має певну мету свого функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимуму чистого прибутку. Ступінь досягнення мети, здебільшого, має кількісну міру, тобто може бути описаний математично.

Нехай z— вибрана мета (ціль). За цих умов вдається, як правило, встановити залежність між величиною z, якою вимірюється ступінь досягнення мети, вхідними змінними та параметрами системи:

$$z=f(x_1,x_2,...x_n;y_1,y_2,...y_s;c_1,c_2,...,c_l), \qquad (1)$$

де параметри c_k $(k=1,2,...,l)$ є кількісними характеристиками системи.

Функцію z називають *цільовою функцією,* або *функцією мети.* Для економічної системи це є функція ефективності її функціонування та розвитку, оскільки значення z відображує ступінь досягнення певної мети.

У загальному вигляді задача математичного програмування формулюється так:

Знайти такі значення керованих змінних x_j, щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального значення).

Отже, потрібно відшукати значення

$$max(min)z=f(x_1,x_2,...,x_n; y_1,y_2,...,y_s;c_1,c_2,...,c_1). \qquad (2)$$

Можливості вибору x_j , завжди обмежені зовнішніми щодо системи умовами, параметрами виробничо-економічної системи тощо.

Наприклад, площа посіву озимої пшениці обмежена наявністю ріллі та інших ресурсів, сівозмінами, можливістю реалізації зерна, необхідністю виконання договірних зобов'язань тощо. Ці процеси можна описати системою математичних рівностей та нерівностей виду:

$$\varphi_i(x_1,x_2,...x_n;y_1,y_2,...y_s;c_1,c_2,...,c_l)\{\le,=,\ge\}0, \qquad (3)$$

де $i=1,2,...,m.$

Тут набір символів $(\le,=,\ge)$ означає, що для деяких значень поточного індексу i виконуються нерівності типу $\ge$, для інших — рівності (=), а для решти — нерівності типу $\le$.

Система (3) називається *системою обмежень,* або *системою умов* задачі. Вона описує внутрішні технологічні та економічні процеси функціонування й розвитку виробничо-економічної системи, а також процеси зовнішнього середовища, які впливають на результат діяльності системи. Для економічних систем змінні x_j мають бути невід'ємними:

$$x_j\ge 0 \quad (j = 1,2,...,n). \qquad (4)$$

Залежності (2)—(4) утворюють *економіко-математичну модель* економічної системи. Розробляючи таку модель, слід дотримуватись певних правил:

1. Модель має адекватно описувати реальні технологічні та економічні процеси.

2. У моделі потрібно враховувати все істотне, суттєве в досліджуваному явищі чи процесі, нехтуючи всім другорядним, неістотним у ньому. Математичне моделювання — це мистецтво, вузька стежка між переспрощенням та переускладненням. Справді, прості моделі не забезпечують відповідної точності, і «оптимальні» розв'язки за такими моделями, як правило, не відповідають реальним ситуаціям, дезорієнтують користувача, а переускладнені моделі важко реалізувати на ЕОМ як з огляду на неможливість їх інформаційного забезпечення, так і через відсутність відповідних методів оптимізації.

3. Модель має бути зрозумілою для користувача, зручною для реалізації на ЕОМ.

4. Необхідно, щоб множина змінних x_j була не порожньою. З цією метою в економіко-математичних моделях за змоги слід уникати обмежень типу «=», а також суперечливих обмежень.

Наприклад, ставиться обмеження щодо виконання контрактів, але ресурсів недостатньо, аби їх виконати. Якщо система (3), (4) має єдиний розв'язок, то не існує набору різних планів, а отже, й задачі вибору оптимального з них.

Будь-який набір змінних $x_1, x_2, \ldots x_n$ що задовольняє умови (3) і (4), називають *допустимим планом,* або *планом.* Очевидно, що кожний допустимий план є відповідною *стратегією економічної системи, програмою дій.* Кожному допустимому плану відповідає певне значення цільової функції, яке обчислюється за формулою (1).

Сукупність усіх розв'язків системи обмежень (3) і (4), тобто множина всіх допустимих планів утворює *область існування планів* (*область допустимих планів*).

План, за якого цільова функція набуває екстремального значення, називається *оптимальним.* Оптимальний план *є розв'язком задачі математичного програмування* (2)—(4).

4. У математичному програмуванні виділяють два напрямки — *детерміновані* задачі і *стохастичпі.* Детерміновані задачі не містять випадкових змінних чи параметрів. Уся початкова інформація повністю визначена. У стохастичних задачах використовується вхідна інформація, яка містить елементи невизначеності, або деякі параметри набувають значень відповідно до визначених функцій розподілу випадкових величин. Наприклад, якщо в економіко-математичній моделі прибутки, врожайності сільськогосподарських культур тощо задані своїми математичними сподіваннями, то така задача є детермінованою. Якщо ж ці величини задані функціями розподілу, наприклад нормального з математичним сподіванням a і дисперсією D, то така задача є стохастичною.

Якщо у відповідних економічних процесах випадкові явища не відіграють істотної ролі, то задачу можна розв'язувати як детерміновану. У іншому разі адекватна економіко-математична модель має бути стохастичною, тобто містити випадкові функції та величини. Структура та розв'язування таких задач вивчаються в окремому розділі, який називається *стохастичним програмуванням.*

Кожен з названих напрямків включає типи задач математичного програмування, які в свою чергу поділяються на інші класи.

Як детерміновані, так і стохастичні задачі можуть бути ***статичними*** (однокроковими) або ***динамічними*** (багатокроковими). Оскільки економічні процеси розвиваються в часі, відповідні економіко-математичні моделі мають відображати їх динаміку. Поняття динамічності пов'язане зі змінами об'єкта (явища, процесу) у часі. Наприклад, якщо йдеться про план розвитку економіки України до 2012 року, то мають бути обґрунтовані значення відповідних макроекономічних показників не лише на 2012 рік, а й на всі проміжні роки, тобто слід планувати поступовість (динаміку) розвитку народногосподарських процесів. Такий план називають *стратегічним.* У ньому має бути обґрунтована оптимальна (найкраща, але реальна) траєкторія розвитку народного господарства. Проте під впливом некерованих чинників фактичні показники щороку можуть відхилятися від запланованих. Тому постає необхідність коригувати кожний річний план. Такі плани називають ***тактичними.*** Вони визначаються в результаті розв'язання статичної економіко-математичної задачі.

Важливо чітко усвідомити відмінність між одно- та багатокроковими задачами. Багатокроковість як метод розв'язування задач математичного програмування зумовлюється, насамперед, багатовимірністю задачі й означає, що послідовно застосовуючи індукцію, крок за кроком знаходять оптимальні значення множини змінних, причому отриманий на кожному кроці розв'язок має задовольняти умови оптимальності попереднього розв'язку. Така процедура може бути більш чи менш тісно пов'язана з часом. Однокрокові задачі, навпаки, характеризуються тим, що всі компоненти оптимального плану задачі визначаються водночас на останній ітерації (останньому кроці) алгоритму. Потрібно розрізняти ітераційність алгоритму і його багатокроковість. Наприклад, симплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування є ітераційним, тобто у певний спосіб дістають допустимий план і в результаті деякої кількості ітерацій визначають оптимальний план. Тут виконуються ітерації (кроки) алгоритму симплексного методу, але це не можна інтерпретувати як багатокроковість економічного процесу (явища). Деякі задачі математичного програмування можна розглядати як одно- або багатокрокові залежно від способу їх розв'язання. Якщо задачу можна розв'язувати як однокрокову, то розв'язувати її як багатокрокову недоцільно, бо в такому разі для знаходження оптимального плану необхідно застосовувати складніші методи. Проте більшість економічних процесів є динамічними, їх параметри змінюються в часі й залежать від рішень керівництва, які доводиться приймати з метою спрямування розвитку економічної системи за траєкторією, яка визначена стратегічним планом.

Задачі математичного програмування поділяють також на ***дискретні*** і ***неперервні.*** Дискретними називають задачі, в яких одна, кілька або всі змінні набувають лише дискретних значень. З-поміж них окремий тип становлять задачі, в яких одна або кілька змінних набувають цілочислових значень. їх називають задачами *цілочислового програмування.* Якщо всі змінні можуть набувати будь-яких значень на деяких інтервалах числової осі, то задача є *неперервною.*

Оскільки в економіко-математичних моделях залежності між показниками описані за допомогою функцій, то відповідно до їх виду всі вище згадані типи задач поділяють на *лінійні* та *нелінійні.* Якщо цільова функція (2) та обмеження (3) є лінійними, тобто містять змінні x_i тільки у першому або нульовому степенях, то така задача є лінійною. В усіх інших випадках задача буде нелінійною.

Найпростішими з розглянутих типів є статичні, детерміновані, неперервні та лінійні задачі. Важливою перевагою таких задач є те, що для їх розв'язування розроблено універсальний метод, який називається *симплексним ме-*

тодом. Теоретично кожну задачу лінійного програмування можна розв'язати. Для деяких типів лінійних задач, що мають особливу структуру, розробляють спеціальні методи розв'язання, які є ефективнішими. Наприклад, транспортну задачу можна розв'язати симплексним методом, але ефективнішими є спеціальні методи, наприклад, метод потенціалів.

Економічні та технологічні процеси, як правило, є нелінійними, стохастичними, розвиваються за умов невизначеності. Лінійні економіко-математичні моделі часто є неадекватними, тобто такими, що неточно описують процес, який досліджується, тому доводиться будувати стохастичні, динамічні, нелінійні моделі. Розв'язувати такі задачі набагато складніше, ніж лінійні, оскільки немає універсального методу їх розв'язання. Для окремих типів нелінійних задач розроблено спеціальні числові методи розв'язання. Проте слід зазначити, що на практиці застосовують, здебільшого, лінійні економіко-математичні моделі. Часто нелінійні залежності апроксимують (наближають) до лінійних. Такий підхід є доволі ефективним.

У нелінійному програмуванні (залежно від функцій, які використовуються в економіко-математичній моделі) виокремлюють опукле та квадратичне програмування. *Задача належить до опуклого програмування* у тому разі, коли цільова функція *вгнута,* якщо вона мінімізується, та *опукла,* якщо вона максимізується, а всі обмеження — однотипні нерівності типу ($\leq$) або рівняння, в яких ліві частини є опуклими функціями, а праві частини — сталими величинами. У разі обмежень типу ($\geq$) їх ліві частини мають бути вгнутими функціями. Тоді область допустимих планів є опуклою та існує глобальний, єдиний екстремум. *Квадратичне програмування* — якщо цільова функція квадратична, а обмеження лінійні.

Щойно було розглянуто лише основні типи задач математичного програмування. Можна також за різними ознаками виокремити й інші підтипи. Це особливо стосується задач лінійного, нелінійного і стохастичного програмування. Наприклад, як окремий тип розглядають *дробово-лінійне програмування,* коли обмеження є лінійними, а цільова функція — дробово-лінійна. Особливий тип становлять задачі *теорії ігор,* які широко застосовуються в ринковій економіці. Адже тут діють дві чи більше конфліктних сторін, які мають частково або повністю протилежні цілі. У сукупності задач теорії ігор, у свою чергу, також виокремлюють певні підтипи. Наприклад, *ігри двох осіб із нульовою сумою.*

Наведена вище класифікація задач використана для структурування курсу «Математичне програмування».

Приклади економічних задач математичного програмування

Складність економічних систем (явищ, процесів) як об'єктів досліджень вимагає їх ретельного вивчення з метою з'ясування найважливіших функціональних залежностей, внутрішніх взаємозв'язків між їхніми елементами. В результаті здійснюються можливі спрощення та допущення, що, очевидно, погіршує адекватність побудованих математичних моделей і є чудовим приводом для критики. Однак лише прийняття певних допущень уможливлює формалізацію будь-якої економічної ситуації.

Не існує загальних рекомендацій щодо процесу моделювання, тому в кожному конкретному разі вимоги до побудови математичної моделі залежать від цілей та умов досліджуваної системи.

У процесі застосування математичного моделювання в економіці чітка постановка задачі та її формалізація є найскладнішим етапом дослідження, вимагає ґрунтовних знань передусім економічної суті процесів, які моделюються. Однак, вдало створена математична модель може надалі застосовуватись для розв'язування інших задач, які не мають відношення до ситуації, що початково моделювалася. Починаючи з робіт Л. В. Канторовича, в математичному програмуванні сформовано певний набір класичних постановок задач, економіко-математичні моделі яких широко використовуються в практичних дослідженнях економічних проблем.

Наведемо кілька вже формалізованих типових постановок економічних задач, що розв'язуються методами математичного програмування (більшість сформульованих задач будуть вивчатися в наступних розділах).

Всі розглянуті задачі залежно від наявності та точності початкової інформації, мети дослідження, ступеня врахування невизначеності, специфіки застосування до конкретного процесу можуть бути сформульовані як у вигляді статичних, детермінованих, неперервних лінійних задач, так і в складнішій постановці, де один, кілька чи всі параметри визначаються з певним рівнем імовірності та використовуються нелінійні залежності.

Задача визначення оптимального плану виробництва: для деякої виробничої системи (цеху, підприємства, галузі) необхідно визначити план випуску кожного виду продукції за умови найкращого способу використання наявних ресурсів. У процесі виробництва задіяний визначений набір ресурсів: сировина, трудові ресурси, технічне обладнання тощо. Відомі загальні запаси ресурсів, норми витрат кожного ресурсу та прибуток з одиниці реалізованої продукції. Задаються також за потреби обмеження на обсяги виробництва продукції у певних співвідношеннях(задана асортиментність).Критерії оптимальності: максимум прибутку, максимум товарної продукції, мінімум витрат ресурсів.

Задача про «дієту» (або про суміш): деякий раціон складається з кількох видів продуктів. Відомі вартість одиниці кожного компонента, кількість необхідних організму поживних речовин та потреба в кожній речовині, вміст в одиниці кожного продукту кожної поживної речовини. Необхідно знайти оптимальний раціон — кількість кожного виду продукту, що враховує вимоги забезпечення організму необхідною кількістю поживних речовин. Критерій оптимальності — мінімальна вартість раціону.

Транспортна задача: розглядається певна кількість пунктів виробництва та споживання деякої однорідної продукції (кількість пунктів виробництва та споживання не збігається). Відомі обсяги виготовленої продукції в кожному пункті виробництва та потреби кожного пункту споживання. Також задана матриця, елементи якої є вартістю транспортування одиниці продукції з кожного пункту виробництва до кожного пункту споживання. Необхідно визначити оптимальні обсяги перевезень продукції, за яких були б найкраще враховані необхідності вивезення продукції від виробників та забезпечення вимог споживачів. Критерії оптимальності: мінімальна сумарна вартість перевезень, мінімальні сумарні витрати часу.

Задача оптимального розподілу виробничих потужностей: розглядаються кілька підприємств, що виготовляють певну кількість видів продукції. Відомі фонд робочого часу кожного підприємства; потреби в продукції кожного виду; матриця потужностей виробництва всіх видів продукції, що виготовляються на кожному підприємстві, а також собівартості виробництва одиниці продукції кожного підприємства. Необхідно розподілити виробництво продукції між підприємствами у такий спосіб, щоб задовольнити потреби у виготовленні продукції та максимально використати виробничі потужності підприємств. Критерій оптимальності: мінімальні сумарні витрати на виготовлення продукції.

Задача про призначення: нехай набір деяких видів робіт може виконувати певна чисельність кандидатів, причому кожного кандидата можна призначати лише на одну роботу і кожна робота може бути виконана тільки одним кандидатом. Відома матриця, елементами якої є ефективності (у вибраних одиницях) кожного претендента на кожній роботі. Розв'язком задачі є оптимальний розподіл кандидатів на посади. Критерій оптимальності: максимальний сумарний ефект від виконання робіт.

Задача комівояжера: розглядається кілька міст. Комівояжеру необхідно, починаючи з міста, в якому він перебуває, обійти, не буваючи ніде двічі, всі міста і повернутися в початкове. Відома матриця, елементи якої — вартості пересування (чи відстані) між всіма попарно пунктами подорожі. Знайти оптимальний маршрут. Критерій оптимальності: мінімальна сумарна вартість (відстань) пересування по маршруту.

Задача оптимального розподілу капіталовкладень. Планується діяльність групи (системи) підприємств протягом деякого періоду, який розділено на певну кількість підперіодів. Задана сума коштів, які можна вкладати в будь-яке підприємство чи розподіляти між ними протягом всього періоду планування. Відомі величини збільшення виробництва продукції (за умови здійснення додаткових капіталовкладень) у кожному з підприємств групи для всіх підперіодів. Необхідно визначити, як розподіляти кошти на початку кожного підперіоду між підприємствами так, щоб сумарний дохід за весь період був максимальним.

В основу моделей лінійного програмування закладені два прості допущення, які майже завжди виконуються:

- припущення подільності, яке полягає в тому, що сумарна кількість ресурсів, що використовуються і відповідний прибуток строго пропорційні обсягу випущеної продукції;
- припущення аддитивності полягає у рівності загальної суми всіх затрачених ресурсів кількості ресурсів, спожитих в технологічних процесах та рівності загального прибутку всім прибуткам, отриманим в процесах.

Питання про постановку задачі лінійного програмування розглянемо на прикладі.

Задача. Вибрати найдешевший режим харчування, що забезпечує наявність всіх необхідних поживних речовин.

Розв'язування. Вважатимемо, що є три види продуктів: B_1, B_2, B_3 і необхідна кількість поживних речовин позначена A_1, A_2, A_3, A_4. Позначимо α_{ij} — кількість поживних речовин вигляду Ai в продукті виду Bj, β_i — мінімальна добова потреба в речовині; c_i — ціна одиниці їжі. Дані запишемо в таблицю

Загальна кількість спожитих речовин не повинна бути меншою ніж мінімальна добова потреба в цій речовині.

Види поживних речовин	Види продуктів			Мінімальна потреба в речовині на добу
	B_1	B_2	B_3	
A_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}	β_1
A_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}	β_2
A_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}	β_3
A_4	α_{41}	α_{42}	α_{43}	β_4
Вартість одиниці продукту	c_1	c_2	c_3	

Враховуючи обмеження, отримаємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 \geq \beta_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 \geq \beta_2, \\ \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 \geq \beta_3, \\ \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \alpha_{43}x_3 \geq \beta_4. \end{cases} \tag{1}$$

Вартість всієї їжі позначимо z і вона повинна бути мінімальною, тобто

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 (\min) \tag{2}$$

Так як від'ємна кількість їжі не має логічного змісту, то $x_i \geq 0$.

До такого класу відносяться всі задачі з подібними системами обмежень та аналогічним виглядом цільової функції, що оптимізується на максимум чи мінімум.

Математично такі задачі формулюються так: *серед невід'ємних розв'язків системи нерівностей (1) знайти такий, який надає функції (2) найменшого значення.*

4. Загальна економіко-математична модель задачі лінійного програмування

Загальна лінійна економіко-математична модель економічних процесів та явищ — так звана загальна задача лінійного програмування подається у вигляді:

$$z=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n\ (max) \qquad (1)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ \le, \ge, = \ b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \ \le, \ge, = \ b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \ \le, \ge, = \ b_m. \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0. \qquad (3)$$

Отже, потрібно знайти значення змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, які задовольняють умови (2) і (3), і цільова функція (1) набуває екстремального (максимального чи мінімального) значення.

Для довільної задачі математичного програмування були введені поняття допустимого та оптимального планів.

Для загальної задачі лінійного програмування використовуються такі поняття.

Вектор $X= (x_1, x_2, ..., x_n)$ координати якого задовольняють систему обмежень (2) та умови невід'ємності змінних (3), називається *допустимим розв'язком (планом) задачі лінійного програмування.*

Допустимий план $X= (x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *опорним планом* задачі лінійного програмування, якщо він задовольняє не менше, ніж m лінійно незалежних обмежень системи (2) у вигляді рівностей, а також обмеження (3) щодо невід'ємності змінних.

Опорний план $X= (x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *невиродженим,* якщо він містить точно m додатних змінних, інакше він *вироджений.*

Опорний план $X^* =(x^*_1,x^*_2,...,x^*_n)$, за якого цільова функція (1) досягає максимального (чи мінімального) значення, називається *оптимальним розв'язком (планом) задачі лінійного програмування.*

5. *Стандартні форми ЗЛП.*

Для розв'язування задач лінійного програмування та складання для них програм на ЕОМ необхідно, щоб задача була записана в певній стандартній формі. Розрізняємо два типи таких форм:

1) основна задача лінійного програмування з обмеженнями – рівностями (ОЗЛП з ОР або перша стандартна форма);

2) основна задача лінійного програмування з обмеженнями – нерівностями (ОЗЛП з ОН або друга стандартна форма).

ОЗЛП з ОР полягає в наступному: серед усіх невід'ємних розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

знайти такий, при якому форма

$$z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad \text{extr} \tag{2}$$

набуває екстримального (максимального чи мінімального) значення.

Справедливе наступне твердження.

Лема 1. Будь – яку задачу ЛП можна звести до ОЗЛП з ОР.

Приймемо це твердження без доведення. Зауважимо лише, як це потрібно зробити: спочатку до менших частин всіх обмежень – нерівностей потрібно додати нову невід'ємну невідому, яка перетворить її в рівність. ОЗЛП з ОН полягає в тому, що серед усіх невід'ємних розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n < b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n < b_2, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n < b_m \end{cases} \tag{3}$$

знайти такий, при якому форма

$$z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (\,extr) \tag{4}$$

набуває екстримального значення.

Справедливе наступне твердження.

Лема 2. ОЗЛП з ОР завжди може бути зведена до ОЗЛП з ОН.

І звідси випливає така теорема

***Теорема 1. ОЗЛП з ОР і ОЗЛП з ОН еквівалентні між собою*.**

Тобто, кожному розв'язку $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ нерівності $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le b$ відповідає єдиний розв'язок $X_{роз}^* = (x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n, x^*_{n+1})$ рівняння $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = b$, який одночасно є розв'язком нерівності, і, навпаки, кожному розв'язку рівняння $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = b$ $X_{роз}^* = (x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n, x^*_{n+1})$ і нерівності $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le b$ відповідає єдиний розв'язок $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ нерівності.

Щоб звести задачу до другої стандартної форми, необхідно методом Жордана-Гаусса виділити базисні невідомі та використавши невід'ємність невідомих звести до нерівностей обмеження ЗЛП.

Приклад. Звести до ОЗЛП з ОН задачу

$$z = 2 - x_1 + 3x_2 \qquad (\min),$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 10, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 8, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4)$$

Розв'язування. Виписуємо матрицю системи обмежень

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -3 & 10 \\ 4 & 1 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

і шукаємо ранг матриці, базисним буде мінор

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

Отже, ранг матриці рівний 2, x_1, x_4 — вільні невідомі, x_2, x_3 — базисні. Розв'язавши систему відносно базисних невідомих, маємо

$$\begin{cases} x_2 = 9 - 3x_1 + x_4, \\ x_3 = 1 + x_1 + 2x_4, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4).$$

Так як $x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$, то з останньої системи маємо:

$$\begin{cases} 9 - 3x_1 + x_4 \ge 0, \\ 1 + x_1 + 2x_4 \ge 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 + x_4 \le 9, \\ -x_1 - 2x_4 \le 1, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_4 \ge 0. \qquad x_1 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

Запишемо форму через вільні невідомі

$$z = 2 - x_1 + 3(9 - 3x_1 + x_4) = 29 - 10x_1 + 3x_4.$$

Таким чином, ОЗЛП з ОН рівносильна до даної має вигляд:

$$z = 29 - 10x_1 + 3x_4$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_4 \le 9, \\ -x_1 - 2x_4 \le 1, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

Зауважимо, що ОЗЛП з ОН рівносильна до ОЗЛП з ОР може мати різні вигляди, все залежить від того, які ми невідомі оголосимо базисними, а які вільними.

Контрольні запитання

1. Що таке моделювання? Чим зумовлене використання моделювання?
2. Що таке модель? Прокласифікуйте відомі вам моделі.
3. Що таке математичні моделі? Які їх особливості?
4. Що таке математичне моделювання? Сформулюйте основні етапи математичного моделювання.
5. Прокласифікуйте задачі математичного моделювання.
6. Які задачі називають оптимізаційними? Прокласифікуйте їх.
7. Який розв'язок задачі лінійного програмування називають оптимальним?
8. Які припущення закладають в основу моделі лінійного програмування?
9. Яка математична суть задач лінійного програмування?

Лекція №2
Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування

План

1. Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування.
2. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування.

1. Для кращого розуміння алгебраїчних властивостей задач лінійного програмування скористаємось їх геометричною інтерпритацією. Введемо поняття опуклої множини.

Означення 1. *Множина точок М називається* ***опуклою****, якщо разом з будь – яким двома її точками множині належить і відрізок, що їх сполучає.*

Означення 2. *Множина називається* ***обмеженою****, якщо її можна помістити в кулю (коло) скінченого радіуса з центром в будь – якій точці множини, і* ***необмеженою*** *в протилежному випадку.*

Означення 3. ***Граничною*** називається така точка множини, в довільному околі якої є і точки, що належать множин, і точки, що їй не належать.

Означення 4. *Сукупність граничних точок множини називається її* ***границею.***

Найпростіший приклад опуклої множини – опуклий многокутник. Його границя складається з відрізків чи прямих. Точки, в яких перетинаються відрізки чи прямі границі многокутника називаються його ***вершинами.***

Означення 5. Перетином *областей називають множину точок, що належать кожній з цих областей.*

Теорема 2. Перетин будь – якого числа опуклих областей завжди є опукла множина.

Для геометричної інтерпритації будемо розглядати ОЗЛП з ОН, які містять лише дві невідомі, оскільки вони легко відображаються на прямокутній декартовій системі координат. Задачі з трьома невідомими на малюнку розглядатимуться в проекції, що утруднить їх розгляд, а задачі з більшою кількістю невідомих взагалі важко уявити геометрично.

Розглянемо задачу лінійного програмування:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases} \tag{5}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$

$$z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 \qquad \text{extr} \tag{6}$$

Лема 3. Розв'язком нерівності $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 < b_i$ ***є півплощина.***

Означення 6. *Півплощину, побудовану за нерівністю* $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 < b_i$ *називають* ***півплощиною розв'язків нерівності****, її границю –* ***граничною прямою*** $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$.

Означення 7. *Сукупність точок, яка задовольняє систему нерівностей (5), називають* ***многокутником розв'язків (або областю допустимих значень—ОДЗ)****.*

Теорема 3. Многокутник розв'язків завжди є опуклою фігурою.

Теорема 4. Оптимальне значення задачі лінійного програмування досягається у вершині многокутника розв'язків.

Таким чином задачу лінійного програмування можна інтерпретувати так: у многокутнику розв'язків знайти таку вершину, де цільова функція набуває найменшого (найбільшого) значення.

2. На основі геометричної інтерпретації сформуємо алгоритм графічного методу відшукання оптимальних значень функції.

1) **Будуємо многокутник розв'язків**. Він складається з перетину окремих півплощин розв'язків системи (5). В силу обмежень $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ многокутник розв'язків завжди міститься в першому квадранті.

2) **Знаходимо оптимальну точку**. Вона міститься в вершині многокутника розв'язків. Для її відшукання відкладають *вектор нормалі* прямої $c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$, $\vec{N}(c_1, c_2)$. Потім рисуємо лінію перпендикулярну до вектора нормалі, вона називається *лінією рівня*. Пересуваючи лінію рівня в напрямі вектора нормалі до останньої вершини многокутника розв'язків, отримуємо точку максимуму цільової функції, пересуваючи цю лінію в протилежному до вектора нормалі напрямі, в останній вершині дотику отримуємо точку мінімуму цільової функції.

3) **Обчислюємо оптимальні значення**. Знаходимо координати вершин max і min, як розв'язок системи рівнянь, що визначають сторони многокутника, що утворюють ці вершини. Знайдені координати підставляємо в форму (6).

Зауважимо, що якщо многокутник розв'язків необмежений, то можливо, що мінімального чи максимального (або й обох) значень не існує, тобто — це $+\infty$ чи $-\infty$.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 2x_1 + 3x_2$, за умов обмеження $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Розв’язування. Побудуємо прямі, що відповідають рівнянням, зрозумілим з системи обмежень та відмітимо ті півплощини, що відповідають нерівностям обмежень.

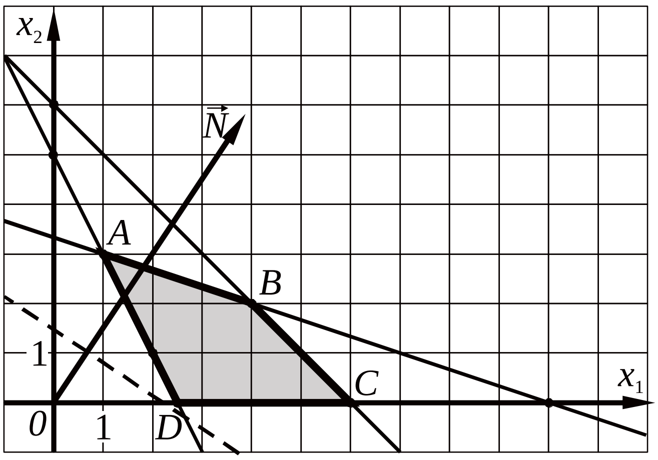
$l_1 : x_1 + 3x_2 = 10$, пряма проходить через точки (1; 3) і (10; 0);

$l_2 : x_1 + x_2 = 6$, пряма проходить через точки (0; 6) і (6; 0);

$l_3 : 2x_1 + x_2 = 5$, пряма проходить через точки (0; 5) і (2; 1).

Умова $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ вказує на достатність розгляду в першому квадранті.

Всім умовам належності до відповідних півплощин відповідає чотирикутник *ABCD*. Будуємо вектор нормалі $\vec{N}\ 2;3$ до цільової функції і переміщаємо пряму перпендикулярно до цього вектора. Перший раз ця пряма перетинає трикутник в вершині *D*(2,5; 0), отже $z_{\min} = 2 \cdot 2{,}5 + 3 \cdot 0 = 5$. Остання вершина дотикається до прямої вздовж її руху – це точка *C*(6; 0), звідси $z_{\max} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 = 12$.



Контрольні запитання

1. Які є типи задач лінійного програмування?
2. Сформулюйте задачі лінійного програмування з обмеженнями – рівностями та обмеженнями – нерівностями.
3. Які твердження визначають взаємозв’язок між ОЗЛП з ОР та ОЗЛП з ОН?

4. Яка множина називається опуклою?
5. Яка множина називається обмеженою, необмеженою?
6. Що таке гранична точка? Границя?
7. Сформулюйте теорему про перетин довільного числа опуклих областей.
8. Що таке півплощина розв'язків, гранична пряма, многокутник розв'язків?
9. Де знаходиться оптимальне значення ЗЛП?
10. Сформулюйте алгоритм графічного методу відшукання оптимальних значень функції.
11. Що таке вектор нормалі, лінія рівня?
12. Як обчислити оптимальні значення цільової функції?

Лекція №3.
Симплексний метод та його застосування

План

1. Поняття про симплексний метод та канонічну форму ОЗЛП з ОР.
2. Основні характеристики симплексного - методу.
3. Робота з симплекс - таблицями.

1. Симплексний метод – один з основних методів розв'язування задач лінійного програмування. Розглянемо його ідею на конкретному прикладі задачі про використання ресурсів з двома видами ресурсів та двома видами продукції.

Означення 1. *Невід'ємний базисний розв'язок (план) будемо називати* ***опорним.***

Приклад 1. Знайти найбільше значення функції

$$z = 12 + x_1 + 2x_2$$

при таких обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 16, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3,4). \end{cases}$$

Розв'язування. Очевидно, що тут x_3, x_4 — базисні невідомі, а x_1, x_2 — вільні. Візьмемо початковий опорний план так: $x_1 = x_2 = 0$ (вільні невідомі нульові), тоді $x_3 = 12, x_4 = 16$.

$$x^{(0)} = (0,0,12,16), \; z(x^{(0)}) = 12.$$

Такий розв'язок відповідає ситуації, коли продукція не виробляється. Будемо збільшувати ту з вільних невідомих, яка має додатній коефіцієнт у цільовій функції (причому, більший), тому що значення цільової функції при цьому зростатиме. Це означає, що при випуску продукції прибуток збільшуватиметься. Тобто збільшуватимемо x_2.

Нехай $x_1 = 0$. Система набуває вигляду

$$\begin{cases} 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_2 + x_4 = 16, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 2,3,4). \end{cases}$$

Щоб x_3, x_4 були додатними, то в першому рівнянні x_2 можна надати найбільшого значення $\frac{12}{3} = 4$, а в другому рівнянні $\frac{16}{2} = 8$. Ясно, що x_2 не повинно бути більше 4, бо, інакше, в другому рівнянні x_3 буде від'ємною. x_2 вибираємо як найменшу частку від ділення вільних членів на відповідні коефіцієнти при x_2.

Нехай тепер $x_2 = 4$, тоді $x_3 = 0, x_4 = 8$. Ми дістали другий опорний план і відповідну йому цільову функцію

$$x^{(2)} = (0,4,0,8), \quad z(x^{(2)}) = 20.$$

Тепер базисними невідомими є x_2, x_4, а x_1, x_3 — вільні. Розв'язавши вихідну систему рівнянь відносно нового базису методом Жордана – Гаусса, отримаємо

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 4, \\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_3 + x_4 = 8; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 4 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3, \\ x_4 = 8 + \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_3. \end{cases}$$

Запишемо цільову функцію через нові вільні невідомі

$$z = 12 + x_1 + 2\left(4 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3\right) = 20 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_3.$$

Видно, що при збільшенні вільних невідомих значення цільової функції буде спадати, тому знайдений розв'язок вважатимемо оптимальним.

Отже, **ідея методу** полягає в тому, щоб переходити від одного опорного плану до іншого таким способом, щоб цільова функція оптимізовувалась (зростала чи спадала в залежності від умови задачі). Змінні які переходять з базисних у вільні повинні зберігати умову невід'ємності і на кожному кроці можна міняти місцями лише одну базисну невідому з однією вільною.

Ми бачили, що кожному опорному плану відповідає певним чином записана ОЗЛП з ОР. Форма її запису має деякі закономірності

1. Система рівнянь записана так, що кожна базисна невідома входить лише до одного рівняння системи, з коефіцієнтом, що дорівнює одиниця. Якщо рівняння розмістити так, щоб нумерація базисних невідомих була строго зростаючою, то матриця базисних невідомих буде одиничною.
2. Вільні члени системи обмежень – невід'ємні

3. Оптимізуюча форма залежить лише від вільних невідомих.

Означення 2. *ОЗЛП з ОР, яка задовольняє умови* (1) – (3) *називають* ***канонічною формою.***

Означення 3. *Систему обмежень, що задовольняє умови* (1) – (2) *називають* ***канонічною системою обмежень.***

Якщо система обмежень – канонічна, а форма залежить ще від базисних невідомих, то ЗЛП називається майже канонічною.

2. При розв'язуванні задач на практиці будемо застосовувати метод ітерації, коли при виборі кожного опорного плану, починаючи з першого, за допомогою деяких правил визначають, чи знайдено розв'язок задачі, чи треба переходити до наступного опорного плану. Такий метод назвемо ***симплексним методом*** (чи ***симплекс-методом***).

Розглянемо основні властивості методу:

1. **Повнота**. Вказуємо чи правила роботи є однозначними, чи ні, як практично побудувати перший опорний план, чи буде останній побудований план точним розв'язком задачі.
2. **Область застосовності**. Вказуємо, для яких задач можна застосувати такий метод та визначити чи підпадає конкретна задача під дія методу. Якщо розв'язок існує, але останній опорний план його не дає, то треба вказати якої помилки припущено.
3. **Властивість збіжності**. Вказуємо, чи завжди алгоритм забезпечує збіжність, чи завжди збіжність приводить до правильного результату, скільки ітерацій треба зробити для отримання розв'язку, чи можна вважати план оптимальним, якщо проведення ітерацій було припинено на деякому кроці?
4. **Вимоги до обчислень**. З'ясовуємо наскільки складними та громіздкими є обчислення методу та при якій точності обчислень ми одержимо задовільні результати.

Зазначимо, що вперше симплексний метод застосував американський вчений Дж. Данціг в 1949 році, хоча сам алгоритм методу, крім правил вибору ключового елемента, був відомий ще у XIX столітті.

3. Зауважимо, що немає потреби при кожній ітерації виписувати формули переходу. Цей процес можна формалізувати, використовуючи спеціальні симплекс-таблиці. При роботі з ними не будемо розрізняти де обмеження, а де оптимізуюча функція, а перетворення проведемо методом Жордана – Гаусса, дещо модифікованим.

Критерій оптимальності за симплекс – таблицями: Якщо форма максимізується і в нульовому рядку відсутні від'ємні числа (за винятком, можливо, стовпця опорного плану), то опорний план є ***оптимальним.***

Коефіцієнти рядка 0 можна інтерпритувати як приріст функції z при збільшені вільної невідомої на одиницю. Приріст буде додатним, якщо коефіцієнт від'ємний, і від'ємним - якщо коефіцієнт додатний.

Запишемо ***алгоритм роботи з симплекс - таблицями:***

1. Зведемо задачу до канонічної форми.
2. Формально заповнюємо таблицю коефіцієнтами цільової функції (нульовий рядок) та коефіцієнтами рівнянь системи обмежень.
3. Перевіряємо задачу на оптимальність за критерієм.
4. Для вибору ***ключового стовпця*** знаходимо найбільший елемент в 0-рядку при дослідження цільової функції на максимум, чи найменший елемент при дослідженні її на максимум.
5. Для вибору ***ключового елемента*** складаємо відношення вільних членів (чисел стовпчика "опорний план") до відповідних додатних чисел ключового стовпчика і вибираємо серед них менше.
6. На перетині ключового рядка і ключового стовпця маємо ***ключовий елемент***.
7. Замість базисної невідомої ключового рядка вводимо нову базисну невідому - невідому ключового стовпчика.
8. Для заповнення ключового рядка ділимо всі відповідні елементи на ключовий елемент і розміщуємо на своїх місцях у новій таблиці. Цей рядок для нової таблиці будемо називати ***ведучим.***
9. Всі інші рядки заповнюємо за методом Жордана-Гаусса

а) знаходимо рядок, який будемо заповнювати у попередній таблиці і позначаємо в ньому число колишнього ключового стовпчика;

б) множимо всі числа клітинок провідного рядка на число, протилежне до позначеного;

в) додаємо число рядка, що заповнюється, попередньої таблиці до чисел відповідних стовпчиків, утворених в п.б), і розміщуємо на своїх місцях у новій таблиці.

10. Перевіряємо новий опорний план на оптимальність. Якщо він не оптимальний, то повертаємось до пункту 4, якщо – оптимальний, то виписуємо отриманий розв'язок.

Розглянемо правила роботи із симплекс-таблицями на прикладі.

<u>Приклад 2</u>. Задачу лінійного програмування задано у вигляді таблиці

Види сировини	*Види продукції*		**Запаси сировини**
S_1	2	1	224
S_2	3	2	428
S_3	4	1	336
Прибуток	24	9	

Знайти оптимальний план виробництва.

Розв'язування. Позначимо x_1 – план випуску першого виду продукції, x_2- другої продукції. Складемо математичну модель отриманої задачі лінійного програмування.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 224, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 428, \\ 4x_1 + x_2 \leq 336; \end{cases} \qquad z = 24x_1 + 9x_2 (\max)$$

Зведемо її до стандартної форми ввівши додаткові базисні невідомі x_3, x_4, x_5.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 224, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 428, \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 336; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5. \qquad z - 24x_1 - 9x_2 = 0 (\max)$$

Складемо симплекс – таблицю та проведемо всі необхідні перетворення за алгоритмом, описаним вище.

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
I	0	z	0	-24↓	-9	0	0	0
	1	x_3	224	2	3	3	0	0
	2	x_4	428	3	2	0	1	0
	3	$x_5 \rightarrow$	336	$\boxed{(4)}$	1	0	0	1
II	0	z	2016	0	-3↓	0	0	6
	1	$x_3 \rightarrow$	56	0	$\boxed{\frac{1}{2}}$	1	0	$-\frac{1}{2}$
	2	x_4	176	0	$\frac{5}{4}$	0	1	$-\frac{3}{4}$
	3	x_1	84	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
III	0	z	2352	0	0	6	0	3
	1	x_2	112	0	1	2	0	-1
	2	x_4	36	0	0	-2,5	1	0,5
	3	x_1	56	1	0	-0,5	0	0,5

Зауваження. Базисні стовпчики заповнюються формально і поки що для аналізу задачі не використовуються. Тому можна заповнювати таблиці і без стовпчиків базисних невідомих. Такі таблиці називають *редукованим*.
З останньої таблиці виписуємо оптимальний план

$$x_{опт} = (56,112,0,36,0), \quad z_{\max} = 2352.$$

З економічної точки зору це означає, що оптимального плану ми досягнемо при випуску 56 одиниць першої продукції і 112 одиниць другої продукції.

Контрольні запитання

1. Що називається опорним планом?
2. В чому полягає ідея симплексного методу?
3. Що таке канонічна форма задачі лінійного програмування?
4. Що таке канонічна система обмежень? Майже канонічна система обмежень?
5. Сформулюйте властивості симплексного – методу.
6. Сформулюйте критерій оптимальності ЗЛП за симплекс-таблицями.
7. Опишіть алгоритм роботи з симплекс – таблицями.
8. Що таке ключовий стовпець, ключовий рядок, ключовий елемент?
9. Що таке провідний рядок?
10. Як проводити перетворення симплекс – таблиці?

Лекція №4.
Двоїстість в лінійному програмуванні

План

1. Поняття про взаємно двоїсті задачі.
2. Загальні правила складання двоїстих задач.
3. Зв’язок між оптимальними розв’язками двоїстих задач.

1. Використовуючи коефіцієнти задачі лінійного програмування можна скласти ще одну задачу лінійного програмування, яка називається двоїстою до заданої.

Означення 1. *Дві задачі лінійного програмування називаються* ***взаємно двоїстими,*** *якщо виконуються такі умови:*

1) матриці системи обмежень обох задач є транспонованими, одна відносно другої;

2) система обмежень складається з нерівностей, які в обох задачах напрямлені у протилежні боки;

3) коефіцієнти оптимізуючої форми однієї задачі є вільними членами системи обмежень другої і навпаки;

4) форми в обох задачах оптимізуються протилежно (одна на максимум, друга – на мінімум).

В загальному випадку прикладами взаємно двоїстих задач є задачі M та m. Задача M:

$$z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_kx_k \qquad (\max) \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1k}x_k \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2k}x_k \le b_2, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + ... + a_{sk}x_k \le b_s, \\ x_j \ge 0, (j = 1,2,...,k). \end{cases} \tag{2}$$

Задача m:

$$z^* = b_0 + b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_sy_s \qquad (\min) \tag{3}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{s1}y_s \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{s2}y_s \ge c_2, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\vdots\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{1k}y_1 + a_{2k}y_2 + \ldots + a_{sk}y_s \ge c_k, \\ y_j \ge 0, (j = 1,2,\ldots,s). \end{cases} \tag{4}$$

Умови означення виконуються автоматично. Наприклад, очевидно, що матриця системи обмежень першої задачі є транспонованою до матриці системи обмежень другої задачі.

Першу з цих ЗЛП називають вихідною задачею, другу – двоїстою до вихідної. Зауважимо, що двоїстою задачею до двоїстої буде знов вихідна задача.

Економічну суть двоїстих задач можна пояснити на прикладі задачі про ресурси. Вихідною буде задача: *організувати випуск продукції так, щоб використовуючи наявні ресурси отримати найбільший (максимальний) прибуток.* Двоїстою до неї: *якою має бути ціна кожного ресурсу, щоб при заданих запасах та прибутках від одиниці продукції загальні витрати були найменшими (мінімальними).*

2. Зрозуміло, що для кожної задачі лінійного програмування можна побудувати двоїсту, бо ЗЛП завжди зводиться до другої стандартної форми (ЗЛП з ОН). Сформулюємо **правила побудови двоїстої задачі**:

Перевірка умов:

1) в усіх обмеженнях вільні члени містяться справа, елементи з невідомими – зліва;

2) всі обмеження нерівності вихідної задачі записані так, що знаки спрямовані в один бік (якщо це не так, то потрібно перемножити обмеження на -1);

3) загальний знак нерівностей пов'язаний з оптимізацією форми наступним чином:

$$"\le" \Rightarrow \max, \quad "\ge" \Rightarrow \min.$$

Побудова двоїстої задачі:

1) Кожному обмеженню вихідної задачі відповідає невідома y_i у двоїстій задачі, причому двоїста невідома, що відповідає обмеженню нерівності, має бути невід'ємною, а рівності - довільного знаку.

2) Кожній невідомій x_j двоїстої задачі відповідає обмеження двоїстої. Будуються ці обмеження так: перемножуються коефіцієнти a_{ij}, що стоять

при x_j на відповідні двоїсті невідомі y_i. Результати множення підсумовуються і розміщуються в лівій частині обмеження, а в правій – коефіцієнт c_{ij}, при x_j в оптимізуючій формі.

3) В усіх обмеженнях двоїстої задачі ставимо один і той самий знак нерівності, протилежний до загального знака нерівності системи обмежень вихідної задачі.

4) Форму двоїстої задачі оптимізуємо протилежно до форми вихідної задачі.

5) Коефіцієнти при двоїстих невідомих у формі є вільними членами системи обмежень вихідної задачі. Вільний член c_0 форми вихідної задачі переноситься у форму двоїстої задачі без змін.

<u>Приклад</u>. Побудувати двоїсту задачу до заданої ЗЛП:

$$\begin{cases} y_1 - y_2 - 2y_3 \ge -2, \\ -3y_1 + y_2 + y_3 \le 3, \\ y_j \ge 0. \end{cases}$$

$$z = -10y_1 + 4y_2 + 5y_3 \quad (\max)$$

<u>Розв'язування</u>. Замінимо знак в першій нерівності для зведення до стандартного вигляду, для цього домножимо його на (-1)

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \le 2, \\ -3y_1 + y_2 + y_3 \le 3, \\ y_j \ge 0. \end{cases}$$

Обмеженням ставимо у відповідність двоїсті невідомі x_1, x_2 і будуємо двоїсту задачу:

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 \ge -10, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ 2x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$z = 2x_1 + 3x_2 \quad (\min).$$

Зауваження. *Якщо система обмежень має обмеження рівності, то двоїста задача до побудованої двоїстої вже не буде такою як вихідна.*

3. Зв'язок вихідної і двоїстої задач обумовлений тим, що розв'язок одної з них можна добути безпосередньо з розв'язку другої. Для цього використовуємо такі важливі твердження.

Теорема 1. Якщо у двоїстих задачах одна з них має розв'язок, то буде існувати розв'язок і для другої задачі, а оптимальні значення при цьому збігаються, тобто $z_{\max} = z^{*}{}_{\min}$.

Теорема 2. Для того, щоб x^{*} **і** y^{*} **були оптимальними розв'язками задач M і m відповідно, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:**

$$y_i^{*}\left(\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j^{*} - b_i\right) = 0; \qquad y_i^{*}\left(\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j^{*} - b_i\right) = 0.$$

З теореми 2 випливає, що коли обмеження задачі на оптимальному розв'язку не перетворюються на точну рівність, то відповідна невідома оптимального розв'язку обов'язково дорівнює нулю.

Ці теореми дають змогу за розв'язком одної задачі зразу знайти розв'язок другої, двоїстої до неї. Розглянемо приклад з попереднього питання. Якщо в першому обмежені шляхом множення на (-1) поміняти знаки на протилежні, то отримаємо задачу лінійного програмування, що досліджувалась графічним методом в Лекції №1. Там же ми показали, що $z_{\min} = 8$ в точці (4; 0). Отже, $z^{*}{}_{\max} = 8$ для вихідної задачі. При підстановці координат в рівності системи обмежень, бачимо, що тільки друге перетворюється в нуль, тому $y_1 = y_3 = 0$. y_2 знаходимо з рівності

$$8 = 4y_2;\ y_2 = 2.$$

Отже, розв'язок вихідної задачі (0; 2; 0).

Контрольні запитання

1. Які задачі лінійного програмування називають взаємно двоїстими?
2. Сформулюйте умови необхідні для вигляду вихідної задачі.
3. Сформулюйте правила побудови двоїстої задачі?
4. Що буде двоїстою до двоїстої задачі? Чи це зажди так?
5. Який зв'язок між розв'язками двоїстих задач?
6. Яка ознака оптимальності розв'язків двоїстих задач?

Лекція №5.
Метод штучного базису

План

1. Поняття про метод штучного базису.
2. Двоїстий симплексний метод.

1. Вибір початкової канонічної форми дає змогу формалізувати відшукання оптимального розв'язку за симплекс-таблицями. Канонічна форма задачі легко будується, коли система обмежень виглядає так, як це було в задачі про використання ресурсів:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad b_i \ge 0, \quad (i = 1,2,...,m).$$

При такому типі обмежень введені додаткові невідомі надавали системі обмежень (а з нею і ОЗЛП з ОР) канонічної форми. З іншого боку, така структура обмежень не охоплює всіх можливих випадків, що трапляються в лінійних оптимізаційних моделях. Крім того, є такі задачі, які взагалі не мають жодного допустимого плану. Наприклад, задача

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 - x_4 = 3, \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,...,4), \end{cases}$$

$$(\max)\, z = 2x_1 + x_2$$

має базисні розв'язки

$$x^{(1)} = (0,0,2,-3), \quad x^{(2)} = (2,0,0,-1), \quad x^{(3)} = (9/4,-1/4,0,0),$$

$$x^{(4)} = (0,-1,3,0), \quad x^{(5)} = (3,0,-1,0), \quad x^{(6)} = (0,2,0,-9),$$

кожен з яких не є опорним. Очевидно, що вона не має розв'язку. Тому розглянемо деякі методи, які дають змогу з'ясувати, чи має система обмежень допустимі плани чи ні, і вказують шляхи їх пошуку.

Нехай ОЗЛП з ОР

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_1, ..., x_n \ge 0, \end{cases}$$

$$(\max)\, z = c_0 + c_1 x_1 + ... + c_n x_n$$

записана так, що всі вільні члени $b_i \ge 0 (i = 1,2,...,n)$. Цього завжди можна досягти, помноживши, якщо це треба, рівняння з від'ємним вільним членом на –1.

Щоб дістати одиничну матрицю при базисних невідомих, формально до лівої частини кожного рівняння додаємо по одній невідомій $w_i \ge 0 (i = 1,2,...,m),$ які будемо називати штучними. В результаті система обмежень набуває вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n + w_1 = b_1, \\ \vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n + w_m = b_m, \\ x_1,...,x_n \ge 0, w_1,...,w_m \ge 0, \end{cases} \tag{1}$$

До неї додаємо штучну форму

$$(\min)\ f = w_1 + ... + w_m. \tag{2}$$

Задача (1), (2) є задачею лінійного програмування, яка записана у майже канонічній формі відносно базисних невідомих $w_1,...,w_m$. Залишається у формі (2) із системи обмежень (1) записати $w_i (i = 1,...,m)$ через вільні невідомі $x_1,...,x_n$.

Означення 1. *Систему обмежень будемо називати* ***сумісною*** *в області невід'ємних значень, якщо вона має хоча б один допустимий розв'язок**.***

Справедливим є такий критерій сумісності системи обмежень в області невід'ємних значень.

Теорема 1. Для того щоб система обмежень була сумісною в області невід'ємних значень, необхідно і достатньо, щоб на розв'язках (1)

$$f_{\min} = 0.$$

З теореми випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Якщо оптимальний план задачі (1)-(2) містить хоча б одну штучну невідому* w_i*, то вихідна задача не має розв'язку, оскільки вона не є сумісною в області невід'ємних значень.*

Теорема 1 дає практично крім факту існування допустимого плану і метод його відшукання. Зазвичай, знайдений допустимий план є завжди опорним. На прикладі розглянемо методику пошуку опорного плану за методом штучного базису.

<u>Приклад 1</u>. Знайти розв'язок задачі лінійного програмування:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16, \\ x_1,...,x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Розв’язування. Вводимо штучні невідомі w_1 *і* w_2

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + w_1 = 18, \\ 3x_1 + x_2 = x_3 + x_4 + w_2 = 16, \\ x_1, ..., x_4, w_1, w_2 \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

штучну форму

$$f = w_1 + w_2 = 34 - (7x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4)$$

і заповнюємо початкову таблицю

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв’язок	x_1	x_2	x_3	x_4
I	0	f	34	7	-1	3	4
	1	w_3	18	4	-2	1	3
	2	w	16	3	1	2	1
	3	z	0	-2	1	-3	1

Зробимо декілька зауважень:

Зауваження 1. Щоб знайти опорний план, треба перевести штучні невідомі з базисних у вільні. З цією метою у методі штучного базису використовуємо редуковані таблиці, оскільки після переходу у вільні штучні невідомі нас вже не буде цікавити.

Зауваження 2. Нульовий рядок (рядок оцінок) заповнюємо за штучною формою. Його можна дістати формальним додаванням чисел відповідних стовпчиків системи обмежень.

Зауваження 3. Для того щоб у кінцевому підсумку основна оптимізуюча форма також була виражена через вільні невідомі, ми їй відводимо останній рядок у таблиці і виконуємо з ним ці самі перетворення, що і з іншими рядками.

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний план	x_1	x_2	x_3	x_4
I	0	f	34	7	-1	2	4
	1	w_1	18	(4)	-2	1	3
	2	w_2	16	3	1	2	1
	3	z	0	-2	1	-3	1

II	0	f	5/2	0	5/2	5/4	-5/4
	1	x_1	9/2	1	-1/2	1/4	3/4
	2	w_2	5/2	0	(5/2)	5/4	-5/4
	3	z	9	0	0	-5/2	5/2
III	0	f	0	0	0	0	0
	1	x_1	5	1	0	1/2	½
	2	x_2	1	0	1	1/2	-1/2
	3	z	9	0	0	-5/2	5/2

У нульовому рядку другої ітерації немає вже додатних чисел, тому план $X^* = (5,1,0,0,0,0)$ є оптимальним для задачі (3), а план X=(5,1,0,0) - опорним для вихідної задачі. Тепер розв'язуємо вихідну задачу. Виписуємо ще раз таблицю другої ітерації, де у нульовому рядку будуть елементи форми z (3-й рядок таблиці). Результати операції подані у новій таблиці.

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний план	x_1	x_2	x_3	x_4
I	0	z	9	0	0	-5/2	5/2
	1	x_1	5	1	0	1/2	1/2
	2	x_2	1	0	1	(1/2)	-1/2
II	0	z	14	0	5	0	0
	1	x_1	4	1	-1	0	1
	2	x_3	2	0	2	1	-1

План $X^* = (4,0,2,0)$ є оптимальним, $z_{\max} = 14$.

Зауваження 4. Методом штучного базису можна окремо (без оптимізуючої форми) досліджувати систему обмежень на сумісність в області невід'ємних значень. Це доцільно робити в тих випадках, коли є деякі ознаки того, що система обмежень не може мати допустимих планів.

2. Розглянемо метод знаходження опорних планів, в якому використовується поняття двоїстості. Якщо формально заповнити за канонічною формою симплекс-таблиці, то видно, що стовпчики однієї стануть рядками двоїстої і навпаки. Тому немає потреби окремо розв'язувати вихідну задачу, а окремо - двоїсту, оскільки розв'язок обох можна знайти за одними й тими самими таблицями, пам'ятаючи, що невідомим однієї таблиці відповідають стовпчики, а невідомим другої - рядки.

Спочатку розглянемо, як можна використати поняття двоїстості для зведення вихідної задачі до канонічної форми, оскільки, маючи загальний розв'язок, завжди можна позбутися базисних невідомих у формі. Тому ми не будемо звертати уваги на рядок оптимізуючої форми доти, доки не дістанемо опорного плану.

Отже, ми маємо базис задачі і в ньому деякі плани не від'ємні. Тоді ті базисні невідомі, що мають не від'ємні плани, мають бути виключені з базису.

Припустимо, що невідома x_k має від'ємний план $(\beta_k \le 0)$. Розглянемо k-й рядок. Якщо в ньому всі числа додатні (за винятком β_k), то двоїста задача, а разом з нею і вихідна, не мають розв'язку через необмеженість форми.

У іншому випадку виділяємо стовпчики, в яких числа k-го порядку від'ємні. У кожному з виділених стовпчиків складаємо відношення $\frac{\beta_e}{a_{ej}}$ за принципом: додатні до додатних, від'ємні до від'ємних, і з найменших відношень вибираємо ключові елементи. Позначимо найменші відношення стовпчиків через $\Delta_1, \Delta_2, \ldots,$ а числа нульового рядка відповідних стовпчиків-через $\theta_1, \theta_2, \ldots$

Введемо до базисних вільну невідому, для якої (при максимізації форми)

$$\theta_s \Delta_s = \min_{1 \le i \le n} (\theta_i \Delta_i). \tag{4}$$

Такий вибір вільної невідомої можна пояснити тим, що в канонічній задачі в оптимізуючій формі маємо число $-\theta_i$. Чим більшим воно буде, тим більшим буде значення форми при зміні x_i.

Зауваження 5. При невеликій розмірності задачі формулою (4) можна нехтувати, за ключовий можна взяти будь-який стовпчик з від'ємним числом у k-му рядку . Число ітерації при цьому майже не змінюється.

<u>Приклад 2</u>. Розв'язати ЗЛП

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 + 5x_2 \ge 5, \\ x_1, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$(\max)\ z = 2x_1 + x_2.$$

<u>Розв'язування.</u>

1. Помножимо другу нерівність на (-1) і запишемо задачу у першій стандартній формі

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ -x_1 - 5x_2 + x_4 = -5, \\ x_1, \ldots, x_4 \geq 0, \end{cases}$$

$$(\max z) = 2x_1 + x_2.$$

2. Формально заповнюємо симплекс-таблицю і виділяємо рядок з найменшим (від'ємним) планом.

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний план	x_1	x_2	x_3	x_4
I	0	z	0	2	$-1\downarrow$	0	0
	1	x_3	12	1	1	1	0
	2	$x_4 \rightarrow$	–5	–1	$\boxed{-5}$	0	1

3. Вибираємо вільну невідому для переходу в базисні невідомі. Маємо два від'ємні числа: -1 у стовпчику x_1 і –5 у стовпчику x_2:

$$\Delta_1 = \min\left(\frac{12}{1}, \frac{-5}{-1}\right) = 5, \quad \theta_1 = 2,$$

$$\Delta_2 = \min\left(\frac{12}{1}, \frac{-5}{-5}\right) = 1, \quad \theta_2 = -1,$$

$$\min\{\Delta_i \theta_i\} = \min\{5 \times 2; 1 \times (-1)\} = -1.$$

Отже, базисною буде x_2 замість x_4 : –5 — ключовий елемент.

4. За правилами роботи із симплекс-таблицями маємо

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний план	x_1	x_2	x_3	x_4
II	0	z	1	$\frac{11}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$
	1	x_3	11	$\frac{4}{5}$	0	1	$\frac{1}{5}$
	2	x_2	1	$\frac{1}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$

Помічаємо, що план є опорним, тому розв'язуємо задачу за звичайним симплекс-методом.

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний план	x_1	x_2	x_3	x_4
I	0	z	1	$\frac{11}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}\downarrow$
	1	$x_3 \rightarrow$	11	$\frac{4}{5}$	0	1	$\boxed{(\frac{1}{5})}$
	2	x_2	1	$\frac{1}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$
II	0	z	12	$\frac{1}{5}$	0	5	0
	1	x_4	55	4	0	5	1
	2	x_2	12	1	1	1	0

Оптимальний план випливає з останньої симплекс-таблиці:

$$x_{опт} = (0{,}12{,}0{,}55),\ z_{\max} = 12.$$

Вибір x_1 як ключового стовпчика збільшує процес на одну ітерацію.

Якби друга ітерація не давала опорного плану, то процес треба було б повторювати доти, доки не здобудемо опорного плану. Із алгоритму випливає, що цей метод доцільно застосовувати тоді, коли обмеження задачі містять нерівності різних знаків або вибраний базис не дає опорного плану.

При відшуканні опорних планів на числа оптимізуючої форми при виборі ключового елемента можна не звертати уваги. Цей факт дає змогу за одну ітерацію знайти опорний план задачі, в базисі якої всі плани є від'ємними. Досить вибрати ключовий елемент не з найменшого, а з найбільшого відношення і виконати звичайні симплекс перетворення.

Розв'язки вихідної та двоїстої задач можна виписати за однією і тією самою оптимальною таблицею. У найпростішому випадку, коли вихідна модель має другу стандартну форму $(Ax \le b)$, як це має місце в задачі про використання ресурсів, двоїстий оптимальний розв'язок виписуємо за нульовим рядком стовпчиків додаткових невідомих.

<u>Контрольні запитання:</u>

1. Наведіть приклад задачі, яка не має опорного плану. Чому?
2. Яка стандартна форма для задачі, що розв'язується штучним базисом?
3. Що таке штучна форма? Як її сформувати?

4. Яка система обмежень називається сумісною?

5. Сформулюйте критерій сумісності системи обмежень в області невід’ємних значень.

6. Як знаходити опорні плани, використовуючи метод двоїстості?

7. Який зв’язок між двоїстими задачами в симплекс – таблиці?

8. Чи впливає вибір ключового стовпця на кількість ітерацій?

9. Як з одної симплекс – таблиці виписати розв’язки обох двоїстих задач?

Лекція №6.
Системний аналіз факторів математичної моделі

План

1. Задачі з мішаними обмеженнями.
2. Стійкість симплексного методу. Виродженність та зациклювання.

1. Ми показали, що коли обмеження складаються з рівнянь, за якими безпосередньо важко знайти опорний план, то його можна знайти методом штучного базису. А якщо маємо нерівності різних знаків (із додатною правою частиною) чи базис з від’ємним планом, то - за двоїстим симплекс-методом.

На практиці нерідко трапляються випадки, коли система обмежень складається як із рівнянь, так і з нерівностей. Тоді можна комбінувати обидва методи. Розглянемо задачі, в яких є нерівності з додатною правою частиною і рівняння. Тоді штучні невідомі вводяться лише для рівнянь і за ними будується штучна форма.

Приклад 1. Звести до канонічної форми систему обмежень

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Розв’язування. Перші дві нерівності зведемо до рівнянь, а для рівняння введемо штучну невідому w_1. Тоді

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + w_1 = 4, \\ x_1, x_2, ..., x_5, w_1 \ge 0. \end{cases}$$

$$(\min)\ f = w_1 = 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3,$$

яку розв’язуємо за симплекс-методом. Наведемо симплекс – тблицю перетворень:

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний план	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
I	0	f	4	-2	-1	2	0	0
	1	x_4	6	-1	4	-2	1	0
	2	x_5	6	1	1	2	0	1
	3	w_1	4	(2)	-1	2	0	0
II	0	f	0	0	0	0	0	0
	1	x_4	8	0	7/2	-1	1	0
	2	x_5	4	0	3/2	1	0	1
	3	x_1	2	1	-1/2	1	0	0

Друга ітерація дає нам таку канонічну форму системи обмежень:

$$\begin{cases} \frac{7}{2}x_2 - x_3 + x_4 = 8, \\ \frac{3}{2}x_2 + x_3 + x_5 = 8, \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 2, \\ x_1, \dots, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Зауваження 1. Застосовуючи метод штучного базису до задач із мішаними обмеженнями, бажано так вибирати ключовий стопчик, щоб штучні невідомі переходили із базисних у вільні.

Зауваження 2. У разі обмежень нерівностей із знаком $\ge$ нескладними перетвореннями можна дістати додатний базис. Для цього в задачі із мішаними обмеженнями візьмемо рівняння з додатним вільним членом $(b_i > 0)$. Нерівності із знаком $\ge$ поділимо на такі числа, щоб після ділення вільні члени були менші за b_i. Після цього перейдемо до обмежень рівнянь і віднімемо їх послідовно від вибраного рівняння. Всі додаткові невідомі у здобутих рівняннях матимуть коефіцієнт +1 і додатні плани.

Приклад 2. Система обмежень

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 4 \qquad :2 \Rightarrow \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 = 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

в результаті перетворень набуває вигляду

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 = 4, \\ x_1, ..., x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Тепер для вибору кінцевого базису досить лише ввести штучну невідому для третього рівняння.

2. На практиці часто виникає потреба не лише знайти оптимальний план, але й системно проаналізувати і чітко встановити взаємозв'язки між всіма факторами математичної моделі задачі. У багатьох випадках слід з'ясувати, в яких інтервалах можна змінювати вхідні параметри задачі без суттєвого відхилення оптимального плану, без значного порушення структури базису, який формує цей план.

Спочатку розглянемо, як буде змінюватись оптимальний план при зміні коефіцієнтів оптимізуючої форми вихідної задачі. Нехай канонічна форма вихідної задачі має вигляд:

$$\begin{aligned} &(\max)\, z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4, \\ &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15, \\ &7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_6 = 120, \\ &3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 + x_7 = 100, \\ &x_1, ..., x_7 \geq 0. \end{aligned}$$

(1)

Виконавши симплекс перетворення, ми дістанемо таку канонічну форму:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{5}{7}x_2 - \frac{5}{7}x_4 + \frac{10}{7}x_5 - \frac{1}{7}x_7 = \frac{50}{7}, \\ -\frac{6}{7}x_2 + \frac{13}{7}x_4 - \frac{61}{7}x_5 + x_6 + \frac{4}{7}x_7 = \frac{325}{7}, \\ \frac{2}{7}x_2 + x_3 + \frac{12}{7}x_4 - \frac{3}{7}x_5 + \frac{1}{7}x_7 = \frac{55}{7}, \\ x_1, ..., x_7 \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

$$z = \frac{695}{7} - \frac{3}{7}x_2 - \frac{11}{7}x_4 - \frac{13}{7}x_5 - \frac{5}{7}x_7,$$

опорний план якої є оптимальним.

Якщо збільшити коефіцієнт при x_4 у цільовій функції в початковій симплекс-таблиці, припустимо на 6, то в останній симплекс-таблиці x_4 буде стояти число ${}^{11}\!/_{7}-6$, і розв’язок не буде оптимальним. Отже, *збільшення коефіцієнта при* x_4 *на 6 змінює базис оптимального розв’язку.*

Більш складні залежності при тих невідомих цільової функції, які перейшли в базисні. Зміна коефіцієнта невідомої x_1 на число η призводить до того, що в оптимальній таблиці буде $z-\eta x_1+\frac{3}{7}x_2+\frac{11}{7}x_4+\frac{13}{7}x_5=\frac{695}{7}$

За допомогою першого рівняння x_1 можна виключити. Для цього помножимо його на η і додамо до попереднього. Маємо

$$z+\left(\frac{3}{7}+\frac{5}{7}\eta\right)x_2+\left(\frac{11}{7}-\frac{5}{7}\eta\right)x_4+\left(\frac{13}{7}+\frac{10}{7}\eta\right)x_5+\left(\frac{5}{7}-\frac{1}{7}\eta\right)x_7=\frac{695}{7}+\frac{50}{7}\eta.$$

Для того щоб план залишався оптимальним, достатньо, щоб виконувалися нерівності

$$\begin{cases}-\frac{3}{7}+\frac{5}{7}\eta\ge 0,\\ \frac{11}{7}-\frac{5}{7}\eta\ge 0,\\ \frac{13}{7}+\frac{10}{7}\eta\ge 0,\\ \frac{5}{7}-\frac{1}{7}\eta\ge 0.\end{cases}$$

(3)

Із останніх нерівностей маємо $-\frac{3}{5}\le\eta\le\frac{11}{5}$. Крім того, легко помітити, що коли $0\le\eta\le\frac{11}{5}$, то значення форми зростає.

Очевидно, що при такому аналізі основну роль відіграє оптимальний план двоїстої задачі. Дійсно, двоїсту до вихідної оптимальної канонічної форми можна записати таким чином:

$$\begin{cases}-\frac{5}{7}y_1+\frac{6}{7}y_2-\frac{2}{7}y_3\le\frac{3}{7},\\ \frac{5}{7}y_1-\frac{13}{7}y_2-\frac{12}{7}y_3\le\frac{11}{7},\\ -\frac{10}{7}y_1+\frac{61}{7}y_2+\frac{3}{7}y_3\le\frac{13}{7},\\ y_1,y_2,y_3\ge 0,\end{cases}$$

$$(\min)\ z^*=\frac{695}{7}+\frac{50}{7}y_1+\frac{325}{7}y_2+\frac{55}{7}y_3.$$

З попередніх міркувань випливає, що зміна x_1 у початковій формі на $x_1+\eta$ змінює y_1 *на* $y_1+\eta$ в оптимальній канонічній формі двоїстої задачі. Тому ми знову приходимо до нерівностей (3), з яких $-\frac{3}{5}\le\eta\le\frac{11}{5}$.

$\frac{11}{7}-6=-\frac{31}{7}$, тому при такій зміні коефіцієнта функції остання таблиця вже не є оптимально. Звідси випливає, що до числа 11, яке стоїть при x_4 у функції *z*, можна додати будь-яке, що не змінює нерівності $-\frac{11}{7}+k\le 0$. У цьому випадку зміна вихідного параметра 11 не змінює базису оптимального плану. З останньої нерівності випливає, що *k* можна зменшувати на будь-яке число (до -∞), а збільшувати його можна лише до $k_1=\frac{11}{7}$.

Аналогічно можна досліджувати на стійкість опорний оптимальний розв'язок при зміні значень декількох (чи навіть всіх) коефіцієнтів цільової функції. Але в цьому випадку визначити границі зміни коефіцієнтів, які не змінюють базису важче. Крім того, ці границі окремих коефіцієнтів залежні між собою. У загальному випадку це робиться за допомогою методів параметричного програмування, які реалізуються у програмах на ЕОМ.

Аналогічний аналіз на стійкість базису оптимального розв'язку можна зробити для коефіцієнтів b_i правих частин системи обмежень і нормативних коефіцієнтів a_{ij}. Щодо останніх, то залежності досить складні, оскільки потрібно розглядати вплив зміни a_{ij} в *i*-му рядку та *j*-му стовпчику.

При обгрунтуванні будь-якого чисельного наближеного методу найбільш складною задачею є доведення його *збіжності*. У тих задачах, які ми розглядали, значення функції на кожній ітерації зростало (при максимізації форми. З іншого боку, число ітерацій скінчене (їх не більше $\frac{n!}{m!(n-m)!}$). Тому, якщо розв'язок задачі існує, то його завжди можна знайти.

На практиці може трапитись випадок, коли при виборі ключового елемента є декілька однакових найменших відношень. Тоді на наступній ітерації деякі базисні невідомі опорного плану будуть дорівнювати нулю. Це призводить до того, що наступні ітерації можуть не змінювати оптимізуючої форми.

Означення 1. *Опорний план, в якому хоча б одна базисна координата дорівнює нулю, будемо називати* ***виродженим.***

Означення 2. *ОЗЛП з ОР, яка має принаймні один вироджений опорний план, називається* ***виродженою****.*

Якщо задача вироджена, то ділянок сталості функції може бути декілька. У цих випадках може не змінюватись ні значення форми, ні значення плану деяких базисних невідомих. Але і тоді можна підібрати такий ключовий елемент, що через деякий час значення форми знову почне зростати.

Виродженнісь базису практично не впливає на число ітерацій, потрібних для обчислення оптимального плану. Досвід показує, що число ітерацій, потрібних для відшукання кінцевого результату, міститься в межах: $1{,}5m<k<3m$, де m- число обмежень задачі.

Виродженність задачі має можливість неоднозначності вибору ключового елемента, що, в свою чергу, може призвести до небажаного явища- *зациклення.* Суть його полягає в тому, що на деякій ітерації ми дістаємо симплекс-таблицю, яку вже мали, і процес знову повторюється, хоча план не є оптимальним.

Щоб уникнути цього явища, треба вибрати на відповідній ітерації інший опорний план.

Явище зациклення можна проілюструвати на такому прикладі:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 \le 0, \\ \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 \le 0, \\ x_3 \le 1, \\ x_1, \ldots, x_4 \ge 0, \end{cases}$$

$$(\max) z = \frac{3}{4}x_1 - 150x_2 + \frac{1}{50}x_3 - 6x_4,$$

якщо при неозначеності вибору ключового елемента перевагу надавати змінній з меншим індексом.

Зауваження. З явищем виродженості можна зустрітися в методі штучного базису. Тоді ключовий елемент слід вибрати так, щоб штучні невідомі переходили у вільні.

<u>Приклад 3.</u> Звести до канонічної форми систему обмежень

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1, \ldots, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

<u>Розв’язування.</u> Вводимо штучні невідомі w_1, w_2, штучну форму $f = w_1 + w_2$ і розв’язуємо задачу за допомогою симплекс-таблиць

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний план	x_1	x_2	x_3	x_4
I	0	f	10	3	5	0	1
	1	w_1	6	1	3	0	-1
	2	w_2	4	2	(2)	-1	2
II	0	f	0	-2	5/2	5/2	-4
	1	w_1	0	-2	0	(5/2)	-4
	2	x_2	2	1	1	-1/2	1
III	0	f	0	0	0	0	0
	1	x_3	0	-4/5	0	1	-8/5
	2	x_2	2	3/5	1	0	1/5

Система обмежень

$$\begin{cases} -\frac{4}{5}x_1 + x_3 - \frac{8}{5}x_4 = 0, \\ \frac{3}{5}x_1 + x_2 + \frac{1}{5}x_4 = 2, \\ x_1,\dots,x_4 \geq 0. \end{cases}$$

записана у канонічній формі.

<u>Контрольні запитання:</u>

1. Як звести до канонічної форми задачу лінійного програмування з мішаними обмеженнями?
2. Як звести до канонічної форми задачу, що містить знак $\geq$ в системі обмежень?
3. Сформулюйте суть та наведіть приклад аналізу зміни оптимального плану при зміні коефіцієнтів оптимізуючої форми.
4. Як для аналізу зміни оптимального плану використати двоїсту задачу?
5. Сформулюйте суть аналізу опорного плану на стійкість.
6. Сформулюйте суть збіжності наближеного методу розв’язування задач лінійного програмування.
7. Який опорний план називається виродженим? Яка ОЗЛП з ОР є виродженою?
8. Що таке зациклення? Як його уникнути?

Лекція №7.
Математична модель транспортної задачі

План

1. Постановка транспортної задачі.
2. Методи побудови першого опорного плану транспортної задачі.
3. Транспортна задача з неправильним балансом.

1. Деякі задачі лінійного програмування, до яких зводяться практичні моделі управління та планування мають особливу структуру своїх систем обмежень і можуть розв'язуватись без складання загальної симплекс – таблиці. Специфіка їх полягає в тому, що в кожному рядку таблиці лише невелика кількість елементів буде відмінною від нуля чи інших фіксованих сталих.

Особлива форма системи обмежень підказує шляхи створення спеціальних методів розв'язування, для яких немає аналогів серед задач лінійного програмування. При цьому велику роль відіграє і фізичний (реальний) зміст таких задач. Щодо програмування таких задач, то відзначимо, що вони вимагають меншого об'єму оперативної пам'яті (меншою є необхідна кількість комірок) та виконуються із економією машинного часу.

Серед спеціальних задач на практиці найчастіше застосовується так звана ***транспортна задача*** та її різноманітні модифікації. Класична транспортна задача вимагає пошуку найбільш економного плану перевезень однорідного продукту (чи взаємозамінних продуктів) з пунктів виробництва чи зберігання (фабрики, станції, склади тощо) до пунктів споживання (магазини, кіоски призначення і т.д.). Ефективність його оцінюється за критерієм найменшої вартості перевезення. З економічної точки зору це може бути, наприклад, найменша кількість витраченого бензину.

Нехай на m пунктах відправлення $A_1, A_2, ..., A_m$ зосереджено $a_1, ..., a_m$ одиниць деякого однорідного вантажу. Цей вантаж необхідно перевезти в n пунктів призначення $B_1, ..., B_n$, з потребами, відповідно, $b_1, ... ,b_n$ одиниць. Вартість перевезень з пункту A_i в пункт B_j вважається сталою і відомою, та позначається c_{ij}. Зрозуміло, що всі вартості перевезень зручно організувати в двовимірний масив.

Означення 1. *Транспортна задача для якої загальна сума запасів на всіх пунктах відправлення дорівнює загальній сумі потреб на всіх пунктах при-*

значення ($\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$) *називається* ***транспортною задачею з правильним балансом*** *(або* ***закритою транспортною задачею****).*

Означення 2*. Транспортна задача для якої загальна сума запасів на всіх пунктах відправлення не дорівнює загальній сумі потреб на всіх пунктах призначення (порушується умова* $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ *) називається* ***транспортною задачею з неправильним балансом*** *(або* ***відкритою транспортною задачею****).*

Всі дані транспортної задачі заносять в спеціальну таблицю, яка називається ***матрицею перевезень***:

Пункти відправлення	Пункти споживання					Запаси
	B_1	...	B_j	...	B_n	
A_1	c_{11}	...	c_{1j}	...	c_{1n}	a_1
...	...	...	...	...	...	...
A_i	c_{i1}	...	c_{ij}	...	c_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1}	...	c_{mj}	...	c_{mn}	a_m
Потреби	b_1	...	b_j	...	b_n	

Оптимальний план перевезень наперед невідомий, тому позначимо кількість вантажу, яку потрібно перевезти з пункту A_i в пункт B_j величиною x_{ij}. Це можна оформити у вигляді іншої таблиці:

Пункти відправлення	Пункти споживання					Запаси
	B_1	...	B_j	...	B_n	
A_1	x_{11}	...	x_{1j}	...	x_{1n}	a_1
...	...	...	...	...	...	...
A_i	x_{i1}	...	x_{ij}	...	x_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...
A_m	x_{m1}	...	x_{mj}	...	x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	...	b_j	...	b_n	

Надалі, з метою економії часу та більшої наглядності, ми зводитемо ці таблиці в одну.

Складемо математичну модель з таких міркувань. Кількість вантажу, який потрібно перевезти до пункту B_j з усіх пунктів відправлення з одного боку рівна $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$, з іншого – b_j. Так як загальна сума запасів рівна загальній сумі потреб, то

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j=1,\ 2,\ ...,\ n). \tag{1}$$

Аналогічно, з кожного пункту відправлення відвантажено таку кількість вантажу:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i=1,\ 2,\ ...,\ m). \tag{2}$$

Разом $m+n$ нерівностей систем (1) та (2) складають систему обмежень транспортної задачі.

Вартість перевезення вантажу з пункту A_i в пункт B_j дорівнює $c_{ij}x_{ij}$. Щоб знайти загальну вартість перевезень потрібно просумувати вартості перевезень всіх клітинок. Таким чином випишемо цільову функцію транспортної задачі:

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (min). \tag{3}$$

Математичною моделлю транспортної задачі є наступне твердження: *серед усіх невід'ємних розв'язків системи рівнянь (1) – (2) знайти такий, при якому функція (3) набуває найменшого значення*.

2. Оскільки транспортна задача є здачею лінійного програмування, то її можна розв'язувати і симплекс – методом. Проте, через просту будову системи обмежень цей метод значно спрощується. Це видно вже при побудові першого опорного плану.

Діагональний метод полягає у послідовному заповненні клітинок матриці перевезень, починаючи з кутової, послідовно вичерпуючи запаси чи потреби. Усі клітинки заповнюються мінімальним числом, що є на перетині рядка запасів та стовпця потреб. Цей метод найбільш пристосований для програмування його з використанням персонального комп'ютера. Його ще називають *методом північно – західного кута*.

Метод найменшої вартості полягає в тому, що заповнення починаємо з клітинки, яка має найменшу вартість перевезення, в ній проставляємо мінімальне значення з перетину запасів та потреб. Після цього вибирається клітинка з найменшим значенням серед тих, що залишилися і так триває до повного заповнення. Якщо запаси чи потреби якогось пункту вже вичерпались, то варто занулити ті клітинки, що ще залишились незаповненими в рядку (стовпці).

Метод осереднених коефіцієнтів полягає в обчислені середніх вартостей рядків та стовпців матриці перевезення за формулами:

$$c_{Ai} = \frac{c_{i1} + c_{i2} + \ldots + c_{in}}{n}; \qquad c_{Bi} = \frac{c_{1j} + c_{2j} + \ldots + c_{mj}}{m}.$$

Після цього обчислюємо усереднені коефіцієнти для кожної клітинки за формулами:

$$k_{ij} = c_{ij} - (c_{A_i} + c_{B_j}).$$

Потім заповнюємо послідовно клітинки з найменшими значеннями усереднених коефіцієнтів. Цей метод є найскладнішим при застосуванні, одначе отриманий опорний план найкращий серед перерахованих.

Приклад 1. Побудувати перший опорний план для транспортної задачі з матрицею вартості перевезень c_{ij}, вектором запасів a_i та вектором потреб b_j.

$$a_i = (310 \quad 280 \quad 250); b_j = (250 \quad 110 \quad 220 \quad 260); c_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 & 3 \\ 8 & 6 & 9 & 13 \\ 12 & 4 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Безпосередньою перевіркою переконуємось, що це транспортна задача з правильним балансом.

1) Заповнимо таблицю діагональним методом:

Пункти відправлення	Пункти споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 / 250	5 / 60	7 / 0	3 / 0	310
A_2	8 / 0	6 / 50	9 / 220	13 / 10	280
A_3	12 / 0	4 / 0	5 / 0	11 / 250	250
Потреби	250	110	220	260	

Перерахуємо значення опорного плану:

$$z = 4 \cdot 250 + 5 \cdot 60 + 6 \cdot 50 + 9 \cdot 220 + 13 \cdot 10 + 11 \cdot 250 = 6460.$$

2) Використовуючи метод найменшої вартості, отримаємо:

Пункти відправлення	Пункти споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 50	5 0	7 0	3 260	310
A_2	8 200	6 0	9 80	13 0	280
A_3	12 0	4 110	5 140	11 0	250
Потреби	250	110	220	260	

Перерахуємо значення опорного плану:

$$z = 4 \cdot 50 + 3 \cdot 260 + 8 \cdot 200 + 9 \cdot 80 + 4 \cdot 110 + 5 \cdot 140 = 4440.$$

3) Для методу осереднених коефіцієнтів добудуємо в таблиці ще один стовпець та рядочок:

Пункти відправлення	Пункти споживання				Запаси	C_A
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	4 -8,75 0	5 -4,75 50	7 -4,75 0	3 -10,75 260	310	4,75
A_2	8 -9 250	6 -8 30	9 -7 0	13 -5 0	280	9
A_3	12 -4 0	4 -9 30	5 -10 220	11 -6 0	250	8
Потреби	250	110	220	260		
C_B	8	5	7	9		

Перерахуємо значення опорного плану:

$$z = 5 \cdot 50 + 3 \cdot 260 + 8 \cdot 250 + 6 \cdot 30 + 4 \cdot 30 + 5 \cdot 220 = 4430.$$

Порівнюючи опорні плани, знайдені різними методами, бачимо, що найкращим є опорний план, знайдений за методом осередкованих коефіцієнтів і він дорівнює 4430 умовних одиниць.

Для контролю правильності заповнення матриці перевезень зручно використовувати такі твердження.

Зауваження 1. Ранг матриці системи обмежень транспортної задачі визначається за формулою

$$r = m + n - 1,$$

де m – число пунктів відправлення, n – число пунктів споживання.

Зауваження 2. Число базисних (заповнених) клітинок завжди дорівнює рангу матриці транспортної задачі. У протилежному випадку їх потрібно доповнити до відповідної кількості за рахунок вільних з базисним значенням нуль.

3. На практиці транспортні задачі, в яких загальна сума запасів співпадає з загальною сумою потреб зустрічаються дуже рідко. Набагато частіше, якась з цих сум більша (наприклад, явище дефіциту чи переповнення ринку товарів). Такі задачі називають задачами з неправильним балансом і розв'язують їх ***розподільчим методом.*** Тобто спочатку зводять цю задачу до задачі з правильним балансом, додаючи або фіктивний пункт призначення чи відправлення в залежності від дефіциту потреб чи запасів. *Вартості в фіктивних пунктах вважають рівними нулю, щоб не змінювалась загальна вартість перевезень.*

При побудові першого опорного плану у розрахунках ми фіктивні пункти не враховуємо, бо всі вартості в ньому найменші (нулі), але на загальну вартість перевезень вони не впливають. Проводимо заповнення в основній таблиці, а потім остачі вносимо в фіктивні клітинки.

Приклад 2. Побудувати перший опорний план для транспортної задачі з матрицею вартості перевезень c_{ij}, вектором запасів a_i та вектором потреб b_j

$$a_i = (60 \quad 40);\ b_j = (20 \quad 30 \quad 45 \quad 15); c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язування. Загальні суми запасів *100* і потреб – *110* є різними тому потрібно для збалансування ввести фіктивний пункт постачання із запасами, що дорівнюють *110 – 100 =10* (одиниць) і нульовими вартостями.

Побудуємо матрицю перевезень, що містить і фіктивний пункт та заповнимо її методом найменшої вартості.

Пункти відправлення	Пункти споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3 0	4 30	6 30	7 0	60
A_2	2 20	5 0	8 5	1 15	40
A_3	0 0	0 0	0 10	0 0	10
Потреби	20	30	45	15	

При розрахунку значення опорного плану на рядок (в даному випадку) фіктивних клітинок можна взагалі не звертати уваги. Прорахуємо значення опорного плану:

$$z = 4 \cdot 30 + 6 \cdot 30 + 2 \cdot 20 + 8 \cdot 5 + 1 \cdot 15 = 395(\text{од.})$$

Контрольні запитання:

1. Поясніть суть класичної транспортної задачі.
2. Чим оцінюється ефективність розв’язку транспортної задачі?
3. Яка транспортна задача називається задачею з правильним та неправильним балансом? Наведіть синоніми цих назв.
4. Що таке матриця перевезень?
5. Побудуйте математичну модель транспортної задачі.
6. Назвіть основні методи побудови першого опорного плну транспортної задачі та поясніть їх суть.
7. Який з методів побудови першого опорного плану є найоптимальнішим? Який найкращий для програмування, чому?
8. Чому дорівнює ранг матриці перевезень?
9. Поясніть суть розподільчого методу розв'язування транспортної задачі з неправильним балансом.
10. Що таке фіктивні клітинки, для чого їх використовують?

Лекція №8.
Оптимальний план транспортної задачі

План

1. Критерій оптимальності опорного розв'язку ТЗ методом потенціалів.
2. Метод квадратів переходу між опорними планами транспортної задачі.
3. Перехід між опорними планами за циклом перерахунку.

1. Із прикладів, наведених в попередній лекції, видно, що перші опорні плани ТЗ, побудовані діагональним методом та методом найменшої вартості не є оптимальними. Що стосується методу осередкованих коефіцієнтів, то ніякого висновку про це ми зробити не можемо. Тим часом питання оптимальності плану має велике економічне значення.

Знайдемо критерій оптимальності транспортної задачі із співвідношення між оптимальними розв'язками двоїстих задач. Ввівши двоїсті змінні α_1, α_2, ..., α_m та β_1, β_2, ..., β_n, складемо двоїсту задачу до транспортної. Її система обмежень має вигляд

$$\alpha_i + \beta_j \le c_{ij} \qquad (i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots n) \tag{1}$$

Нерівності (1) можна конкретизувати, враховуючи співвідношення між оптимальними розв'язками двоїстих задач:

А) Для базисних невідомих (клітинок):

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}, \tag{2}$$

Б) Для вільних невідомих (клітинок):

$$\alpha_i + \beta_j \le c_{ij}. \tag{3}$$

Такий метод називають ***методом потенціалів*** . При його використанні ми спочатку шукаємо такі потенціали α_i, β_j, які задовольнятимуть рівності (2) для всіх заповнених клітинок, а потім перевіримо, чи виконуються нерівності (3) для всіх незаповнених клітинок.

Приклад 1. Використаємо метод потенціалів для дослідження задачі з п.2 лекції №7.

Розглянемо опорний план, побудований діагональним методом:

Пункти відправлення	Пункти споживання				Запаси	α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	4 250	5 60	7 0	3 0	310	0
A_2	8 0	6 50	9 220	13 10	280	1
A_3	12 0	4 0	5 0	11 250	250	-1
Потреби	250	110	220	260		
β_j	4	5	8	12		

Використовуючи умови (2), отримаємо наступну систему рівнянь для знаходження потенціалів:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 4, \\ \alpha_1 + \beta_2 = 5, \\ \alpha_2 + \beta_2 = 6, \\ \alpha_2 + \beta_3 = 9, \\ \alpha_2 + \beta_4 = 13, \\ \alpha_3 + \beta_4 = 11. \end{cases} \tag{4}$$

Система (4) містить 7 рівнянь із 8 невідомими. Ранг системи дорівнює 4+4-1=7, тому одну невідому α_1 оголошуємо вільною і прирівнюємо до нуля. Розв'язки системи відображені в таблиці.

Перевіримо виконання умов (3) для побудованого опорного плану:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_3 \le 7 - хибне, \\ \alpha_1 + \beta_4 \le 3 - хибне, \\ \alpha_2 + \beta_1 \le 8 - істине, \\ \alpha_3 + \beta_1 \le 12 - істине, \\ \alpha_3 + \beta_2 \le 4 - істине, \\ \alpha_3 + \beta_3 \le 5 - хибне. \end{cases} \tag{5}$$

Із умов (5) випливає, що план не є оптимальним.

Усі попередні твердження можна узагальнити у вигляді теореми.

Теорема 1. Для того, щоб опорний план транспортної задачі був оптимальним необхідно і досить, щоб коефіцієнти

$$\gamma_{ij} = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j) \tag{6}$$

обчислені для вільних клітинок, де α_i, β_j - розв'язки системи (2), були невід'ємними.

Зауваження 1. Для обчислення потенціалів не обов'язково складати систему рівнянь, їх можна знайти за таким правилом*: невідомий потенціал дорівнює різниці вартості базисної клітинки і значення відомого потенціалу.*

2. Опорний план, як правило, буває неоптимальним, тому необхідно вміти переходити від одного опорного плану до іншого так, щоб значення форми (цільової функції) постійно зменшувалось. Один з таких методів – ***метод квадратів***.

Означення 1*. Чотири клітинки, що розміщені в кутах виділеного прямокутника матриці перевезення, в яких хоча б на одній діагоналі розміщені базисні клітинки будемо називати* ***квадратом****.*

Дві інші клітинки можуть бути будь – які.

Означення 2. *Квадрат будемо називати* ***неправильним,*** *якщо сума вартостей базисних клітинок діагоналі більша за суму двох інших вартостей і* ***правильним,*** *якщо ця сума менша. Квадрат називаємо* ***нейтральним****, якщо обидві суми рівні між собою.*

Справедливе наступне твердження.

Теорема 2. В оптимальній матриці перевезень не існує неправильних квадратів.

Метод квадратів грунтується на поступовій заміні всіх неправильних квадратів – правильними. Зауважимо, що неправильний квадрат завжди має вершину в вільній клітинці для якої не виконується умова (3).

Приклад 2. У вищерозглянутій таблиці є неправильним квадрат A_1B_2 - A_1B_3 – A_2B_3 – A_2B_2.

5 60	7 0
6 50	9 220

У ньому сума вартостей базисних клітинок 5+9=14 більша за суму вартостей двох інших клітинок 7+6=13.

Перерахунок здійснюємо наступним чином:

- вибираємо на базисній діагоналі менше значення кількості перевезень (у нашому випадку це 60);
- віднімаємо це значення від елементів базисної діагоналі і додаємо до елементів іншої діагоналі:

5 60-60	7 0+60
6 50+60	9 220-60

Отримаємо

5 0	7 60
6 110	9 160

Переконаємось, що такі перетворення зменшують вартість перевезень. Дійсно попереднє значення Z=300+300+1980=2580 (у.о.), а перераховане – Z=420+660+1440=2520 (у.о.).

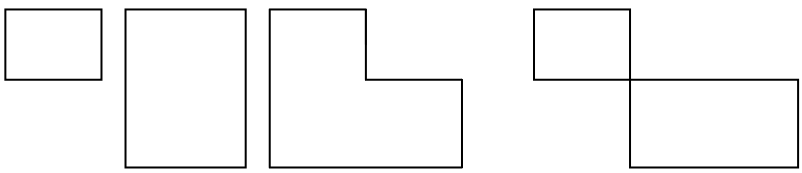
Для досягнення найкращого результату потрібно перерахувати всі неправильні квадрати. Коли в матриці перевезень вже не буде неправильних квадратів, то слід перевірити знайдений розв'язок за методом потенціалів на оптимальність.

Зауваження 2. Відсутність неправильних квадратів ще не гарантує оптимальності розв'язку.

3. Введемо в розгляд ще один метод знаходження оптимального плану транспортної задачі, який носить назву ***методу перерахунку за циклом.***

Означення 3*. *Циклом *в матриці будемо називати замкнену ламану лінію, вершини якої розміщені в клітинках матриці перевезень і з кожної вершини виходять два відрізки: один по рядку, другий по стовпцю.*

Можливі види циклів схематично зобразимо на малюнку.



Перпендикулярні ламані в циклі можуть перетинатись і точка їх перетину не буде вважатись вершиною циклу.

Означення 4. *Вершини одного і того самого відрізку циклу будемо називати* ***сусідніми***.

Означення 5. *Цикл, сусіднім вершинам якого поставлені у відповідність протилежні знаки ("+" і " - "), називають* ***означеним***.

Означення 6. *Означений цикл, одна вершина якого міститься у вільній клітинці, а всі інші у базисних, називають* ***циклом перерахунку.***

У вільній клітинці завжди ставиться знак “+”.

Означення 7. Зсувом *по циклу перерахунку на число θ називають таку операцію, при якій в додатній вершині додається одне і те саме число θ, а у від'ємних віднімається.*

Справедливими є наступні твердження.

Теорема 3. Зсув за означеним циклом в матриці перевезень перетворює один розв'язок системи обмежень транспортної задачі в інший розв'язок цієї самої задачі.

Теорема 4. Для будь – якої вільної клітинки існує лише один цикл перерахунку.

<u>Приклад 3.</u> Перерахувати опорний план транспортної задачі з відомим першим опорним планом за циклом перерахунку.

Пункти відправлення	Пункти споживання					За паси	α
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		0
A_1	4 - 22	1 + 3 8	3 0	4 0	4 0	60	
A_2	2 0	3 - 7	2 20	+ 2 8	3 0	35	2
A_3	3 + 0	5 0	2 0	4 - 10	4 30	40	4
Потреби	22	4 5	20	1 8	30		
β_j	4	1	0	0	0		

<u>Розв'язування.</u> Безпосередньою перевіркою за методом потенціалів переконуємось, що план не є оптимальним. Зокрема, вільна клітинка A_3B_1 не задовольняє умову (3). Тому потрібно здійснити перехід до іншого опорного плану.

Можливим циклом перерахунку є той, що зображений в таблиці. Виберемо у вершинах найменше базисне значення (це 7) і зробимо зсув на цю величину. У додатних вершинах додамо 7, а від від'ємних віднімемо. В результаті одержимо новий опорний план

Пункти відправлення	Пункти споживання					Запаси	α_i
	B 1	B 2	B 3	B 4	B 5		0
A_1	4 1 5	1 4 5	3 0	4 0	4 0	60	
A_2	2 0	3 0	2 2 0	2 1 5	3 0	35	2
A_3	3 7	5 0	2 0	4 3	4 3 0	40	4
Потреби	2 2	4 5	2 0	1 8	3 0		
β_j	4	1	0	0	0		

Зауваження 3. Значення базисних клітинок, які не брали участь у циклі переписуємо без змін.

Контрольні запитання:

1. Поясніть суть методу потенціалів.
2. Сформулюйте критерій оптимальності плану транспортної задачі.
3. Як обчислюють невідомі потенціали рядків, стовпців, клітинок?
4. Що таке квадрат? Який квадрат називають правильним, неправильним, нейтральним?
5. Чи може оптимальна матриця містити неправильні квадрати, чому?
6. Як провести перерахунок матриці методом неправильних квадратів?
7. Чи кожен план, який містить тільки правильні квадрати є оптимальним?
8. Що таке цикл?
9. Які вершини циклу називають сусідніми?
10. Який цикл називають означеним? Що таке цикл перерахунку?
11. Що таке зсув, як його провести?

12. Скільки зсувів може мати вільна клітинка матриці перевезень?
13. Який на вашу думку метод перерахунку кращий, чому?

Лекція №9.
Задачі цілочисельного програмування

План

1. Нерівність Гоморрі.
2. Метод Гоморрі розв'язування задач цілочисельного програмування.
3. Геометричне трактування методу Гоморрі.

1. На минулих лекціях ми розглядали задачі, які в своїх оптимальних значеннях нерідко бували дробовими величинами. Проте з точки зору економіки такі розв'язки не завжди є можливими. Наприклад, плани випуску турбін, крокуючих екскаваторів та інших великих механізмів у дробовому виразі не мають ніякого смислу. Відмова від припущення існування дробового розв'язку приводить до дослідження нового типу задач – ***Задач цілочисельного програмування.***

Загальна постановка таких задач має вигляд:

$$z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n, \text{ (max)} \tag{1}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \; ... \quad ... \quad ... \quad\quad ... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1,2,...,n$$

$$x_j \text{ - цілі числа.} \tag{3}$$

Прикладом задачі цілочисельного програмування є транспортна задача та задача про комівояжера, а також ряд інших проблемних задач, що зустрічаються на практиці.

Задача цілочисельного програмування буде складнішою ніж задача лінійного програмування, оскільки вона містить додаткову умову (3). Тому її оптимальне значення не більше ніж у відповідній задачі без умови цілочисельності. Якщо розв'язок ЗЛП виражається цілим значенням, то це є одночасно і розв'язок задачі цілочисельного програмування. Якщо ж ні, то розв'язок можна отримати заокругленням. Проте таке вирішення проблеми має ряд об'єктивних труднощів:

1) коефіцієнти системи обмежень можуть бути від'ємними числами, тоді не зовсім зрозуміло, як їх краще округлювати;

2) немає простих критеріїв, які дозволяють визначити, чи є знайдений план оптимальним.

На сьогоднішній час можна виділити два типи задач за методами пошуку цілочисельних розв'язків:

1. Всі розв'язки задач (1) – (2) є цілочисельними.
2. Одна частина невідомих в задачі цілочисельна, а друга довільна.

Методи пошуку задач першої групи значно простіші і легко програмуються на ЕОМ. Розглянемо детальніше метод відтинання площин або його ще називають метод Гоморрі для знаходження розв'язку задачі лінійного програмування.

Означення 1*. *Цілою частиною *числа* ***а*** *називають найбільше ціле число, яке менше або дорівнює йому.*

Така функціональна залежність в математиці носить назву функції Антьє і позначається [a].

Наприклад, *[7,1]=7; [9]=6; [-3,4]=-4; [-11]=-11.*

Означення 2. Дробовою частиною *числа* ***а*** *називають різницю між числом a та його цілою частиною (позначають f(a) або {a}):*

$$f(a)=a - [a].$$

Наприклад, *f(7,1)=0,1; f(9)=0; f(-3,4)=0,6; f(-11)=0.*

Справедливі наступні твердження:

1) $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$;

2) якщо n – ціле число, то $f(na) \leq nf(a)$.

Ці властивості можна записати із знаком дорівнює тільки для цілих додатних чисел a, b, n.

Для обмежень задачі цілочисельного програмування властивості 1) та 2) дають змогу написати нерівність

$$\sum_{j=1}^{n} x_j f(a_{ij}) \geq f(b_j), \tag{4}$$

яку називають ***нерівністю Гоморрі.***

2. Алгоритм методу Гоморрі опишемо кількома кроками:

Крок 1. Знайдемо розв'язок задачі (1), (2) без умови цілочисельності.

Крок 2. Якщо оптимальний план цілочисельний, то задача розв'язана. У протилежному випадку вибираємо базисну змінну з найбільшою дробовою частиною і за обмеженням цієї базисної невідомої складаємо нерівність Гоморрі.

Крок 3. До обмежень задачі додаємо нове обмеження з кроку 2. Розв'язуємо розширену задачу та повертаємось до кроку 1. Процес продовжуємо до отримання цілочисельного розв'язку або доки симплекс- таблиці не покажуть, що розв'язку немає.

Приклад 1. На придбання обладнання для нової дільниці виділено 20 умовних грошових одиниць. Обладнання можна розмістити на площі 38 м.кв. Тип обладнання А коштує 5 у.г.о.; потребує 8 м.кв. і дає 7 тис.од. продукції за зміну. Тип обладнання В коштує 2 у.г.о.; потребує 4 м.кв. і дає 3 тис.од. продукції за зміну. Розрахувати оптимальний пан придбання обладнання.

Розв'язування. Позначимо x_1 - кількість одиниць першого обладнання, x_2 - кількість одиниць другого обладнання. Тоді математична модель задачі має вигляд:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20, \\ 8x_1 + 4x_2 \le 38. \end{cases}$$

$$x_j = 0,1,2...$$

$$z = 7x_1 + 3x_2 \text{ (max)}.$$

Запишемо канонічну форму задачі:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 20, \\ 8x_1 + 4x_2 + x_4 = 38. \end{cases}$$

$$x_j = 0,1,2...$$

$$z = 7x_1 + 3x_2 \text{ (max)}.$$

Складемо симплекс – таблицю:

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний план	X_1	X_2	X_3	X_4
I	0	Z	0	-7	-3	0	0
	1	X_3	20	5	2	1	0
	2	X_4	38	8	4	0	1
II	0	Z	28	0	-1/5	7/5	0
	1	X_1	4	1	2/5	1/5	0
	2	X_4	6	0	4/5	-8/5	1
III	0	Z	59/2	0	0	0	¼
	1	X_1	1	1	0	1	-1/2
	2	X_2	15/2	0	1	-2	5/4

Остання симплекс-таблиця дає оптимальний план, але він не є цілочисельним. Переходимо до кроку 2. Дробовому плану відповідає обмеження

$$x_2 - 2x_3 + \frac{5}{4}x_4 = \frac{15}{2}.$$

Нерівність Гоморрі для цього обмеження має вигляд:

$$f(x_2 - 2x_3 + \frac{5}{4}x_4) \ge f\left(\frac{15}{2}\right), \quad \text{або} \quad \frac{1}{4}x_4 \ge \frac{1}{2}. \qquad (5)$$

Додаємо обмеження (5) до системи та виписуємо її канонічну форму.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 1, \\ x_2 - 2x_3 + \frac{5}{4}x_4 = \frac{15}{2}, \\ \frac{1}{4}x_4 \ge \frac{1}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 1, \\ x_2 - 2x_3 + \frac{5}{4}x_4 = \frac{15}{2}, \\ -\frac{1}{4}x_4 + x_5 = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$(\max)\ z = \frac{59}{2} - x_3 - \frac{1}{4}x_4 \qquad (\max)\ z = \frac{59}{2} - x_3 - \frac{1}{4}x_4$$

Виписуємо нову таблицю:

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний план	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
I	0	Z	59/2	0	0	0	¼	0
	1	X_1	1	1	0	1	-1/2	0
	2	X_2	15/2	0	1	-2	5/4	0
	3	X_5	-1/2	0	0	0	-1/4	1
II	0	Z	29	0	0	1	0	1
	1	X_1	2	1	0	1	0	2
	2	X_2	5	0	1	-2	0	5
	3	X_3	2	0	0	0	1	-4

За критерієм план оптимальний, крім того він цілочисельний.

$$X_{опт}=(2, 5, 0, 2, 0), \quad z_{max}=29.$$

Якщо знайти план за округленням, але воно дає значення

$$x_1=1,\ x_2=7,\ z=7+3*7=28.$$

3. Розглянемо геометричну інтерпритацію методу Гоморрі. Якщо в додаткове обмеження підставити значення x_4, то отримаємо

$$\frac{1}{4}x_4 = \frac{1}{4}(38 - 8x_1 - 4x_2) = \frac{19}{2} - 2x_1 - \frac{1}{2}x_2$$

або $$2x_1 + x_2 \le 9.$$

Многокутник розв'язків описаний системою обмежень:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20, \\ 8x_1 + 4x_2 \le 38, \\ 2x_1 + x_2 \le 9, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Додаткове обмеження відтинає частину многокутника таким чином, що точка максимуму буде мати цілочисельні координати. Звідси назва методу – метод відтинаючих площин.

Обмеженість застосування методу Гоморрі полягає в тому, що всі змінні мають бути цілочисельними, крім того, кількість ітерацій (вона залежить тільки від самої задачі) може бути досить великою. Обмеження типу Гоморрі можна дістати і іншими способами, однак відтинання забезпечує кращу збіжність процесу до оптимального цілочисельного розв'язку.

Серед методів цілочисельного програмування, в яких накладаються умови цілочисельності тільки на частину змінних найпоширенішим є метод віток і границь. Крім того є ряд наближених методів пошуку цілочисельного розв'язку.

<u>Контрольні запитання:</u>

1. Які задачі називають задачами цілочисельного програмування? Як вони виникають?
2. Побудуйте математичну модель задачі цілочисельного програмування.
3. Яке співвідношення між оптимальним планом задачі цілочисельного програмування та відповідної їй задачі лінійного програмування?
4. Прокласифікуйте задачі цілочисельного програмування за методами пошуку оптимального плану.
5. Що таке ціла частина числа? Дробова частина числа?
6. Запишіть нерівність Гоморрі.
7. Сформулюйте алгоритм методу Гоморрі.
8. Поясніть суть методу Гоморрі з геометричної точки зору.

Лекція №10.
Задачі нелінійного програмування

План

1. Особливості задач нелінійного програмування.
2. Графічний метод розв′язування задач нелінійного програмування.
3. Задачі нелінійного програмування без обмежень.
4. Задачі нелінійного програмування з обмеженнями – нерівностями.

1. В задачах лінійного програмування всі невідомі входили і до системи обмежень, і до цільової функції в першому степені, що дозволяло просто поставити задачу та знайти порівняно легкий метод її розв′язування. Проте, в реальних економічних ситуаціях допускаються математичні моделі, в яких всі невідомі або лише деякі входять в нелінійному вигляді.. Нехай, критерієм оптимальності є собівартість одиниці продукції. Очевидно, що зі збільшенням росту підприємства собівартість продукції падає, але це триває лише до деякої певної межі. Досить велике підприємство зустрічається з новими статтями витрат, які не зустрічаються в малих організаціях: витрати на підтримання внутрішньої інфраструктури, збереження та перевезення продукції тощо. Це призводить до росту собівартості. Функція, яка спершу спадає, а потім зростає вже не може бути лінійною.

Лінійні моделі є першим наближенням до оптимальної моделі, але при широкому виборі планів можуть бути неадекватними. У більшості випадків нелінійність моделі зумовлена, як правило, структурними співвідношеннями економічного характеру або непропорційністю зміни витрат, випуску продукції, показників якості.

Загальна постановка задач нелінійного програмування має вигляд:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ F_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

$$(\max)\ z(x_1, x_2, ..., x_n). \qquad (2)$$

де $F_k(x_1, x_2, ..., x_n)$, $z(x_1, x_2, ..., x_n)$ - довільні функції. У конкретних задачах деякі (або всі) обмеження можуть бути нерівностями, крім того можуть накладатись умови невід′ємності, цілочисельності та інші на незалежні змінні.

Однією з основних особливостей задач НЛП є те, що ***цільова функція може задаватись різними способами***. Функція може мати багато локальних максимумів, що ускладнює вибір найбільшого значення на проміжку. Друга особливість задач НЛП та, що ***порушується властивість опуклості многокутника розв'язків*** – область розв′язків може бути багатозв′язною.

3. Розглянемо задачу, коли на змінні функції (2) не накладено жодних обмежень. Таку задачу називають ***задачею без обмежень***.

Нагадаємо декілька важливих тверджень.

Означення 1. Частиною похідною першого порядку *називають похідну функції* $z(x_1, x_2, ..., x_n)$ *по якійсь незалежній змінній, яку обчислюють у припущені, що всі інші змінні є сталими.*

Означення 2*. Вектор, складений з частинних похідних функції* $z(x_1, x_2, ..., x_n)$ *першого порядку називають* ***градієнтом функції*** *(позначають "grad" або* ∇*- "набла").*

Коли в деякій точці значення є оптимальним, то воно буде оптимальним і по будь якій її змінній, а для них в цій точці похідна дорівнює нулю. Отже, необхідною умовою оптимальності точки x_0 є така:

$$gradz(z)=0, \tag{3}$$

або в розгорнутій формі:

$$\begin{cases} \partial z / \partial x_1 = 0, \\ \vdots \quad \vdots \\ \partial z / \partial x_1 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Рівності (3) та (4) допускають наочну фізичну інтерпритацію: швидкість зростання функції в точці дорівнює нулю і її можна назвати ***точкою спокою.***

Означення 3. *Частинна похідна від частинної похідної першого порядку називається* ***частинною похідною другого порядку.***

Наведемо алгоритм знаходження максимуму цільової функції задачі НЛП без обмежень.

1. Знаходимо критичні точки, тобто ті в яких частинні похідні 1-го порядку рівні нулеві або не існують.
2. Визначаємо величини:

$$A = \frac{\partial^2 z(x_1, x_2)}{\partial x_1^{\,2}}; \;\; B = \frac{\partial^2 z(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}; C = \frac{\partial^2 z(x_1, x_2)}{\partial x_2^{\,2}}.$$

3. Складаємо детермінант $\Delta = AC - B^2$.

4. Якщо $\Delta>0$, то функція має в M_0 – екстремум. А саме: якщо $A>0$ (чи $C>0$) – мінімум; якщо $A<0$ *(чи* $C>0$*)* – мінімум; якщо $A<0$ *(чи* $C<0$*)* – максимум.

Якщо $\Delta<0$, то в точці M_0 екстремуму немає.

Якщо $\Delta=0$, то проблема потребує додаткових досліджень.

4. Розглянемо задачі НЛП що мають систему обмежень рівностей. Для розв'язування таких задач використовують функцію Лагранжа, яка дозволяє звести задачу нелінійного програмування з обмеженнями – рівностями до задачі нелінійного програмування без обмежень.

Означення 4. Умовним *екстремумом функції* $z=f(x_1;x_2)$ *називається екстремум цієї функції, досягнутий за умови, що* x_1 *і* x_2 *зв'язані рівнянням зв'язку* $\varphi(x_1,x_2)=0$.

Функція Лагранжа в такому випадку має вигляд:

$$u = f(x_1, x_2) + \lambda\varphi(x_1, x_2),$$

де λ - невизначений множник. А система (4) набуде для цієї задачі наступного вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0, \\ \varphi(x_1, x_2) = 0. \end{cases}$$

Звідси знайдемо x_1, x_2, λ. *А д*ля знаходження найбільшого і найменшого значення в замкнутій області потрібно:

1) Знайти стаціонарні точки в цій області і обчислити значення функцій в цих точках;
2) Знайти найбільше і найменше значення на границі області;
3) З всіх значень вибрати найбільше і найменше.

<u>Контрольні запитання:</u>

1. Наведіть приклад нелінійної математичної моделі.
2. Сформулюйте загальну задачу нелінійного програмування.
3. Які особливості задач нелінійного програмування?
4. Наведіть приклад геометричного розв'язування задачі нелінійного програмування.
5. Що таке задача без обмежень?

6. Що називається частинною похідною, градієнтом, частинною похідною другого порядку?

7. Що таке точка спокою?

8. Наведіть алгоритм знаходження екстремуму цільової функції задач НЛП без обмежень.

9. Що таке умовний екстремум?

10. Побудуйте функцію Лагранжа для функції двох змінних.

11. Наведіть алгоритм знаходження екстремуму цільової функції задач НЛП з обмежень.

Лекція №11.
Задачі динамічного програмування

План

1. Поняття про динамічне програмування.
2. Постановка задачі про розподіл ресурсів та алгоритм її розв'язування.
3. Оптимізація розв'язку задачі динамічного програмування (на прикладі задачі про розподіл ресурсів).

1. ***Динамічне програмування*** - це метод оптимізації, пристосований до операцій, в яких процес прийняття рішень можна розбити на ряд послідовних кроків (етапів). Такі операції називають ***багатокроковими.*** В основі методу розв'язування задач динамічного програмування лежить принцип оптимальності, сформульований Р. Белманом. Його ідея полягає в тому, що конкретна задача оптимізації розчленовується на декілька аналогічних багатокрокових задач. Їх розв'язування призводить до функціональних рівнянь, які виражають рекурентні співвідношення відносно оптимального значення цільової функції і дозволяють послідовно отримати управління для початкової задачі оптимізації.

Одна з основних переваг динамічного підходу до розв'язування задач на оптимальність – відсутність аналітичних виразів для цільової функції. Таким чином, досить широке коло практично важливих задач можна розв'язати методами динамічного програмування без попереднього запису цільової функції.

2. Розглянемо класичну задачу динамічного програмування, яку прийнято називати ***задачею про розподіл ресурсів.***

Виробничому об'єднанню, до якого входить n підприємства $П_1, П_2, \ldots, П_n$, виділено для початкового розподілу суму засобів у розмірі S_0. Вважають, що засоби, виділені підприємству $П_k$ в розмірі $x_к$ на початковий період, дають прибуток $f_k(x_k)$ $(k=1,2,3,4)$. Будемо вважати, що дохід, одержаний об'єднанням від вкладених засобів, що залишилися, дорівнює сумі прибутків, одержаних від розподілу всіх засобів S_0, на всіх підприємствах.

Визначити, яку кількість засобів x_k потрібно виділити кожному підприємству $П_k$, щоб сумарний прибуток **z** був максимальний.

<u>Побудуємо математичну модель задачі.</u>

Загальний дохід виражається цільовою функцією:

$$z=\sum f_k(x_k)\ (\ max\ ) \qquad (1)$$

Змінні x_k повинні задовільнити умови:

$$x_1 + x_2 \dots + x_n = S_0,\ x_j \geq 0\ (j=1,\dots,n) \qquad (2)$$

<u>Сформулюємо алгоритм розв'язування задачі по кроках.</u>

Початковий розподіл грошових фондів S_0 між підприємствами об'єднання визначається чотирма кроками. За номер k-го кроку приймемо номер підприємства $П_k$, якому виділяються засоби.

Відповідно до (2) введемо чотири змінні $x_1, x_2, x_3, x_4,$ які називають ***керуючими.*** За їх допомогою згідно з (2) визначимо параметри стану системи (виробничого об'єднання): $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4.$

$$S_0 = 210; \quad S_1 = S_0 - x_1; \quad S_2 = S_1 - x_2; \quad S_3 = S_2 - x_3; \quad S_4 = S_3 - x_4 \qquad (3)$$

Нехай на 1-му кроці першому підприємству виділено запаси x_1 Переводимо систему із стану S_0 у стан $S_1.$ Потім на другому кроці 2-му підприємству виділяємо засобів x_2 (систему із S_1 переходить у S_2). На останньому кроці ($k=4$) процес розподілу грошових фондів завершується. Для вибору на кожному з кроків (3) керуючу змінну x_k використаємо критерій оптимальності :

Яким би не був початковий стан на будь-якому кроці і вибране на цьому кроці керування (S_k, x_{k-1}: $k=1,2,3,4$), наступні керуючі змінні повинні вибиратися оптимальними відносно стану, до якого прийде система в кінці даного кроку.

Якщо на початок k-го кроку залишок засобів дорівнює $S_{k-1},$ то дохід, який можна одержати на останніх $n-k+1$ роках, становитиме:

$$z_k(S_{k-1}) = \sum_{i=k}^{n} f_i(x_i), \qquad (k = 1,2,3,4) \qquad (4)$$

Максимальний прибуток $z_k^*(S_{k-1})$ за ці $n-k+1$ кроки залежить від того, скільки засобів залишилось від попередніх $k-1$ кроків, тобто від величини S_{k-1} та визначення величини x_k $(0 \leq x_k \leq S_{k-1})$ і одержання на k-ому підприємстві прибутку $f_k(x_k)$:

$$z^*{}_k(S_{k-1}) = \max_{0 \leq x_k \leq S_{k-1}} \{f_k(x_k) + z^*_{k+1}(x_k)\} = \max_{0 \leq x_k \leq S_{k-1}} z_k(S_{k-1}; x_k) \qquad (5)$$

Рекурентне співвідношення (5) є ***рівнянням Беллмана*** для задачі (1) (2). Оптимізуючи прибуток підприємства $П_4$ на 4-му кроці *(k=4)*, матимемо:

$$z_4^*(S_3) = max\,\{f_4(x_4)\},\ 0 \leq x_4 \leq S_3 \qquad (6)$$

(оскільки $z_5^* (S_4) = 0$ не існує).

Необхідно отримати $z_1^*(S_0) = z_{min}$. Аналізуючи послідовно всі кроки ($k=3, 2, 1$) із кінця (6) до початку (5) процесу розподілу при $k=1$, матимемо сукупність значень максимального прибутку й оптимальних розв’язків відносно кожного кроку:

$$z_4^* (S_3), z_3^*(S_2), z_2^*(S_1), z_1^*(S_0), \qquad (7)$$

$$x_4^*(S_3), x_3^*(S_2), x_2^*(S_1), x_1^*(S_0)$$

<u>Контрольні запитання:</u>

1. Що називається динамічним програмуванням?
2. Які операції називають багатокроковими?
3. Яка ідея принципу оптимальності задач динамічного програмування, хто його сформулював?
4. Які переваги динамічного підходу до розв’язування задач?
5. Сформулюйте критерій оптимальності задачі про розподіл ресурсів.
6. Як побудувати математичну модель задачі при конкретному початковому розподілі фондів?
7. Сформулюйте алгоритм покрокового розв’язування задач динамічного програмування.
8. Запишіть рівняння Белмана.
9. Як визначати оптимальний варіант розв’язування, керуючись економічними міркуваннями?.

Лекція №12.
Задачі сіткового програмування

План

1. Поняття про сіткове програмування. Елементи теорії графів.
2. Основні вимоги до побудови сіткового графіка.
3. Визначення числових характеристик сіткової моделі.

1. Системи сіткового планування та управління широко використовуються в економіці, технології, проектуванні тощо. Важливим етапом сіткового планування є аналіз сіткового графіка за критерієм часу, що дозволяє якнайраціональніше організувати виробничі процеси, що залежать від різних робіт, при цьому роботи можуть і залежати, і не залежати одна від одної.

Перевагами застосування методів сіткового планування в народному господарстві зокрема є: скорочення строків робіт, встановлення кінцевого ланцюжка робіт від початку та до кінця розробки проекту, зосередження уваги керівників на цих роботах, можливість оперативного регулювання розроблених планів за допомогою ЕОМ, тісний взаємозв'язок різних колективів робітників, що беруть участь у розробці проекту і т. д.

В основі сіткового моделювання лежить наочне зображення всього комплексу робіт, який проводиться, у вигляді *графа*.

Означення 1. Граф *– це схема, яка складається із заданих точок (**вершин**), з'єднаних визначеною системою ліній (векторів). Відрізки, які з'єднують вершини називають **ребрами (дугами)** графа.*

Означення 2. Орієнтовним *називається граф, на якому стрілками вказані напрями всіх його ребер (відомо яка точка дуги початкова, а яка кінцева).*

Означення 3. Шлях *– така послідовність ребер, при якій кінець кожного попереднього ребра є початком наступного (крім безпосередньо початку та кінця самого шляху).*

Означення 4. Контур *– це кінцевий шлях, у якого початкова вершина збігається з кінцевою.*

Означення 5. Сітковий графік *– це орієнтовний граф без контурів, ребра якого мають одну чи декілька числових характеристик.*

Основні елементи сіткового графіка – *події* (які зображаються у вигляді кружечків) і *роботи* (зображаються у вигляді стрілок - ребер).

Означення 6. Подія *– це стан системи в момент досягнення деякої вихідної, проміжної чи початкової мети запланованого комплексу робіт.*

Означення 7. Робота *– це тривалий за часом процес, що зводиться до відбуття визначеної події.*

Кожна робота вимагає затрат часу, трудових та матеріальних ресурсів.

Після того, як початковий графік складено, необхідно перевірити виконання таких обов’язкових вимог:

1. Тільки початкова подія не має вхідних стрілок, а кінцева – вихідних.
2. Кожна робота повинна мати початкову подію і завершуватись кінцевою подією.
3. На графіку не повинно бути ізольованих ділянок, не зв’язаних з роботами в інших частинах графіка.
4. На графіку не повинно бути контурів та петель.
5. Дві події на сітковому графіку можуть бути безпосередньо зв'язані не більше, ніж одною роботою. При виникненні паралельних робіт вводиться фіктивна подія і робота.

Далі введемо поняття упорядкованого сіткового графіка, в якому всі стрілки спрямовані строго зліва направо, події розміщені у вертикальних шарах так, що мають попередні події, розташовані тільки в шарах, розміщених лівіше.

3. Кожна робота сіткового графіка (за виключенням фіктивних) передбачає затрати на її виконання. Так як сіткові методи в основному використовують для нових процесів, які не мають аналогів, то тривалість робіт є невизначеною величиною, з точки зору математики – випадковою. Тому по кожній роботі від i-ої до j-ої події виходять з трьох часових оцінок, які визначають на основі опитування експертів та виконавців.

T_{ij}^{m} – мінімум часу, витраченого на виконання роботи (оптимістична оцінка),

T_{ij}^{M} – максимум часу, витраченого на виконання роботи (песимістична оцінка),

T_{ij}^{B} – найбільш імовірний час виконання роботи.

Тоді середня тривалість роботи визначається за формулою:

$$\bar{t}_{ij} = \frac{1}{6}\left(t_{ij}^{m} + 4t_{ij}^{B} + t_{ij}^{M}\right), \qquad (1)$$

а дисперсія (розбіжність оцінки часу виконання роботи) за формулою:

$$D_{ij} = \left(\frac{t_{ij}^{M} - t_{ij}^{m}}{6}\right)^2. \qquad (2)$$

Отримані дані заносимо в таблицю (див вище).

Далі перейдемо до визначення часових характеристик сіткової моделі, вважаючи, що строки виконання робіт визначені.

Розглянемо роботу *(i - j),* тоді очікуваний ранній строк настання події визначається так:

$$t_j^* = \min_{i<j} \left(t_i^* + \bar{t}_{ij} \right). \qquad (3)$$

Означення 8. *Послідовність робіт між початковою і завершальною подією сіткової моделі, яка має найбільшу тривалість за часом, називається* ***критичним шляхом.***

Контрольні запитання:

1. Які переваги застосування сіткового планування?
2. Що таке граф?
3. Який граф називається орієнтовним?
4. Що таке шлях? Контур? Сітковий графік? Подія? Робота?
5. Які основні поля в таблиці розв'язування задачі сіткового планування?
6. Які основні вимоги до складання сіткового графіка?
7. Який сітковий графік називається впорядкованим?
8. Які числові характеристики сіткового графіка?
9. Як визначити середню тривалість роботи? Її дисперсію?
10. Що таке критичний шлях?
11. Яка суть очікуваних ранніх та допустимих пізніх строків виконання роботи?

Лекція №13.
Деякі задачі дискретного програмування.

На практиці часто виникають задачі вибору оптимальних рішень дискретного характеру, які приймають лише значення 0 або 1, тобто є ЗЛП з булевими змінними, або цілочисельні значення. Такі задачі можна розв’язувати симплексним методом чи методом потенціалів, проте при цьому виникають досить громіздкі обчислення, що суттєво впливає на розуміння одержаних кінцевих результатів. Тому такі задачі зручніше розв’язувати, наприклад, угорським методом чи методом Мака.

Задача про призначення: нехай набір деяких видів робіт може виконувати певна кількість кандидатів, причому кожного кандидата можна призначати лише на одну роботу і кожна робота може бути виконана тільки одним кандидатом. Відома матриця, елементами якої є витрат на виконання тієї чи іншої роботи. Розв'язком задачі є оптимальний розподіл кандидатів на посади. Критерій оптимальності: мінімальні сумарні витрати пов’язанні з призначенням.

Математична модель даної задачі має вигляд:

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} (\min) \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = 1, \dots, n, \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, \dots, n, \qquad (3)$$

$$x_{ij} = 0 \quad \text{або}\, 1,\ i, j = 1, \dots, n. \qquad (4)$$

Зазначимо, матриця c_{ij} — витрат на виконання тієї чи іншої роботи кожним із претендентом, де i — індекс кандидата, j — індекс роботи.

Відмітимо, що матриця c_{ij} може бути і матрицею ефективності (у вибраних одиницях) кожного претендента на кожній роботі. такому випадку функція z — це сумарний ефект від виконання робіт повинна приймати максимального значення.

Ще одним із прикладів ЗЛП, яку зручно розв’зувати угорським методом чи методом Мака є задача про комівояжера.

Задача комівояжера: розглядається кілька міст. Комівояжеру необхідно, починаючи з міста, в якому він перебуває, обійти, не буваючи ніде двічі, всі міста і повернутися в початкове. Відома матриця, елементи якої — вартості пересування (чи відстані) між всіма попарними пунктами подорожі. Знайти оптимальний маршрут. Критерій оптимальності: мінімальна сумарна вартість (відстань) пересування по маршруту.

Зрозуміло, якщо умову (4) трактувати як умову невід'ємності змінних, то задача про призначення перетворюється на транспортну задачу з запасами і потребами кожного із постачальників і споживачів рівними 1.

Алгоритм угорського методу.

1. Віднімаємо від кожного елемента матриці i-го рядка мінімальний елемент цього рядка, $i=1,\dots,n$.
2. Віднімаємо від кожного елемента j-го стовпця перетвореної матриці втрат його мінімальний елемент, $j=1,\dots,n$.
3. В результаті пунктів 1, 2 кожний рядок і кожний стовбець матриці витрат містить принаймні один 0. Якщо рядок має лише один 0 позначаємо його *****, а якщо в рядку є ще й інші 0, то "закреслюємо" їх позначкою ^. Нуль вважається поміченим, якщо він має позначку *****.
4. Аналогічні дії проводимо для стовбців матриці, врахувавши, що якщо вже в даному стовбці є помічений 0 (тобто позначений *****), то всі інші 0 цього стовпця відмічаємо ^ (тобто закреслюємо). В результаті виконаних дій можливий випадок, коли в деяких рядках чи стовпцях є принаймні два непомічених 0. В такому випадку пере позначаємо 0 , узгодивши це з попередніми позначеннями.
5. В результаті виконання пунктів 1-4 можливий один із двох випадків:
   а) кожний рядок має призначення — має помічений 0;
   б) число 0 з позначкою***** менше n .
6. У випадку а) задача про оптимальне призначення розв'язана і всі x_{ij}, які відповідають 0*****, дорівнюють 1, а решта — 0.
   У випадку б) переходимо до пункту 7.
7. Помічаємо позначкою # рядки, для яких не одержано призначення, тобто , в яких не має 0*****. Такі рядки вважаємо поміченими, решту — непоміченими.
8. Помічаємо позначкою # ще непомічені стовпці, які мають закреслений 0 (з позначкою ^) у помічених рядках.
9. Помічаємо позначкою # ще непомічені рядки, які мають призначення (тобто 0*) у помічених стовпцях.
10. Повторюємо дії пунктів 8 та 9 доти, поки більше не можна помітити рядків і стовпців матриці витрат.
11. Закреслюємо (за допомогою позначки **&**) <u>непомічені</u> рядки і <u>помічені</u> стовпці матриці витрат.
12. Знаходимо мінімальний незакреслений елемент матриці витрат, віднімаємо його від кожного з незакреслених рядків , додаємо до елементів усіх закреслених стовпців і переходимо до пункту 3. При цьому позначки елементів матриці витрат (***** та ^) втрачають свою силу.

Зауважимо, що якщо в задачі про оптимальні призначення (1)-(4) цільову функцію (1) потрібно максимізувати (у цьому випадку c_{ij} — ефективність, пов'язана з призначенням i-го виконавця на j-й вид роботи), то для її розв'язання можна застосувати угорський метод, замінивши матрицю c_{ij} на матрицю - c_{ij}.

Приклад 1. Розв’язати задачу про оптимальне призначення, якщо матриця витрат рівна

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 5 & 8 & 9 & 1 & 6 \\ 9 & 5 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки min (2,4,3,5,6)=2,
min (3,2,3,4,7)=2,
min (5,8,9,1,6)=1,
min (9,5,4,3,3)=3,
min (2,4,3,5,3)=2,

то, виконуючи пункт1 алгоритму, одержимо

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 8 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Виконуючи пункт 2 алгоритму, оскільки

min (0,1,4,6,0)=0,
min (2,0,7,2,2)=0,
min (1,1,8,1,1)=1,
min (3,2,0,0,3)=0,
min (4,5,5,0,1)=0,

одержимо

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 7 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Починаючи з першого рядка помічаємо 0, при потребі інші закреслюємо. Таким чином

$$\begin{pmatrix} 0^* & 2 & 0^\wedge & 3 & 4 \\ 1 & 0^* & 0^\wedge & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 7 & 0^* & 5 \\ 6 & 2 & 0^\wedge & 0^\wedge & 0^* \\ 0^\wedge & 2 & 0^* & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Видно, що в кожному рядку і кожному стовпці є один помічений 0*****.
Отже, перший кандидат виконує першу роботу, другий —другу, третій — че-

тверту. Четвертий — п'яту і п'ятий — третю роботи. При цьому витрати рівні $z=2+2+1+3+3=11$.

Приклад 2. Розв'язати задачу про оптимальне призначення, якщо матриця витрат рівна

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 9 & 9 & 8 & 5 \\ 10 & 11 & 5 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$\min(5,4,3,2,1)=1,$$
$$\min(7,9,9,8,5)=5,$$
$$\min(10,11,5,3,2)=2,$$
$$\min(4,3,2,1,2)=1,$$
$$\min(4,8,6,5,10)=4,$$

то, виконуючи пункт1 алгоритму, одержимо

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 8 & 9 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Виконуючи пункт 2 алгоритму, оскільки

$$\min(4,2,8,3,0)=0,$$
$$\min(3,4,9,2,4)=2,$$
$$\min(2,4,3,1,2)=1,$$
$$\min(1,3,1,0,5)=0,$$
$$\min(0,0,0,1,6)=0,$$

одержимо

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 8 & 7 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Починаючи з першого рядка помічаємо 0, при потребі інші закреслюємо. Таким чином

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 0^{*} \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 0^{\wedge} \\ 8 & 7 & 2 & 1 & 0^{\wedge} \\ 3 & 0^{*} & 0^{\wedge} & 0^{\wedge} & 1 \\ 0^{*} & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Оскільки помічених 0* лише 3, то ще не знайдено оптимальне призначення. Тому, позначимо відповідно до 7 пункту алгоритму другий рядок, третій, а потім і перший стовпець, який в свою чергу приведе до першого рядка, символом #

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & & & \# \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 0^* \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 0^\wedge \\ 8 & 7 & 2 & 1 & 0^\wedge \\ 3 & 0^* & 0^\wedge & 0^\wedge & 1 \\ 0^* & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \# \\ \# \\ \# \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Таким чином, згідно пункту 11, одержимо

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & & & \& \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 0^* \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 0^\wedge \\ 8 & 7 & 2 & 1 & 0^\wedge \\ 3 & 0^* & 0^\wedge & 0^\wedge & 1 \\ 0^* & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \& \\ \& \end{array} \end{array}.$$

Оскільки мінімальний не закреслений елемент 1, то згідно пункту 12, одержимо

$$\begin{pmatrix} 3 & 0^* & 0^\wedge & 0^\wedge & 0^\wedge \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0^* \\ 7 & 6 & 1 & 0^* & 0^\wedge \\ 3 & 0^\wedge & 0^* & 0^\wedge & 2 \\ 0^* & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Оскільки помічених 0* вже є 5 в кожному з рядків і кожному з стовпців, то знайдений план призначень оптимальний і згідно знайденого розв’язку перший кандидат виконує другу роботу, другий — п’яту, третій — четверту, четвертий —третю, п’ятий — першу роботи. Сумарні витрати при цьому рівні $z=4+5+3+2+4=18$.

Список літератури

1. Бугір М.К. Математика для економістів. К.:, “Академія”, 1998.
2. БондаревВ.М., Рублинецкий В.И., Качко Е.Г. Основы программирования. –Харьков: Фолио, Ростов н/Д: Феникс, 1998.
3. Федосеев В.В. Экономико-математические методы и прикладные модели. М.:, «Юнити»,1999.
4. Данко П.Е.,Попов А.Г.,Кожевникова Т.Я., Высшая математика в упражнениях и задачах.Т.1,М.:, «Высшая школа», 1999.
5. Овчинников П.В., Лисицин Б.М., Михайленко М.К., «Вища математика», К.:, «Вища школа», 2004.
6. Задачі оптимізації. Посібник для факультативних занять.,К.:, “Вища школа”, 1991.
7. С. І. Наконечний, С. С. Савіна Математичне програмування. Київ.: , КНЕУ, 2004.

ЗМІСТ

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК