В.М. Теслюк

Дослідження і проектування комп'ютерних систем та мереж

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Тернопіль – 2012

ЗМІСТ

ВСТУП

З середини XX століття в різних областях людської діяльності стали широко застосовувати математичні методи та персональні комп’ютери. Виникли такі нові дисципліни, як "математичне моделювання", "теорія математичних обчислень", "математична економіка" і т.д., які вивчають математичні моделі відповідних об'єктів і явищ, а також методи дослідження цих моделей.

Математична модель - це наближений опис певного класу явищ чи об'єктів реального світу мовою математики. Основна мета моделювання - досліджувати ці об'єкти і передбачити результати майбутніх спостережень. Однак моделювання - це ще й метод пізнання навколишнього світу, який дає можливість управляти ним.

Математичне моделювання і пов'язаний з ним комп'ютерний експеримент незамінні в тих випадках, коли натурний експеримент неможливий чи ускладнений за тими чи іншими причинами. Наприклад, не можна поставити натурний експеримент в історії, щоб перевірити, "що було б, якби ..." Неможливо перевірити правильність тієї чи іншої космологічної теорії. В принципі можливо, але навряд чи розумно, поставити експеримент з поширення якоїсь хвороби, наприклад чуми, чи здійснити ядерний вибух, щоб вивчити його наслідки. Однак усе це цілком можна зробити на комп'ютері, побудувавши попередньо математичні моделі досліджуваних явищ.

“… *Цели расчетов – понимание, а не числа*”

Р.В.Хемінг

Розділ 1
ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА МОДЕЛЕЙ ТА ПРОЦЕСУ МОДЕЛЮВАННЯ. РОЛЬ ТА РІВНІ МОДЕЛЮВАННЯ В АВТОМАТИЗОВАНОМУ ПРОЕКТУВАННІ

Система автоматизованого проектування (САПР) включає сім видів забезпечень, зокрема: програмне, інформаційне, математичне, технічне, лінгвістичне, організаційне та методичне [1]. Ядром будь-якої САПР є математичне забезпечення.

Математичне забезпечення систем автоматизованого проектування (МЗ САПР) [1 – 4] *включає моделі, методи та алгоритми, які використовуються під час автоматизованого проектування* (моделювання).

1.1. Поняття про об’єкт моделювання (проектування) та його основні параметри

Проектування [1, 2] – *це комплекс робіт, метою яких є отримання опису ще неіснуючого технічного об’єкта, який достатній для реалізації та виготовлення об’єкта в заданих умовах*. **Об’єктом проектування** *будемо називати виріб* (для прикладу, автомобіль, інтегральна схема, персональний комп’ютер тощо) *чи процес* (технологічний процес виготовлення двигуна автомобіля, інтегральної схеми, літака та ін.).

Будь-який об’єкт проектування характеризується множиною параметрів. Під **параметром** будемо розуміти *величину, яка виражає властивість об’єкта проектування* (системи)*, або його частини чи впливу зовнішнього середовища на об’єкт розроблення* (систему).

В процесі автоматизованого проектування окрім терміну “параметр” об’єкту моделювання досить часто використовують термін “**фазова змінна**” – *величина, яка характеризує енергетичне чи інформаційне наповнення елемента або підсистеми*. *Сукупність значень фазових змінних зафіксованих в певний момент часу процесу функціонування* називається **станом об’єкта проектування** (моделювання).

Під **поведінкою** (динамікою) будемо розуміти *зміну стану об’єкта (системи) в процесі функціонування*.

Усі параметри об’єкта моделювання (проектування) можна розділити на чотири основні групи: вхідні параметри ($X_{вх.}$); зовнішні ($X_{зов.}$); внутрішні ($X_{вн.}$); вихідні параметри ($X_{вих.}$).

Отже, **вхідними параметрами** *об'єкта проектування будемо називати такі параметри, якими ми можемо керувати або з допомогою яких керуємо об'єктом*. В залежності від складності об'єкта проектування, кількість вхідних параметрів може бути різна. Для складних об'єктів кількість може доходити до тисяч, навіть десятків тисяч. Позначимо всі вхідні параметри вектором $\overline{X_{вх.}}$, а при необхідності виділення конкретного j-го вхідного параметра $x_{вх.j}$. В загальному випадку $\overline{X_{вх.}} = (x_{вх.1}, x_{вх.2}, ..., x_{вх.n})$, n – загальна кількість вхідних параметрів.

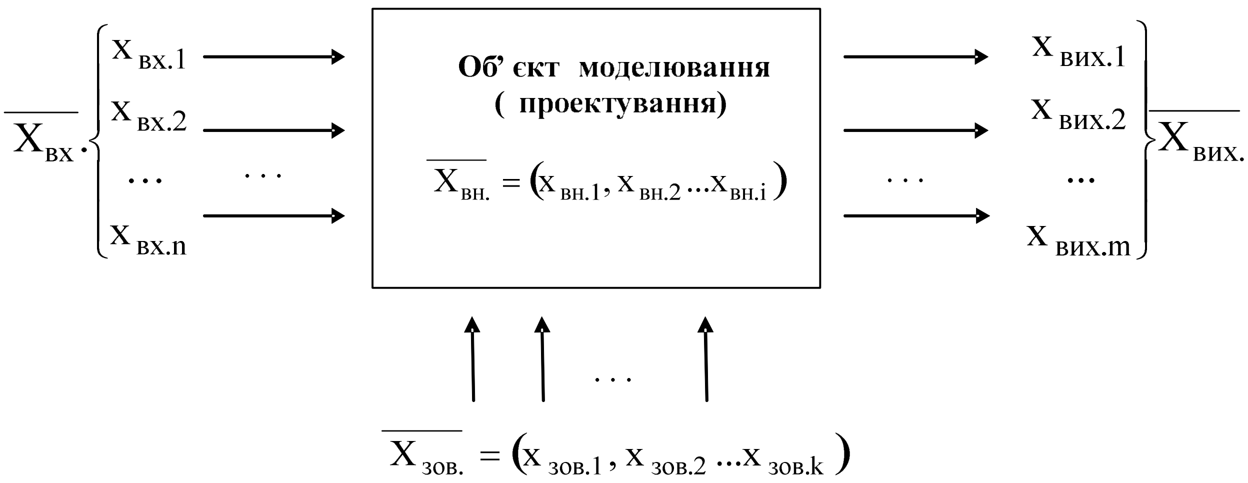

Рис.1.1 Групи параметрів об'єкта моделювання (проектування)

Для прикладу, якщо в якості об'єкта проектування розглядати електронну схему підсилювача низької частоти, то вхідними параметрами є амплітуда струму вхідного сигналу, частота вхідної напруги, напруга та струм живлення, тощо.

До **параметрів зовнішнього середовища** *відносяться такі параметри: температура оточуючого середовища, вологість, тиск, вібрації та інші*. Відповідний вектор для параметрів зовнішнього середовища запишемо як $\overline{X_{зов.}} = (x_{зов.1}, x_{зов.2}, ..., x_{зов.k})$, а у випадку, зазначення конкретного параметра – $x_{зов.j}$. Як правило, при проектуванні будь-якого об'єкта в технічному завданні відведено розділ, в якому задаються граничні значення параметрів оточуючого середовища (кліматичні умови) в яких має функціонувати об'єкт проектування (моделювання).

Внутрішні параметри *об'єкта проектування дають змогу характеризувати його внутрішню структуру та описати функціонування окремих складових даного об'єкта*. До них відносяться, у випадку розгляду тієї ж електричної схеми, опори резисторів, ємності конденсаторів, індуктивності котушок, товщини провідників та інше. При описі параметрів цієї групи будемо використовувати наступне позначення $\overline{X_{вн.}} = (x_{вн.1}, x_{вн.2}, ..., x_{вн.i})$.

Вихідні параметри *об'єкта проектування залежать від вхідних, зовнішніх та внутрішніх параметрів, що можна записати вигляді наступної функціональної залежності* $\overline{X_{вих.}} = \varphi(\overline{X_{вх}}, \overline{X_{вн.}}, \overline{X_{зов.}})$, де φ – деяка функція, яка дає змогу встановити зв'язок між вектором вихідних параметрів та векторами вхідними, внутрішніх і зовнішніх параметрів.

У випадку розгляду тієї ж електричної схеми підсилювача, то вихідними параметрами даного об'єкта проектування є вихідна напруга, вихідний струм, коефіцієнт підсилення, вихідна потужність, його маса тощо.

1.2. Поняття моделі та моделювання

Зміст понять "модель", "моделювання" в різних сферах науки та техніки можуть дещо відрізнятися. Але незважаючи на це можна виокремити одну визначальну спільну властивість: модель завжди в тій чи іншій мірі імітує або заміняє оригінал. Цей факт дає нам можливість стверджувати, що певний об'єкт **А** (тут і надалі термін об'єкт трактується в як найширшому значенні: як було зазначено вище об'єктами можуть бути не тільки матеріальні тіла, а й різноманітні явища, процеси, абстрактні поняття і т.д.) є моделлю об'єкта **В** відносно деякої системи характеристик (властивостей), якщо **А** будується (вибирається) для імітації (заміни) **В** за цими характеристиками. З цієї точки зору **моделювання** *можна розглядати як процес побудови моделей, точніше процес представлення об'єкта-оригінала адекватною моделлю та проведення дослідження з використанням цієї моделі з метою отримання певної інформації про оригінал (об'єкт проектування).* З філософської точки зору під моделюванням розуміють процес опосередкованого пізнання реальності. Слід відзначити, що в процесі моделювання модель виступає одночасно і як засіб, і як об'єкт досліджень, який знаходиться у певному відношенні подібності до модельованого об'єкту. **Подібність** – *це взаємно-однозначна відповідність між двома об'єктами, коли відомі функції переходу від параметрів одного об'єкту до параметрів іншого, а математичні описи можуть бути зроблені тотожними*. Цей своєрідний дуалізм моделі є характерним для різних систем автоматизованого проектування, оскільки під час автоматизованого проектування розробник оперує не самими об'єктами, а їхніми моделями, тобто моделювання виступає і як предмет, і як засіб створення проекту складної системи.

Отже, **модель** – *це спеціальний об'єкт, який в деякому сенсі та з певною ступінню подібності заміняє оригінал*.

Дещо інше визначення **моделі** – *це об'єкт чи система об'єктів, які в певній мірі подібні до об'єкта моделювання (проектування), дають змогу відобразити основні властивості об'єкта розгляду, процесу чи явища і описують вихідні параметри моделювання (проектування)*.

З вищенаведених визначень слідує, що з принципової точки зору, не існує моделі, яка б була повним еквівалентом оригіналу, тобто описувала всі параметри об'єкта моделювання. Будь-яка модель відображає лише деякі сторони оригіналу (параметри, які цікавлять розробника оригіналу), завдяки чому модель набуває певної ідеалізованої форми. Тому, досить часто для всестороннього вивчення оригіналу доводиться будувати і досліджувати цілу низку моделей. Складність моделювання як процесу полягає у відповідному виборі такої сукупності моделей, які заміняють реальний об'єкт у потрібному відношенні (відображають лише певні характеристики об'єкта моделювання).

В основі процесу моделювання лежать інформаційні процеси, оскільки в процесі реалізації моделі отримують інформацію про об'єкт-оригінал, проведення експерименту з моделями супроводжується керуючою інформацією і на останньому етапі відбувається обробка (інтерпретація) отриманих результатів.

Слід додати, що процес моделювання, згідно вищенаведеного визначення, передбачає розв'язання двох задач, а саме: побудову моделі оригіналу (в англомовній літературі – modeling) та процес дослідження параметрів оригіналу з використанням побудованої моделі (simulation).

1.3. Види моделей

Класифікація моделей може здійснюватися за різними критеріями і носить умовний характер. Більшість дослідників поділяють моделі на два великих класи: **предметні** (експериментальні) та **абстрактні** (теоретичні).

Предметні моделі *утворюються з сукупності матеріальних об'єктів і представляють собою реально існуючі пристрої двох основних типів*. **Предметні моделі першого типу** (їх часто називають **фізичними**) *відтворюють оригінал у спрощеному вигляді, причому природа матеріальних елементів (складових частин) цих моделей може відрізнятися від природи елементів з яких складається об'єкт моделювання*. Прикладом предметної фізичної моделі може бути **макет**. Фізичні моделі створюються на основі теорії подібності, причому подібність здійснюється за тими параметрами, які є суттєвими для дослідника. Так, наприклад, для вивчення опору руху корабля потрібна модель, зовнішні форми якої подібні до зовнішніх форм оригіналу, а для дослідження міцності цього ж корабля – модель, що імітує його силовий каркас. **Предметні моделі другого типу – моделі на основі методу аналогій** – *ґрунтуються на тому факті, що різні фізичні явища описуються за допомогою однакового математичного апарату*. Наприклад, коливальні процеси в механічних та електричних системах описуються однаковими звичайними диференціальними рівняннями другого порядку. Це означає, що замість проведення досить складного і дорогого експерименту з механічною системою можна провести простіший експеримент з електричною системою, яка в цьому випадку і буде виступати моделлю.

Абстрактні моделі *описують об'єкт дослідження за допомогою певної мови*. Абстрактність цих моделей проявляється в тому, що компонентами моделі є поняття (креслення, схеми, графіки, рівняння, алгоритми), а не фізичні елементи. За характером мови опису абстрактні моделі можна поділити на **фізичні**, **математичні**, **економічні** тощо. **Абстрактна фізична** *модель описує оригінал на основі абстрактних уявлень мовою фізики*. Їх отримують в результаті абстрагування від несуттєвих, з точки зору дослідника, властивостей та зв'язків об'єкта дослідження. Прикладами теоретичних фізичних моделей можуть бути такі поняття, як матеріальна точка, абсолютно тверде тіло, пружне середовище, абсолютно чорне тіло тощо. В механіці та фізиці дуже часто побудова абстрактних фізичних моделей виступає проміжним, підготовчим етапом процесу побудови математичних моделей. Зокрема, загальне визначення м**атематичної моделі** (ММ) – *це абстрактна модель представлена мовою математичних співвідношень*.

Ці моделі мають форму функціональних залежностей між групами параметрів досліджуваного об'єкту. За ступенем абстрагування математичні моделі знаходяться на найвищому рівні ієрархії. Власне побудові та дослідженню цих моделей і буде присвячена найбільша увага в цьому конспекті лекцій. Серед абстрактних моделей розрізняють гносеологічні, інформаційні, сенсуальні та концептуальні моделі. **Гносеологічні моделі** *призначені для дослідження об'єктивних законів природи* (наприклад, моделі сонячної системи, біосфери, світового океану тощо). **Інформаційні моделі** *описують поведінку оригіналу, а не імітують його*. **Сенсуальні моделі** – *це моделі, що впливають на почуття людини* (музика, мистецтво тощо). **Концептуальні моделі** *мають за мету виявлення причинно-наслідкових зв'язків, які характерні для об'єкту дослідження і які є суттєвими в рамках* *цього дослідження.* Один і той же об'єкт може бути представлений різними концептуальними моделями, наприклад одна концептуальна модель може відображати часові аспекти функціонування системи, а інша – вплив відмов на працездатність системи.

1.4. Методи моделювання

Під **методом** будемо розуміти *спосіб розв'язання деякої складної задачі*. Досить часто під **методом** розуміють *об'єднання моделей та алгоритмів для розв'язання деякої складної задачі*, що акцентує увагу на складових і підпорядкованості моделей та алгоритмів терміну метод. В цьому випадку під **алгоритмом** будемо розуміти *набір кроків для досягнення поставленої мети*.

Під час моделювання та проектування складних систем застосовують такі методи **аналітичного**, **чисельного**, **імітаційного**, **натурного** і **напівнатурного** моделювання.

Аналітичні методи *призначені для отримання функціональних залежностей шляхом послідовного застосування математичних формул та правил*. Аналітичні методи [5] застосовують у випадку, коли математична модель записана у вигляді рівнянь, наприклад диференціальних або інтегральних. При використанні аналітичних методів часто виникають труднощі пов'язані з неможливістю отримання розв'язку в аналітичній формі, що значно обмежує сферу їх застосування. Але незважаючи на ці труднощі аналітичного підходу, результати отримані в аналітичній формі є універсальними і мають дуже велику цінність, оскільки вони дають змогу перевірити точність інших підходів. Розроблені спеціальні мови опису аналітичних перетворень для комп'ютерів (наприклад, "Аналітик"), цілі системи програмування ("Авто-Аналітик") та пакети символьних математичних перетворень ("Mathematica").

Чисельні методи ґрунтуються на побудові скінченої послідовності дій над числами [5 – 13], яка призводить до бажаного результату. Дослідження математичних моделей за допомогою чисельних методів полягає в заміні "неперервних" математичних операцій та відношень на відповідні дискретні аналоги: інтегралів на суми, похідних на їх аналоги у формі різницевих співвідношень, нескінченні суми на скінченні і т.д. Серед недоліків чисельних методів слід відзначити те, що вони завжди дають наближений розв'язок, який містить певну похибку та можуть давати нестійкий розв'язок, який сильно залежить від деяких вхідних даних. До переваг чисельних методів слід віднести значно ширшу, у порівнянні з аналітичними, сферу застосування (універсальність) та можливість багаторазового застосування розроблених алгоритмів до розв'язання різних задачах. Результатом чисельних методів завжди є набори чисел (для прикладу розподіли напружень та зміщень у конструкції об'єкта проектування тощо), які потім можна представити у вигляді таблиць і графіків.

Аналітичні та чисельні методи відносяться до "чисто" математичних засобів дослідження моделей, застосування яких значно ускладнюється у випадках, коли необхідно відтворити в моделі динаміку складних просторово-часових відношень між компонентами системи, усю різноманітну гамму існуючих зв'язків, законів керування, адаптивних властивостей тощо. Дослідження таких систем доцільніше та ефективніше проводити за допомогою методів імітаційного моделювання. Ці методи використовують, коли моделі являють собою змістовний опис об'єктів дослідження у формі алгоритмів. Моделі такого типу називаються імітаційними або алгоритмічними. Вони адекватно відображають як структуру систем, що досягається ототожнюванням елементів системи з відповідними елементами алгоритмів, так і процеси функціонування системи, зображені в логіко-математичнй формі. Особливістю цього підходу до моделювання є те, що для опису моделі використовуються спеціальні алгоритмічні мови, які є більш гнучким засобом опису складних систем, ніж мова математичних функціональних відносин. Завдяки цьому в імітаційних моделях часто знаходять відображення багато деталей структури та функцій складних систем, які вимушено втрачаються або нехтуються в математично строгих моделях. Для складних систем характерним є статистичний підхід, у зв'язку з чим для аналізу імітаційних моделей часто використовується метод Монте-Карло [14, 15]. Сам процес побудови та аналізу імітаційних моделей за допомогою цього методу отримав назву статистичне моделювання. Суть **статистичного моделювання** полягає в отриманні за допомогою комп'ютера статистичних даних про процеси, які відбуваються в модельованій системі, з наступною обробкою їх методами математичної статистики. До переваг статистичного моделювання слід віднести принципову можливість проведення аналізу систем довільної складності з довільним ступенем деталізації. Негативна сторона – трудомісткість процесу моделювання та частковий характер отриманих результатів, на основі яких важко виявити загальні закономірності.

Методи **натурного моделювання** [16] включають проведення експерименту з реальним об'єктом та обробку результатів на основі теорії подібності [17 - 20]. Вони грунтуються на вимірюванні характеристик процесів, що відбуваються в реальних системах. Перевага натурного моделювання полягає в тому, що експериментальні дослідження є, в більшості випадків, джерелом найбільш достовірних даних, а недолік – результати носять частковий характер.

Напівнатурне моделювання складних об'єктів здійснюють за допомогою комбінованих моделей. В структуру таких моделей включають математичні співвідношення, які описують функціонування елементів об'єкту розроблення, а також деякі реальні матеріальні елементи. Завдяки цьому часто вдається досягнути оптимальної взаємодії між обчислювальним та натурним експериментами. Найбільш ефективними методи напівнатурного моделювання є при проектуванні автоматизованих систем управління, які часто складаються з елементів різної фізичної природи.

Досить часто під час моделювання та проектування використовують так звані "**еврістичні**" методи (підходи, моделі). В цьому випадку мається на увазі такий метод дослідження, який грунтується на неформальних, інтуітивних міркуваннях і припущеннях дослідника, що спираються на його досвід при розв'язанні подібних задач, задач з інших галузей науки та техніки тощо. В більшості випадків еврістичні методи дають змогу значно скоротити кількість варіантів, які необхідно переглянути під час пошуку розв'язання задачі чи вирішення проблеми. Разом з тим необхідно зауважити, що цей метод (прийом) не гарантує отримання найкращого розв'язання задачі.

1.5. Рівні проектування (моделювання) в САПР

Будь-який об'єкт проектування з позицій системного аналізу можна розглядати як систему. Відповідно під **системою** [3] будемо розуміти *множину елементів, які знаходяться у відношеннях та зв'язках між собою*, а **елементом** – *таку частину системи, представлення про яку не доцільно піддавати при проектуванні подальшому поділу (декомпозиції)*.

Характерними ознаками складних систем є великі розміри як за кількістю складових частин, так і за кількістю параметрів, що характеризують процес їх функціонування. Складність поведінки системи, як єдиного цілого, обумовлена різноманітністю взаємоперетинаючих зв'язків між її елементами, а також цілеспрямованістю та багатофакторністю функціонування. Отже складна система характеризується наступними властивостями: цілісності, ціленаправлености, можливістю поділу на складові, ієрархічності, багатоаспектністю. Тому такі системи принципово неможливо точно описати і передбачити їх поведінку. Єдиний метод, який дає змогу суттєво спростити процес проектування, а часто і експлуатацію такої системи є моделювання, і в першу чергу математичне моделювання.

Під час проектування складних систем часто використовується **системний підхід**, згідно з яким система розглядається з позицій переходу від загального до часткового. Системний підхід дає змогу на всіх етапах дослідження системи та побудови її моделі врахувати всі фактори пропорційно до їх важливості. Системний підхід означає, що будь-яка система є інтегрованим цілим навіть тоді, коли вона складається з окремих підсистем, причому проектування системи починається з формулювання мети її функціонування.

Практичне застосування системного підходу до проектування технічних пристроїв та процесів різного функціонального призначення втілено в **блочно-ієрархічному підході** [1-4], який передбачає *використання принципу ієрархічності для структурування представлень про об'єкти за ступенем деталізації описів та принцип декомпозиції (блочності, модульності) для розбиття представлень кожного рівня на складові (довершені блоки) з можливістю їх поблокового аналізу та синтезу*.

На верхньому рівні, для прикладу проектування МЕМС, позначимо як S^1_{MEMS}, де одиниця означає перший рівень деталізації. Оскільки МЕМС є складною системою і її можна розбити на блоки нижчого рівня для зручності розв'язання задач синтезу та аналізу, то введемо рівень 2, який міститиме n блоків. Відповідно, кожний блок другого рівня позначимо через $S^{2,j}_{MEMS}$, де j – номер блока другого рівня розбиття ($j = 1,2,...n$). У цьому випадку МЕМС можна описати, як $S^1_{MEMS} = \bigcup_{j=1}^{n} S^{2,j}_{MEMS}$.

Оскільки блоки другого рівня також є складними об'єктами і їх можна розглядати як системи відносно до блоків третього рівня та доцільно з технічного погляду, розбити на простіші блоки, то кожний блок (система відносно блоків третього рівня) другого рівня можна описати як об'єднання блоків третього рівня $S^{2,j}_{MEMS} = \bigcup_{l=1}^{K_j} S^{3,l}_{MEMS}$, де K_j – кількість блоків третього рівня в j-му блоці (системі) другого рівня, l – номер блока третього рівня розбиття ($l = 1,2,...,K_j$).

При технічній доцільності наявності блоків четвертого рівня кожний блок третього рівня можна описати так $S^{3,l}_{MEMS} = \bigcup_{z=1}^{Z_j} S^{4,z}_{MEMS}$, де Z_l – кількість блоків четвертого рівня в l-му блоці (системі) третього рівня, z – номер блока четвертого рівня розбиття ($z = 1,2,...,Z_l$).

Так процес продовжується доти, поки блоки m-го рівня вже недоцільно з певних міркувань піддавати декомпозиції на простіші. Блоки найнижчого рівня, як правило, називають базовими елементами.

Припустивши, що процес проектування потребує чотири рівні ієрархії (деталізації), її можна описати за допомогою наступного виразу

$$S^{1}_{MEMS} = \bigcup_{j=1}^{n} S^{2,j}_{MEMS} \bigcup_{l=1}^{K_j} S^{3,l}_{MEMS} \bigcup_{z=1}^{Z_j} S^{4,z}_{MEMS}.$$

Поділ на блоки виконується, як правило, за функціональною ознакою та технічною доцільністю.

Отже, згідно з блочно-ієрархічним підходом в процесі автоматизованого проектування складних систем, проектування здійснюється в декілька етапів або, як прийнято казати, на різних рівнях. Кожний рівень проектування визначається ступенем деталізації опису системи, причому методика проектування безпосередньо залежить від рівня. На кожному рівні проектування поняття системи, елементів системи, закону функціонування елементів і т.д., можуть мати різний зміст. Те, що трактувалося як система на одному рівні, може розглядатися як елемент системи на іншому рівні. На кожному з рівнів проектування розв’язують множину задач моделювання, при цьому, використовується специфічний математичний апарат. Тобто задачі проектування розв’язують через моделювання. Відповідно, вживається вираз: задача моделювання для системного рівня, рівень компонентного моделювання тощо.

Для прикладу під час проектування інтегральних схем (ІС), розрізняють наступні рівні:

1) **рівень структурного (системного)** проектування (моделювання) з використанням імітаційних моделей та застосуванням спеціалізованих мов моделювання, теорій множин, алгоритмів, графів, систем масового обслуговування, теорії мереж Петрі тощо;

2) **рівень функціонально-логічного** проектування (моделювання) з використанням моделей у вигляді логічних рівнянь та застосування апарату багатозначної алгебри логіки;

3) **схемотехнічний рівень,** на цьому рівні при побудові моделей використовують звичайні диференціальні рівняння та їх системи, VHDL-AMS – мову для опису цифрових, аналогових та гетерогенних елементів системи;

4) **компонентний рівень**, на якому моделі систем та їх елементів мають вигляд систем алгебраїчних, диференціальних, диференціальних рівнянь в частинних похідних та інтегро-диференціальних рівнянь, які досліджуються за допомогою методів функціонального аналізу, теорії диференціальних рівнянь, аналітичних та чисельних методів.

Для випадку застосування блочно-ієрархічного підходу до проектування механічних систем, найчастіше використовують такі назви рівнів: рівень проектування комплектів, агрегатів, зібраних одиниць та деталей.

1.6. Контрольні запитання

1. Які основні складові математичного забезпечення САПР Ви знаєте?
2. Які групи параметрів об’єкта проектування Ви знаєте?
3. Що таке модель та математична модель?
5. Що таке метод?
6. Що таке алгоритм?
7. Які види моделей Ви знаєте?
8. В чому основний зміст блочно-ієрархічного підходу?
9. Які рівні включає автоматизоване апроектування інтегральних схем?
10. Що називається системою?
11. Що Ви розумієте під елементом системи?
12. Які методи моделювання Ви знаєте?
13. Які переваги аналітичних методів?
14. Які переваги чисельних методів?
15. Які види моделей Ви знаєте?
16. Що таке фазова змінна?
17. Що Ви розумієте під станом системи?
18. Що ви розумієте під динамікою системи?
19. Який математичний аппарат використовується на системному рівні?
20. Який математичний аппарат використовується на схемотехнічному рівні?
21. Який математичний аппарат використовується на компонентному рівні?
22. Яка особливість методів натурного моделювання?
23. Що Ви розумієте під інформаційною моделлю?
24. Що таке структурна схема?
25. Які дві основні складові включає моделювання?

Розділ 2
ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОЦЕСУ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

2.1. Види опису математичних моделей

В загальному випадку під математичною моделлю (ММ) розуміють будь-який математичний опис, що відображає з потрібною точністю структуру та/або процес функціонування деякої реальної системи в реальних умовах. Визначення **математичної моделі**, що враховує специфіку та особливості автоматизованого проектування є наступне: ***математична модель*** *це набір математичних знаків для встановлення зв'язку між вихідними та вхідними і внутрішніми параметрами об'єкта проектування в заданих умовах*. Отже, математичний опис полягає у встановленні зв'язків між параметрами процесу та виявлені його граничних і початкових умов, а також у формалізації цього процесу у вигляді системи математичних співвідношень.

У найпростішому випадку математичний опис (математична модель) об'єкта проектування має вигляд явної функції, що виражає змінну величину (вихідні параметри) через інші змінні, які називаються аргументами (вхідні, внутрішні та параметри зовнішнього середовища), і в загальному випадку може бути записана наступним чином:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{2.1}$$

де y – вихідний параметр моделі, f – функція перетворення, $x_1, x_2, ...x_n$ – множина вхідних, внутрішніх та параметрів зовнішнього середовища.

Прикладом такої математичної моделі може бути вираз для визначення величини електростатичної сили F_{el}, що виникає між пластинами плоского конденсатора:

$$F_{el} = C\frac{U^2}{2d},\ C = \varepsilon_o \varepsilon \frac{S}{d}, \tag{2.2}$$

де C – електрична ємність; S – площа пластин; U – прикладена напруга; d – відстань між пластинами конденсатора; ε, ε_o – діелектрична проникність середовища між пластинами конденсатора та діелектрична проникність у вакуумі.

В більш складному випадку ММ має вигляд рівняння такого виду:

$$F(y, x_1, x_2, ...x_n) = 0, \tag{2.3}$$

яке виражає залежність (2.1) в неявній формі. Наприклад це моделі, що описують залежності між її параметрами з допомогою трансцендентних рівнянь, систем лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) тощо.

У складнішому випадку співвідношення математичної моделі можуть бути записані у формі звичайних диференціальних рівнянь

$$F(y, y', y'', \dots y^{(n)}, x_i, x_i', \dots x_i^{(m)}, t) = 0, \tag{2.4}$$

які зв'язують незалежну змінну t, відомі функції $x_i = x_i(t)$, невідому функцію $y = y(t)$ та похідні функцій x_i, y. Прикладом такої ММ може бути диференціальне рівняння другого порядку, що описує зміщення пластини електричного конденсатора під дією зовнішньої сили з врахуванням електростатичної сили (2.2) між його пластинами

$$m\frac{d^2 l}{dt^2} + b\frac{dl}{dt} + kl = F, \; F = F_a + F_{el},$$

де l – зміщення; F_a – механічна сила; m – маса пластини; F – сумарна прикладена сила; k – коефіцієнт пружності пружини; b – коефіцієнт демпферування.

В загальному випадку до цієї групи входять моделі, що описують процеси з використанням систем звичайних диференціальних рівнянь, диференціальних рівнянь n-го порядку тощо.

І, нарешті, математична модель може включати диференціальні рівняння в частинних похідних

$$F(y, x_i, t_1, t_2, \dots t_k, D_k^n) = 0, \tag{2.5}$$

в яких, на відміну від звичайних диференційних рівнянь, шукана функція y залежить від декількох незалежних змінних, наприклад, температура може залежати від просторових координат та часу. Тут через D_k^n позначено часткову похідну n-ого порядку від змінної t_k.

Прикладом таких моделей є ММ, що описує переміщення тонкої пластини, при цьому припускається, що розподіл сили по пластині є рівномірний, а її краї - жорстко защемлені:

$$\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4} = \frac{P}{D}, \; D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

де $w(x, y)$ – прогини пластини (вертикальні переміщення пластини); x, y – осі, які формують координатну площину xOy, що рівновіддалена від основ пластини; h – товщина пластини; E – модуль пружності матеріалу пластини; ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу пружного елемента; P – інтенсивність розподіленого на поверхні пластини навантаження.

Необхідно зауважити, що коректне формулювання вищенаведеної моделі потребує визначення ще крайових умов.

Співвідношення (2.1, 2.2 – 2.5) можна узагальнити використовуючи поняття оператора. Розглянемо деяку систему стан якої, в довільний момент часу $t \in [0,T]$, описується певним набором Y- величин, які називаються **характеристиками стану**. Характеристики стану залежать як від власних параметрів системи, так і різних зовнішніх впливів з боку оточуючого середовища. Опис цієї залежності – це і є суть математичної моделі цієї системи. В загальному випадку, характеристики стану, власні параметри та зовнішні фактори є функціями одного і того ж або різних аргументів. Правила перетворення однієї функції в іншу називають **оператором**. Тоді математична модель, в найбільш загальному випадку, має наступний операторний вигляд:

$$Y(t) = L\{X(s), t\}, \tag{2.6}$$

де через L позначено оператор, а під $X(s)$ розуміється набір величин, які тим чи іншим способом впливають на характеристики стану. Частковим випадком такого оператора є **функціонал**, який задає правила перетворення функції в скалярну величину.

Наведене вище тлумачення оператора як правила перетворення функцій можна узагальнити наступним чином. Нехай задано дві множини функцій U та F і нехай функція u є елементом множини U, функція f- множини F, тобто $u \in U$, $f \in F$. Тоді в операторному рівнянні

$$Lu = f, \tag{2.7}$$

оператор L задає відповідність між елементами множин U і F, а розв'язати операторне рівняння (2.7) означає знайти $u \in U$ при заданих $f \in F$ та вигляд оператора L.

Для побудови математичних моделей можуть використовуватися як універсальні фундаментальні закони природи (закони збереження маси, енергії, другий закон Ньютона), так і феноменологічні закони (закон Гука, закон Фур'є), тобто достатньо добре емпірично обґрунтовані закони з обмеженою областю дії (яка також встановлена емпірично). Математичний опис завжди є відображенням фізичної сутності деякого реального об'єкту з його характерними особливостями та обмеженнями. Математична модель концентрує у вигляді математичних співвідношень сукупність наших знань, уявлень та гіпотез про відповідний об'єкт дослідження. Вона (математична модель) завжди описує поведінку реальної системи лише наближено, оскільки наші знання не є абсолютними, а гіпотези та припущення не враховують усі фактори. Тому, математичні моделі відносяться до класу **гомоморфних** моделей (**макромодель**), під якими розуміють моделі, що відображають лише основні властивості об'єкту дослідження, причому між гомоморфною моделлю та оригіналом відсутнє повне, поелементне відображення. На відміну від гомоморфних, в **ізоморфних** моделях спостерігається повна поелементна відповідність між моделлю та оригіналом (**повна модель**).

2.2. Класифікація математичних моделей

В залежності від специфіки зв'язку між характеристиками стану та вхідними даними розрізняють **детерміновані** та **стохастичні** математичні моделі. В **детермінованих моделях** *у кожний фіксований момент часу характеристики стану системи (об'єкта моделювання чи проектування) однозначно визначаються через вхідні дані*. Детерміновані моделі будують на основі фундаментальних теоретичних законів, таких як закони збереження енергії, маси, закони термодинаміки, кінетики тощо. Усі величини, які входять до складу детермінованих моделей задають у вигляді конкретних чисел, векторів та функцій. *Якщо хоча б один параметр системи (об'єкта моделювання чи проектування) приймає випадкові значення, то таку побудовану математичну модель будемо називати* **стохастичною**. У цьому випадку під однозначністю визначення характеристик стану системи розуміють однозначність визначення ймовірністного розподілу цих характеристик за заданими розподілами ймовірностей вхідних даних. В принципі будь-якій реальній системі притаманні в тій чи іншій мірі випадкові флуктуації. Тому, якщо під час моделювання такої системи впливом цих випадкових факторів не можна знехтувати, то доводиться будувати і досліджувати стохастичну модель. У протилежному випадку достатньо обмежитися детермінованою моделлю. Виокремлення детермінованих моделей в окремий клас можна пояснити широким використанням та різноманітністю математичних методів їх дослідження.

В більш загальному випадку можемо стверджувати, що в **детермінованих** математичних моделях інженер чи науковець оперує лише математичними очікуваннями параметрів об'єкта моделювання, а в **стохастичних** – випадковими розподілами цих параметрів (чи хоча б випадковим розподілом одного з цих параметрів ММ).

Розрізняють також **лінійні** та **нелінійні**, розподілені та зосереджені за просторовими координатами, **неперервні** та **дискретні**, **стаціонарні** та **нестаціонарні** математичні моделі.

Математична модель називається **лінійною**, *якщо для оператора моделі виконується принцип суперпозиції. У протилежному випадку модель називається* **нелінійною**. Нелінійні моделі, в свою чергу, можна поділити на

алгебричні та **трансцендентні**. У рівняннях **нелінійної алгебраїчної моделі** *над змінними проводяться лише звичайні арифметичні операції та операції піднесення до степеня з раціональним показником*, а в рівняння **нелінійної трансцендентної моделі** *можуть входити інші функції над змінними (тригонометричні, логарифмічні і т.д.)*. Більшість реальних систем є нелінійними, хоча на практиці, найчастіше використовуються лінійні моделі, які з задовільною точністю описують поведінку таких систем і є більш доступними для дослідження.

В **нестаціонарних** моделях вихідні параметри (рішення задачі) змінюються з часом, в іншому випадку – вихідні параметрі не залежать від змінної часу. **Неперевні** моделі дають змогу визначити зміну вихідних параметрів в будь-який момент часу (для прикладу, модель, яка дає змогу визначити вихідні параметри аналогового електричний сигналу). **Дискретні** моделі оперують дискретною інформацією, тобто даними, отриманими в певні відлікі часу (наприклад, моделі, що оперують з цифровою формою представлення електричного сигналу).

Важливий клас математичних моделей складають так звані **подібні** моделі, які забезпечують перехід до оригіналу на основі теорії подібності.

Основні ознаки класифікації та типи математичних моделей, які використовуються в системах автоматизованого проектування (САПР) наведено в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Ознака класифікації	**Математичні моделі**
Характер відображених властивостей об’єкта	Структурні, функціональні
Приналежність до ієрархічного рівня	Мікрорівня, макрорівня, метарівня
Степінь деталізації опису в середині кожного рівня	Повні, макромоделі
Спосіб представлення властивостей об’єкта	Аналітичні, алгоритмічні, схемні, імітаційні
Спосіб отримання моделі	Теоретичні, емпіричні

За характером відображених властивостей об'єкта ММ поділяються на **структурні** та **функціональні**.

Структурні ММ *призначені для відображення структурних властивостей об'єкта*. Структурні математичні моделі поділяються на **топологічні** й **геометричні**.

Функціональними *називають такі математичні моделі, які дають змогу визначити вихідні параметри об'єкта моделювання на основі вхідних та зовнішніх*.

Топологічні ММ *відображають склад і взаємозв'язки між елементами об'єкта*. Найчастіше їх застосовують для опису об'єктів, які складаються з великого числа елементів, при розв'язанні задач прив'язки конструктивних елементів до певних просторових позицій (наприклад, задачі компонування обладнання, розміщення деталей, трасування з'єднань) чи до відносних моментів часу (наприклад, при розробці розкладів руху громадського транспорту, технологічних процесів). Топологічні моделі можуть мати форму графів, таблиць (матриць), списків тощо.

Геометричні ММ *відображають геометричні властивості об'єктів, у них додатково до інформації про взаємне розташування елементів містяться дані про форму деталей*. Геометричні ММ можуть виражатися сукупністю рівнянь ліній і поверхонь; алгебричних співвідношень, які описують області, що складають тіло об'єкта; графами і списками, що відображають конструкцію з типових конструктивних елементів, тощо. Геометричні ММ застосовують при розв'язанні задач конструювання в машинобудуванні, приладобудуванні, радіоелектроніці, для оформлення конструкторської документації, при задані вихідних даних на розробку технологічних процесів виготовлення деталей.

Використання принципів блочно-ієрархічного підходу до проектування приводить до появи ієрархії математичних моделей проектованих об'єктів. Кількість ієрархічних рівнів, при моделюванні, визначається складністю проектованих об'єктів, технологіями, які використовують в процесі проектування і можливістю засобів проектування. Однак для більшості прикладних областей можна віднести наявні ієрархічні рівні до одного з трьох узагальнених рівнів, названих надалі **мікро-**, **макро-** і **метарівнями**.

В залежності від місця в ієрархії математичні моделі поділяються на ММ, які відносяться до мікро-, макро- і метарівнів.

Особливістю **ММ на мікрорівні** *є відображення фізичних процесів, що протікають в об'єкті та неперервні в просторі і часі*. Типові ММ на мікрорівні включають диференціальні рівняння в часткових похідних (ДРЧП). В них незалежними змінними є просторові координати та час. З допомогою цих рівнянь розраховують поля механічних напруг і деформацій, електричних потенціалів, тисків, температур тощо. Можливості застосування ММ у виді ДРЧП обмежені окремими деталями, спроби аналізувати з їхньою допомогою процеси в багатокомпонентних середовищах, складальних одиницях, електронних схемах не можуть бути успішними через надмірний ріст витрат машинного часу і пам'яті персонального комп'ютера.

На **макрорівні** *використовують дещо грубішу дискретизацію простору по функціональному признаку, що приводить до представлення ММ на цьому рівні у виді систем звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР)*. В цих рівняннях незалежною змінною є час t, а вектор залежних змінних складає фазові змінні, які характеризують стан елементів дискретизованного простору. Такими змінними є сили і швидкості в механічних системах, напруги і сили струму в електричних системах, тиски та витрати в гідравлічних і пневматичних системах тощо. Системи ЗДР є універсальними моделями на макрорівні, придатними для аналізу як динамічних, так і статичних режимів роботи об'єктів моделювання. Моделі для стаціонарних режимів можна також представити у виді систем алгебричних рівнянь. Порядок системи рівнянь залежить від числа виділених елементів об'єкта. Якщо порядок системи наближається до 100, то оперувати такою моделлю стає важко і тому необхідно переходити до представлення моделі на метарівні.

Метарівень характеризується великою розмаїтістю типів ММ. Для багатьох об'єктів ММ на метарівні, як і раніше, представляють системами ЗДР. Однак, тому що в моделях не описуються внутрішні для елементів фазові змінні, а фігурують лише фазові змінні, які відносяться до взаємних зв'язків між елементами. Укрупнення елементів на метарівні означає одержання ММ прийнятної розмірності для значно більш складних об'єктів, ніж на макрорівні.

В ряді предметних областей вдається використовувати специфічні особливості функціонування об'єктів для спрощення ММ. Прикладом є електронні пристрої цифрової автоматики, в яких можливо застосовувати дискретне представлення таких фазових змінних, як напруги та струми. В результаті ММ стає системою логічних рівнянь, що описують процеси перетворення сигналів. Такі логічні моделі істотно більш економічні, ніж моделі електричні, що описують зміни напруг і сил струмів як функцій часу. Важливий клас ММ на метарівні складають моделі на основі систем масового обслуговування, що використовуються для опису процесів функціонування інформаційних і обчислювальних систем, виробничих ділянок, ліній і цехів.

За ступенем деталізації опису об'єктів моделювання в межах кожного ієрархічного рівня виділяють **повні ММ** і **макромоделі**.

Повна ММ – *модель, в якій фігурують фазові змінні, що характеризують стани всіх наявних між елементних зв'язків (тобто стану всіх елементів проектованого об'єкта)*.

Макромодель – *ММ, у якій відображаються стани значно меншого числа міжелементних зв'язків, що відповідає опису об'єкта при укрупненому виділенні елементів*.

За формою представлення математичні моделі поділяють на **інваріантні**, **аналітичні** й **алгоритмічні** та **схемні** [3].

Інваріантна форма *запису відношень моделі передбачає використання традиційної мови математики не залежно від методу розв’язання задачі*.

Аналітичні ММ *являють собою явні вирази вихідних параметрів як функцій вхідних, внутрішніх та зовнішніх параметрів об'єкта моделювання*. Такі ММ характеризуються високою економічністю, однак одержання такої форми вдається лише в окремих часткових випадках, як правило, при прийнятті певних спрощень і обмежень, що знижує точність і звужує область адекватності моделі. Приклад таких моделей зображено у формі виразів (2.1 та 2.2).

Схемна форма представлення ММ *передбачає використанням деякої графічної мови, а саме: графів, еквівалентних схем, діаграм тощо*. Прикладами таких моделей можуть бути еквівалентна схема транзистора чи електромеханічного актюатора, модель у формі мережі Петрі електромеханічної системи, граф фрагмента електричної схеми та ін. Відповідні моделі, як правило, використовують на системному та функціонально-логічному рівнях автоматизованого проектування і дещо рідше на схемотехнічному.

Алгоритмічні ММ *виражають зв'язки вихідних параметрів з вхідними, внутрішніми та зовнішніми параметрами у формі алгоритму*. Типовою алгоритмічною математичною моделлю є система рівнянь доповнена алгоритмом чисельного методу розв’язання й алгоритмом обчислення вектора вихідних параметрів як функціоналів розв’язання системи рівнянь. Прикладами таких моделей можуть бути вирази (2.4) і (2.5), якщо додати початкові та краєві умови з алгоритмами розв’язання сформульованих задач. В більшості випадків, алгоритмічні моделі використовують на схемотехнічному та компонентному рівнях автоматизованого проектування, хоча можливе їх використання і на вищих рівнях абстракції.

Особливим підвидом алгоритмічних математичних моделей **є імітаційні**. Імітаційна – алгоритмічна модель, яка відображає поведінку досліджуваного об'єкта в часі при задані зовнішніх впливів на об'єкт. Прикладами імітаційних ММ можуть бути моделі динамічних об'єктів у виді систем ЗДР і моделі на основі систем масового обслуговування, задані в алгоритмічній формі.

При одержанні ММ використовують неформальні і формальні методи. Неформальні методи застосовують на різних ієрархічних рівнях для одержання ММ елементів. Ці методи включають вивчення закономірностей процесів і явищ, зв'язаних з об'єктом моделювання, виділення істотних факторів, прийняття різного роду допущень і їхнє обґрунтування, математичну інтерпретацію наявних процесів і т.п. Для виконання цих операцій, в загальному випадку, відсутні формальні методи, в той же час, від результату цих операцій істотно залежать показники ефективності ММ - ступінь універсальності, точність та економічність. Тому, побудова ММ елементів, як правило, здійснюється кваліфікованими фахівцями, які одержали підготовку як у відповідній предметній області, так і в питаннях математичного моделювання на електронно-обчислювальній машині.

Застосування неформальних методів можливо для синтезу теоретичних і емпіричних ММ. Теоретичні ММ створюються в результаті дослідження процесів і їхніх закономірностей, властивих розглянутому класу об'єктів і явищ. Емпіричні ММ - в результаті вивчення зовнішніх проявів властивостей об'єкта за допомогою вимірів фазових змінних на зовнішніх входах і виходах та обробки результатів вимірів.

Рішення задач моделювання елементів полегшується завдяки тому, що для побудови більшості технічних об'єктів використовуються типові елементи (кількість типів порівняно невелика). Тому розробка ММ елементів виконується порівняно рідко. Одноразово побудовані ММ елементів надалі багаторазово застосовують при розробці різноманітних систем з цих елементів.

Формальні методи застосовують для одержання ММ систем при відомих математичних моделях елементів.

Таким чином, у програмах автоматизованого синтезу та аналізу, які використовують в САПР, одержання ММ проектованого об'єкта забезпечується реалізацією ММ елементів і методів формування ММ систем.

2.3. Вимоги до математичних моделей

Найважливішою вимогою до математичної моделі є вимога її **адекватності** (відповідності) об'єкту-оригіналу відносно вибраної системи його характеристик. Під цим, як правило розуміють: 1) правильний якісний опис об'єкта за вибраними характеристиками; 2) правильний кількісний опис об'єкта за вибраними характеристиками з необхідною точністю в розумних межах. Отже, під **адекватністю ММ** *будемо розуміти можливість* *відображення заданих властивостей моделі з заданою точністю*. **Точність** *визначається як степінь співпадіння вихідних параметрів моделі та об'єкту-оригінала*.

Оберненою величиною до точності моделі є її похибка. Для прикладу, відносна похибка моделі i-го вихідного вихідного параметра визначається з виразу [4]

$$\varepsilon_i = \left| \frac{(y_{model,i} - y_{opuginal,i})}{y_{opuginal,i}} \right| * 100\%,$$

де ε_i – похибка моделі i -го вихідного вихідного параметра, $y_{model,i}$ – значення i-го вихідного вихідного параметра порахованого з використанням побудованої моделі, а $y_{opuginal,i}$ – значення i-го вихідного вихідного параметра порахованого з використанням об'єкту-оригіналу.

При визначенні похибки математичної моделі ε_{model} використовується одна з норм вектора $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$, а саме: $\varepsilon_{model} = \max|\varepsilon_i|$, де $i = \overline{1,n}$, або $\varepsilon_{model} = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + ... + \varepsilon_n^2}$.

Розглянемо, для прикладу, побудовану математичну модель, яка дає змогу визначити чотири вихідних параметрів деякого об'єкта проектування. Значення порахованих вихідних параметрів з використанням розробленої ММ наступні (в безрозмірному вигляді): 10.5, 23.4, 100.1 та 56.7, а значення отримані з допомогою експерименту: 9.3, 25, 112.4 і 49.2.

Визначимо величини відносних похибок для кожного вихідного параметра і загальну похибку побудованої ММ:

$$\varepsilon_1 = \left| \frac{(10.5 - 9.3)}{9.3} \right| * 100\% = 12.9\%, \quad \varepsilon_2 = \left| \frac{(23.4 - 25)}{25} \right| * 100\% = 6.4\%,$$

$$\varepsilon_3 = \left| \frac{(100.1 - 112.4)}{112.4} \right| * 100\% = 10.9\%, \quad \varepsilon_4 = \left| \frac{(56.7 - 49.2)}{49.2} \right| * 100\% = 15.2\%,$$

$$\varepsilon_{model} = \sqrt{12.9^2 + 6.4^2 + 10.9^2 + 15.2^2} = \sqrt{166.41 + 40.96 + 118.81 + 231.04} = \sqrt{557.22} = 23.61\%.$$

Наведений приклад показує, що похибка моделі не може бути меншою за найбільше значення похибки одного з вихідних параметрів математичної моделі.

Необхідно зауважити, що точність моделі залежить від умов функціонування об'єкту-оригіналу в просторі зміни вхідних параметрів. В цьому випадку зручніше оперувати поняттям **області адекватності** моделі, що визначає область в просторі зміни вихідних параметрів, де виконується умова $\varepsilon_{model} < \varepsilon_{\text{граничне}}$ ($\varepsilon_{\textit{граничне}}$ – наперед задане граничне значення похибки ММ).

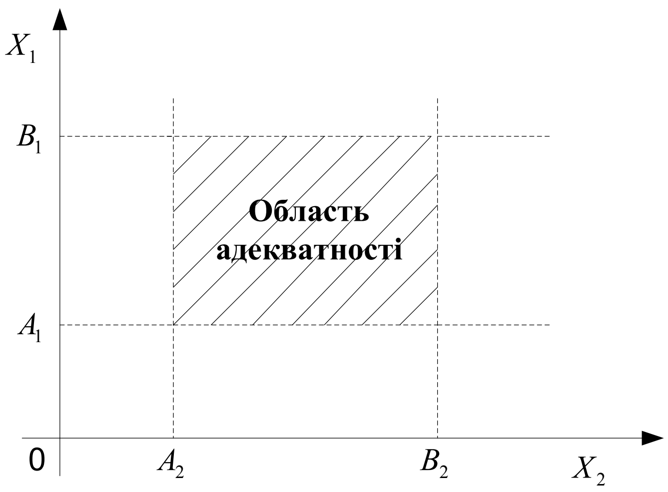

Рис.2.2. Приклад області адекватності моделі

Слід підкреслити відносний характер наведеного поняття адекватності, тобто прив'язку адекватності моделі до характеристик об'єкту дослідження, які прийнято за основні в рамках цього дослідження. Так, наприклад, якщо вивчається реакція об'єкта на зовнішні збурення того чи іншого класу, то модель, адекватна відносно одного класу збурень, може виявитися неадекватною відносно іншого класу збурень. Іншим характерним прикладом може бути класичне рівняння теплопровідності, отримане на основі закону Фур'є. Це рівняння добре описує еволюцію температури, тобто є адекватним у кількісному відношенні. Крім того, з нього випливає ряд наслідків якісного характеру, які також правильно описують реальний процес поширення тепла: збереження кількості тепла, неможливість концентрації та осциляції температури і т.д. Але з іншої сторони, з цього рівняння випливає також фізично абсурдний висновок про нескінченність швидкості поширення тепла. Таким чином, якщо суттєвою характеристикою процесу вважати швидкість поширення тепла (хоча потреба в цьому виникає досить рідко), то класичне рівняння теплопровідності, як модель реального процесу поширення тепла, стає неадекватним не тільки у кількісному, а й у якісному відношеннях. Для того, щоб отримати модель адекватну і за швидкістю поширення тепла, необхідно уточнити закон Фур'є шляхом врахування інерційності молекул.

Упущення того факту, що адекватність математичної моделі завжди відносна і має свої рамки застосування може привести (і, на жаль, не раз приводило) до спроб нав'язати реальному об'єкту властивості його моделі, наприклад, серйозному сприйнятті твердження, що швидкість поширення тепла є дійсно нескінченною. На жаль, у більш складних випадках, неадекватність моделі виявити набагато складніше, тому застосування неадекватної моделі може привести до того, що можна або не виявити, або занадто спотворити те що насправді є, натомість вивчати те, що нам не потрібно і навіть те, чого взагалі не існує. Як правило у таких випадках перевірка адекватності здійснюється на раціональному рівні, іншими словами "на хлопський розум", що, безумовно, вступає у конфлікт з чисто дедуктивним (логічним) рівнем і є предметом гострої критики так званих "чистих" математиків. Перевірка адекватності моделі може слугувати також раціональним обґрунтуванням законності застосування прийнятих гіпотез та припущень.

До певної міри протилежною до вимоги адекватності математичної моделі є вимога її **достатньої простоти** відносно вибраної системи характеристик. Модель є достатньо простою, якщо сучасні засоби дослідження (фізичні, математичні, і зокрема, обчислювальні) дають можливість провести економно, в сенсі затрат праці, але з задовільною точністю кількісний або якісний аналіз вибраних характеристик. Встановлення компромісу між вимогами адекватності та простоти моделі знаходиться на рубежі науки та мистецтва, і в значній мірі залежить від досвіду дослідника. Загальна тенденція полягає в тому, що чим більш адекватною є модель, тим менш простою вона є, хоча досить часто ускладнення моделі може погіршити її адекватність. Іншими словами, спрощення моделі, як правило, знижує її адекватність, хоча є й приклади, коли при спрощенні моделі її адекватність зростає. Можливі також випадки, коли при однаковому ступені простоти вдається побудувати більш адекватну модель, і навпаки, при тій же адекватності – більш просту модель.

Суттєвий вплив на адекватність, і відповідно, на простоту моделі має проблема правильного вибору системи незалежних величин, які достатньо повно характеризують стан об'єкту, який моделюється. Такі величини називаються **характеристиками стану,** або **визначальними параметрами**. Логічно припустити, що збільшення кількості визначальних параметрів покращує адекватність моделі. Однак при занадто великій кількості цих параметрів модель може виявитися занадто складною і її дослідження буде дуже ускладнено. З іншого боку, зменшення визначальних параметрів може привести до втрати адекватності моделі.

Важливими параметрами математичних моделей окрім адекватності є **універсальність** та **економічність**. **Універсальність** *визначається кількістю та складом врахованих в моделі зовнішніх і вихідних параметрів*, а **економічність** *характеризується затратами вичислювальних ресурсів для її реалізації*. Як правило, на практиці, економічність визначається затратами машинного часу та об’ємом необхідної пам’яті (оперативної та пам’яті на зовнішніх носіях).

Досить часто, в процесі моделювання, оперують поняттям **достовірності** результатів моделювання, аналізу тощо. Отже **достовірність** – форма існування (встановлення) істини, яка обгрунтована кількісним способом (наприклад, експериментом, логічним доведенням тощо) для суб’єкта, який пізнає. Процедура оцінки достовірності результатів моделювання називається аналізом адекватності (відповідності) моделі до модельованого об’єкта, системи чи процесу.

2.4. Основні параметри методів та алгоритмів

Основними параметрами методів є **похибка** (точність), **економічність**, **універсальність**, **надійність** та ін.

При переході від математичної моделі до чисельного методу виникають похибки, які називають **похибками методу.** Вони пов’язані з тим, що будь-який чисельний метод відтворює математичну модель наближено. Найбільш типовими похибками метода є **похибка дискретизації і похибки заокруглення**.

Як правило застосування чисельного методу для заданої математичної моделі розбивається на два етапи: формулювання дискретної задачі; розробка вичислювального алгоритму, який дасть змогу знайти рішення дискретної задачі.

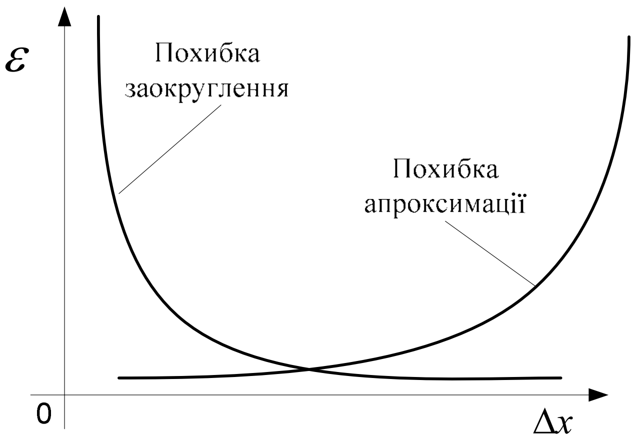

Рис.2.3. Залежності похибок методу від величини кроку дискретизації

Наприклад, якщо початкова математична задача сформульована в вигляді системи диференціальних рівнянь, то для чисельного рішення необхідно замінити її системою досить великої кількості лінійних алгебричних рівнянь. Це відбувається в результаті заміни неперервної області незалежної змінної кінцевою множиною дискретних точок, в яких знаходять рішення. В цьому випадку говорять, що проведена дискретизація початкової математичної задачі. Найпростішим прикладом дискретизації є побудова різницевої схеми шляхом заміни диференціальних виразів скінченорізницевими аналогами. Зрозуміло, що рішення дискретизованої задачі відрізняється від рішення початкової задачі. Різниця відповідних рішень і називається похибкою дискретизації.

Дискретизована модель являє собою систему великої розмірності алгебраїчних рівнянь. Неможливо знайти рішення такої системи точно в явному вигляді. Тому доводиться використовувати той чи інший чисельний алгоритм рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Вхідні дані цієї системи, а саме, коефіцієнти і праві частини задаються в ПК не точно, а з заокругленням. В процесі роботи алгоритму похибки заокруглення, як правило, накопичується, і в результаті рішення, отримане на ПК, буде відрізнятися від точного рішення дискретизованої задачі. Кінцева похибка називається похибкою заокруглення (чи вичислювальною похибкою).

Таким чином, слід розрізняти похибки моделі і методу, реалізуючого дану математичну модель, і при виборі методу (алгоритму) враховувати питання похибки.

Наступним важливим параметром методів є їх **економічність**. По аналогії з параметром економічності моделей – це є затрати ресурсу персонального компютера (оперативна память та час центрального процесора).

Універсальність методів (алгоритмів) характеризується областю їх застосування. Тобто, чим більша множина задач, які можна розв'язувати з використанням даного методу, тим метод є більш універсальним.

Досить часто важко сформулювати обмеження на застосування того чи іншого методу. Відповідно, можливі ситуації, коли попередньо визначені вимоги застосування методу виконуються, однак задовільне рішення отримати неможливо. Тому, ймовірність вдалого застосування методу менша за одиницю. Отже під **надійністю** методу (алгоритму) будемо розуміни ймовірність P правильного отримання результату розв'язання задачі.

В САПР необхідно використовувати надійні методи та алгоритми. Для підвищення надійності методів, досить часто, використовують поєднання різних методів, різного роду настройку методів тощо. Все це робиться для того, щоб добитися значення параметра надійності рівного одиницю чи, хоча б, близького до неї.

Одній і тій же математичній задачі можна поставити у відповідність множину різних дискретних моделей, однак не всі із них придатні для практичної реалізації. Вичислювальні алгоритми, призначені для ПК, повинні задовольняти ряду вимог. Можна виділити дві групи вимог. Перша група пов'язана з адекватністю дискретної моделі вихідної математичної задачі, друга - з реалізацією чисельного методу на ПК.

До першої групи відносяться такі вимоги, як сходимість чисельного методу, виконання дискретних аналогів законів збереження, кількісно правильна поведінка рішення початкової задачі. Пояснимо сказане. Припустимо, що дискретною моделлю задачі є різницева схема, і при заміні диференціальних виразів скінченними різницями отримують велику кількість алгебричних рівнянь. Чим точніше ми хочемо отримати рішення, тим потрібно обрати менший крок сітки, чи параметр дискретизації (x), і тим більшу кількість рівнянь доведеться вирішувати. Говорять, що чисельний метод сходиться, якщо при необмеженому збільшенні кількості рівнянь рішення дискретизованої задачі прагне до точного рішення початкової задачі. Далі, відомо, що диференціальні рівняння математичної фізики є наслідком законів збереження. Тому природно вимагати, щоб для різницевої схеми виконувались аналоги таких законів збереження. Різницеві схеми, які задовольняють цьому методу, називаються консервативними.

Друга група вимог до чисельних методів пов'язана з об'ємом оперативної пам'яті ПК, з можливістю отримати рішення відповідної системи рівнянь за прийнятний час, з стійкістю алгоритму. Алгоритм називається **стійким**, якщо в процесі рішення ріст вичислювальних похибок обмежений зверху, і **нестійким**, якщо похибки зростають необмежено. Існують такі алгоритми, які стійкі при виконанні граничних умов для параметрів дискретної моделі. Такі алгоритми називаються **умовно-стійкими**. Ясно, що використовувати слід стійкі чи умовно стійкі алгоритми.

2.5. Основні етапи математичного моделювання

Враховуючи вище сказане, **математичне моделювання**, у широкому значенні цього терміну, можна трактувати як процес побудови та дослідження математичної моделі з метою фіксації та вивчення певних властивостей та відношень оригіналу, а також перенесення отриманих результатів на оригінал за допомогою математичних методів. У літературі досить часто термін “математичне моделювання” використовується також і у вузькому значенні. У цьому випадку під математичним моделюванням розуміють лише або метод побудови моделі, або метод її дослідження.

В загальному випадку в процесі підготовки та проведення математичного моделювання виділяють такі етапи:

1. абстрагування: зосередження на властивостях, які є загальними для багатьох об'єктів та явищ матеріального світу та нехтування відмінностями існуючими між ними;

2. формулювання: вибір деякої множини засобів (символів, графічних образів тощо) для зображення абстрактних понять;

3. маніпуляція: правила перетворення символьного представлення як засіб передбачення результату аналогічних маніпуляцій в реальному світі;

4. аналіз: реальна інтерпритація отриманих математичних результатів з метою їх імплементації;

5. аксіоматизація: строге формулювання тих властивостей, які були виведені з реального світу і які є загальними при маніпуляціях як в матеріальному світі, так і над абстрактними символами, що представляють реальний світ.

Перший та частково другий етапи відносяться до процесу формалізації задачі, другий та третій – власне до процесу моделювання задачі, тобто до формування моделей, їх перетворення та аналізу, п’ятий – до обґрунтування методів моделювання і підготовки основи для їх подальшого розвитку. На останніх етапах робиться спроба сконцентрувати основні фактичні відомості про об’єкти, які охоплюються цими абстрактними поняттями, в декількох коротких, але потужних аксіомах і потім строго довести, що висновки, отримані в результаті маніпуляцій з цими абстрактними представленнями є справедливими і для прообразів реального світу. Ці етапи тісно взаємопов’язані між собою, і тому їх виділення є до певної мірі відносним. Так, математична модель зазвичай будується з орієнтацією на певний метод дослідження цієї моделі. З іншого боку, в процесі проведення математичного дослідження або інтерпретації розв’язку може виникнути потреба уточнити або навіть суттєво змінити математичну модель.

Процесу математичного моделювання дуже часто передує етап формалізації задачі, під яким розуміють процес переходу від опису об’єкта в термінах його конкретних властивостей до опису в термінах абстрактних змінних стану та незалежних змінних при визначеній меті дослідження і переліку обмежень. Можна виділити такі етапи процесу формалізації задачі:

1. вибір характеристик стану об’єкта, які будуть досліджуватися;
2. кожній характеристиці стану ставиться у відповідність абстрактний об’єкт, який називається змінною;
3. визначення всієї множини значень змінних;
4. введення припущень та гіпотез на основі яких визначається кількість незалежних змінних у ролі яких виступають просторові координати та/або час;
5. визначення відношень, обмежень та зв’язків між змінними.

Кінцевою метою процесу формалізації задачі є підготовка умов для формального запису математичної моделі, а сам запис моделі, який полягає у використанні засобів математичної мови для позначення виявлених на останньому етапі відношень, обмежень та зв'язків, відноситься вже до першого етапу математичного моделювання. Звичайно, часто ці два процеси - формалізація та моделювання можуть тісно переплітатися.

2.6. Поняття про обчислювальний експеримент

На сучасному етапі розвитку науки і техніки роль математичного моделювання значно зросла у зв'язку з інтенсивним застосуванням комп'ютерної техніки. Сьогодні важко уявити собі проведення фундаментальних чи прикладних наукових досліджень без поєднання математичного моделювання та комп'ютера. В науковій літературі для підкреслення важливості та ефективності такого поєднання введено навіть окремий термін – **обчислювальний експеримент**, під яким розуміють дослідження властивостей об'єкту або явища шляхом розв'язування за допомогою комп'ютерної техніки задачі, яка являє собою ММ цього явища чи об'єкта. Багаторазове проведення розрахунку моделі для різних наборів вхідних даних дає змогу дослідити роль та вплив різних факторів на протікання того чи іншого процесу або поведінку об'єкту. Обчислювальний експеримент дає змогу правильно планувати та проводити натурний (фізичний) експеримент, а правильне використання його результатів дає змогу суттєво скоротити терміни проектно-конструкторських робіт, знизити затрати матеріалів та енергоресурсів, а також виявити нові теоретичні та технічні якості досліджуваного процесу. Успішна реалізація обчислювального експерименту обумовлена тісним взаємозв'язком трьох факторів: потужної комп'ютерної техніки, на якій здійснюється чисельний експеримент, адекватних математичних моделей досліджуваних процесів та чисельних методів їх аналізу. Наявність сучасних програмних систем автоматизації проведення математичних розрахунків таких, як MATHCAD, MATLAB, які частково або повністю реалізують багато чисельних методів, і, що найголовніше, містять програмні засоби реалізації нових та нестандартних схем чисельних методів, ще більше підвищують роль та важливість обчислювального експерименту в проведенні фундаментальних наукових досліджень та в системах автоматизації проектувальних робіт, а також значно спрощують його реалізацію. Серед чисельних методів комп'ютерної реалізації обчислювального експерименту найефективнішими є метод скінчених різниць, метод скінчених елементів та метод граничних елементів [5-13].

2.7. Алгоритм побудови математичної моделі

В загальному випадку процес побудови математичної моделі включає такі кроки:

1. **Вибір властивостей, які необхідно відобразити в моделі.** Цей вибір базується на аналізі можливих застосувань моделі й визначає степінь універсальності моделі.

2. **Збір початкової інформації про вибрані властивості об'єкта.** Джерелами відомостей можуть бути досвід та знання інженера, який розробляє модель, науково-технічна література, перш за все довідкова, опис прототипів – відомих ММ для елементів, близьких за властивостями до дослідного об'єкта, результати дослідного вимірювання параметрів тощо.

3. **Синтез структури математичної моделі.** Структура ММ – загальний вид математичних співвідношень моделі без конкретизації числових значень параметрів. Структура ММ також може бути представлена в графічній формі, для прикладу в формі еквівалентної схеми чи графа. Синтез структури ММ – найбільш відповідальна, трудомістка і найважче формалізовувана операція.

4. **Розрахунок числових значень параметрів ММ**. Ця задача ставиться як задача оптимізації похибки моделі даної структури.

5. **Оцінка точності та адекватності ММ**. При отриманні математичної моделі кроки 2 – 5 методики можуть виконуватися багаторазово в процесі послідовних наближень до бажаного результату.

2.8. Поняття методології та технології моделювання (проектування)

Вирішення складних проблем моделювання чи проектування потребує використання цілої групи прийомів, підходів, алгоритмів і методів. Більше того, йде мова про використання групи вже встановлених методів, їх послідовність застосування до розв'язання певної задачі чи вирішення проблеми і оперують, в цьому випадку, терміном методологія. Отже, **методологія** – [21] встановлене коло використовуваних методів (на цей час вже опробованих при розв'язанні певної задачі чи проблеми) для виконання яких-небудь складних дій. Досить часто це слово використовують в складі інших термінів таких як "методологія проектування на системному рівні", "методологія моделювання", "методологія програмування", "загальна методологія автоматизованого проектування", яка, згідно роботи [3], включає в себе всі аспекти процесу автоматизованого проектування від формулювання проблеми до документування результатів.

У випадку дослідження та пошуку методів, прийомів і алгоритмів та визначення послідовності їх застосування до розв’язання нової задачі чи проблеми, то говорять про **стратегію** моделювання (проектування). Основною характеристикою цього етапу є те, що наперед невідомо результат застосування підходів, алгоритмів і методів. Він може бути як позитивний для розробника (тобто, отримано розв’язання задачі з задаю точністю тощо), так і – негативний (не використовувати цей метод до розв’язання цієї задачі).

Під **технологією** моделювання (проектування) [3] будемо розуміти опробовану послідовність дій чи операцій, що дає змогу технічно виконати моделювання (проектування) заданого об’єкта. Необхідно зауважити, що технологія є опробованою стратегією, яка позбавлена елементів пошуку та невизначеності на ключових етапах процесу моделювання (проектування).

2.9. Контрольні запитання

1. Які види опису ММ Ви знаєте?
2. Які ММ є детермінованими?
3. Які ММ є стохастичними?
4. Які ММ є нелінійними?
5. Які ММ є дискретними?
6. Які ММ є нестаціонарними?
7. Яка ММ називається функціональною, а яка - структурною?
8. Яка різниця між мікро- та макромоделями?
9. Які форми представлення ММ Ви знаєте?
10. Які основні вимоги до ММ Ви знаєте?
11. За якою формулою визначається похибка ММ?
12. Що Ви розумієте під адекватністю ММ?
13. Які основні вимоги до методів та алгоритмів Ви знаєте?
14. Яку має залежність похибка заокруглення від величини кроку дискретизації?
15. Що Ви розумієте під універсальністю методу?
16. Що Ви розумієте під надійністю методу?
17. Що Ви розумієте під терміном “вичислювальний експеримент”?
18. Які основні кроки побудови математичної моделі Ви знаєте?
19. Яка особливість алгоритмічної форми представлення математичних моделей?
20. Яка особливість схемної форми представлення математичних моделей?

Розділ 3
ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЙ ПОДІБНОСТІ ТА РОЗМІРНОСТІ

3.1. Роль теорії подібності в моделюванні

Теорія подібності [17 - 20] служить теоретичною базою моделювання, вона відіграє роль зв'язуючого елементу між теорією та експериментом. Теорія подібності дає можливість встановити наявність подібності між моделлю та оригіналом або розробити спосіб отримання цієї подібності. *Подібність* – це взаємно-однозначна відповідність між двома об’єктами, коли відомі функції переходу від параметрів одного об’єкту до параметрів іншого, а математичні описи цих об’єктів можуть бути зроблені тотожними. Теорія подібності вказує також як потрібно поставити експеримент з моделлю, і як узагальнити та перенести отримані результати на об’єкт дослідження. Теорія подібності формулює властивості подібних систем, стверджуючи, що подібні явища мають однакові критерії подібності. Критерії подібності є безрозмірними комплексами величин, які характеризують середню міру відношення інтенсивності фізичних ефектів, суттєвих для досліджуваного процесу. Критерії подібності можна встановлювати або з умов тотожності рівнянь, які описують досліджувані явища, або з аналізу розмірностей.

3.2. Одиниці вимірювання

Виміряти деяку величину Q означає порівняти її з іншою величиною q тієї ж фізичної природи, тобто визначити у скільки раз Q більше (менше) q. З метою уникнення неоднозначності прийнято (в масштабах країни або цілого світу) певне значення величини q, яке називається одиницею вимірювання. Так, для прикладу, за одиницю довжини (метр) прийнято довжину 1 650 763,33 хвиль випромінювання атому криптону. Об’єднання одиниць вимірювання різних фізичних величин на основі відсутності протиріч утворює систему одиниць. Найбільш поширеною є Міжнародна система одиниць СІ. В СІ довільно вибрано одиниці вимірювання так званих первинних величин – маси (кг), довжини (м), часу (с), сили струму (а), температури (к) , сила світла (кандела) та кількості речовини (моль). Вони називаються основними одиницями. Одиниці вимірювання інших вторинних величин є похідними, вони виражаються через основні одиниці. Формула, яка вказує залежність похідних одиниць від основних називається розмірністю величини. Розмірність вторинної величини знаходиться за допомогою визначального рівняння, яке є визначенням цієї величини в математичній формі. Розмірність величини вказується за допомогою взятого в квадратні дужки символу цієї величини. Наприклад, визначальним рівнянням для швидкості є:

$$v = \frac{dl}{dt}.$$

Тоді

$$[v] = [L] \cdot [T]^{-1},$$

де $[L]$, $[T]$ – розмірності довжини і часу, відповідно, або $[v] = м/с$.

Визначальним рівнянням для сили є другий закон Ньютона :

$$F = ma.$$

Тоді

$$[F] = [M] \cdot [L] \cdot [T]^{-2} = \frac{кг \cdot м}{с^2}.$$

Лема. Розмірність будь-якої величини може бути виражена як добуток степенів розмірностей первинних величин.

Наприклад, в механічних системах, розмірність довільної величини Q може бути виражена наступним чином:

$$[Q] = [M]^{\mu} [L]^{\lambda} [T]^{\tau},$$

де $[M]$, $[L]$, $[T]$ –розмірності маси, довжини та часу, відповідно.

Слід зауважити, що величини різної природи можуть мати однакові розмірності, наприклад, момент сили та робота, а також, що зміна одиниці вимірювання деякої фізичної величини приводить до відповідної зміни числового значення цієї величини.

3.3. Перехід від однієї системи одиниць до іншої

Не зменшуючи загальності будемо розглядати лише механічні системи з трьома основними одиницями вимірювання $[M]$, $[L]$, $[T]$. Чи можна вибрати в ролі первинних величин які-небудь три інші величини U_1, U_2, U_3? Очевидно, що це можна зробити тоді, коли:

1) розмірності $[U_1]$, $[U_2]$, $[U_3]$ є незалежними функціями від $[M]$, $[L]$, $[T]$, тобто $[U_1] \neq [U_2]^{\alpha} \cdot [U_3]^{\beta}$ для $\forall \alpha, \beta$;

2) можливе однозначне зворотне перетворення, тобто $[M]$, $[L]$, $[T]$ можна єдиним чином виразити через $[U_1]$, $[U_2]$, $[U_3]$.

Вияснимо, при якій умові обидві вимоги виконуються. Нехай

$$[U_1]=[M]^{\mu_1}[L]^{\lambda_1}[T]^{\tau_1},\ [U_2]=[M]^{\mu_2}[L]^{\lambda_2}[T]^{\tau_2},\ [U_3]=[M]^{\mu_3}[L]^{\lambda_3}[T]^{\tau_3}.$$

Прологарифмуємо

$$\begin{cases}\lg[U_1]=\mu_1\lg[M]+\lambda_1\lg[L]+\tau_1\lg[T]\\ \lg[U_2]=\mu_2\lg[M]+\lambda_2\lg[L]+\tau_2\lg[T].\\ \lg[U_3]=\mu_3\lg[M]+\lambda_3\lg[L]+\tau_3\lg[T]\end{cases} \qquad (3.1)$$

Система (3.1) має єдиний розв'язок, якщо:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\mu_1 & \lambda_1 & \tau_1\\ \mu_2 & \lambda_2 & \tau_2\\ \mu_3 & \lambda_3 & \tau_3\end{vmatrix}\neq 0. \qquad (3.2)$$

Умова (3.2) означає, що $[M]$, $[L]$, $[T]$ однозначно виражаються через $[U_1]$, $[U_2]$, $[U_3]$.

Ця ж умова вказує також на незалежність $[U_1]$, $[U_2]$, $[U_3]$ Дійсно, якщо б виконувалась рівність $[U_1]=[U_2]^{\alpha}[U_3]^{\beta}$, звідки $\mathbf{lg}[U_1]=\alpha\cdot\mathbf{lg}[U_2]+\beta\cdot\mathbf{lg}[U_3]$, то тоді $\mu_1=\alpha\mu_2+\beta\mu_3$, $\lambda_1=\alpha\lambda_2+\beta\lambda_3$, $\tau_1=\alpha\tau_2+\beta\tau_3$, а це означає, що перша стрічка є лінійною комбінацією другої та третьої (тобто визначник рівний нулю), що суперечить умові (3.2).

Отже, умовою можливості вибору в ролі основних одиниць $[U_1]$, $[U_2]$, $[U_3]$ є умова (3.1).

Приклад, первинними величинами можуть бути сила, час і довжина, оскільки

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0.$$

Не можуть бути: сила, швидкість та потужність.

3.4. Кількість основних одиниць вимірювання

Кількість основних одиниць вимірювання є в якійсь мірі довільна. Розглянемо механічну систему з її трьома основними одиницями $[M]$, $[L]$, $[T]$. Спробуємо збільшити кількість основних одиниць. Приймемо, для прикладу, силу також за первинну величину з довільно вибраною одиницею вимірювання $[F]=b$. Тоді другий закон Ньютона, який є визначальним рівнянням для сили, слід записати у вигляді:

$$F=k_1 ma,$$

де k_1 – деякий розмірний коефіцієнт, $[k_1] = \dfrac{[F]}{[m]\cdot[a]}$.

Аналогічно, первинною величиною можна вважати й роботу: Нехай $[A] = c$, тоді

$$A = k_2 F \cdot l\,,\quad [k_2] = [A]\cdot[F]^{-1}\cdot[L]^{-1}.$$

Як слідує з вищенаведеного, основних одиниць може бути довільна кількість, причому з додаванням кожної одиниці потрібно вводити відповідний розмірний коефіцієнт.

Тепер навпаки, зменшимо кількість основних одиниць до двох. Нехай це буде $[L]$, $[T]$. Це означає, що потрібно отримати визначальне рівняння для маси. Ним може бути закон всесвітнього тяжіння, якщо прийняти гравітаційну сталу рівною одиниці:

$$F = \frac{M\cdot m}{r^2} \Rightarrow m\cdot a = \frac{M\cdot m}{r^2} \;\Rightarrow\; M = a\cdot r^2$$

або

$$[M] = [L]^3\cdot[T]^{-2}.$$

Це означає, що за одиницю маси приймається маса тіла, яка надає іншому тілу на відстані 1 *м*, прискорення в 1 $м/c^2$. Це є дуже велика одиниця, яка на практиці є дуже незручною. Аналогічним чином з числа основних одиниць можна виключити $[L]$. Можна довести, що якщо сталу Планка прийняти рівною одиниці, то $[L] = [T]^{3/5}$. Виключити останню первинну величину, час, можна прийнявши якийсь розмірний коефіцієнт, наприклад, швидкість світла у вакуумі, рівним одиниці. Однак, такі системи одиниць є вкрай незручними для практичного користування і тому поширення не отримали. Отже, з додаванням (відкиданням) нової основної одиниці додається (відкидається) деякий розмірний коефіцієнт.

3.5. Поняття про критерії подібності. Кількість лінійно незалежних критеріїв подібності

В теорії подібності велике значення мають безрозмірні комплекси величин, які є добутком різних степенів цих величин. Їх називають **критеріями подібності** і позначають Π. Критерії подібності використовуються як параметри, так і змінні досліджуваної системи. Скільки незалежних між собою критеріїв можна утворити з n розмірних величин? Незалежність s величин Π_i означає, що

$$\forall\, i : \Pi_i \neq f(\Pi_1,\ldots,\Pi_{i-1},\Pi_{i+1},\ldots\Pi_s).$$

Будемо розглядати електромеханічні системи з їх основними одиницями $[M]$, $[L]$, $[T]$, $[I]$. Нехай задано n величин p_i, $i = \overline{1,n}$. Тоді

$$\forall\, i: [P_i] = [L]^{\lambda_i} \cdot [M]^{\mu_i} \cdot [T]^{\tau_i} \cdot [I]^{j_i},\ 1,\ldots,n.$$

Будь-який критерій подібності – це деяка комбінація величин $p_1,\ldots,p_n$:

$$\Pi = p_1^{z_1} \cdot p_2^{z_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{z_n} = c[P_1]^{z_1} \cdot [P_2]^{z_2} \cdot \ldots \cdot [P_n]^{z_n} =$$

$$= c([L]^{\lambda_1} \cdot [M]^{\mu_1} \cdot [T]^{\tau_1} \cdot [I]^{j_1})^{z_1} \cdot ([L]^{\lambda_2} \cdot [M]^{\mu_2} \cdot [T]^{\tau_2} \cdot [I]^{j_2})^{z_2} \cdot \ldots \cdot ([L]^{\lambda_n} \cdot [M]^{\mu_n} \cdot [T]^{\tau_n} \cdot [I]^{j_n})^{z_n} =$$

$$= c \cdot [L]^{\lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_n z_n} \cdot [M]^{\mu_1 z_1 + \ldots + \mu_n z_n} \cdot [T]^{\tau_1 z_1 + \ldots + \tau_n z_n} \cdot [I]^{j_1 z_1 + \ldots + j_n z_n}.$$

Оскільки критерії подібності – величини нульової розмірності, то всі степені повинні бути рівні нулю, тобто:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_n z_n &= 0 \\ \mu_1 z_1 + \cdots + \mu_n z_n &= 0 \\ \tau_1 z_1 + \cdots + \tau_n z_n &= 0 \\ j_1 z_1 + \cdots + j_n z_n &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{3.1}$$

Таким чином, отримано систему з 4-х рівнянь, які містять n невідомих $z_1,\ldots,z_n$. Як відомо, така система має $n - r$ лінійно незалежних розв’язків, де r - ранг матриці системи (5.1). Кожний розв'язок дає змогу отримати один критерій подібності

$$\Pi_i = p_1^{z_1^i} \cdot p_2^{z_2^i} \cdot \ldots \cdot p_n^{z_n^i},\ \ i = 1,\ldots n - r. \tag{3.2}$$

Ці $n - r$ незалежних критеріїв називають фундаментальними. Будь-який інший розв’язок системи (3.1) буде лінійно залежним та буде породжувати відповідний критерій подібності, який також буде залежним від фундаментальних критеріїв (3.2).

Отже, з заданих n величин можна побудувати $n - r$ незалежних критеріїв подібності, де r - ранг матриці системи (3.1). Причому ранг матриці не може бути більшим від кількості основних одиниць. Загальне правило визначення рангу r можна сформулювати так: якщо серед заданих n величин вибрано m первинних з незалежними розмірностями, то $r = m$, у протилежному випадку $r < m$. Кількість незалежних критеріїв подібності можна зменшити шляхом збільшення числа основних одиниць вимірювання, але лише при умові, розмірний коефіцієнт, що з’являється при цьому, не входить в рівняння, що описують систему.

3.6. Поняття подібності

Конкретизуємо зміст понять, які розглядалися раніше в широкому змісті. Під системою будемо розуміти сукупність фізичних об’єктів (елементів системи), об'єднаних на основі деякої ознаки, що надає системі певні властивості. Будемо мати на увазі такі системи, стан яких є однозначною функцією станів окремих її елементів. Параметрами системи називатимемо величини, які характеризують її елементи і впливаючі на систему зовнішні фактори. Параметри дають змогу індивідуалізувати конкретний об'єкт з множини інших об'єктів тієї ж фізичної природи. Узагальненими координатами системи називають величини, які описують поведінку системи. Їх кількість рівна числу ступенів свободи системи.

З множини параметрів виділяємо мінімально можливу кількість параметрів, яких достатньо для однозначного визначення стану системи. Ці параметри є незалежними між собою і називаються основними (визначальними). Розглянемо дві системи однакової фізичної природи, які складаються з однакової кількості елементів, причому відповідні елементи в цих системах відіграють однакову роль. Одну систему назвемо модель, а іншу – оригінал. Кожна система визначається s основними параметрами p_k та має n незалежних узагальнених координат q_i. Узагальнені координати цих систем мають однакову функціональну залежність від параметрів:

$$q_{Mi} = f_i\left(p_{M1,} p_{M2,\ldots} p_{Ms}\right),\ q_{Hi} = f_i\left(p_{H1,} p_{H2,\ldots} p_{Hs}\right).$$

Дві системи називаються **подібними**, якщо будь-які дві відповідні узагальнені координати для будь-яких схожих моментів часу пропорційні, тобто:

$$q_{Hi}(t_H) = q_{Ci} \cdot q_{Mi}(t_M),$$

де $q_{Ci} = const$ - коефіцієнт подібності, $t_H = t_C \cdot t_M$, $t_C = const$, t_H, t_M - схожі моменти часу.

Таким чином, якщо відомо, що дві системи подібні і можна знайти коефіцієнти подібності q_{Ci}, то знаючи поведінку однієї системи (моделі), можна визначити, як буде вести себе інша (натура).

Розглянемо ряд прикладів застосування теорії подібності. Зокрема, якщо для двох механічних систем, виконуються рівності: $x_{Hi}(t_H) = l_C x_{Mi}(t_M)$, $y_H(t_H) = l_C y_{Mi}(t_M)$, $z_{Hi}(t_H) = l_C z_{Mi}(tM)$, то такі системи будуть кінематично подібні. Окрім того, якщо між точками систем має місце ще й матеріальна подібність, тобто $\dfrac{m_{Hi}}{m_{Mi}} = m_C = const$, то такі системи будуть динамічно подібними. У цьому випадку, дуже легко встановити зв'язок між усіма кінематичними та динамічними характеристиками систем. Так, для швидкості:

$$\frac{(v_x)_{Hi}}{(v_x)_{Mi}}=\frac{\dfrac{dx_{Hi}}{dt_H}}{\dfrac{dx_{Mi}}{dt_M}}=\frac{l_C}{t_C}=v_{xc}\,,\quad \frac{(v_y)_{Hi}}{(v_y)_{Mi}}=\frac{(v_z)_{Hi}}{(v_z)_{Mi}}=v_C\,,$$

для прискорень: $\dfrac{a_{Hi}}{a_{Mi}}=\dfrac{l_C}{t_C^2}=a_C\,,$

для сили: $\dfrac{F_{Hi}}{F_{Mi}}=\dfrac{a_H\cdot m_H}{a_M\cdot m_M}=m_C\cdot a_C=\dfrac{m_C l_C}{t_C^2}=F_C\,,$

для роботи: $\dfrac{A_{Hi}}{A_{Mi}}=\dfrac{m_C l_C^2}{t_C^2}=A_C\,,$

для потужності: $N_C=m_C\dfrac{l_C^2}{t_C^3}\,.$

При наявності динамічної подібності коефіцієнти подібності різних величин виражаються через вихідні коефіцієнти подібності m_C, l_C, t_C за допомогою формул розмірності цих величин.

Досить часто коефіцієнти подібності одних вторинних величин зручно виражати через коефіцієнти подібності інших вторинних величин. Так, наприклад,

$$F_C=\frac{m_C v_C^2}{L_C}\,.$$

Якщо густина відповідних частин обох систем однакова, тобто $\rho_C=1$, то $m_C=l_C^3$ і $F_C=v_C^2 l_C^2$. Якщо системи – дві динамічно подібні машини однакових розмірів (або одна і та ж машина в різних режимах роботи), тобто $\rho_C=1$, $l_C=1$, то $F_C=v_C^2$, тобто прикладені до певних точок машини сили співвідносяться як квадрати швидкостей цих точок машини. Відношення потужностей у цьому випадку $N_C=F_C v_C=v_C^3$, тобто, якщо швидкість машини збільшиться вдвічі, то сили збільшаться у 4 рази, а потужність – у 8 разів.

3.7. Достатні умови подібності

Теорема (про достатні умови подібності):

Достатньою умовою подібності двох систем є рівність будь-яких двох відповідних критеріїв подібності цих систем, складених з їх основних параметрів і початкових умов.

Теорема про достатні умови дає відповідь на питання, що потрібно зробити для того, щоб натура була подібна до моделі? Отже, для цього потрібно:

1) вибрати s основних параметрів, включаючи початкові (граничні) умови та час (при необхідності) і скласти з них $s-r$ незалежних критеріїв подібності. Ці критерії називаються визначальними.

2) вибрати параметри натури так, щоб її критерії подібності були такі ж, як і у моделі:

$$\Pi_k^M = \Pi_k^H, \ k = 1, \dots, s-r \tag{3.3}$$

Умову (3.3) прийнято виражати наступним чином: $\Pi_k = idem$. Тоді числові значення величин натури можна отримати шляхом вимірювання відповідних величин моделі в системі одиниць $[mM], [lL], [tT]$, де $[L], [M], [T]$ - одиниці вимірювання первинних величин моделі, m, l, t - коефіцієнти подібності для цих величин. Причому, при виборі на основі моделі значень для величини натури, довільні значення можна задавати лише для r величин натури.

Слід зауважити, також, що коефіцієнти подібності величин виражаються через коефіцієнти подібності первинних величин за допомогою формул розмірності, а за первинні величини не обов’язково вибирати постійні параметри, потрібно лише, щоб відношення цих величин у моделі та натури були постійними.

Достатні умови подібності накладають певні обмеження на параметри систем, обумовлюючи цим їх подібність.

3.8. Необхідні умови подібності

Припустимо, тепер, що дві системи подібні. Який зв’язок існує в цьому випадку між критеріями подібності цих систем, тобто які необхідні умови подібності?

Теорема (про необхідні умови подібності):

Для систем з взаємно-однозначною відповідністю між параметрами та узагальненими координатами, необхідною умовою подібності є рівність відповідних критеріїв подібності, складених з узагальнених координат та параметрів.

Якщо взаємно-однозначна відповідність між параметрами та узагальненими координатами відсутня, то в загальному випадку, не всі критерії подібності моделі та натури будуть рівними. Необхідні умови подібності дають змогу встановити зв'язок між параметрами та узагальненими координатами подібних систем.

Ті критерії подібності, які беруть участь у встановленні достатніх умов подібності складаються лише з параметрів системи, замість узагальнених координат використовуються їх початкові (граничні) значення, а замість часу – величину тієї ж розмірності, яка містить початкові значення швидкості. У необхідних умовах подібності беруть участь всі можливі критерії подібності, оскільки за умови рівності визначальних критеріїв подібності моделі та натури, будуть рівними й усі інші критерії подібності, які є функціонально залежними від визначальних.

3.9. Π - теорема

Функціональна залежність між величинами, які характеризують досліджуваний процес може бути представлена у вигляді залежності між критеріями подібності, складених з цих величин.

Ця теорема доводить принципову можливість приведення рівнянь до критеріального вигляду. Π-теорема дає важливий висновок: використовуючи безрозмірні комплекси величин, отримані результати експериментальних досліджень можна поширити на всі подібні процеси. Крім того, кількість величин, для яких потрібно встановити функціональні залежності зменшується. Дійсно, замість $n+s$ величин маємо $n+s-r$ безрозмірних критеріїв подібності, для виявлення функціональної залежності між якими потрібно провести порівняно невелику кількість вимірювань.

3.10. Методи та приклади їх використання

Розглянемо вантаж маси m, який коливається на пружині жорсткості c у в'язкому середовищі з коефіцієнтом в'язкості k під дією періодичної сили амплітуди F_0 і частоти ω. Параметрами системи є: m, c, k, F_0, ω. Узагальнена координата – переміщення вантажу y, яка є функцією параметрів та часу:

$$y = f(m, c, k, F_0, \omega, t).$$

Перший спосіб отримання критеріїв подібності базується на формулі (3.2). У нашому випадку можна прийняти: $p_1 = m$, $p_2 = c$, $p_3 = y$, $p_4 = t$, $p_5 = F_0$, $p_6 = \omega$, $p_7 = k$. Тоді розмірність кожної величини p_i можна виразити наступним чином

$$[p_i] = [L]^{\lambda_i} \cdot [M]^{\mu_i} \cdot [T]^{\tau_i}.$$

Зведемо показники степенів λ_i, μ_i, τ_i для кожної величини p_i в таблицю.

Таблиця.

Величина	Показники степенів		
	$[L]$	$[M]$	$[T]$
p_1	$\lambda_1 = 0$	$\mu_1 = 1$	$\tau_1 = 0$
p_2	$\lambda_2 = 0$	$\mu_2 = 1$	$\tau_2 = -2$
p_3	$\lambda_3 = 1$	$\mu_3 = 0$	$\tau_3 = 0$
p_4	$\lambda_4 = 0$	$\mu_4 = 0$	$\tau_4 = 1$
p_5	$\lambda_5 = 1$	$\mu_5 = 1$	$\tau_5 = -2$
p_6	$\lambda_6 = 0$	$\mu_6 = 0$	$\tau_6 = -1$
p_7	$\lambda_7 = 0$	$\mu_7 = 1$	$\tau_7 = -1$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (3.1) матиме вигляд

$$\left.\begin{array}{l} z_3 + z_5 = 0 \\ z_1 + z_2 + z_5 + z_7 = 0 \\ -2z_2 + z_4 - 2z_5 - z_6 - z_7 = 0 \end{array}\right\} \qquad (3.4)$$

Ранг матриці r системи (3.4) рівний трьом, кількість невідомих величин $n = 7$, тому система (3.4) має $n - r = 4$ лінійно незалежних розв'язків. Це означає, що для знаходження цих розв'язків значення чотирьох величин z_i вибираються довільно, а решта величин z_i шукаються з системи (3.4).

Нехай $z_1 = 1$, $z_2 = z_6 = z_7 = 0$. Тоді з системи (3.4) будемо мати, що $z_5 = -1$, $z_3 = 1$, $z_4 = -2$. На основі формули (3.2) отримаємо перший критерій подібності механічної коливальної системи:

$$\Pi_1 = p_1^{z_1} p_2^{z_2} p_3^{z_3} p_4^{z_4} p_5^{z_5} p_6^{z_6} p_7^{z_7} = p_1 p_3 p_4^{-2} p_5^{-1} = mxt^{-2} F_0^{-1} = \frac{mx}{t^2 F_0}.$$

Для отримання другого критерію подібності приймемо $z_2 = 1$, $z_1 = z_6 = z_7 = 0$. Тоді $z_5 = -1$, $z_3 = 1$, $z_4 = 0$ і критерій подібності буде мати вигляд $\Pi_2 = p_1^{z_1} p_2^{z_2} p_3^{z_3} p_4^{z_4} p_5^{z_5} p_6^{z_6} p_7^{z_7} = p_2 p_3 p_5^{-1} = cxF_0^{-1} = \dfrac{cx}{F_0}$.

Аналогічно, прийнявши, що $z_6 = 1$ і $z_1 = z_2 = z_7 = 0$, отримаємо третій критерій подібності $\Pi_3 = p_1^{z_1} p_2^{z_2} p_3^{z_3} p_4^{z_4} p_5^{z_5} p_6^{z_6} p_7^{z_7} = p_4 p_6 = t\omega$, і, нарешті, приймаючи $z_7 = 1$ і $z_1 = z_2 = z_6 = 0$, будемо мати четвертий критерій подібності

$$\Pi_4 = p_1^{z_1} p_2^{z_2} p_3^{z_3} p_4^{z_4} p_5^{z_5} p_6^{z_6} p_7^{z_7} = p_3 p_4^{-1} p_5^{-1} p_7 = xt^{-1} F_0^{-1} k = \frac{xk}{tF_0}.$$

Вищенаведений метод побудови критеріїв подібності називається **методом визначальних рівнянь**.

Для знаходження критеріїв подібності існує декілька інших методів. Найпростіший випадок - коли задано диференційне рівняння. Для прикладу, маємо двовимірне рівняння теплопровідності $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$.

Використовуючи правило Фур'є, а саме: розмірність усіх членів рівняння однакова і відкидаючи знаки диференціювання розділимо всі члени рівняння на один з його членів, тобто $\Pi_1 = \frac{\alpha_x \frac{T}{x^2}}{\frac{T}{t}}$, $\Pi_2 = \frac{\alpha_y \frac{T}{y^2}}{\frac{T}{t}}$, $\Pi_2 = \frac{\alpha_x \frac{T}{x^2}}{\alpha_y \frac{T}{y^2}}$.

В результаті, після скорочення, отримаємо: $\Pi_1 = \frac{\alpha_x t}{x^2}$, $\Pi_2 = \frac{\alpha_y t}{y^2}$, $\Pi_3 = \frac{x^2}{y^2}$.

Інший шлях знаходження критеріїв подібності - **застосування методу нульових розмірностей**.

$[x_1]$=кг; $[x_2]$=м$^{-1}$; $[x_3]$=м; $[x_4]$=м^{2}кг/сек^2; $[x_5]$=сек; $[x_6]$=сек$^{-1}$.

На першому етапі виберемо три будь-які параметри, для яких визначник $\Delta \neq 0$. Такими параметрами можуть бути x_1, x_2, x_4.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{Кг} & \text{м} & \text{сек} \end{array} \\ \Delta = & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 . \end{array}$$

В даному випадку кількість лінійно-незалежних критеріїв подібності рівна трьом (число величин (6) мінус ранг матриці (3)).

На наступному кроці, згідно достатньої умови подібності, перший критерій подібності визначається таким чином:

$$1)\ \frac{X_3}{[X_1]^{\alpha_{x3}}\ [X_2]^{\beta_{x3}}[X_4]^{\gamma_{x3}}} = \frac{[L]}{[M]^{\alpha_{x3}}[L]^{-\beta_{x3}}([M][L]^2[T]^{-2})^{\gamma_{x3}}} == [L]^{1+\beta_{x3}-2\gamma_{x3}}[M]^{-\alpha_{x3}-\gamma_{x3}}[T]^{\gamma_{x3}} = 1,$$

$\gamma_{x3} = 0,$ звідки $\gamma_{x3} = 0;$

$-\alpha_{x3} - \gamma_{x3} = 0,$ звідки $\alpha_{x3} = 0;$

$1 + \beta_{x3} - 2\gamma_{x3} = 0,$ звідки $\beta_{x_3} = -1$.

Перший критерій подібності запишеться у вигляді $\frac{[X_3]}{[X_1]^0[X_2]^{-1}[X_4]^0} = \Pi_1$.

$$2)\ \frac{[X_5]}{[X_1]^{\alpha_{x5}}\ [X_2]^{\beta_{x5}}[X_4]^{\gamma_{x5}}} = \frac{[T]}{[M]^{\alpha_{x5}}[L]^{-\beta_{x5}}([M][L]^2[T]^{-2})^{\gamma_{x5}}} == [L]^{\beta_{x5}-2\gamma_{x5}}[M]^{-\alpha_{x5}-\gamma_{x5}}[T]^{1+2\gamma_{x5}} = 1,$$

$1+2\gamma_{X_5}=0,$ звідки $\gamma_{x_5}=-0.5;$

$\beta_{5_3}-2\gamma_{x_5}=0,$ звідки $\beta_{x_5}=-1;$

$-\alpha_{x_5}-\gamma_{x_5}=0,$ звідки $\alpha_{x_5}=0.5.$

Тоді другий критерій подібності запишемо у наступній формі:

$$\prod{}_2=\frac{[\mathrm{X}_5]}{[\mathrm{X}_1]^{0.5}[\mathrm{X}_2]^{-1}[\mathrm{X}_4]^{-0.5}}=X_5X_2\sqrt{\frac{X_4}{X_1}}.$$

3) $$\frac{[\mathrm{X}_6]}{[\mathrm{X}_1]^{\alpha_{x6}}[\mathrm{X}_2]^{\beta_{x6}}[\mathrm{X}_4]^{\gamma_{x6}}}=\frac{[T]^{-1}}{[\mathrm{M}]^{\alpha_{x6}}[\mathrm{L}]^{-\beta_{x6}}([\mathrm{M}][\mathrm{L}]^2[\mathrm{T}]^{-2})^{\gamma_{x6}}}==[L]^{\beta_{x6}-2\gamma_{x6}}[M]^{-\alpha_{x6}-\gamma_{x6}}[T]^{2\gamma_{x6}-1}=1,$$

$2\gamma_{X_6}-1=0,$ звідки $\gamma_{x_6}=0.5;$

$\beta_{x_6 6}-2\gamma_{x_6}=0,$ звідки $\beta_{x_6}=1;$

$-\alpha_{x_6}-\gamma_{x_6}=0,$ звідки $\alpha_{x_6}=-0.5.$

В кінцевому випадку вираз для третього критерію подібності має таку форму:

$$\prod{}_3=\frac{[\mathrm{X}_6]}{[\mathrm{X}_1]^{-0.5}[\mathrm{X}_2]^{1}[\mathrm{X}_4]^{0.5}}=\frac{X_6}{X_2}\sqrt{\frac{X_1}{X_4}}.$$

Іншим прикладом застосування теорії подібності для дослідження вихідних параметрів пристроїв в мікромасштабі.

Розглянемо переміщення рідини в трубі діаметром *d*, довжиною *l*, швидкістю *v* з густиною рідини ρ та коефіцієнтом в'язкості μ, і зниження тиску на цій довжині дорівнює ΔP.

Запишемо розмірності названих вище величин в системі СІ:

$d=[L]$, $l=[L]$, $v=[L][T]^{-1}$, $\mu=[M][T]^{-1}[L]^{-1}$, $\rho=[M][T]^{-2}[L]^{-1}$, $\Delta P=[M][T]^{-2}[L]^{-1}$.

На першому етапі застосування методу нульових розмірностей виберемо три будь-які параметри, для яких значення визначника $\Delta\neq0$. Такими параметрами можуть бути v, μ, ρ.

$$\begin{array}{cccc} & \text{Кг} & \text{м} & \text{сек} \\ \Delta = & \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} & = 1 \neq 0 . \end{array}$$

У цьому випадку кількість лінійно-незалежних критеріїв подібності дорівнює трьом (кількість величин (6) мінус ранг матриці (3)).

На наступному кроці, згідно з достатньою умовою подібності, перший критерій подібності вимагає дотримання геометричної подібності, тобто: $\Pi_1=\dfrac{d}{l}.$

Другий критерій подібності визначається так:

$$\frac{d}{[v]^{\alpha_d}[\mu]^{\beta_d}[\rho]^{\gamma_d}} = \frac{[L]}{([L][T]^{-1})^{\alpha_d}([M][T]^{-1}[L]^{-1})^{\beta_d}([M][L]^{-3})^{\gamma_d}} == [L]^{1-\alpha_d+\beta_d+3\gamma_d}[M]^{-\beta_d-\gamma_d}[T]^{\alpha_d+\beta_d} = 1.$$

Маємо три рівняння та три невідомі

$$-\beta_d - \gamma_d = 0,\ \alpha_d + \beta_d = 0,\ 1 - \alpha_d + \beta_d + 3\gamma_d = 0.$$

Розв'яжемо отриману систему рівнянь і отримаємо, що:

$$\alpha_d = -1,\ \beta_d = 1,\ \gamma_d = -1.$$

Відповідно, другий критерій подібності буде таким $\Pi_2 = \frac{dv\rho}{\mu} = \mathrm{Re}$.

Отриманий критерій подібності Π_2 називають критерієм Рейнольдса.

Третій критерій подібності визначаємо:

$$\frac{\Delta P}{[v]^{\alpha_p}[\mu]^{\beta_p}[\rho]^{\gamma_p}} = \frac{[T]^{-2}[M][L]^{-1}}{([L][T]^{-1})^{\alpha_p}([M][T]^{-1}[L]^{-1})^{\beta_p}([M][L]^{-3})^{\gamma_p}} == [L]^{\beta_p-\alpha_p-1+3\gamma_p}[M]^{1-\beta_p-\gamma_p}[T]^{\alpha_p+\beta_p-2} = 1.$$

Отже, $\beta_p - \alpha_p - 1 + 3\gamma_p = 0$, $1 - \beta_p - \gamma_p = 0$, $\alpha_p + \beta_p - 2 = 0$.

Розв'язавши систему з трьох рівнянь з трьома невідомими, отримаємо:

$$\alpha_p = 2,\ \beta_p = 0,\ \gamma_p = 1.$$

Третій критерій подібності визначається за формулою $\Pi_3 = \frac{\Delta P}{v^2\rho}$ та називається критерієм Ейлера.

Проаналізуємо детальніше число Рейнольдса, яке є мірою турбулентності потоку (напрклад, при Re < 2000 представляє ламінарну течію і при Re > 4000 представляє турбулентну течію) та є функцією масштабу рідинної системи.

Не дивно, що, хоча ми зазвичай спостерігаємо турбулентний і хаотичний потік рідини в більшості макроскопічних систем, для потоків рідин в мікроскопічних системах майже завжди характерні умови ламінарних течій (тобто, оскільки розміри рідинної системи зменшені в l разів, то Re буде також зменшене в l разів, тобто потік рідини стає набагато більш ламінарним в мікромасштабі порівняно з макросистемами). Фактично завдяки такій поведінці існує можливість досягнення повного змішування в мікрорідинних системах, що є дуже перспективним під час вирішення ряду технічних задач.

Наведемо приклад застосування методу на основі правила Фур'є до визначення вихідних теплових пристроїв в мікромасштабі. Отже, візьмемо одновимірне нестаціонарне диференціальне рівняння теплопровідності $c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ і розділимо його праву частину на ліву, при цьому опустивши знак диференціювання. Скоротивши позначення температури та підставивши замість x параметр довжини L, отримаємо безрозмірний комплекс, так зване число Фур'є F_O, який характеризує перехідний процес при перенесенні тепла та визначається з допомогою формули $F_o = \frac{\lambda}{c\rho}\frac{t}{L^2}$, де λ – коефіцієнт теплопровідності; c – коефіцієнт питомої теплоємності; ρ – густина матеріалу; t – параметр часу.

Треба додати, що число Фур'є характеризує проникнення та поширення тепла у випадку перехідного процесу при перенесенні тепла в матеріалі з коефіцієнтом теплопровідності λ, питомою теплоємністю c та густиною ρ.

Отже, якщо вважати, що теплові процеси в макро- і мікропристроях подібні та їх лінійні розміри не менші за один мкм, то, відповідно, мають бути однакові значення критеріїв подібності. У нашому випадку число Фур'є для макросистеми має бути таким, як і для мікросистеми. З вищенаведеного випливає, що із зменшенням параметра довжини у 100 разів перехідний процес перенесення тепла прискорюється в 10 000 разів для постійного числа Фур'є. Тобто швидкодія зростає у 10 000 разів. Отже, отримані результати дають змогу стверджувати, що теплові актюатори в мікросвіті є достатньо швидкодіючими пристроями порівняно з тепловими макропристроями.

3.11. Контрольні запитання

1. Що Ви розумієте під подібністю?
2. Що таке критерій подібності?
3. Які необхідні умови подібності двох систем?
4. Які достатні умови подібності двох систем?
5. Що стверджує Пі - теорема?
6. Які методи для визначення критеріїв подібності Ви знаєте?
7. В чому основний зміст методу Фур'є для визначення критеріїв подібності?
8. В чому основний зміст методу нульових розмірностей для визначення критеріїв подібності?
9. В чому основний зміст методу визначальних рівнянь для визначення критеріїв подібності?
10. У якому випадку можна стверджувати про подібність двох систем?
11. Як визначається кількість лінійно незалежних критеріїв подібності ?
12. Що Ви розумієте під статичною та динамічною подібністю механічних систем?
13. Яка розмірність критерію подібності?
14. Яка різниця між основними одиницями вимірювання та вторинними одиницями вимірювання фізичних величин?

Розділ 4
МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ У ФОРМІ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

4.1. Основні рівняння для моделей на компонентному рівні

Математичні моделі на компонентному рівні проектування для багатьох фізичних процесів описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними (ДРЧП). Важливий клас диференціальних рівнянь з частинними похідними [5] складають лінійні рівняння другого порядку з n незалежними змінними, які в загальному випадку можна записати наступним чином:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u(x) = f(x)\,. \tag{4.1}$$

Найбільш поширеними частковими випадками рівняння (4.1) є: рівняння коливань, рівняння дифузії та стаціонарні рівняння.

Рівняння коливань має вигляд:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = div(p \cdot grad\, u) - qu + f(\vec{x},t)\,, \tag{4.2}$$

де невідома функція $u \equiv u(\vec{x},t)$ залежить від n просторових координат $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ і часу t, коефіцієнти ρ, p, q визначаються властивостями середовища, в якому відбувається коливальний процес, функція $f(\vec{x},t)$ виражає інтенсивність зовнішніх впливів, $grad\, u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, $div(p \cdot grad\, u) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$. Рівняння (4.2) описує такі фізичні процеси як коливання струни, мембрани, тривимірних тіл, електромагнітні коливання і т.д. З рівняння (4.2), як частковий випадок, можна отримати класичне **хвильове рівняння**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) + f(\vec{x},t)\,, \tag{4.3}$$

яке описує процеси поширення звуку та електромагнітних хвиль в однорідному середовищі. У двовимірному випадку хвильове рівняння (4.3) описує малі поперечні коливання мембрани, а в одновимірному – такі фізичні процеси, як поперечні коливання струни та повздовжні коливання пружного стрижня. Ввівши **оператор Лапласа**

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

тоді хвильове рівняння (4.3) можна записати так

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(\vec{x}, t). \tag{4.4}$$

Рівняння дифузії

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = div(p \cdot grad\, u) - qu + f(\vec{x}, t) \tag{4.5}$$

описує процеси поширення тепла або дифузії частинок у деякому середовищі, яке характеризується парметрами ρ, p, q. Як частковий випадок, з рівняння (4.5) можна отримати класичне **рівняння теплопровідності**

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = div(\lambda \cdot grad\, u) + f(\vec{x}, t), \tag{4.6}$$

де c – питома теплоємність, ρ – густина, λ – коефіцієнт теплопровідності середовища, в якому відбувається процес поширення тепла, $f(\vec{x}, t)$ – інтенсивність внутрішніх джерел тепла. Якщо середовище є ізотропним, тобто c, ρ, λ – константи, то з рівняння (4.6) отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f_1, \tag{4.7}$$

де $a^2 = \dfrac{\lambda}{c\rho}$ називається коефіцієнтом температуропровідності, $f_1 = \dfrac{f}{c\rho}$ – густина джерел тепла. Якщо внутрішні джерела тепла відсутні, тобто $f_1 = 0$, то з рівняння (4.7) отримаємо класичне **рівняння Фур'є**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u. \tag{4.8}$$

Стаціонарні рівняння описують встановлені процеси, в яких величини, що характеризують їх не залежать від часу. Тоді рівняння коливань (4.2) та дифузії (4.5) будуть мати вигляд:

$$-div(p \cdot grad\, u) - qu = f(\vec{x}). \tag{4.9}$$

При $p = const$ і $q = 0$ рівняння (4.9) набуває вигляду

$$\Delta u = F, \tag{4.10}$$

і називається **рівнянням Пуассона**, а при $F = 0$ отримуємо частковий випадок рівняння Пуассона, а саме **рівняння Лапласа**

$$\Delta u = 0. \tag{4.11}$$

Встановлені періодичні процеси, тобто, процеси, в яких зовнішні збурення f є періодичними з частотою ω і амплітудою $a^2 f$ і шукана функція u є також періодичною, описуються **рівнянням Гельмгольца**

$$\Delta u + k^2 u = -f(\vec{x}), \tag{4.12}$$

де $k^2 = \dfrac{\omega^2}{a^2}$, а невідома функція u буде трактуватися як амплітуда коливань. Рівняння Гельмгольца описує також процеси розсіювання та дифракції.

Рівняння Лапласа (4.11) на практиці зустрічається дуже часто, тому важливо мати його вигляд у різних системах координат. У сферичній системі координат ($x_1 = r\sin\theta\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\theta\sin\varphi$, $x_3 = r\cos\theta$) рівняння Лапласа набуває вигляду

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0, \tag{4.13}$$

а у циліндричній системі координат $(x_1 = r\cos\varphi, x_2 = r\sin\varphi, x_3 = z)$ – вигляду

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{4.14}$$

Іншими прикладами рівнянь, які відіграють важливу роль у математичному моделюванні різноманітних фізичних процесів та явищ є:

a) **телеграфне рівняння** (описує розподіл електричного струму в провіднику):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u - \beta\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda u + f(\vec{x}, t); \tag{4.15}$$

b) **бігармонійне рівняння** (описує коливання пружних тіл, таких як балка, пластина і т.д.):

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y), \tag{4.16}$$

c) **рівняння на власні значення** (дає змогу визначати резонансні частоти коливань):

$$\Delta u = \lambda u, \quad \lambda > 0. \tag{4.17}$$

4.2. Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними

Класифікація диференціальних рівнянь може здійснюватися за різними ознаками. Класифікація відіграє важливу роль, оскільки для кожного класу рівнянь розроблені відповідна теорія та методи розв'язування. Основними критеріями класифікації ДРЧП є:

1) **Порядок рівняння**. Порядком рівняння є найвищий порядок похідної, що входить в це рівняння. Наприклад,

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ – рівняння 2-го порядку,

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}$ – рівняння 1-го порядку.

Найпоширенішими є ДРЧП 2-го порядку.

2) **Число незалежних змінних**. Незалежними змінними є змінні від яких залежить невідома (шукана) функція. На практиці в ролі незалежних змінних виступають звичайні Декартові координати у просторі та час. Наприклад, диференціальне рівняння (4.16) має дві незалежні змінні x та y, диференціальне рівняння (4.14) – три (r, φ, z).

3) **Лінійність**. Розрізняють лінійні та нелінійні рівняння з частинними похідними. У лінійних рівняннях залежна змінна (функція) та всі її похідні входять лінійно, тобто вони не перемножуються, не підносяться до квадрату, не є аргументами інших функцій і т.д. У протилежному випадку рівняння буде нелінійним. Приклади нелінійних рівнянь наведено нижче:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

або

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + u^2 = 0 .$$

В загальному випадку, лінійним рівнянням другого порядку з двома незалежними змінними називається рівняння такого виду

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G, \tag{4.18}$$

де A, B, C, D, E, F, G - задані функції змінних x та y.

4) **Однорідність.** Диференціальне рівняння називається однорідним, якщо вільний член тотожньо дорівнює нулю в заданій області визначення. У протилежному випадку рівняння називається неоднорідним. Наприклад, рівняння Пуассона – неоднорідне, а рівняння Лапласа –однорідне.

5) **Вид коефіцієнтів**. Якщо коефіцієнти рівняння є сталими величинами, то таке рівняння називається рівнянням з постійними коефіцієнтами, у протилежному випадку – рівнянням зі змінними коефіцієнтами.

Усі лінійні ДРЧП другого порядку відносяться до одного з трьох типів: параболічного, гіперболічного та еліптичного. Рівняння параболічного типу визначаються умовою (в термінах формули (4.18)) $B^2 - 4AC = 0$. Рівняння дифузії (та всі його часткові випадки) має параболічний тип. Рівняння гіперболічного типу описують коливальні процеси і визначаються умовою

$B^2 - 4AC > 0$. Рівняння еліптичного типу описують встановлені процеси і задаються умовою $B^2 - 4AC < 0$. Зокрема, рівняння Пуассона і Лапласа є еліптичними. У випадку змінних коефіцієнтів тип рівняння може змінюватися від точки до точки.

6) **Стаціонарність**. Якщо ДРЧП включає похідну по часу, то таке диференціальне рівняння називається нестаціонарним в іншому випадку – стаціонарним. Приклади стаціонарних ДРЧП є (4.13), (4.14) та (4.16), а приклади нестаціонарних – (4.2) – (4.8).

4.3. Методи розв'язування ДРЧП

Розрізняють десять груп методів розв'язування ДРЧП:

1. **Методи розділення змінних:** у випадку повного розділення змінних, ДРЧП з n незалежними змінними зводиться до n звичайних диференціальних рівнянь. При частковому розділенні змінних одне ДРЧП зводиться до декількох диференціального рівняння в частинних похідних з меншим числом незалежних змінних [5].
2. **Методи інтегральних перетворень:** дає змогу звести ДРЧП з n незалежними змінними до ДРЧП з $(n-1)$ незалежними змінними, тобто зменшити кількість незалежних змінних.
3. **Методи розв'язування координат:** шляхом певного перетворення координат ДРЧП зводиться або до звичайного диференціального рівняння, або до більш простого диференціального рівняння в частинних похідних.
4. **Перетворення залежної змінної:** вихідне ДРЧП перетворюється до такого ДРЧП від іншої невідомої функції, яке розв'язується легше.
5. **Чисельні методи:** полягають у заміні диференціальних рівнянь їх дискретними різницевими аналогами або апроксимації шуканої функції інтерполяційними поліномами. У результаті розв'язування ДРЧП зводиться до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Найбільш поширеними чисельними методами є: метод скінчених різниць, метод скінчених елементів та метод граничних елементів [5 - 16].
6. **Методи теорії збурень:** полягають у лінеаризації нелінійних рівнянь. Вихідна нелінійна задача зводиться до послідовності лінійних.
7. **Методи функцій Гріна** [16, 23]: початкові та граничні умови заміняються системою елементарних джерел (функцій Гріна) і задача розв'язується для кожного випадку. Повний розв'язок вихідної задачі

отримують шляхом сумування розв'язків, отриманих для елементарних джерел.

8. **Методи інтегральних рівнянь**: диференціальне рівняння в частинних похідних зводиться до інтегрального рівняння, тобто рівняння, в якому невідома функція знаходиться під знаком інтегралу.

9. **Варіаційні методи** [22]: замість ДРЧП розв'язується деяка задача мінімізації функціоналу. Виявляється, що функція, яка є мінімумом деякого функціоналу, є також і розв'язком вихідного диференціального рівняння в частинних похідних. Варіаційні методи можна застосовувати лише тоді, коли існує відповідний функціонал, який в таких випадках є математичним записом фундаментальних законів природи, таких як закон збереження енергії.

10. **Методи розкладу за власними функціями:** розв'язок ДРЧП шукається у вигляді ряду за власними функціями. Ці власні функції є розв'язком так званої задачі на власні значення, що відповідає вихідній задачі для диференціального рівняння в частинних похідних.

4.4. Початкові та крайові умови. Крайові задачі

Для того, щоб повністю описати той чи інший фізичний процес не достатньо мати лише рівняння, яке описує цей процес. Необхідно задати також початковий стан процесу, який описується початковими умовами та режим процесу на границі області моделювання, в якій протікає цей процес, що описується крайовими умовами. Математично це пов'язано з тим, що диференціальні рівняння мають безліч розв'язків. Дійсно, навіть для звичайного диференціального рівняння n-го порядку загальний розв'язок залежить від n довільних сталих. Для рівнянь з частковими похідними, загальний розв'язок залежить, в загальному випадку, від довільних функцій. Тому, для того, щоб виділити потрібний розв'язок з множини можливих розв'язків, який описує заданий реальний фізичний процес, необхідно задати додаткові умови, а саме початкові та крайові умови. Часто початкові та крайові умови об'єднують одним поняттям, а саме крайовими умовами. Тоді відповідна задача, тобто *задача знаходження розв'язку заданого диференціального рівняння, який задовольняє заданим крайовим умовам*, називається **крайовою задачею**.

Важливим питанням є скільки початкових та крайових умов потрібно накласти, щоб отримати єдиний розв'язок крайової задачі? Якщо в диференціальне рівняння входить похідна по часу n-го порядку, то початкових умов має бути n і задаються вони на шукану функцію та її похідні по часу до $n-1$ порядку включно. Найвищий порядок похідної за просторовими координатами визначає кількість крайових умов, які потрібно задати в кожній точці границі. Так, якщо цей порядок рівний $2n$, то в кожній точці границі необхідно задати n крайових умов.

Крайовою умовою *будемо називати значення шуканої функції на границі області моделювання*. Розрізняють три типи крайових умов:

1) крайова умова I роду:

$$u|_{\Gamma} = f(\bar{x}), \tag{4.19}$$

2) крайова умова II роду:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = f(\bar{x}), \tag{4.20}$$

3) крайова умова III роду:

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u\right)\right|_{\Gamma} = f(\bar{x}), \tag{4.21}$$

де $f(\bar{x})$ - деяка задана функція.

Необхідно зауважити, що задана функція може бути рівною константі.

Узагальнюючи, граничні умови (4.19 – 4.21) можна записати наступним чином:

$$\left(\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{\gamma} = v \tag{4.22}$$

де α, β і v - задані кусково-неперервні функції. Тоді умова (4.19) слідує з (4.22) як частковий випадок при $\alpha = 1, \beta = 0,$ умова (4.20) – при $\alpha = 0, \beta = 1$ і умова (4.21) – при $\beta = 1, \alpha \geq 0$.

Необхідно зауважити, що при аналізі теплових процесів використовується ще четверта та п’ята крайові умови, хоча їх можна побудувати на основі існуючих (4.19 – 4.22).

Усі рівняння в часткових похідних можна розділити на стаціонарні та нестаціонарні. Диференціальне рівняння в часткових похідних, розв’язок якого змінюється в часі, називається нестаціонарним.

На відміну від розв’язку стаціонарних задач (РЧП та краєві умови) розв’язок нестаціонарних задач потребує додаткової компоненти, а саме початкової умови.

Початковою умовою *називають значення функції в початковий момент часу*, тобто при $t = t_0$, яку можна записати:

$$u(x, y, z, t = t_0) = f(x, y, z),$$

а у випадку, коли в РЧП присутня друга похідна за часом, то необхідно додати ще одну початкову умову:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(x, y, z), \quad \text{при } t = t_0 .$$

4.5. Класифікація та постановки крайових задач

Розрізняють три основних типи крайових задач для диференціальних рівнянь:

I. **Задача Коші**: ставиться для рівнянь гіперболічного та параболічного типів шляхом завдання початкових умов, крайові умови відсутні;

II. **Крайова задача для рівнянь еліптичного типу**: задаються крайові умови, початкові умови відсутні;

III. **Змішана задача (початково-крайова задача)**: ставиться для рівнянь гіперболічного та параболічного типів шляхом завдання як початкових, так і крайові умов.

Для рівняння коливань задача Коші формулюється наступним чином: знайти $u(\bar{x},t) \in C^2(t>0) \cap C^1(t \geq 0)$, що задовольняє рівняння

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = div(p \cdot grad\, u) - qu + f(\bar{x},t) \tag{4.23}$$

та початкові умови:

$$u|_{t=0} = u_0(\bar{x}),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(\bar{x}) . \tag{4.24}$$

Для рівняння дифузії задача Коші формулюється так: знайти $u(\bar{x},t) \in C^2(t>0) \cap C(t \geq 0)$, що задовольняє рівняння

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = div(p \cdot grad\, u) - qu + f(\bar{x},t) \tag{4.25}$$

та початкову умову:

$$u|_{t=0} = u_0(\bar{x}). \tag{4.26}$$

Крайова задача для еліптичного рівняння полягає в знаходженні функції $u(\bar{x}) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, що задовольняє рівняння

$$-div(p \cdot grad\, u) + qu = f(\bar{x}) \tag{4.27}$$

та крайові умові (4.22).

Для рівнянь Лапласа і Пуассона крайова задача з крайові умовою I роду називається **задачею Діріхле**, з крайові умовою II роду – **задачею Неймана**.

Крайові задачі для рівнянь еліптичного типу можуть бути також зовнішніми та внутрішніми.

Змішана задача для рівнянь гіперболічного типу ставиться так: знайти функцію $u(\bar{x},t) \in C^2(\Omega \times [0;T]) \cap C^1(\overline{\Omega} \times [0;T])$, що задовольняє рівняння коливань (4.23), початкові умови (4.24) та крайову умову (4.22), причому мають виконуватися умови узгодженості:

$$\left. \left(\alpha u_0 + \beta \frac{\partial u_0}{\partial n} \right) \right|_{\gamma} = v|_{t=0},$$

$$\left. \left(\alpha u_1 + \beta \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) \right|_{\gamma} = \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0}. \tag{4.28}$$

І нарешті, змішана задача для рівняння дифузії (4.25) полягає в знаходженні функції $u(\bar{x},t) \in C^2(\Omega \times [0;T]) \cap C^1(\overline{\Omega} \times [0;T])$, що задовольняє рівняння (4.25), початкову умови (4.26) та крайову умову (4.22).

4.6. Поняття про коректність постановок крайових задач

Оскільки крайові задачі є математичними моделями реальних фізичних процесів, то їх постановки повинні задовольняти наступним, цілком природнім, вимогам:

1) розв'язок крайової задачі має існувати в деякому класі функцій M_1;

2) розв'язок крайової задачі повинен бути єдиним в деякому класі функцій M_2;

3) розв'язок крайової задачі повинен неперервно залежати від даних задачі (початкових та граничних умов, вільного члена, коефіцієнтів рівняння).

Неперервна залежність розв'язку крайової задачі u від деякого даного цієї задачі $\tilde{u}$ означає наступне: нехай послідовність даних $\tilde{u}_k$ збігається до $\tilde{u}$ при $k \to \infty$ і u_k – відповідні розв'язки задачі; тоді $u_k \to u$ при $k \to \infty$. Наприклад, якщо вихідну задачу можна представити у вигляді операторного рівняння $Lu = f$, де L – лінійний оператор, то неперервна залежність розв'язку u від вільного члена f буде забезпечена, тоді коли обернений оператор L^{-1} існує і він обмежений.

Вимога неперервної залежності розв'язку крайової задачі обумовлена тим, що фізичні дані, як правило, визначаються з експерименту наближено. Тому потрібно гарантувати, що розв'язок задачі в рамках вибраної математичної моделі не буде суттєво залежати від похибок вимірювання.

Задача, розв’язок якої задовольняє перераховані вище вимоги (1 – 3) називається коректно поставленою (за Адамаром [24]), а множина функцій $M_1 \cap M_2$ – класом коректності. Задача, розв’язок якої не задовольняє хоча б одній з вимог (1 – 3) називається некоректно поставленою.

Вперше три умови **коректності крайових задач математичної фізики** сформулювали Д. Гільберт і Р. Курант [25]: існування, однозначна визначеність і неперервна залежність рішення від даних задачі. Відносно останнього сказано: “… воно має основне значення і зовсім не є тривіальним. … Математична задача тільки в тому випадку може вважатися адекватною для опису реальних явищ, якщо зміні запропонованих даних в достатньо тісних границях відповідає така ж мала, т.б. обмежена наперед заданими границями зміна рішення”.

4.7. Поняття про класичні та узагальнені розв’язки крайових задач

Розглянуті крайові задачі характеризуються тим, що їх розв’язки повинні бути достатньо гладкими і задовольняти рівняння в кожній точці області завдання цього рівняння. Такі розв’язки прийнято називати класичними, а постановку відповідної крайової задачі – класичною постановкою. Класичні постановки накладають досить жорсткі вимоги стосовно гладкості даних та розв’язків, наприклад, для розглянутих крайових задач, класичний розв’язок повинен бути двічі неперервно диференційованих в області завдання. Однак, на практиці для цілого ряду важливих випадків вхідні дані можуть мати особливості або як прийнято казати бути сингулярними. Тому в таких випадках класичних постановок задач може бути недостатньо. Для того, щоб здійснити постановки таких задач доводиться відмовлятися (частково або повністю) від вимог гладкості розв’язку в області. Дана проблема вирішується шляхом введення поняття так званих узагальнених розв’язків, які базуються на понятті узагальнених функцій.

Узагальнена функція є узагальненням класичного поняття функції. Це узагальнення, з однієї сторони, дає можливість виразити в математичній формі такі ідеалізовані поняття, як густина матеріальної точки, густина заряду, інтенсивність миттєвого точкового джерела і т.д. З іншого боку, в понятті узагальненої функції знаходить відображення той факт, що реально неможливо, наприклад, виміряти густину речовини в точці, а можна виміряти лише середню густину в достатньо малому околі цієї точки. Грубо узагальнюючи, можна сказати, що узагальнена функція визначається своїми “середніми значеннями” в околі точки.

Математично строго узагальнена функція визначається як довільний лінійний неперервний функціонал на деякому просторі основних функцій, тобто узагальнена функція ставить у відповідність деякій “класичній” функції, в загальному випадку, комплексне число. Прикладом узагальненої функції може бути добре відома δ - функція Дірака.

Наведемо приклад постановки крайової задачі, що описує теплові процеси. Отже, визначити диференціальне рівняння для обчислення температурного поля та поставити початкову і крайові умови для поданої нижче задачі (див. рис. 4.1). Задано двовимірну область Ω (АВСД), температуру на границях АВ, АД та ДС (границя ВС є теплоізольованою), джерело тепла розміщене в центрі області і підтримується при постійній температурі 100 °С, в усіх внутрішніх точках області та на границі ВС в початковий момент часу температура рівна нулю ($\alpha = 1$), крок рівномірний, ($l = 1$, $m = 1$).

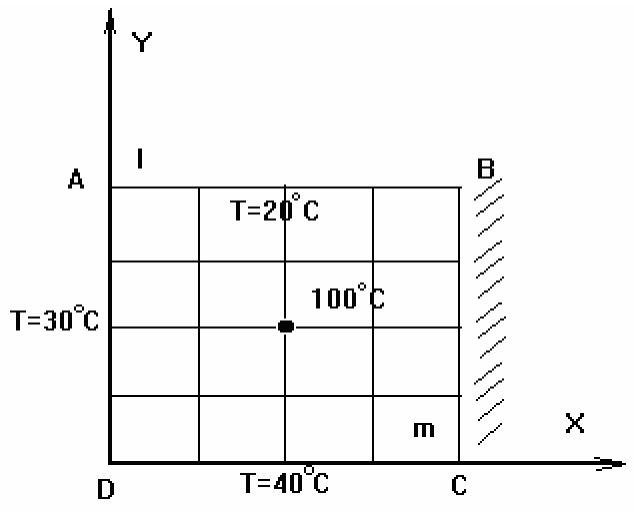

Рис.4.1. Приклад області моделюванн крайової задачі

Розв’язання задачі. Область моделювання наведено на рис.4.1. Це є двовимірна область у формі прямокутника ABCD, що залежить від двох просторових координат, а саме: x і y. Розподіл температури в області описується диференціальним рівнянням теплопровідності (Фур’є):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \qquad (4.29)$$

де T - температура; t - час; x і y - просторові координати, а α - коефіцієнт температуропровідності.

Для завершення математичної формалізаціїт задачі до рівняння (4.29) необхідно додати початкову та крайові умови.

Початкова умова має наступну форму:

$$T(x, y, t = 0) = 0, \quad (4.30)$$

а краєві умови:

$$T(x, l) = 20\,°\text{C}, \qquad \text{де } 0 \le x \le m; \quad (4.31)$$

$$T(0, y) = 30\,°\text{C}, \qquad \text{де } 0 \le y \le l;$$

$$T(x, 0) = 40\,°\text{C}, \qquad \text{де } 0 \le x \le m;$$

$$T(l/2, m/2) = 100\,°\text{C}.$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \qquad \text{при } x = m,\ 0 \le y \le l.$$

Сформульована крайова задача (4.29 – 4.31) дає змогу провести аналіз перехідного процесу. При нехтуванні перехідним процесом можна скористатися стаціонарним рівнянням наступного виду $\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ з крайовими умовами (4.31).

4.8. Контрольні запитання

1. Які ДРЧП використовуються на компонентному рівні проектування?
2. Як визначається порядок ДРЧП?
3. Яке ДРЧП називається нелінійним?
4. Яке ДРЧП називається однорідним?
5. Які ДРЧП відносяться до рівнянь еліптичного типу?
6. Яке ДРЧП називається нестаціонарними?
7. Які види крайових умов Ви знаєте?
8. Що таке крайова умава?
9. Що таке початкова умава?
10. Яка крайова задача називається коректно поставленою?
11. Які методи розв’язання ДРЧП Ви знаєте?
12. Які постановки крайових задач Ви знаєте?
13. Які ДРЧП відносяться до рівнянь параболічного типу?
14. Які ДРЧП відносяться до рівнянь гіперболічного типу?
15. Який порядок ДРЧП (4.29)?
16. Диференціальне рівняння (4.29) стаціонарне чи нестаціонарне?

Список літератури

1. Норенков И. П. Основы автоматизированного проектирования : учеб. для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. / И. П. Норенков. – М. : Изд. МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 336 с.
2. Норенков И. П. Системы автоматизированного проектирования : [учеб. пособие для вузов] : В 9 - ти кн. Кн.1. Принципы построения и структура / И. П. Норенков. – М. : Высш. шк., 1986. – 127 с.
3. Петренко А. И. Основы автоматизации проектирования / А. И. Петренко. – К. : Техніка, 1982. – 295 с.
4. Корячко В. П., Курейчик В.М., Норенков И. П. Теоретические основы САПР : учеб. для вузов. / В. П. Корячко, В. М. Курейчик, И. П. Норенков. – М. : Энергоатомиздат, 1987. – 400 с.
5. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1966 – 724 с.
6. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1983. - 616 с.
7. Самарский А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 1989. – 432 с.
8. Годунов С. К. Разностные схемы / С. К. Годунов, В. С. Рябенький. – М. : Наука, 1973. – 400 с.
9. Молчанов И. Н. Машинные методы решения прикладных задач. Дифференциальные уравнения / И. Н. Молчанов. – К. : Наукова думка, 1988. – 344 с.
10. Калиткин Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
11. Сегерлинд А. Применение метода конечных элементов / А. Сегерлинд. – М. : Мир, 1979. – 392 с.
12. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. Де Фриз. – М. : Мир, 1981. – 304 с.
13. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. : Пер.с англ. – М. : Мир, 1975. – 572 с.
14. Соболь И. М. Метод Монте - Карло. / И. М. Соболь – М. : Наука. Гос. изд. физ.-мат. лит., 1985. – 80 с.
15. Ермаков С. М. Метод Монте – Карло и смежные вопросы. / С. М. Ермаков – М. : Наука. Глав. ред. физ. - мат. лит., 1975. – 472 с.
16. Волынский Б. А. Модели для решения краевых задач / Б. А. Волынский, В. Е. Бухман. – М. : Гос. изд. физ.-мат. лит., 1960 – 452 с.

17. Алабужев П. М. Теория подобия и размерностей. Моделирование / П. М. Алабужев и др. – М. : Высш. шк., 1968. – 208 с.
18. Веников В. А. Теория подобия и моделирования / В. А. Веников. – М. : Высш. шк., 1976. – 479 с.
19. Гухман А. А. Введение в теорию подобия / А. А. Гухман. – М. : Высш. шк., 1973. – 296 с.
20. Гухман А. А. Применение теории подобия к исследованию процессов тепло-массообмена / А. А. Гухман. – М. : Высш. шк., 1974. – 328 с.
21. Толковый словарь по вычислительным системам / Под. ред. В. Иллингуорта и др. : Пер. с англ. А. К. Белоцкого и др. ; Под. ред. Е. К. Масловского. – М. : Машиностроение, 1991. – 560 с.
22. Джеффирс Г. Методи математической физики. Вип. 2 / Г. Джеффирс, Б. Свирлс. – М. : Мир, 1970. – 352 с.
23. Краснов М. Л. Интегральные уравнения / М. Л. Краснов. – М. : Наука, 1975. – 303 с.
24. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – М. : Наука, 1978. – 351 с.
25. Проблемы Гильберта / Под ред. П.С.Александрова. – М. : Наука, 1969. – 239 с.